

د دفرنځيال - او انتيگرا ل شميرنو
تمرينونه د اوبيونو (حلونو) سره

ليکونکي:
ډاکټر ماخان (ميري) شينواري

Ketabton.com

2016

سريزه:

گرانو لوستونکو.
له ټولو د مخه مې دا
کړي، چې کله کله يې گڼون هم ښه نه دی ورکړ شوی، خو دا کومې ټونځې ځکه نه پيښوي،
چې د تمرینونو اوبيونو کې هم هغه پوښتنه باید تکرار راشي.
ما غوښتل، چې د پولې برخې د پاره هم ځنې پوښتنې د اوبيونو سره راوړم، خو پرې ونځه
تونیدم.

نيوليک

- ۱ - د دفېرنشل شميرنې تمرينونه..... ۳
- ۲ - د انټيگراشميرنې تمرينونه..... ۱۸
- ۳ - د دف. تمرينونو اوبيونې..... ۳۲
- ۴ - د انت. تمرينونو اوبيونه..... ۴۶

رابيليدنه يا مشتق

گرانو هيوادوالو !

په دې لاندې کوچنۍ ليکنه کې تاسو ته د دفترنشل او انټيگرا ل شميرنو اصلي تمرينونه له ٦٦ تمرين څخه پيل کيږي:

٦٦ (١) کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) $P(3,2)$, $Q(5,4)$ b) $P(2,4)$, $Q(3,1)$

٦٧ (٢) د $x = x_0$ په ځای کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = 0.5x^2$, $x_0 = 3$

٦٨ (٣) د کمښتویش (د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي تر رنځ فویر څه دی؟

٦٩ (٤) د یوه تابع د سکانت () لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگېدو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

٧٠ (٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیدا کړئ.

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = x^6$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ f) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

٧١ (٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیدا کړئ.

a) $f(x) = 0.2x^5 - 3$ b) $f(x) = 2x^4 + 1$

c) $f(x) = \frac{4}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{3}{x^3} + 2$

e) $f(x) = 6\sqrt{x}$ f) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - 5$

٧٢ (٧) د تابع د گراف په مرسته وښايئ، چې ټول $g(x) + c$ ترمونه همغه مشتق لري. یو دونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

٧٣ (٨) وښايئ، چې د $a.g(x)$ د مشتق سره د a ضریب (ځله وونی) ساتلی پاتې کيږي.

٧٤ (٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښايئ

a) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$ b) $f(x) = x - \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$ d) $f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

٧٥ (١٠) د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= x^3(x^2 - 2x + 1) & b) f(x) &= (2x^2 + 1)(x - 1) \\ c) f(x) &= (x^2 - 5)(2x^3 + x^2 + x) & d) f(x) &= (4x^2 - x + 4)(3x + 2) \end{aligned}$$

۷۶ (۱۱) د f تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \frac{x^3 - 1}{4 - x^2} & b) f(x) &= \frac{2x^2 + x + 3}{x + 1} \\ c) f(x) &= \frac{4 - x - x^3}{2x^2 + 3} & d) f(x) &= \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} \end{aligned}$$

۷۷ (۱۲) د ویش قانون له مخې په څټ ارزښت (پر عکس ارزښت) وټاکئ.

لاندې کي: د سره

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

د $g(x) \neq 0$ سره

۷۸ (۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= (4x^4 - x)^2 & b) f(x) &= (3x^2 + 4x - 5)^2 \\ c) f(x) &= (2x - 7)^3 & d) f(x) &= (5 - 3x^3)^4 \end{aligned}$$

۷۹ (۱۴) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \frac{1}{(2x^2 + x)^3} & b) f(x) &= \frac{1}{(x - 5)^4} \\ c) f(x) &= (1 + \sqrt{x})^2 & d) f(x) &= \sqrt{1 - x^3} \end{aligned}$$

۸۰ (۱۵) د لاندې توابعو درې واړه مشتق ونیسئ.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= x^3 - 2x^2 + 1 & b) f(x) &= 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 5 \\ c) f(x) &= \frac{3x - 4}{x} & d) f(x) &= \frac{x^2 - 1}{2 - x} \end{aligned}$$

۸۱ (۱۶) د يو n -م درجې تابع بايد څو واړه مشتق ونيول شي چې يوه ثابته تری لاس ته راشي.

۸۲ (۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \sin 3x & b) f(x) &= \sin x \cdot \cos x & c) f(x) &= \sin^2 x \\ d) f(x) &= \tan x + 2 \sin 2x & e) f(x) &= \sin x^2 & f) f(x) &= \sin \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

۸۳ (۱۸) د $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښايست يا وټاکئ.

۸۴ (۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون وښايست.

۸۵ (۲۰) وښايست چې د $f(x) = \tan x$ لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

۸۶ (۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پيداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

۸۷ (۲۲) ولی د ساین تابع او د کوساین تابع په خوبه زیات مشتقور دي.

۸۸ (۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1} & b) f(x) = e^{x^2+2x-1} & c) f(x) = (x-1) \cdot e^x \\ d) f(x) = \sqrt{e^x} & e) f(x) = x^n \cdot e^e & f) f(x) = e^{kx} \\ g) f(x) = 2^{\frac{1}{2x}} & h) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} & i) f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}} \\ k) f(x) = \sqrt{e^x + 1} & l) f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} & m) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

بېلگه:

د $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x \quad (x > 0)$ مشتق دي پيدا شي.

د ضرب قانون:

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + 2 \quad u'(x) = 2x \quad \text{سره} \quad v(x) = \lg x \quad v'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 10} \quad \text{سره} \\ f'(x) &= 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x}) \end{aligned}$$

۸۹ (۳۴) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ يا پيدا کړئ.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \ln \sqrt{x} & b) f(x) = \ln(x^2 - 4) & c) f(x) = \ln \frac{2}{x^3} \\ d) f(x) = \ln \frac{x+1}{x} & e) f(x) = x \cdot \log_2 x^2 & f) f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log \\ g) f(x) = \frac{\ln}{x+2} & h) f(x) = \frac{x^4}{\ln x} & \end{array}$$

۹۰ (۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لويه تعريف ورشو (ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق يې وټاکئ.

د تعريف سټ (ډېری) هغه ورشو (ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقور دي.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \sqrt{x+3} & b) f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)} \\ c) f(x) = x\sqrt{x} & d) f(x) = \sqrt{x^2+2} \end{array}$$

۹۱ (۳۶) ولی باید د ټيک شمېرني لپاره لوگاريتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه ريښه توابعو ته؟

۹۲ (۳۷) ۹۰ – مه پوښتنه د لوگاريتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$$a) f(x) = \ln(x^4 - 1) \quad b) f(x) = \ln(2x + 4)$$

۹۳ (۳۸) – د لاندې توابعو لومړی مشتق پيدا کړئ.

- a) $f(x) = \frac{2}{5}x^{10} - \frac{1}{5}x^5$ b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 7x + 8$
- c) $f(x) = 5x^8 - 3x^6 + \frac{10}{x^3} - \frac{8}{x^7}$ d) $f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$
- e) $f(x) = \cos x - 2x \sin x$ f) $f(x) = \sin^3 x$
- g) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$ h) $f(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$
- i) $f(x) = \frac{3e^x + 1}{2e^x - 1}$ j) $f(x) = \frac{2e^x(x^2 - 3)}{x}$
- k) $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln x^2$ l) $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1 - x}$
- m) $f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$ n) $f(x) = 3x^2 \cdot \lg x$
- o) $f(x) = \ln(\sin x)$ p) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$
- q) $f(x) = \sqrt[n]{ax + b}$ r) $f(x) = (x^2 + 3)e^{-2x}$

۹۴ (۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

- a) $f(x) = \sin^n$ b) $f(x) = (\ln x)^n$
- c) $f(x) = s + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^n$

۹۵ (۴۰) - د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

- a) $f(x) = e^{x^2}$ b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
- c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

۹۶ (۴۱) - په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

۹۷ (۴۲) -

الف: د کوم f تابع لپاره $f'(x) = 2f(x)$ دی؟

ب: د کوم f تابع لپاره $f'(x) = -f(x)$ دی؟

۹۸ (۴۳) - د $f(x) = \sin x$ مخوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

۹۹ (۴۴) - د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

- a) $f(x) = e^{ax}$ b) $f(x) = \ln(x+1)$

۱۰۰ (۴۵) - د لاندې توابعو صفر ځایونه وشمېرئ.

$$\begin{aligned}
 a) f(x) &= x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3 & b) f(x) &= x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \\
 c) f(x) &= x^3 - 6x^2 + 8x & d) f(x) &= x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} \\
 e) f(x) &= x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 & f) f(x) &= x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100
 \end{aligned}$$

(٤٦) - د دریمې درجې تام راشنل گراف د x -محور د $x_2 = 0$, $x_1 = -2$ او $x_3 = 4$ په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې گراف د $P(2, -8)$ ټکي څخه هم تېر شي؟
 ١٠٢ (٤٧) - د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x -محور د $x_1 = 0, 5$ او $x_2 = 3$ په ټکو کې غوڅوي.

د تابع برابرېون څنگه دی، که برسېره پردې گراف د y -محور د $P(0, 9)$ په ټکي کې هم لمس کړي.

١٠٣ (٤٨) - د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع گراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له

$P(\frac{1}{2}, -\frac{15}{8})$ ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنگه دي، که گراف د x -محور هم د $x_1 = -1$ سره لمس کړي او په $x_2 = 2$ کې غوڅ کړي.
 ١٠٤ (٤٩) د لاندې توابعو صفر ځایونه پیدا کړئ.

$$\begin{aligned}
 a) f(x) &= \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4} & b) f(x) &= \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x} \\
 c) f(x) &= \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5} & d) f(x) &= \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}
 \end{aligned}$$

١٠٥ (٥٠) : د یوه مات راشنل f تابع د $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$ سره ثابتې a, b, c او

پیدا کړئ، که د $(1:2)$ ، $x_2 = -2$ او $x_1 = -2$ او سره صفر ځایونه پراته وي او تابع په $x = 0$ کې یو تشخای ولري.

١٠٦ (٥١) : د fa تابع صفر ځایونه پیدا کړئ د $f_a(x) = \frac{a^3x^3 - 8}{ax}$ او $a > 0$ سره چې د a په

واک کې وي یا تابع وي. د a د کوم ارزښت لپاره په $x_1 = 0, 5$ کې صفر ځای لري.

١٠٧ (٥٢) : مات یا کسري راشنل f تابع په $x_1 = 1$ کې د $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}$ سره

درې ځله صفر ځای لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وڅېړئ چې په همدې څلورمه کې صفر ځای کې ځغلي او که صفر ځای څلورمه بدلوي.

١٠٨ (٥٣) : د لاندې توابع صفر ځایونه وشمېرئ.

$$\begin{aligned}
 a) f(x) &= (x^2 - 1) \cdot e^{-x} & b) f(x) &= \frac{x}{4} \cdot \sqrt{6 - x} \\
 c) f(x) &= x \cdot \ln(x + 2) & d) f(x) &= (x^2 - 2) \cdot \ln x \\
 e) f(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} & f) f(x) &= \frac{3x}{\sqrt{2+x^2}}
 \end{aligned}$$

۱۰۹ (۵۴): دا سي يو ترم وټاکي، کوم چې د لاندې پريوديکي يا تل بېرته راگرځېدونې توابعو
صفر ځايونه ورکوي.

د شمېرنې له لارې صفر ځايونه ونوموي، چې په انټروال $[-2\pi \leq x \leq 2\pi]$ کې پراته وي.

$$a) f(x) = \frac{1}{2} \sin 3x$$

$$b) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) f(x) = 1 - \sin^2 x$$

$$d) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

۱۱۰ (۵۵): ولې لاندې توابع صفر ځايونه نه لري؟

$$a) f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

$$d) f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۱۱۱ (۵۶): ولې کېدې شي چې يو تابع ډېر صفر ځايونه ولري، مگر د y - محور سره يواځې
يو صفر ځاي ولري؟

۱۱۲ (۵۷): د صفر ځايونو د تعداد په هکله څه ويلاي شئ، که د يو f تابع لپاره په تعريفست (-
ډېرې) کې يو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

۱۱۳ (۵۸): د y - محور سره د لاندې توابعو غوڅتکي وشمېرئ.

$$a) f(x) = x^3 + 2x - 1$$

$$b) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$$

$$c) f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2}$$

$$d) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$e) f(x) = (x-2) \cdot e^{x-1}$$

$$f) f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

۱۱۴ (۵۹): د يوه تام راشنل تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ د $a_0 \neq 0$ سره
کېدې شي د y - محور غوڅتکي د ساده لوستلو له لارې وټاکل شي.
په دې هکله دلایل راوړئ.

۱۱۵ (۶۰): د $x_1=1$ او $x_2=2$ لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگېدنه د
سره $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$.

۱۱۶ (۶۱): په صفر ځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ ۱ تابع کومه جگېدنه لري.

۱۱۷ (۶۲): د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ گراف په کومو ټکو کې $f'(x) = 1$
جگېدنه لري؟

۱۱۸ (۶۳): د گراف په کومو ځايونو کې پروت تانجنټ لري؟

بيلگه:

تابع ارزښت اود گراف په $x_0 = -1$ ځاي کې د جگړنده غواړو پياکړو.

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$$

$$f(-1) = \frac{1 - 8 + 16}{-1 - 1} = -4,5$$

تابع ارزښت:

د مات راشنل تابع ۱. مشتق د وېش قانون له مخې ټاکل کيږي.

$$f'(x) = \frac{(4x^3 - 16x)(x - 1) - (x^4 - 8x^2 + 16) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{3x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 16x - 16}{(x - 1)^2}$$

جگوالی:

$$f'(-1) = \frac{3 + 4 - 8 - 16 - 16}{4} = -8,25$$

۱۱۹ (۶۴): د لاندې توابعو ارزښت او جگړنده د $x = x_0$ په ځاي کې وشميرئ.

a) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x}$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x^2}$, $x_0 = -3$

۱۲۰ (۶۵): په کومو ټکو کې لاندې توابع [گوالی m لري؟

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $m = 2$ b) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2}$, $m = -5$

۱۲۱ (۶۶): د لاندې توابعو تبع ارزښت او جگوالی (ميلان) د x_0 په ځاي کې پيدا کړئ.

a) $f(x) = x \cdot \ln x$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = \sin x^2$, $x_0 = \sqrt{\pi}$

۱۲۲ (۶۷): په کومو ځايونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

۱۲۳ (۶۸): د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x) = (x + a) \cdot e^x$ د گراف د $x_0 = 0$ په ځاي کې ۲ جگوالی لري؟

۱۲۴ (۶۹): د لاندې توابعو ټول ځاييزي (لوکال) خوراجگ ټکي وښايست.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$
 c) $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 7$ d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$
 e) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$ f) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 6x^2 - 2$

۱۲۵ (۷۰): په وضعيه قيمت سيستم (پروت ولاړ سيستم) د لاندې توابعو ټول خورا جگ ټکي وښايست:

که د f تابع د x_0 په ځاي کې يو نسبي خورا جگ ټکی پروت وي، نو د مشتق تابع f^1 گراف د x_0 په ځاي کې صفر ځاي لري.

د دې لپاره د f او د f^1 گراف په همغه وضعيه قيمت سيستم کې رسم کړئ.

a) $f(x) = x^3 - 3x$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

۱۲۶ (۷۱): د n -مې درجې یو تام راشنل تابع خورا زیات څومره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه لرونکي دي؟

۱۲۷ (۷۲) ولې د جگتکي لپاره شرایط $f''(x) < 0$ اړین نه دي؟

۱۲۸ (۷۳) د لاندې توابعو لوکال (ځایز) انحرافي (افراطي) ځایونه وټاکئ.

$$a) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1 \quad b) f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 1$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x \quad d) f(x) = x^4 - 4$$

۱۲۹ (۷۴): د لاندې توابعو ټول لوکال انحرافي ټکي پیداکړئ.

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5} \quad b) f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 2} \quad d) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

د نه راشنل توابعو افراطي ځایونه

بیلگه:

د ټول f اکسپوننشل توابعو د $f(x) = x^2 e^x$ سره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه دي پیداشي.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(2 + x) \cdot e^x$	۱. مشتق
$f''(x) = (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x = (2 + 4x + x^2) \cdot e^x$	۲. مشتق

اړین شرایط

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 + x) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

پوره کېدونکي شرایط

$$\text{او } e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \text{ له } f''(-2) = (2 - 8 + 4) \cdot e^{-2} = -2 \cdot e^{-2} < 0$$

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 = 2 > 0 \quad f''(0) = 2 \cdot e^0 = 2 > 0 \text{ امله.}$$

د تابع ارزښتونه

$$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0.54, \quad f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0.54, \quad f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

پایله:

تابع $(-2 | 0.54)$ جگتکي او $T(0|0)$ ټیټتکي لري.

۱۳۰ (۷۵): د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیداکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = e^{-4x^2} & b) f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x \\ c) f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & d) f(x) = \ln(x^2 + 1) \end{array}$$

۱۳۱ (۷۶): د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انټروال کې ولټول شي.
 $-2\pi \leq 2\pi$.

$$a) f(x) = \sin^2 x \quad b) f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

۱۳۲ (۷۷): لاندې توابعو ټول لوکال او گلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \sqrt{x^2 + x} & b) f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \\ c) f(x) = x - \sqrt{x} & d) f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2} \end{array}$$

۱۳۳ (۷۸): لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسي ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$$a) f(x) = |x| + x^2 \quad b) f(x) = |x^2 + 2x - 8|$$

د مات کسري توابعو د سره د انعطاف ټکي (اوړونټکي) بېلگه:

د f تابع د $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$ سره د انعطاف ټکي پیداکونه
د مشتق جوړښت د ویش د قاعدې سره

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x - 2) \cdot 2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{(2x - 1)(x - 1) - 2(x^2 - x - 2)}{(x - 1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - 2x^2 + 2x + 4}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{5 - x}{(x - 1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x - 1)^3 - (5 - x) \cdot 3 \cdot (x - 1)^2}{(x - 1)^6} = \frac{-1(x - 1) - 3(5 - x)}{(x - 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x - 14}{(x - 1)^4}$$

د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه: $f''(x) = 0$ $f''(x) = 0$

$$\frac{2x - 14}{(x - 1)^4} = 0 \Rightarrow 2x - 14 = 0 \Rightarrow x_1 = 7$$

د مخنښي له مخې د پوره کیدونکو شرطونو آزمایش

$$f''(6) = \frac{12-14}{5^4} = -\frac{2}{5^4} < 0, \quad f''(8) = \frac{16-14}{7^4} = +\frac{2}{7^4} > 0$$

$$\Rightarrow W(7 / \frac{10}{9})$$

د انعطاف - يا اوږونټکي دی. $W(7 / \frac{10}{9})$

۱۳۸ (۸۳): د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پيدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{2x-2}{x^2} & b) f(x) = \frac{x}{x^2+3} \\ c) f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2} & d) f(x) = \frac{x^3-8}{4x} \end{array}$$

۱۳۹ (۸۴): وښايئ، چې د $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ تابع د انعطاف ټکي زینټکي دي.
 ۱۴۰ (۸۵): د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوږونټکي) پيدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x \cdot e^{-x^2} & b) f(x) = \ln \frac{1}{x^2+1} \end{array}$$

۱۴۱ (۸۶): په انټروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې د انعطاف ځايونه پيدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x + \sin x & b) f(x) = 2(1 - \sin 2x) \end{array}$$

۱۴۲ (۸۷): لاندې کسري راشنل توابع د تعريف تشيا په اړوند وڅېړئ.
 وښايئ چې ايا دا متمادي (ناپريکيدونکي) له منځه وړونکي تعريف تشيا لري او که قطبځايونه دي.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} & b) f(x) = \frac{x^2+2}{x+2} \\ c) f(x) = \frac{x}{x^2-3} & d) f(x) = \frac{x^2-1}{1+x} \end{array}$$

۱۴۳ (۸۸): وڅېړئ، چې ايا لاندې توابع د $x \neq 0$ په ځاي کې ناپريکېدونکي دي.

$\begin{array}{l} a) f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases} \\ c) f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases} \end{array}$	$\begin{array}{l} x \leq 0 \text{ لپاره } x_0 = 0 \\ x > 0 \text{ لپاره } x_0 = 0 \\ x \leq 0 \text{ لپاره } x_0 = 0 \\ x > 0 \text{ لپاره } x_0 = 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} b) f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases} \\ d) f(x) = \begin{cases} -x + 1 \\ \ln x \end{cases} \end{array}$	$\begin{array}{l} x \leq 1 \text{ لپاره } x_0 = 1 \\ x > 1 \text{ لپاره } x_0 = 1 \\ x \leq 1 \text{ لپاره } x_0 = 1 \\ x > 1 \text{ لپاره } x_0 = 1 \end{array}$
---	---	--	---

۱۴۴ (۹۹): د تعريف سټ (تعريفېږئ) د کومو توکو لپاره لاندې توابع نه دي تعريف؟

$$a) f(x) = |x^2 - 2|$$

$$b) f(x) = |2x - 1|$$

$$c) f(x) = \sqrt{2x - 4}$$

$$d) f(x) = x + |x + 1|$$

$$e) f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

$$f) f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

۱۴۵) (۹۰): لاندې توابع په x_0 کې په مشتقورتيا باندې وڅېړئ.

$$a) f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

۱۴۶) (۹۱): a او b داسې وټاکئ، چې f تابع په x_0 کې مشتقور ده

$$a) f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ x^2 + 2x & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0, \quad b) f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

۱۴۷) (۹۲): ولې متماديت د مشورتيا لپاره اړين شرط، مگر مشتقوروالي د متماديت لپاره پوره کېدونکې شرط دی؟

۱۴۸) (۹۳): په کوم دليل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقور دي؟ دا لاندې توابعو مونوتوني (جگ - ټيټوالي) وڅېړئ.

$$1) f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x - 6$$

$$2) f(x) = x^3 + 4$$

$$3) \ln \frac{1}{x+1}$$

۱۴۹) (۹۴): لاندې تام راشنل توابع په همغريزووالي خويونو وڅېړئ.

$$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

$$b) f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

$$c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$$

$$d) f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$$

۱۵۰) (۹۵): لاندې ماترانشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$$a) f(x) = \frac{1}{ax+2}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$$

۱۵۱) (۹۶): وڅېړئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a) f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

$$) f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

۱۵۲ (۹۷): لاندې ناراشنل توابع په یو غریزووالي خوینو وڅېړئ.

$$a) f(x) = e^{x^2}$$

$$b) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

۱۵۳ (۹۸): په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کین کړوالی لري او په کون کې بنی کړوالی لري.

$$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$$

$$b) -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۱۵۴ (۹۹): د لاندې مات توابعو گرافونه هاپیاربول دي. د هاپیاربول څانگې کوم کړوالی لري؟

$$a) f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$b) f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

۱۵۵ (۱۰۰): په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع یو کین او په کوم کې یو بنی کړوالی لري؟

$$a) f(x) = x \cdot e^{2-x}$$

$$b) f(x) = \ln x^2$$

۱۵۶ (۱۰۱): ولې د یوه دریمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې یوه بنی انخنا (کړوالی) نه لري.
۱۵۷ (۱۰۲): ولې یو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره یو تلتلونی کینه انخنا (کړوالی) او بنی انخنا لري؟

۱۵۸ (۱۰۳): څنگه کېدی شي، چې د یوې f تابع د ۱. درجې مشتق څخه د د گراف په انخنا قضاوت وکړو؟

۱۵۹ (۱۰۴): لاندې توابع په ضربخایونو وڅېړئ؟

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1}$$

$$b) f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2}$$

$$d) f(x) = \frac{x+5}{x^2}$$

$$f) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{x}$$

۱۶۰ (۱۰۵): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x| \rightarrow \infty$ په لور لاړ شي.

$$a) f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$$

$$b) f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^5 - x + 6$$

$$d) f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$$

$$f) f(x) = -x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$$

۱۶۱ (۱۰۶): د لاندې مات راشنل توابعو حالت وڅېړئ، که $|x| \rightarrow \infty$ په لور لاړ شي. که شتون ولري، نو د اسیمپتوت (مجانېب) همداسې د ورنږدې منحنی مساوات ورکړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - x}{-4x^3 + 2x - 3} & b) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3} \\
 c) f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 7x - 3}{x^2 + 3} & d) f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x + 3}{x + 1} \\
 e) f(x) = \frac{-3x^3 + 4x^2 + x - 3}{x^2 - 1} & f) f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{x + 1} \\
 g) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x^4 + 3x^2 - 2x - 3} & h) f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x + 2}
 \end{array}$$

۱۶۲ (۱۰۷): د نارشټوني توابعو حالت و څېړئ، که $|x| \rightarrow \infty$ لار شي.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = 3 + 2^x & b) f(x) = 1 - \ln |x| \\
 c) f(x) = e^{|x|} - 3 & d) f(x) = x + e^x
 \end{array}$$

۱۶۳ (۱۰۸): ولې د $x \rightarrow +\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وینه نه شي کېدای:

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{\ln x} & b) f(x) = x \cdot e^{-x}
 \end{array}$$

۱۶۴ (۱۰۹): لاندې تماراشنل شوني اعداد په سيومتري وڅېړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 + x^2 - 1 & b) f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3 \\
 c) f(x) = 3x^3 + x & d) f(x) = x^2 + 1
 \end{array}$$

۱۶۵ (۱۱۰): يو و سرچېني ټکي سره ټکي سيومتر تام ريښتونی دريمه درجه تابع $H(2,5)$ جگټکی لري. د دې تابع ټيټکی کوم وضعيه ارزښتونه لري؟

۱۶۶ (۱۱۱): يو د څلورمې درجې تابع د - محور ته سيومتري تابع يو ټيټکی په $(-3,4)$ کې لري.

د بل افراطي ټکي وضعيه قېمتونو په هکله څه ويلای شئ؟

۱۶۷ (۱۱۲): د جوړه (جفت) جگعدد (اکسپوننت) سره تام ريښتونی تابع کوم ډول سيومتري لري؟

۱۶۸ (۱۱۳): د ناجوړه (طاق) جگعدد (اکسپوننت) سره يو تام ريښتونی تابع ټيک هلته د سر چيني سره ټکي سيومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۶۹ (۱۱۴): لاندې تام ريښتوني اعداد په سيومتري و څېړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} & b) f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + x}{x^3 - x} \\
 c) f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^4 + 2x^2 - 3} & d) f(x) = \frac{3}{x^3 - 1}
 \end{array}$$

۱۷۰ (۱۱۵): لاندې نارينستوني اعداد په سيومتري وڅېړئ.

$$a) f(x) = x^2 \cdot e^{|x|} \quad b) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

په گوته كونه (لارښود): توابع بې له بنسټ كې يادشوي سيومتري خويونو ، نور سيمتري خويونه هم ولري.

۱۷۱ (۱۱۶): لاندې توابع په بنسټ كې لوستل شوي سيومتري خويونه نه لري. وښايئ چې دا سره له دې هم سيومتريك دي.

$$a) f(x) = (x+2)^2 \quad b) f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = -(x+1)^2 + 3 \quad d) f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$$

۱۷۲ (۱۱۷): لاندې تام ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a) f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad b) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$c) f(x) = -(x+3)^2 + 1 \quad d) f(x) = x^3 - 2x + 1$$

۱۷۳ (۱۱۸): لاندې كسر ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a) f(x) = 1 - \frac{2}{x+4} \quad b) f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+4}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad d) f(x) = \frac{1}{x^2} - 5$$

۱۷۴ (۱۱۹): لاندې نارېښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a) f(x) = 2 - e^x \quad b) f(x) = x^2 + |x| + 2$$

$$c) f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad d) f(x) = 2 + \sin 2x$$

۱۷۵ (۱۲۰): لاندې پوله ارزښتونه وشمېړئ.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$$

۱۷۶ (۱۲۱): د لويپیتال قاعدې په مرسته د $x \rightarrow \infty$ لپاره د لاندې مات ريښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمېړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \quad b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱۷۷ (۱۲۲): لاندې مساوات ټيک يو صفرځاي لري. دا د تانجنت له لارې تر دوه لسميزو ځايونو وټاکئ.

$$a) f(x) = x^3 - 2x - 3$$

$$b) f(x) = x^3 - x^2 - 15$$

$$c) f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 5$$

$$d) f(x) = x^5 + x^3 - 20$$

۱۷۸ (۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د $x=x_0$ په ځای کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹ (۱۲۴): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوي کرني سره غبرگ دي؟

۱۸۰ (۱۲۵): د $x = x_0$ په ځای کې د لاندې توابعو لپاره د تانجنت مساوات وټاکئ

$$a) f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2, \quad x_0 = -1$$

$$b) f(x) = \frac{3-x^2}{2x-1}, \quad x_0 = 1$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x, \quad x_0 = 1$$

۱۸۱ (۱۲۶): د لاندې توابعو لپاره په کومو ټکو کې تانجنت د ورکړ شوو کرنيو سره غبرگ دي؟

$$a) f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 5, \quad g: y = 2x$$

$$b) f(x) = \frac{3x-4}{x}, \quad g: y = x+2$$

۱۸۲ (۱۲۷): ټول راشنل تابع f_t د $f_t(x) = x^3 + tx^2 + tx$ سره له سرچینې څخه تیرېږي.

هلته د تانجنت مساوات پیدا کړئ د t په تابعیت کې.

۱۸۳ (۱۲۸): د t د کوم ارزښت لپاره د $f_t(x) = \frac{t^2}{x^2 + t}$ په گراف تانجنت په $x_0 = -3$

ځای کې د $g: y = \frac{3}{8}x + 2$ گراف سره غبرگه ده؟

۱۸۴ (۱۲۹): په ټکي $N(x_1/0)$ کې د نه راشنل فنکشن f په گراف د $f(x) = (x-t) \cdot e^x$ سره د تانجنت برابرېدون یا مساوات وټاکئ.

۱۸۵ (۱۳۰): په f تابع د $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 1$ سره په ټکي $P(0, -9)$ کې د تانجنت مساوات وټاکئ.

۱۸۶ (۱۳۱): د تام ریښتوني f تابع د $f(x) = x^3 - 3x - 1$ سره د تانجنت په ټکي $P(-2, 5)$ کې وټاکئ.

۱۸۷ (۱۳۲): د مات ریښتوني f تابع د $f(x) = \frac{x^2-1}{3x}$ سره د تانجنت مساوات په $P(-1, -\frac{4}{3})$ ټکي وټاکئ.

۱۸۸ (۱۳۳): د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي (اورونټيکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$$a) f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$$

۱۸۹ (۱۳۴): د لاندې تابع د

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

سره د انعطاف – يا اړونټکي مساوات وليکئ.

۱۹۰ (۱۳۵): د اکسپوننشم تابع د انعطاف ټک او په انعطاف ټکي د

نورمال مساوات پيدا کړئ. $f(x) = (x-2) \cdot e^x$

۱۹۱ (۱۳۶)

$$f_t(x) = t \sin x + t \cos x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

په انټروال $0 \leq x \leq \pi$ کې.

۱۹۲ (۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او گرافونه یې وکارئ.

$$a) f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \quad b) f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad d) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۹۳ (۱۳۸): د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو یا کړو مطالعه وکړئ او گرافونه یې وکارئ.

$$a) f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \quad b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad d) f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

انتیگرالشمیرني ته پوښتنې

۱- لاندې نااصلي پولینومونه د یوه ټول نسبتي- یا راشنل عدد پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$$

$$b) \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$c) \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$e) \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$$

$$f) \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$$

- ۲

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

$$b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$$

$$c) \frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$$

$$d) \frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

$$e) \frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$$

$$f) \frac{14}{x^2 + 20x + 51}$$

۳ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} & b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x} \\ c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} & d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2} \end{array}$$

۴ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} & b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4} \\ c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} & d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \end{array}$$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ږړکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} & b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} \\ c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} & d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} \end{array}$$

۶ - وښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنۍ تابع ده.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 2x^2 + 4x - 7, & f(x) = 4x + 4 \\ b) F(x) = (x^2 - x)^3, & f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2 \\ c) F(x) = \sqrt{2x + 1}, & f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \\ d) F(x) = 1 + \sin x, & f(x) = 3x \cdot \cos 3x \\ e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3, & f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1) \end{array}$$

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$\begin{array}{ll} a) F(x) = x^3 + x + 4, & G(x) = x^3 + x + 1 \\ b) F(x) = (x - 3)^2, & G(x) = x^2 - 6x + 4 \\ c) F(x) = \frac{x + 1}{x + 2}, & G(x) = \frac{3x + 5}{x + 2} \\ d) F(x) = 1 + \sin x, & G(x) = \sin x \end{array}$$

۱۳ - لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیدا کړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$$\begin{array}{lll}
 a) \int x^3 dx & b) \int 7 dx & c) \int x dx \\
 d) \int (1-x^2) dx & e) \int (x + \frac{1}{x}) dx & f) \int (e^x + \cos x) dx \\
 g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx & h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx & i) \\
 j) \int u dx & k) \int (2+e^x) dx & l) \int (1+\ln x) dx \quad m) \int (\sqrt{x} + \sin) dx
 \end{array}$$

۱۴ - د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېرئ

$$\begin{array}{lll}
 a) \int_0^3 4 dx & b) \int_{-3}^{-1} x dx & c) \int_1^e \frac{1}{x} dx \\
 d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx & e) \int_{-1}^0 e^x dx & f) \int_0^\pi \sin x dx \\
 g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4 dx & h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx & i) \int_{-2}^2 x^3 dx \\
 j) \int_2^6 (1+x) dx & k) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx & l) \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}) dx
 \end{array}$$

۱۶ = د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه یې سره پرتله کوئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_{-3}^1 3 dx \text{ und } - \int_{-3}^1 3 dx & b) \int_0^1 (1+e^x) dx \quad \wedge \quad - \int_1^0 (1+e^x) dx \\
 c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx \quad \wedge \quad - \int_0^{-\pi} \sin x dx
 \end{array}$$

۱۷ - هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_0^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^\pi \cos x dx & , \quad b) \int_{-1}^0 (x + e^x) dx + \int_0^1 (x + e^x) dx \\
 c) \int_2^3 3x^2 dx - \int_5^3 3x^2 dx & , \quad d) \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_4^1 (x + e^x) dx
 \end{array}$$

۱۸ - د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} & b) \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \\
 c) \int_3^5 2^{4-x} dx & d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx
 \end{array}$$

۱۹ - د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړ شوي ارزښتونه لري؟

$$a) \int_1^x 5t^4 dt, \quad la(x) = 31 \qquad b) \int_0^x e^t dt, \quad la(x) = e - 1$$

۲۰ - لاندې انتیگرالونه توابع ته د انتیگرال توابع وټاکئ.

$$a) f(x) = x^2, \quad a = 3 \quad b) f(x) = 2 + e^x \quad a = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0 \quad d) f(x) = 2 \quad a \in \mathbb{R}$$

۲۱ - لاندې ناتهکلي انتیگرالونه پیدا کړئ

$$a) \int \sqrt[4]{x^3} dx \quad b) \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx \quad c) \int \sqrt[6]{x^5} dx \quad d) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx \quad f) \int \frac{x^3}{x^4} dx \quad g) \int \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx \quad h) \int \frac{\sqrt[4]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x^3}} dx$$

۲۲ - لاندې ناتهکلي انتیگرالونه پیدا کړئ

$$a) \int 8x^3 dx \quad b) \int -4x^{-2} dx \quad c) \int \frac{3}{-x^3} dx \quad d) \int \sqrt[3]{3x} dx$$

$$e) \int k \cdot e^x dx \quad f) \int -5x^n dx; n \neq 0 \quad g) \int \frac{\sin x}{2} dx \quad h) \int \frac{3a}{2 \cdot \cos^2 x} dx$$

$$i) \int \frac{2\sqrt{x}}{3x^3} dx \quad j) \int \frac{-\sqrt{2}}{3x} dx$$

۲۳ - د توان قانون په مرسته یو ثابت ضریب بېل کړئ او د دې پسي لاندې ناتهکلي انتیگرال وټاکئ.

$$a) \int e^{x+3} dx \quad b) \int (4x)^3 dx \quad c) \int a \cdot e^{x+b} dx \quad d) \int (7x^2)^4 dx$$

۲۴ - لاندې ناتهکلي انتیگرالونه وشمېرئ

$$a) \int (x^2 + 3x - 4) dx \quad b) \int (x - \sqrt{x}) dx \quad c) \int (5x^3 - 7x + 4) dx$$

$$d) \int (1 + x)^2 dx \quad e) \int x^2 (x^2 + 2) dx \quad f) \int x^2 (1 + x)(x - 1) dx$$

$$g) \int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}) dx \quad h) \int (\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}) dx \quad i) \int (5x - \frac{1}{3} + \frac{\cos x}{3}) dx$$

$$k) \int (5 + x^5 + \sin x) dx \quad l) \int (e^x - \frac{1}{\sin^2 x}) dx \quad m) \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x}) dx$$

۲۵ - لاندې ناتهکلي انتیگرالونه لومړی په یوه جمعه وړوئ او ورپسې انتیگرالونه وټاکئ.

$$a) \int \frac{(x^2 - 1)^3}{x} dx \quad b) \int (\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}) dx$$

$$c) \int \frac{e^{2x} + e^{x+2}}{e^x} dx \quad d) \int (\frac{3x^2 + 2x - 4}{x^3}) dx$$

۲۶ - لاندې ناتهکلي انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{llll}
 a) \int 3^{x+1} dx & b) \int 2^{-x} dx & c) \int a^{x+b} dx & d) \int \frac{1}{a^x} dx \\
 e) \int 2^x \cdot 3^x dx & f) \int \frac{2^x}{3^x} dx & g) \int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx & \\
 h) \int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx & i) \int (1 + 2x^x) dx & j) \int (x - 3^x) dx &
 \end{array}$$

۲۷ - لاندې ناکلي انتیگرالونه وشمېرئ

$$\begin{array}{ll}
 a) \int \ln 2x^3 dx & b) \int \ln \sqrt{x} dx \\
 c) \int \lg \frac{x}{2} dx & d) \int_3 \log \frac{1}{x} dx
 \end{array}$$

۲۸ - د مشتق د قوانینو په مرسته وښایئ، چې تابع F د $F=x \cdot \ln x - x$ سره یو لومړنی تابع ده و $f(x)=\ln x$ تابع ته

۲۹ - د انتیگرال شمېرنې په مرسته د عمومي لوگارتم تابع لپاره د طبیعي لوگارتم له فرمول څخه د انتیگرال فرمول راوباسئ.

۳۰ - لاندې ناکلي انتیگرالونه د بدلون په طریقو وشمیرئ.

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{10}{5x-7} dx & b) \int \frac{12}{(1+3)^4} dx & c) \int \frac{1}{5-4x} dx \\
 d) \int \frac{a}{bx+d} dx & e) \int (5x+7)^3 dx & f) \int (ax+b)^n dx \\
 g) \int \sqrt{4x-2} dx & h) \int \sqrt{ax+bd} dx & i) \int \frac{7}{\sqrt{2x+5}} dx \\
 j) \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx & k) \int \sin 4x dx & l) \int \frac{3}{e^{2x}} dx
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 n) \int \cos(3x + \frac{\pi}{4}) dx & o) \int e^{3x-5} dx
 \end{array}$$

۳۲ - لاندې ناکلي انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int \frac{\ln x}{x} dx & b) \int x(x^2+3) dx \\
 c) \int 3x^2(x^3-1) dx & d) \int (2x-1)(x^2-x) dx
 \end{array}$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(x))^2 + c$$

۳۳ - د بدلون قاعدې په مرسته وشمېرئ.

۳۴ - لاندې ناکلي انتیگرالونه وشمېرئ، ښه یې بدله کړئ، که اړین وي.

$$a) \int \frac{x^2}{4+x^3} \quad b) \int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1}$$

۳۵ په لاندې انتیگرالونو پرېکړه وکړئ، چې ایا لوگاریتمي یې انتیگرال نیوه کېدی شي او یا د بدلون قانون باید و کارول شي؟

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{5x^4}{3+x^5} dx & b) \int \frac{5x^4}{(3+x^5)^2} dx & c) \int \frac{3x}{(1-x^2)^4} dx \\ d) \int \frac{5x}{4-x^2} dx & e) \int \frac{\cos x}{3+\sin x} dx & f) \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx \end{array}$$

۳۶ - لاندې ناکلې انتیگرالونه پیدا کړئ. لومړی یې ښه بدله کړئ، که اړین وي.

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{4}{x^2+9} dx & b) \int \frac{3}{2x^2+2} dx & c) \int \frac{1}{x^2+2} dx \\ d) \int \frac{2}{3x^2+5} dx & e) \int \frac{1}{x^2+a^2} dx & f) \int \frac{1}{ax^2+b} dx, ab > 0 \end{array}$$

۳۷ - وښایئ، چې دا لاندې انتیگرالونه (هغه، چې انتیگرال یې نیول کېږي) صفرخایونه نه لري. پسې ترلې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{1}{x^2+4x+13} dx & b) \int \frac{5}{x^2+2x+2} dx \\ c) \int \frac{6}{3x^2+18x+30} dx & d) \int \frac{2}{2x^2+8x+58} dx \end{array}$$

۳۸ لاندې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ. لومړی یې، که اړین وي، ښه بدله کړئ.

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx & b) \int \frac{1}{\sqrt{2-4x-x^2}} dx & c) \int \frac{1}{\sqrt{2x^2-2}} dx \\ d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}} dx & e) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx & f) \int \frac{6}{\sqrt{9x^2+9}} dx \end{array}$$

۳۹ - لاندې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ، لومړی یې که اړین وي، ښه بدله کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{1-x}{x^2+x+1} dx & b) \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6} dx \\ c) \int \frac{3x}{2x^2+2x+8} dx & d) \int \frac{x-3}{x^2+8x+17} dx \end{array}$$

۴۰ - لاندې انتیگرالونه د ټوټه انتیگرالونې له لارې پیدا کړئ یا وشمېرئ.

$$\begin{array}{lll} a) \int x \cdot e^x dx & b) \int x \cdot \sin x dx & c) \int x^2 \cdot \ln x dx \\ d) \int \frac{\ln x}{x^2} dx & e) \int x \cdot e^{2x} dx & f) \int x \cdot \sin 2x dx \end{array}$$

۴۱ - لاندې ناکلې انتیگرالونه د ټوټه انتیگرال له لارې وشمېرئ.

که اړین وي، نو په ۴۰ -م تمرین کې شمېرلې نتيجه وکاروم.

a) $\int x^2 \cdot \cos x dx$

b) $\int x^2 \cdot e^x dx$

c) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$

d) $\int x^2 \cdot \cos 2x dx$

د پورته کارولي ریکورزیون () فرمول په مرسته لاندې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ.

a) $\int x^4 \cdot e^{2x} dx$

b) $\int \sin^4 x dx$

c) $\int x^3 \cdot e^{2x} dx$

d) $\int \cos^6 x dx$

۴۴ - لومړی د ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بالاخره لاندې ناکلې انتیگرالونه حل کړئ.

a) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2+6x+8} dx$

c) $\int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx$

d) $\int \frac{x^2-12x+12}{x^3-4x} dx$

اصلي مات رېښتوني توابع، چې صورت (متلاندې) هم لاینز یا کرښیز ضریبونه لري. ۴۵ - لومړی به ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بیا لاندې ناکلې انتیگرالونه حل کړئ

a) $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx$

b) $\int \frac{3x}{x^2-6x+9} dx$

c) $\int \frac{x^3-1}{x^4+x^3} dx$

d) $\int \frac{5x^3-11x^2+5x+4}{(x-1)^4} dx$

۴۶ - لومړی د هریوه لپاره په ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بالاخره لاندې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ.

a) $\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} dx$

b) $\int \frac{3x+4}{x^3-2x-4} dx$

c) $\int \frac{2x^2-2x+3}{x^3-x^2-x-2} dx$

d) $\int \frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13} dx$

۴۷ - لومړی د پولینوم ویش سرته ورسوئ او پسي لاندې ناکلې انتیگرالونه پیدا کړي.

a) $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

b) $\int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1} dx$

c) $\int \frac{3x^3+5x^2-29x-25}{x^2+x-12} dx$

d) $\int \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} dx$

۴۸ - لاندې ناکلې انتیگرالونه پیدا کړئ.

a) $\int \sqrt{x^2-5} dx$

b) $\int \sqrt{5x^2+10} dx$

c) $\int \sqrt{x^2-6x+8} dx$

d) $\int \sqrt{2x^2+4x+6} dx$

۴۹ - لاندې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int \sqrt{x^2 + 2x} dx & b) \int \sqrt{x^2 - 4x} dx \\ c) \int x \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 3} dx & d) \int (x+2) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx \end{array}$$

۵۰ - لاندې ناپاکلي انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{llll} a) \int \frac{x^2}{x} dx & b) \int \frac{1}{x^3} dx & c) \int (1 - 2x^2 + x^3) dx & \\ d) \int (x^2 - 3x - 6) dx & e) \int x \cdot \sqrt{x} dx & f) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx & g) \int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} dx \\ h) \int \frac{3x \cdot \sqrt{x^3}}{x^2} dx & i) \int \frac{x^2 + 3x - 2}{x} dx & j) \int \frac{x - 5}{\sqrt{x}} dx & \end{array}$$

۵۱ - لاندې ناپاکلي انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{llll} a) \int 2(5 - 4x)^3 dx & b) \int \sqrt{5x + 2} dx & c) \int x \cdot e^{x^2} dx & \\ d) \int x^2 \cdot \sqrt{2x^3 - 4} dx & e) \int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx & f) \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^3} dx & \\ i) \int \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx & j) \int \frac{1}{2x^2 + 9} dx & k) \int \frac{x}{x^2 + 2x - 3} dx & \\ l) \int \frac{1}{x^2 - 10x + 25} dx & m) \int \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx & n) \int \frac{1}{x^2 + 12x + 40} dx & \end{array}$$

۵۲ - لاندې ناپاکلي انتیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{llll} a) \int \ln(2x - 3) dx & b) \int \cos 3x dx & c) \int 2^{3x+1} dx & d) \int \lg 4x dx \\ e) \int x \cdot \ln x dx & f) \int \sqrt{x} \cdot \ln x dx & g) \int e^x \cdot \cos x dx & h) \int x \cdot \cos x dx \end{array}$$

۵۳ - وښايئ، چې لاندې ورکړل شوي توابع په ورکړل شوي انټروال کې لومړنۍ توابع نه لري، مگر په I کې انتیګرال وړ دي.
په لاندې انټروال کې یې انتیګرال ارزښت ورکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) I = [-2; 5] & b) I = [-3; 4] \\ f(x) = \begin{cases} -x & ; x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x & ; x > 1 \end{cases} & f(x) = \begin{cases} 2 & ; -3 < x \leq -1 \\ 1 & ; -2 < x \leq 1 \\ 2 & ; 1 < x \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

۵۴ - د f تابع د $f(x) = |x - 1|$ سره په انټروال $I = [-3, 3]$ د $x = 1$ سره مشتقور نه ده، وښايئ، چې سره له دې هم انتیګرال وړ ده.

۵۵ - د لاندې توابعو منځنۍ ارزښت په ورکړل شوو انټروالونو پيدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ mit } x \in [-1; 4] \\ b) f(x) = x + 1 \text{ mit } x \in [0; 6] \\ c) f(x) = \sin \text{ mit } x \in [0; \pi] \end{array}$$

mit ... سره په معنا

۵۶ - و بنایي جي د f کرښيز (خطي) تابع $f(x_0)$ منځ ارزښت د $f(x)=mx=n$ سره په انټروال $[a, b]$ نڅېنه ونه $x_0 = \frac{a+b}{2}$ اعتبار لري..

۵۷ - په ورکړ شوي انټروال کې د د x محور او گراف ترمنځ سطحي وشمېری.

$$a) f(x) = x^2 + 1, \quad x \in [-2; 1]$$

$$b) f(x) = 2 + \sin, \quad x \in [0; \pi]$$

$$c) f(x) = -x^2 - 4x - 5, \quad x \in [-3; 0]$$

$$d) f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad x \in [1; e]$$

۵۸ - د انټروال پورتنۍ پوله b داسې وشمیرئ، چې د پارابول $p: y = x^2 + 2x + 2$ او x -محور ترمنځ سطحه په انټروال $[-2; b]$ کې کې عدد ۶ ونیسي.

۵۹ - لاندنۍ د انټروال پوله a داسې وټاکئ، چې د پارابول $p: y = 3\sqrt{x}$ او x -محور ترمنځ سطحه په انټروال $[a; 4]$ کې عدد ۱۴ واخلي.

۶۰ - یو پورته لور ته کښول شوی نورمال پارابول دې د x -محور سره په انټروال کې $[-1; 2]$ یوه سحه د کچ عدد ۹ سره رابنده کړئ.

د پارابول مساوات وټاکئ.

۶۱ - ضریب a داسې وټاکئ، چې د $f(x) = a \cdot \sin x$ ساین تابع د x -محور سره په انټروال $[0; \pi]$ کې عدد ۴ رابند کړي.

۶۲ - د کرښي $g: y = 0,5x + 2$ او د پروتولار سیستم (وضعيه قیمت تر منځ) سطحه وشمېری.

د ساده شمیرنې له لارې یې وازمایئ.

۶۳ - د گراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېری.

$$a) f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$d) f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

۶۴ - په ورکړ شوي انټروال کې د گراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېری.

$$a) f(x) = x - 2, \quad x \in [-2; 3]$$

$$b) f(x) = x^2 - x - x, \quad x \in [1; 5]$$

$$c) f(x) = x^2 - 8x + 12, \quad x \in [0; 8]$$

۶۵ - د اکسپوننشل منحنی g د $y = e^x$ سره او د پارابول p د $y = -x^2 - 1$ سره رابنده سطحه په انټروال $[0; 1]$ کې وشمېری.

۶۶ - د کرښي g د $y = 2x + 2$ سره د ساین h منحنی د $y = \sin x$ سره او له اینټروال $[0; 2\pi]$ څخه رابنده سطحه وشمېری.

٦٧ - پارابولونه p_1 د $y=x^2-3$ سره او p_2 د $y=2x^2+1$ سره په اینتروال $[-1;2]$ کې یوه سطحه را بنده وي. دا رابنده سطحه و شمېرئ.

٦٨ - د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او کرښه g یې د $y = -x-1$ سره په اینتروال $[0;4]$ کې رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه و شمېرئ.

٦٩ - په اینتروال $[-2;1]$ د کرښې g_1 د $y=x+3$ سره او g_2 د $y=2x+1$ څخه را بنده سطحه و شمېرئ.

٧٠ - پارابول p د $y = x^2 - 6x + 5$ سره او کرښه g د $y = -x+1$ سره رابنده سطحه. د دې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٢ - د g یوه کرښه یو پارابول p د $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کې غوڅوي.

د کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٣ - د g یوه کرښه یو پارابول p د $y = 0,5x^2 + x + 4$ سره په $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ ټکو کې غوڅوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٤ - د دواړو پارابولونو p_1 د $y = -2x^2 + 8x - 3$ سره او p_2 د $y = x^2 - 4x + 6$ سره را بندې سطحې مساحت و شمېرئ؟

٧٥ - د دواړو پارابولونو p_1 د $y = 4\sqrt{x}$ سره او p_2 د $y = 0,5x^2$ سره را بندې سطحې مساحت و شمېرئ؟

٧٦ - د بارابول p د $y = 2\sqrt{x}$ سره او کرښې g د $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ سره رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٧ - د ساین د منحنی گراف او د کوساین د منحنی گراف یو بل په انټروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنیو را بندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٨ - د تابع f په گراف پروت تانجنت د $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ سره او د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع د گراف سره رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٩ - د هغې سطحې مساحت و شمېرئ، چې د $x_0 = -1$ په ځای کې په پارابول $y = x^2$ عمود د دې بارابول څخه را بنده وي.

٨٠ - د f تابع گراف د $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي. د دې مساحت و شمېرئ.

۸۱ - د f تابع گراف د $y = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$ سره همداسې درې کرښې د مساواتو $y = \frac{1}{4}x$, $x = 1$ او $x = b$ ($b > 1$) سره پوره رابنده سطحه لرو. د b د کوم ارزښت لپاره د سطحې مساحت 1,5 دی؟

۸۲ - د p_1 پارابول د $y = x^2 - 3x + 3$ سره او p_2 پارابول د $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$ سره پوره رابنده سحه لرو. د دې سطحې مساحت وښایاست.

۸۳ - د f تابع گراف د $y = a(1 - \sin 2x)$, ($a > 0$) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو. د و کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت $(\pi - 2)$ سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۸۴ - د f گراف د $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x$ او g د $y = -x^2 + 6x$ سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې خونديونه یا دننه هواره وشمیری.

۸۵ - د f گراف د $y = \sqrt{16 - 2x}$ سره د پروتولار محور سره ټوله هواره پوره بندوي. د دې هوارې دننه هواره وشمیری.

۸۶ - الف: د f گراف د $y = \frac{48x}{(x+2)^3}$ سره، x -محور یا - څرخونی او د $x=a$ ($a > 0$) کرښه یوه هواره ټوله پوره رابند وي. د a د کوم ارزښت له پاره دا هواره ۸ د هوارې یوونونه کچه وي.

ب - د f گراف د $y = \frac{48x}{(x+2)^3}$ سره، x -محور یا څرخونی او کرښه $x=4$ یوه هواره ټوله پوره رابندوي. د د کوم ارزښت له پاره هواره د هوارې ۱۰ یوونونه کچه وي.

۸۷ - د f گراف د $y = x \cdot e^{0.5x}$ سره، x -محور او کرښه $x=1$ یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۸۸ - د f گراف د $y = e^x(x-1)$ سره د پروتولار محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه هواره وشمیری.

۸۹ - د f گراف د $y = -2x^3 - 3x^2$ سره د پروتولار محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه هواره وشمیری.

۹۰ - د f گراف د $y = x^2 \cdot (\ln x - 1)$ سره، x -محور او کرښه $x=-5$ یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۹۱- د f گراف د $y = e^{\frac{1}{4}x}$ سره او د $y = e^{-\frac{1}{4}x+1}$ سره، کرښه $x=a$ او $x=a+2$ د $-x$ محور یوه هواره پوره رابندوي. د a د کوم ارزښت له پاره به د دې هواره دننه هواره خورا لویه وي.

۹۲- د f گراف د $y = \sqrt{9-4x}$ سره د کواورديات محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۹۳- د f گراف د $y = \frac{x^3+12}{2x^2}$ سره، کرښه $x=1$ او $x=4$ د گاونډ یا اسیمپتوت سره ټوله هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۹۴- د f گراف د $y = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$ سره، د $-x$ محور سره ټوله هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۹۵- د هوارې منځهواره وشمیری، چې کرښه g له $y=x+7$ د پارابول p د $y=x^2-$ سره $5x+7$ غوڅوي.

۹۶- د هوارې منځهواره وټاکي، چې د تابع f کوم گراف یې د $y=2(1 - \cos(x/2))$ سره په انټروال $[0,4\pi]$ د $-x$ محور سره رابندوي.

۹۷- گراف f د $y = 3 \cdot \sqrt{9-x}$ سره د پروتولار سیستم یا کواورديات محور سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې منځهواره وشمیری.

۹۸- پارابول $p: y = x^3 - 2ax^2 + a^3$ د $a>1$ له پاره د x -محور سره او د کرښې $x=1$ سره یوه هواره د $2,75$ هواروونو (واحدونو) خوندیوني سره رابندوي. د پارامتر a ارزښت وټاکي.

۹۹- د یوه تابع $f: y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$ په سرچینه کې نورماله د دې تابع د گراف سره یوه هواره رابندوي. د دې هوارې منځهواره وښایی.

۱۰۰- د یوه تابع $f: y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ گراف د $-x$ -محور سره یوه هواره رابندوي. په کوم نسبت دا په سرچینه کې کرښه او د f جگتکي دا هواره وېشي؟

۱۰۱- د هوارې منځهواره وشمیری، چې د $f: y = \frac{x^2}{1+x^2}$ له گراف، د $-x$ -محور او کرښې $x=1$ څخه رابنده وي.

102 - د $f: y = \frac{x}{1+x^2}$ گراف، د x -محور، کرښه $x=a$ او $x=-1$ یوه هواره رابندوي. د a د کوم ارزښت د پاره د دې هوارې منځهواره د هوارې یوون ۱ ارزښت لري؟

103 - کرښه $g: y = \frac{2}{\pi}x$ ، ساین کره او د x -محور یوه هواره په لومړۍ څلورۍ کې رابندوي. د دې هوارې منځهواره وشمیرئ.

104 - د تابع $f: y = x \cdot \sin x$ او $g: y = 2 \cdot \sin x$ گرافونه د $0 \leq x \leq \pi$ د پاره یوه واره رابندوي. د دې هوارې منځهواره یا سطحه وشمیرئ.

105 - د تابع $f: y = \frac{2e^x}{e^x + 1}$ گراف د پروتولار سیستم محورونه او کرښه $x=2$ یوه هواره رابندوي. دا منځهواره (د دې هوارې منځ) وشمیرئ.

106 لاندې د څرخېدونکي بدنونو گراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تنونو حجمونه (ډکي) وشمیرئ.

$$a) f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad I = [2; 4]$$

107 د لاندې څرخېدونکو بدنونو گرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه (ډکي) وشمیرئ او په ساده حساب سره یې وشمیرئ.

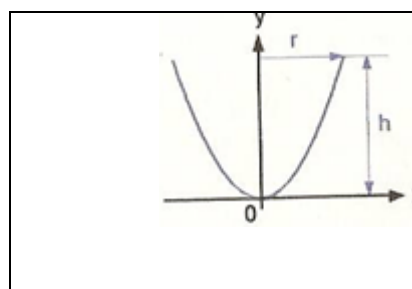
$$a) f(x) = -x + 5, \quad I = [0; 3] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad I = [1; 5]$$

108 د لاندې توابعو د څېخون له لارې منځ ته راغلو تنونو حجم وشمیرئ.

$$a) f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = (x-2)^2, \quad I = [1; 3]$$

۱۰۹ - د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه وشمیرئ او په ساده شمېرنه سره وشمیرئ.

$$a) f(x) = x + 1, \quad I = [1; 4] \quad b) f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad I = [0; 4]$$



۱۱۰ - د یوه پارابول په خپله سیمترې محور څرخیدل یو لوبښي جوړیږي. وښایی، چې دا لوبښي د فضا ډکي لري.

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

۱۱۱ - کرښه د $y = -\frac{1}{2}x + 4$ د پروتولار سیستم سره یوه هواره رابندوي. د دې څرخون تن پوښهواره څومره لویه ده، چې د x -محور باندې د څرخون له لارې منځ ته راځي؟

د انټیګرال شمیرنې سره ووشمیرئ او ساده هم.

۱۱۲ - د څرخون بدن پوښهواره څومره لویه ده، چې د x - محور په انټروال $[0;4]$ باندې د پارابول د $y = 2 \cdot \sqrt{x}$ سره له څرخون څخه منځ ته راځي.

۱۱۳ - د پارابول p د $y = \frac{1}{6}x^3$ سره د څرخون له لارې په انټروال $[1;2]$ د x -محور باندې یو څرخون بدن منځ ته راځي. د دې بدن پوښهواره وشمیرئ.

۱۱۴ - د کرښې g د $y=x+1$ سره د y -محور باندې په انټروال $[1,5]$ یو څرخونښندن جوړوي.

د دې بدن پوښهواره د انټیګرال سره ووشمیرئ او د ساده شمیرنې له لارې یې وازمایئ.

۱۱۵ - پارابول p د $y=-(1/4)x^2+4$ سره په لومړۍ څلورې کې د کواورډینات له محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د بدن پوښهواره وشمیرئ کومه چې د دې بدن د څرخون له لارې د y -محور سره منځ ته راځي.

۱۱۶ - د انټیګرال شمیرنې په مرسته د AB کرښې د $A(2,4)$ او $B(5,8)$ سره. د ساده شمیرنې سره دا لاس ته راوړنه وازمایئ.

۱۱۷ - په لومړۍ څلورۍ کې د پارابول اوږدوالی د پارابول p د پاره د $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$ ، سره په انټروال $[0,1]$ کې وشمیرئ.

یوسل او اتلس: وڅیړئ، چې ایا کوم یو له دې لاندې ناتیګرالونو څخه پوله ارزښت لري.

$$a) \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$c) \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

یوسل او نولس: د جګډن یا اکسپوننت د کوم ارزښت له پاره دا ناتیګالی انټیګرال یو پوله ارزښت لري؟

یوسل او شل: لاندې توابع د انټروال د یوې پولې له پاره پیژندنه لري یا نه دې تعریف وڅیړئ، چې ایا دا ټاکلی انټیګرال په دې انټروال یو پوله ارزښت لري؟

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}, \quad I = [0;1] & \text{b) } f(x) = \ln x, \quad I = [0;1] \\
 \text{c) } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \quad I = [1;2] & \text{d) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I = [-1;1] \\
 \text{e) } f(x) = \frac{x^2}{x^3-8}, \quad I = [0;2] & \text{f) } f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}, \quad I = [0;1]
 \end{array}$$

د دفرنشل مساوات پوښتنو ته ځوابونه

د 66 (1) او 67 (2) تمرینونو ځواب:

$$66. \text{ a) } m = \frac{4-2}{5-3} = 1$$

$$\text{b) } m = \frac{1-4}{3-2} = -3$$

$$67. \text{ a) } f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4$$

$$\text{b) } f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0.5(3 + \Delta x)^2 - 0.5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3 + 0.5\Delta x)}{\Delta x} = 3$$

68(3): کمښتویش (د تفاضلونو ویش) د د کرې (منحني) د دوه ټکو P او Q ترمنځ جگوالی دی. مشتق د کرې په یوه ټکي P د تانجنت جگوالی دی.

مشتق د کمښتویش پولې ارزښت دی، که Q و P ته نږدې شي یا وڅیړي.

69(4): د غوڅونې یا قطاع جگوالی د منحني په ټاکلي انټروال کې د منحني جگوالی دی.

د تانجنت جگوالی په یوه ټاکلي ټکي کې د منحني جگوال لپاره یوه اندازه ده.

د تانجنت جگوالی د غوڅونې یا قطاع د جگپدنې انټروال کوچني کول دي.

70. a) $f'(x) = 5x^4$

b) $f'(x) = 6x^5$

c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$

d) $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$, $x \neq 0$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

f) $f'(x) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$, $x > 0$

g) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$, $x > 0$

h) $f'(x) = -\frac{3}{3\sqrt{x^4}}$, $x > 0$

71. a) $f'(x) = x^4$

b) $f'(x) = 8x^3$

c) $f'(x) = -\frac{8}{x^3}$, $x \neq 0$

d) $f'(x) = -\frac{9}{x^4}$, $x \neq 0$

e) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

f) $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x^3}}$, $x > 0$

72(7): د f تابع گراف د $f(x) = g(x) + c$ سره د g له گراف څخه د y په لور د غبرگ راکښنې له لارې منځ ته راځي

د f گراف د $x = x_0$ په ځای کې د هر c ارزښت لپاره همغه جگوالی لري لکه د g گراف. له دې امله $f'(x) = g'(x)$ لرو.

73(8): د f تابع گراف د $f(x) = a \cdot g(x)$ د g د گراف د x په محور عمود غزونې څخه منځ ته راځي. د f گراف له دې امله د $x = x_0$ په ځای کې a ځله جگوالی لري لکه د g گراف. او په همدې ډول a ځله یا واره مشتق. له دې امله $f'(x) = a \cdot g'(x)$ دی.

74. a) $f'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 2x - 1$

b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

c) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{x^4}$, $x \neq 0$

d) $f'(x) = 6x + 0.4$

75. a) $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2$

b) $f'(x) = 6x^2 - 4x + 1$

c) $f'(x) = 10x^4 + 4x^3 - 27x^2 - 10x - 5$

d) $f'(x) = 36x^2 + 10x + 10$

76. a) $f'(x) = \frac{-x^4 + 12x^2 - 2x}{(4 - x^2)^2}$, $|x| \neq 2$

b) $f'(x) = \frac{2(x^2 + 2x - 1)}{(x + 1)^2}$, $x \neq -1$

c) $f'(x) = \frac{2x^4 + 7x^2 + 16x + 3}{(2x^2 + 3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

d) $f'(x) = \frac{-x^4 - 2x^2 + 4x - 1}{(x^3 - 2x^2 + x)^2}$, $x \neq 0 \text{ und } x \neq 1$

77(12): د $u(x) = 1$ او $v(x) = g(x)$ سره د ویش قاعدې کې ځای په ځای کولو له لارې لاس ته راځي:

$$77. \quad f'(x) = \frac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)} = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$78. \quad a) \quad f'(x) = 32x^3(4x^4 - 3)$$

$$b) \quad f'(x) = 2(6x + 4)(3x^2 + 4x - 5) = 4(3x + 2)(3x^2 + 4x - 5)$$

$$c) \quad f'(x) = 6(2x - 7)^2 \quad d) \quad f'(x) = -36x^2(5 - 3x^3)^3$$

$$79. \quad a) \quad f'(x) = \frac{12x + 3}{(2x^2 + x)^4}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; 0 \right\}$$

$$b) \quad f'(x) = -\frac{4}{(x-5)^5}, \quad x \neq 5$$

$$c) \quad f'(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$d) \quad f'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}, \quad x < 1$$

$$80. \quad a) \quad f'''(x) = 6$$

$$b) \quad f'''(x) = 48x + 18$$

$$c) \quad f'''(x) = 10x^4 + 4x^3 - 27x^2 - 10x - 5 \quad d) \quad f'''(x) = \frac{18}{(2-x)^4}, \quad x \neq 2$$

81) () : د هر مشتق نیونی سره د په توان عدد یا اکسپوننت په 1 کمېږي. د -م مشتق پسي خورا جگ اکسپوننت کیږي. د لاندې بڼې یو ترم منځ ته راځي: $f_{(x)}^{(n)} = k \cdot x^0 = k \cdot 1 = k$ او له دې سره ثابتته k .

$$81. \quad a) \quad f'(x) = 3 \cos 3x$$

$$b) \quad f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$c) \quad f'(x) = 2 \sin \cos x = \sin 2x \quad d) \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 4 \cos 2x$$

84)

$$e) \quad f'(x) = 2x \cos x$$

$$f) \quad f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \cos \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq -1$$

$$81. \quad a) \quad f'(x) = n \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

() : د $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ سره د وېش قاعده استعمال ته ځان رامنځ ته کوي:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$85. \quad f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$86) \quad () \quad \text{لومړۍ امکانات} \quad f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$d) \quad \text{ځنځیري قانون له مخې:} \quad f'(x) = -\frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{بڼه بدلون:}$$

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{دويم امکانات:}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \text{د وېش قانون له مخې:}$$

$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{بڼه بدلون:}$$

87) د ساين همداسې د کوساين توابعو مشتق بيرته يوه له همدې توابعو ده، پس بيا مشتقور دي.

$$88. \quad a) \quad f'(x) = -6 \cdot e^{-2x+1}$$

$$b) \quad f'(x) = 2(x+1)e^{x^2+2x-1}$$

$$c) \quad f'(x) = x \cdot e^x$$

$$d) \quad f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$$

$$e) \quad f'(x) = x^{n-1}e^x(n+x)$$

$$f) \quad f'(x) = k \cdot e^{kx}$$

$$g) \quad f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \cdot 2^{\frac{2}{2x}} \cdot \ln 2, \quad x \neq 0$$

$$h) \quad f'(x) = -3 \ln 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$$

$$i) \quad f'(x) = 1 \cdot a^{\sqrt{x}} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot a^{\sqrt{x}} \cdot \ln a = a^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{x}} \cdot \ln a\right), \quad x > 0$$

$$j) \quad f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

$$k) \quad f'(x) = \frac{e^x(1-e^x) + e^x \cdot e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x - e^{2x} + e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}, \quad x \neq 0$$

$$l) \quad f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$a) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{x})^2} \quad (89)$$

دا چې $\ln \sqrt{x}$ فقط د $x > 0$ لپاره تعريف دی، نو د $(\sqrt{x})^2 = x$ سره اختياط په کار دی.

$$e \quad f(x) = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{پڼه بدلون به راکړي:}$$

د $\frac{1}{2x}$ ترم د ټولو $x \neq 0$ لپاره تعريف دی مگر د مشتق تابعه دومره لوي تعريف سټ نه

شي لروډی لکه f يې چې لري، نو د (1) له مخې مشتق تابع هم د $x > 0$ لپاره تعريف ده.

$$b) \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}, \quad |x| > 2$$

(c) د (1) تابع f د $x > 0$ لپاره تعريف ده. دلته هم د زخيري قانون څخه بڼه بدلون مساعد دی.

$$f(x) = \ln 2 - 3 \ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x} \quad \text{(دلته د } x \neq 0 \text{ له امله ممکن دی)}$$

د f' تعريف سټ بايد د f تعريف سټ برخه سټ وي. له دې امله د (1) له مخې مشتقور دى د $x > 0$ لپاره او نه د $x \neq 0$ لپاره

$$d) f(x) = \ln(x+1) - \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}, \quad x < -1 \vee x > 0$$

$$e) f(x) = 2x \cdot {}_2 \log x \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 1 \cdot {}_2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

$$f'(x) = 2 \frac{\ln x}{\ln 2} + 2 \frac{1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2} (\ln x + 1), \quad x > 0$$

$$f) f'(x) = 4x^3 \cdot \lg x + (x^4 - 1) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{4x^3 \ln x}{\ln 10} + \frac{x^3}{\ln 10} - \frac{1}{x \ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} (4x^3 \ln x + x^3 - \frac{1}{x}), \quad x > 0$$

$$g) f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+2) - \ln x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) - x \ln x}{x(x+2)^2}, \quad x > 0$$

$$h) f'(x) = \frac{4x^3 \ln x - x^4 \cdot \frac{1}{x}}{\ln x \cdot \ln x} = \frac{4x^3 \ln x - x^3}{(\ln x)^2} = \frac{x^3 \cdot (4 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}, \quad x > 0$$

90 () : ماكسيمال تعريف سټ (- ډېرى)

الف: ماكسيمال تعريف سټ: $x_2 = 4, x > 0 \Rightarrow D = \{x \mid x \geq -3\}$

$$\text{لومړى مشتق: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

دا چې مخرج بايد صفر نه وي، نو f د $x > -3$ لپاره مشتقور دى.

$$b) (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow D = \{x \mid x \geq 4 \vee x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$

$$b) (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow D = \{x \mid x \geq 4 \vee x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$

د f تابع د $x_1 = 2$ او لپاره مشتقور ده.

$$c) D = \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}; \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

د f تابع د $x \in \mathbb{R}^+$ لپاره مشتقور ده.

(d) د $x^2 + 2 \geq 2$ له امله $D = \mathbb{R}$ دى.

$$\text{له دې امله } f \text{ په ټول تعريف سټ باندې مشتقور دى. } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

91 () : $f(x) = \ln x$ فقط د $x > 0$ لپاره تعريف دى.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د ټولو $x \neq 0$ لپاره تعريف ده. $f'(x) = \frac{1}{x}$ تابع د لوگاريتمي تابع مشتق په څېر نه شي کېدی د f د تعريف سټ څخه لوی تعريف سټ ولري. پس f' فقط د $x > 0$ لپاره تعريف ده.

$$92) \quad a) \quad D = \{x \mid x > 1\}, \quad f'(x) = \frac{4x^3x^4 - 1}{x}$$

تابع $g(x) = \frac{4x^3}{x^4 - 1}$ به د ټولو $|x| \neq 1$ لپاره تعريف تعريف وايي. د f لپاره د مشتق تابع f' فقط د $|x| > 1$ لپاره تعريف وي. دا له دې سره په ټول تعريف سټ کې شته دی.

$$b) \quad D = \{x \mid x > -2\}, \quad f'(x) = \frac{2}{2x+4} = \frac{1}{x+2}$$

د مشتق تابع په ټول تعريف سټ کې شتون لري يا شته دی.

$$93. \quad a) \quad f'(x) = 4x^9 - x^4$$

$$b) \quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 22x - 7$$

$$c) \quad f'(x) = 40x^7 - 18x^5 - \frac{30}{x^4 + \frac{56}{x^8}}$$

$$d) \quad f'(x) = 6x^2 + 34x - 61$$

$$e) \quad f'(x) = 3\sin x - 2x\cos x$$

$$f) \quad f'(x) = 3\cos x \cdot \sin^2 x$$

$$g) \quad f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$h) \quad f'(x) = x^2 e^x$$

$$i) \quad f'(x) = \frac{5e^x}{(2e^x - 1)^2}$$

$$k) \quad f'(x) = \frac{2e^x(x^3 + x^2 - 3x + 3)}{x^2}$$

$$l) \quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x^2)}{x^3}$$

$$m) \quad f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(1 - x)^2}$$

$$n) \quad f'(x) = \frac{x \cos x \ln x - \sin x}{x \cdot (\ln x)^2}$$

$$o) \quad f'(x) = \frac{3x}{\ln 10} (2 \ln x + 1)$$

$$p) \quad f'(x) = \frac{1}{\tan x}$$

$$q) \quad f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}}$$

$$r) \quad f'(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$$

$$s) \quad f'(x) = e^{-2x}(-2x^2 + 2x - 6)$$

$$94. \quad a) \quad f'(x) = n \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{n \cdot (\ln x)^{n-1}}{x}$$

$$c) \quad f'(x) = \frac{a}{n \cdot \sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}}}$$

$$d) \quad f'(x) = -\frac{n}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$95. \quad a) \quad f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2), \quad f'''(x) = 4xe^{x^2}(3 + 2x^2)$$

$$b) \quad f'(x) = 2\cos^2 x - 1, \quad f''(x) = -4\sin x \cdot \cos x, \quad f'''(x) = -8\cos^2 x + 4$$

$$c) \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$d) \quad f'(x) = (x^2 + 2x)e^x, \quad f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x, \quad f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$$

96 () د طبعي $f(x) = e^x$ اکسپوننشل تابع د $f'(x) = e^x$ له امله ټول مشفقونه د وتنومشتق يا پيلمشتق برابر دي.

97 () :

97 () الف) د $f(x) = e^{2x} = 2 \cdot f(x)$ تابع $f'(x) = 2e^{2x}$ مشتق لري.

ب) د $f(x) = e^{-x}$ تابع $f'(x) = -e^{-x} = -f(x)$ مشتق لري

98 () : د $f(x) = \sin x$ تابع څلورم مشتق $f^{(4)}(x) = \sin x$ لري.

همداسې د $f(x) = \cos x$ لپاره باور لري د $f^{(4)}(x) = \cos x$ سره.

99. a) $f'(x) = ae^{ax}$, $f''(x) = a^2e^{ax}$, $f'''(x) = a^3e^{ax}$, ... $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$

b) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = -1 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$, $f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(x+1)^3}$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (x+1)^{-n}$

100. a) $N_1(-30)$, $N_2(-0.5/0)$, $N_3(2/0)$ b) $N_1(0/0)$, $N_2(2/0)$, $N_3(4/0)$

b) $N_1(0/0)$, $N_2(2/0)$, $N_3(4/0)$ d) $N_1(-\frac{1}{2}/0)$, $N_2(\frac{1}{2}/0)$, $N_3(\frac{1}{3}/0)$

d) $N_1(-2/0)$, $N_2(-1/0)$, $N_3(1/0)$, $N_4(3/0)$

e) $N_1(-5/0)$, $N_2(2/0)$

101 () : ږدو (پاپيل) $f(x) = a(x-2) \cdot x \cdot (x-4)$ د $a = \frac{1}{2}$, $f(2) = -8$ سره

لاس ته راوړنه: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x$

102 () ږدو (پيل) $f(x) = a \cdot (x-3)^2(x-0.5)^2$ د $a = 4$, $f(0) = 9$ سره

پايله: $f(x) = 4x^4 - 28x^3 + 61x^2 - 42x + 9$

103 () : پيل $f(x) = a(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2)$ د $a = \frac{10}{9}$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{8}$ سره

پايله: $f(x) = \frac{10}{9}x^4 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{20}{9}x = \frac{10}{9}(x^4 - 3x^2 - 2x)$

104 () الف) $D = R \setminus \{-4\}$ ږدو (پيل): $x^2 + 2x - 15 = 0$

پايله: $N_1(0,5|0)$, $N_2(3|0)$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $N_1(-2/0)$, $n_2(2/0)$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0,5\}$; $N_1(-1/0)$, $n_2(3/0)$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$; $N_1(0/0)$, $n_2(1/0)$

105 () : $a = 2$, $b = -0.25$ او $d = 0$ په تابع کې سملاسي ږدو، نو لاس ته راځي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 0.25 - 0.5}{x}$$

$$106 \text{ () } : \frac{2}{a} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{a^3}} = \frac{2}{a} \Rightarrow x^3 = \frac{8}{a^3} \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow a^3 x^3 - 8 = 0 \text{ اینوونه صفرخای راکوي:}$$

$$N\left(\frac{2}{a}, 0\right)$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

107 () : د $x=1$ په پوره کوچني چاپیریال کې صفر تل مثبت دی. صورت د $x > 1$ لپاره مثبت دی او د $x < 0$ لپاره منفي. د سره مخنښه بدلیزې او له دې سره سم بدلون د 4 څلورمې (ربع) څخه و 1 څلورمې (ربع) سره صورت نیسي.

108 (الف): د $e^{-x} > 0$ له امله دی د $N_1(-1, 0), N_2(1, 0)$ لپاره $x^2 - 1 = 0$ لپاره. (ب) $\sqrt{6-x}$ او له دې سره سم f د $x \leq 6$ لپاره تعریف دي. $f(x) = 0$ دی د $N_1(0, 0) \Rightarrow x = 0$ او لپاره $N_2(6, 0) \Rightarrow 6 - x = 0$

(پ) $\ln(x+2)$ او f د $x > -2$ لپاره تعریف دي. $f(x) = 0$ دی د $N_1(0, 0) \Rightarrow x = 0$ او $N_2(-1/0)$ لپاره $\ln(x+2) = 0 \Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1$ لپاره. (ت) $\ln x$ او له دې سره f د $x > 0$ لپاره تعریف دی. $f(x) = 0$ دی د $N_1(\sqrt{2}, 0) \Rightarrow x^2 - 2 = 0$ لپاره او د $\ln x$ لپاره لرو: $N_2(1, 0)$ یادونه: د مساوات دویم حل مو (1) صفرخای ته بیایو ځکه چې $x = -\sqrt{2}$ تعریف سټ پورې اړه نه لري.

$$\text{(ت)} \quad f(x) = 0 \text{ دی، ځکه چې } N(0/0) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 1+x = 1-x \Rightarrow \frac{1+x}{x-x} = 1$$

$$\text{(ث)} \quad f(x) = 0 \text{ دی، ځکه چې } N(0/0) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 1+x = 1-x \Rightarrow \frac{1+x}{x-x} = 1$$

$$\text{(ج)} \quad f(x) = 0 \text{ ځکه چې } N(0, 0) \Rightarrow 3x = 0$$

$$109 \text{ () } \text{ د } 3x = k\pi \text{ سره صفرخایونه په } x = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ کې پراته دي.}$$

په ورکړ شوي انټروال کې په دې ځایونو کې:

$$-2\pi - 5\frac{\pi}{3}, -4\frac{\pi}{3}, -\pi, -2\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\frac{\pi}{3}, \pi, 4\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}, 2\pi$$

$$\text{(ب)} \quad \text{صفرخایونه په } x = (k - \frac{1}{4}) \cdot \pi = (4k - 1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ کې پراته دي.}$$

$$\text{په ورکړ شوي انټروال کې صفرخایونه: } i - \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{(پ)} \quad \text{صفرخایونه په } x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ کې پراته دي.}$$

$$\text{په ورکړ شوي انټروال کې صفرخایونه: } i - \frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

ت (صفرخایونه په $x = k \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = (3k+1) \cdot \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$ کې پراته دي.

په ور کړ شوي انټروال کې صفرخایونه: $-\frac{11}{6}\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$

110 (الف) : $x=1$ لپاره $\ln x=0$ دی. د $x^2 \geq 0$ له امله $x^2+3 \geq 3$ دی او له دې سره د $\ln x=1$ لپاره اړین ارزښت 1 نه شي نیولی.

ب ($x^2+1 \geq 1$) دی او له دې امله په کوم ځای کې صفر نه دی. دلته مخرج بي معنا دی.

پ (د $e^x > 0$ ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره دی. دلته هم مخرج بي معنا دی.

ت (د $\sin^2 x \geq 0$ له امله $1+\sin^2 x \geq 1$ دی او له دې امله په کوم ځای کې صفر نه دی.

111 () : یوه تابع یو تنظیم $x \rightarrow f(x)$ دی، د کوم سره چې د یوه x سره یواځنی یو

$f(x)$ ترتیب یا تنظیم شوی وي. له دې امله کېدی شي $x=0$ سره ټیک یو $f(x)$ تابع

ارزښت تنظیم شوی وي. او له دې سره ټیک یو غوڅتکی د y محور سره ولري. او په څټ

کېدی شي د تعریف سټ یو ارزښت د ارزښت سټ په ډېرو توکو تنظیم شوی وي. د $f(x)=0$

تابع ارزښت کېدی شي ډېرواره رامنځ ته شي، چې د ډېرو صفرخایونو په معنا دی.

112 () : که یوه تابع د خپل تعریف سټ باندې برعکس کېدونکی وي، باید سربېره پردې

نظم $x \rightarrow f(x)$ یواځنی وي (یعنې معکوس کېدونکی هم وي)، دا په دې معنا چې

$f(x)=0$ تابع ارزښت ټیک یو وار نیول کېدی شي، چې بېلا بېل صفرخایونه ناممکنوي.

$$113. \quad a) S_y(0/-1) \quad b) S_y(0/0)$$

$$c) S_y(0/0) \quad b) S_y(0/\frac{4}{3})$$

$$e) S_y(0/-\frac{2}{e}) \quad b) S_y(0/e^2)$$

114 () : وي دي: $f(0) = a_n \cdot 0 = a_{n-1} \cdot 0 + \dots a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$

یو تام راشنل تابع د y محور تل د هغه په مطلق ارزښت کې غوڅوي $y = a_0 : P(0, a_0)$.

$$115). \quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1, \quad f(1) = -1, \quad f'(x) = -3; \quad f(2) = -1, \quad f'(2) = 7$$

116 () $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$ صفرخایونه: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$

جگنده: $f'(-1) = 3, f'(0) = -2, f'(2) = 6$

$$117. \quad f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1; \quad P_1(0/-4), \quad P_2(0.5/-3.47), \quad P_3(1/-3)$$

$$118. \quad f'(x) = x^2 - x - 6 \quad ; \quad P_1(-2/11), \quad P_2(3/-\frac{1}{2})$$

$$119. \quad a) \quad f'(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 4}{x^2} \quad ; \quad f(1) = 4, \quad f'(1) = -3$$

$$b) \quad f(-3) = 6, \quad f'(-3) = -8$$

$$120) \text{ () : لومړی مشتق } f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

$$\text{پیل: } 2 = \frac{x^2 + 4}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$

که $x_1 \wedge x_2$ په تابع ارزښت کې کیږدو، نو لاس ته ترې راځي: $P_1(-2, 0) \wedge P_2(2, 0)$

$$b) P(-1/-3)$$

$$121. \quad a) f(1) = 0, f'(x) = \ln x + 1, f'(1) = 1 \quad b) f(\sqrt{\pi}) = 0, f'(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$$

$$122. \quad a) f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}, x_1, x_2 = 2 \quad b) x_1 = 0$$

$$123) \text{ () : لومړی مشتق } f'(x) = (x + a + 1) \cdot e^x$$

$$\text{ځای په ځای کړئ: } 2 = e^0 \cdot (0 + a + 1) \Rightarrow 2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$$

$$124. \quad a) H(-1/15), T(3/-17)$$

$$b) H(-1/4.5), T(2/-9)$$

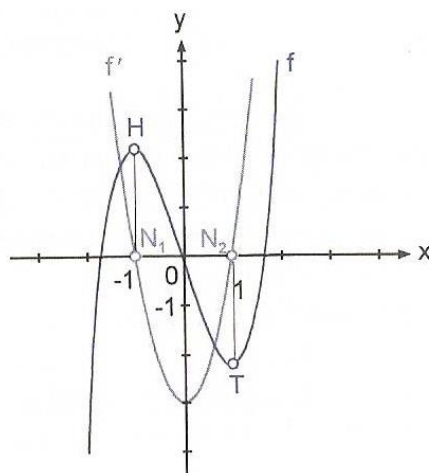
$$c) H(0.5/10.5), T(2.5/5.5)$$

$$d) H(0/5), T_1(-\sqrt{2}/1), T_2(\sqrt{2}/1)$$

$$e) H(-2/48), T(2/-48)$$

$$f) H(2/3\frac{1}{3}), T_1(0/-2), T_2(3/2.5)$$

125) () الف: د f گراف یو خورا جگ ټکی H په -1 کې لري او خورا ټیټ ټکی T په 1 کې. د گراف په دې ځایونو کې د f' گراف صفر ځایونه $N_1 \wedge N_2$ لري.



ب) د f گراف یو جگ ټکی H په -2 کې لري او یو ټیټ ټکی T په 0 کې لري. په دې ځایونو کې د f' گراف صفر ځایونه $N_1 \wedge N_2$ لري.

126) () : د n -مې درجې یو ټول هوښیار یا راشنل تابع یو د $(n-1)$ -مې درجې د مشتق تابع لري. د $(n-1)$ -مې درجې تابع زیات له زیاته $n-1$ صفر ځایونه لري. له دې امله n -مې درجه ټول راشنل تابع زیات له زیاته $n-1$ انحرافي ځایونه لري.

127) () : کېد شي حالت $f''(x) = 0$ منځ ته راشي. نو بیا د دویم مشتق په مرسته کېدی نه شي د انحراف ټکی په هکله پرېکړه وشي.

که په x_0 کې د لومړي مشتق روسته د مخنځېني تغیر له مثبت څخه و منفي ته صورت ونیسي، f د x_0 په ځای کې یو جگړکی لري، سره له دې چې شرایط $f''(x) < 0$ پوره نه دي.

128 (الف): لومړی مشتق $f'(x) = 2x^2 + 8x + 8$

دویم مشتق $f''(x) = 4x + 8$

د انحرافي ارزښت لپاره اړین شرطونه $f'(x) = 0$

$$2x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د پوره کېدونکي شرایطو لپاره شرطونه: $f''(-2) = 0$

د مخنځېني تغیر ازمايښت: $f'(-3) = 18 - 24 + 8 = 2$, $f'(-1) = 2 - 8 + 8 = 2$

دا چې د پوره کېدونکي شرایطو څخه کوم یو پوره نه دي، د f گراف انحراف ځای نه لري.

(ب) لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{4}{3}x^3$

2 مشتق: $f''(x) = 4x^2$ $x_1 = 0$

د $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 \Rightarrow x = 0$ سره

د مخنځېني بدلون له امله $f'(-1) = -\frac{4}{3}$ او $f'(1) = \frac{4}{3}$

د f تابع ټیټکی $T(0,1)$ لري

(پ) لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3}$

۲ مشتق: $f''(x) = 4x^2 - 4$

د انحراف ټکي لپاره اړین شرایط: $f'(x) = 0$

$$\frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

د پوره کېدونکو شرایطو لپاره ازمايښت: $f''(-2) = 4.4 - 4 = 12$

له دې لاس ته راځي چې $T(-2,-8)$ ټیټکی دی.

$$f''(1) = 4.1 - 4 = 0$$

د $f''(1) = 4.1 - 4 = 0$ پرېکړه ممکن نه ده.

د $x = 1$ ره د لومړي مشتق د مخنځېني ازمايښت.

$$f'(0) = \frac{8}{3}, f'(3) = \frac{4}{3} \cdot 27 - 4 \cdot 3 + \frac{8}{3} = 26\frac{1}{3}$$

د $x = 1$ لپاره د لومړي مشتق د مخنځېني تغیر مخ ته نه لرو. له دې امله $T(-2,-8)$ واځنی د انحراف ټکی دی.

(ت) د $f'(x) = 4x^3 = 0$ له امله کېدی شي انحرافي ځایونه د $x_1 = 0$ ځای پراته وي. د

د مخنځېني تغیر د یوه ټیټکي $T(0,-4)$ لپاره پوره کېدونکي شرایط پوره کوي.

129. a) $T(4/-1), H(1.5/9)$ b) $T(0/0), H(2/-4)$
 c) $T(0/-2)$ d) $T(-1/-0.5), H(1/0.5)$
 130. a) $H(0/1)$ b) $H(-3/0), T(1/-5.44)$
 c) $T(0/1)$ $T(0/0)$

131 (الف) لومړی مشتق $f'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$

دویم مشتق: $f''(x) = 2 \cos 2x$

اړین شرایط: $f'(x) = 0$

$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ لپاره. په ورکړشوي انټروال کې د

$2\pi, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{1\pi}{2}, 0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ لپاره پوره کېدونکي شرایط:

$$f''\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) 2 \cos\left(2x \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos k\pi = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ -1, & k = 2n + 1 \end{cases}$$

د f تابع لاندې جگ ټکي

$$H_1\left(-\frac{3}{2}\pi/1\right), H_2\left(-\frac{1}{2}\pi/1\right), H_3\left(\frac{1}{2}\pi/1\right), H_4\left(\frac{3}{2}\pi/1\right)$$

او لاندې ټیټېکي

$T_1(-2\pi/0), T_2(-\pi/0), T_3(0/0), T_4(\pi/0), T_5(2\pi/0)$ لري.

د $2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi$ لپاره $f'(x) = 0$ دی. که په دویم مشتق کې په $x_1 = 0$ کې جگټکی لري که په دویم مشتق کې کېښول شي. او تشټیکې لري د $x_2 = -2\pi \wedge x_3 = 2\pi$ سره.

132 (الف) د f تعریف ساحه: $f : D = \{x \mid x \leq -1 \vee x \geq 0\}$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \text{ لومړی مشتق:}$$

دا د $x_1 = -1 \wedge x_2 = 0$ لپاره له D تعریف نه ده.

لرو $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -0.5$ لپاره.

دا x_1 په تعریف سټ پورې اړه نه لري یا په تعریف سټ کې نه دی پروت، نو له پیله کوم انحرافي ارزښت گومان ته نه راځي.

د $f(x) \geq 0$ له امله د $x \in D$ لپاره د ژی ټکو مطالعه عمومي ټیټ ټکي $T_1(-1,0) \wedge T_2(0,0)$ منځ ته راوړي.

ب) د f تعریف سټ: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \text{ لومړی مشتق د ټولو } x \in D \text{ لپاره تعریف دی.}$$

لرو $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ لپاره. په $x_1 = 0$ کې د مخنځینې بدلو سره د لومړي مشتق یو لوکال ټیټ ټکی $T(0, \sqrt{3})$ راځي. د $x \in D$, $f(x) \geq \sqrt{3}$ له امله دا یو ټولیز ټکی دی.

پ) د f تعریف ورشو: $D = \mathbb{R}_0^+$

لومړۍ مشتق $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ د $x_1 = 0$ لپاره چې $x_1 \in D$ وي تعريف نه دی.

لرو $f'(x) = 0$ د $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$ لپاره. د ژۍ ټکي مطالعه لوکال

جگټکي $H(0,0)$ راکوي.

د $x \rightarrow \infty$ لپاره $f(x) \rightarrow \infty$ هڅيږي، نو له دې امله $T(0,25, -0,5)$ ټوليز ټيټکي دي.

(ت) د f تعريفست: $D = R$

لومړۍ مشتق: $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$ د $x_1 = 0$ لپاره تعريف نه دی.

له دې سره لومړۍ د کومو انحرافي ټکو گوان نه کيږي. د $x_1 = 0$ مطالعو څخه لرو $f(0) = 3$.

نور ټول ټکي د $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2} \geq 3$ له امله يو لوي تابع ارزښت لري. $T(0,3)$ يو ټوليز ټيټکي دی.

133 (الف) لرو

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & x \geq 0 \\ -x + x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + 2x & x \geq 0 \\ -1 + 2x & x < 0 \end{cases}$$

د $x \geq 0$ لپاره د $f'(x) = 0$ له امله د $x_1 = 0,5$ لپاره کوم انحرافي ارزښت شتون نه لري. په همدې کمۍ د $x \leq 0$ لپاره هم.

$$f(0) = \begin{cases} 0 + 0^2 = 0 \\ -0 + 0^2 = 0 \end{cases} \text{ د ژۍ ټکي مطالعه.}$$

دا نور ټول د f تابع ارزښتونه له $T(0,0)$ څخه لوی دي، نو دا ټوليز مينيموم دی.

(ب) لیکندود پرته د مطلقه ارزښت يا له مطلقه ارزښت ازاد لیکودود:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 8 & -4 < x < 2 \\ x^2 + 2x - 8 & x < -4 \vee x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

په انټروال کې حل نه شته

تابع یو د $H(-1,9)$ لوکال ټيټکي لري، همداسې $T_1(-4,0) \wedge T_2(2,0)$ د ټوليز ټيټکو په څېر.

$$134. a) W_1(-2/-8\frac{2}{3}), W_2(2// -4\frac{2}{3})$$

$$b) W(2/-1)$$

(پ) د $f''(x) = x^2 = 0$ د $x_1 = 0$ لپاره. دا چې $f''(0) = 2.0 = 0$ هم دي او $f''(x) = x^2$ د $x_1 = 0$ په چاپېريال کې د مخنځې بدلون نه لري، نو f کوم د انعطاف ټکی نه لري.

(ت) $W(2,-1)$

135 (الف) دا یواځنی $W(0,-1)$ د انعطاف ټکی حتی زینټکی دی.

(ب) اړین شرایط $f''(x) = 0$ د $x_1 = 1 \wedge x_2 = \frac{1}{3}$ لپاره پوره دي.

د $f'(1)=0 \wedge f'''(1) \neq 0$ له امله $W_1(1, \frac{43}{81})$ زینتکی دی.

$W_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ د انعطاف ټکی دی، مگر زینتکی نه دی.

136 () د اړین شرایطو لپاره باید دویم مشتق صفر وي. د دویم مشتق درجه د ټول هوښیار (راشنل) $n-2$ م درجې تابع لپاره $n-2$ دی. د $(n-2)$ م درجې مساوات زیات په اړین شرایطو کې له زیاته $n-2$ حلونه شتون لري. له دې امله یو د $n-2$ مې درجې ټول راشنل تابع زیات له زیاته $n-2$ د انعطاف ټکي (اورونټکي) لري.

137 () یو د انحراف ټکی په همدې وخت کې د انعطاف ټکی نه شي کېدی. د انعطاف ټکي لپاره اړین شرایط $f''(x)=0$ دي. د انحراف ټکو لپاره پوره کېدونکي شرایط شرطونه $f''(x) \neq 0$ دي، نو دا یو تضاد دی.

$$138. \quad a) \quad W(3/\frac{4}{9}) \quad b) \quad W_1(-3/-\frac{1}{4}), W_2(0/0), W_3(3/\frac{1}{4})$$

$$c) \quad W(0/0) \quad d) \quad W(2/0)$$

$$139. \quad f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow x_1=0$ د ممکنه انعطاف ټکي په حیث.

$$f''(-0.5) = \frac{-0.25 - 3}{(-0.75)^3} = + \frac{3.25}{0.75^3} > 0$$

$$f''(0.5) = \frac{0.25 + 3}{(-0.75)^3} = - \frac{3.25}{0.75^3} < 0$$

له امله $W(0,0)$ د انعطاف ټکی دی او د $f'(0) = \frac{0+0}{1} = 0$ له امله حتی زینتکی.

140 () الف : د انعطاف ټکي په $-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}$ کې پراته دي.

په تابع مساوات کې ایښوونه او گردونه یې لاندې د انعطاف ټکي ورکوي:

$$W_1(-1, 22, -0, 27), W_2(0, 0), W_3(-1, 22, -0, 27)$$

ب) د انعطاف ټکي په 1 او -1 کې پراته دي. په تابع مساوات کې یې ایښوونه او گردونه یې لاندې د انعطاف ټکي ورکوي:

$$W_1(-1, -0, 69), W_2(1, -0, 69)$$

$$141. \quad a) \quad f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x$$

د $\sin x = 0$ سره f په $0, \pi, 2\pi$ کې د انعطاف ټکي لري.

ب) د انعطاف ټکی په $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ کې پراته دي.

$$142. \quad a) \quad \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x+3$$

په $x=2$ کې د $f(2)=5$ سره یوه له منځه تونکې تعریفشیا پرته ده.

ب) دا چې تجزیه شونې نه ده، نو f په $x = -2$ کې یو قطبټکی لري د مخنځې بدلون سره.

$$c) \frac{x}{x^2 - 3} = \frac{x}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}$$

تابع په $x_1 = -\sqrt{3}$ او $x_2 = \sqrt{3}$ کې قطبټکي لري د مخنځې تغیر سره.

$$d) \frac{x^2 - 1}{1 + x} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$$

په $x = -1$ کې f د $f(-1) = -2$ سره یوه ناپرېکېدونکې له منځه تلونکې یا وړنکې تعریفشیا لري.

متأسفانه چې ټولې پوښتنې په کې نه دي ځواب شوي.
دا په ډېر وړمنۍ نور مې له وسه پوره نه دی، چې پسې وگرځم.

د انتیګرال پوښتنو ته ځوابونه

د لومړۍ پوښتنې اوبی یا حل:

1. a) $\frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5} = x^2 + 2x + 1$
- b) $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2} = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2 - 2}$
- c) $\frac{x^3 - 2x^3 + x - 5}{x^3 + 1} = 1 - \frac{2x^2 - x + 6}{x^3 + 1}$
- d) $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = x - 1$
- e) $\frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2} = x^3 + 4x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x - 2}$
- f) $\frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2} = x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{4x - 3}{x^2 + 2}$

دویم - الف: د کسر په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه یا تجزیه

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

دا راکوي

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$A=4, \quad B=1, \quad C=-3$$

دا مو ټوټه کسر ټوټه کوني ته بيايي.

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}$$

ب - د مخرج په کرښيز ضريبونو ټوټه کونه يا تجزيه

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

پ - د مخرج کرښيز ضريبونو ټوټه کونه يا تجزيه

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

په ټوټه کسر ټوټه کونه:

$$\frac{4x+10}{x^2+6x+8} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

$$1. \quad a) \quad \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x+5} = x^2 + 2x - 1$$

$$b) \quad \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2} = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2 - 2}$$

$$c) \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1} = 1 - \frac{2x^2 - x + 6}{x^3 + 1}$$

$$d) \quad \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = x - 1$$

$$e) \quad \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x-2} = x^3 + 4x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

$$f) \quad \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 - 2} = x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{4x-3}{x^2+2}$$

دويم: الف) د ماتلاندې يا مخرج په کرښيزه ضريبونو ټوټه کونه (تجزيه)

$$2. \quad a) \quad (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x-2)(x+3)$$

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

د $A=4$; $B=1$ او $C=-3$ سره

دا مو ټوټه مات (کسر) ټوټه وني ته لارښودوي

$$2x^2 + 20x + 12 \quad 4 \quad 1 \quad 3$$

$$A = 4, \quad B = 1, \quad C = -3$$

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}$$

ب) د مائلاندې يا مخرج په کرښيزه ضریبونو ټوټه کونه يا تجزیه

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

پ) د مخرج يا مائلاندې په کرښيز ضریبونو ټوټه کونه

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

ت) د مخرج په کرښيز ضریبونو ټوټه کونه

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-1)(x+2)$$

$$d) \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$e) \quad x^3 - 4x = (x-2) \cdot x \cdot (x+2)$$

$$\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x+2}$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ټ) د مخرج په کرښيز ضریبونو ټوټه کونه

$$x^3 - 4x = (x-2) \cdot x \cdot (x+2)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x+2}$$

ث) د مخرج په کرښيز ضریبونو ټوټه کونه

$$f) \quad x^2 + 20x + 51 = (x+3)(x+17)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{14}{x^2 + 20x + 51} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+17}$$

دریم: الف) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$3. \quad a) \quad x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x-2) \cdot (x+2)^2$$

$$\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$b) \quad x^3 - 6x^2 + 9x = (x-3)^2 \cdot x$$

$$\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x} = -\frac{1}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2} + \frac{4}{x}$$

پ: د ماتلاندې یا مخرج په کرښیز ځلونو یا ضریبونو ټوټه کونه

$$c) \quad x^4 - 2x^2 + 1 = (x-2)^2 \cdot (x+1)^2$$

په ټوټه مات ټوټه کونه:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} = -\frac{3}{4(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

ت) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$d) \quad x^3 - 5x^2 = (x-5) \cdot x^2$$

$$-\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2} = -\frac{4}{x-5} + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

پارشلکسر ټوټه کونه

څلورم: الف) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$4. \quad a) \quad x^3 + 2x^2 + 6x + 5 = (x^2 + x + 5)(x+1)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} = \frac{2x+3}{x^2 + x + 5} - \frac{3}{x+1}$$

ب) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$b) \quad x^3 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x+2)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4} = \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{3}{x+2}$$

د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$c) \quad x^3 - 4x^2 + 5x = (x^2 - 4x + 5) \cdot x$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{8x^2 + 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \frac{6x - 8}{x^2 - 4x + 5} + \frac{2}{x}$$

ت) د مخرچ په کرښیز ضربونو ټوټه کونه

$$d) \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)(x + 1)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x + 1}$$

پنځم: الف) پولینوم وېش

$$5. \quad a) \quad \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} = x + 1 + \frac{2x + 11}{x^2 + 6x + 8}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} = x + 1 + \frac{3}{2(x + 2)} + \frac{3}{2(x + 4)}$$

ب) پولینوم وېش

$$b) \quad \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} = 2x^2 + 1 + \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} = 2x^2 + 1 - \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3}$$

پ) پولینوم وېش

$$c) \quad \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

ت) پولینوم وېش

$$d) \quad \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = 4 - \frac{11x + 25}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = 4 - \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{2}{x + 3}$$

شپږم: الف) د بنوونې لپاره مشتق $F'(x)$ جوړیږي.

د جمعي قانون او د توان قانون:

$$a) \quad F'(x) = 2 \cdot 2x + 4 = 4x + 4$$

ب) ځنډیږي قانون:

$$F(x) = u^3 \quad u(x) = x^2 - x, \quad u'(x) = 2x - 1$$

$$F'(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

خُنْزِيرِي قَانُون

6. a) $F'(x) = 2 \cdot 2x + 4 = 4x + 4$

b) $F(x) = u^3 \quad u(x) = x^2 - x, \quad u'(x) = 2x - 1$

$$F'(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

c) $F(x) = \sqrt{u} \quad u(x) = 2x + 1, \quad u'(x) = 2$

$$F'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

d) $F'(x) = 0 + 3 \cdot \cos 3x = 3 \cdot \cos 3x$

e) $F'(x) = x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{9} \cdot 3x^2 = x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{4}{3} x^2$

$$F'(x) = x^2 \cdot \ln x - x^2 = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

7. a) $F'(x) = 3x^2 + 1, \quad G'(x) = 3x^2 + 1$

$$F'(x) = G'(x)$$

b) $F'(x) = 2(x - 3) = 2x - 6, \quad G'(x) = 2x - 6$

$$F'(x) = G'(x)$$

c) $F'(x) = \frac{1 \cdot (x + 2) - (x + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{1}{(x + 2)^2},$

$$G'(x) = \frac{3 \cdot (x + 2) - 3x + 5 \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{1}{(x + 2)^2}$$

$$F'(x) = G'(x)$$

d) $F'(x) = 0 + \cos x = \cos x, \quad G'(x) = \cos x$

$$F'(x) = G'(x)$$

8. a) $F(x) = x^2 + c$

$$2 = 1^2 + c \Rightarrow c = 1$$

b) $F(x) = x^2 + 1$

$$-2 = \sin \pi + c \Leftrightarrow -2 = 0 + c \Rightarrow c = -2$$

c) $F(x) = e^x + c$

$$3 = e^0 + c \Leftrightarrow 3 = 1 + c \Rightarrow c = 2$$

d) $F(x) = 2x^3 + c$

$$0 = 2 \cdot (-1)^3 + c \Leftrightarrow 0 = -2 + c \Rightarrow c = 2$$

$$9. \quad a) \quad F'(x) = f(x)$$

$$f(x) = F'(x) = 4x + 1$$

$$b) \quad f(x) = F'(x) = 3x^2 - 3$$

$$c) \quad f(x) = F'(x) = 1 + 2 \cdot \cos x$$

$$d) \quad f(x) = F'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \cdot (1 + x)$$

لیم: د یوې بلواکې یا تابع f ټول بنسټیزې تابع F یواځې په یوې ثابتې c یو له بل توپیر لري. له دې امله دا یوه ډله (شار) جوړوي، چې y -لور باندې راکښل شوی گراف دی. یولسم: د رابیلیدنې لار (د مشتق قانون) لاس ته راونه یا نتیجه راکوي.

$$11. \quad a) \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad \int (x+4) \, dx = \frac{x^2}{2} + 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$c) \quad \int 2 \, dx = 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$d) \quad \int (1 - \cos x) \, dx = x - \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

دولسم: الف؛ د انتیگریشن اووښتوني یا واریابلي s سره راکوي:

ب: د انتیگریشن اووښتوني یا واریابلي u سره راکوي:

پ: د انتیگریشن اووښتوني یا واریابلي t سره راکوي:

$$12. \quad a) \quad \int ms^2 \, dx = \frac{1}{3} mx^3 + c$$

$$b) \quad \int u \cdot \sin t \, du = \frac{1}{2} u^2 \cdot \sin t + c$$

$$c) \quad \int at \, dt = \frac{1}{2} at^2 + c$$

$$d) \quad \int \frac{1}{4} v^3 \cdot \sqrt{e} \, dv = \frac{1}{16} v^4 \cdot \sqrt{e} + c$$

دیارلسم:

$$13. \quad a) \quad \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} = c$$

$$b) \quad \int 7 \, dx = 7x + c$$

$$c) \quad \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$d) \quad \int (1 - x^2) \, dx = x - \frac{x^3}{3} + c$$

$$e) \quad \int \left(x + \frac{1}{x}\right) \, dx = \frac{x^2}{2} + \ln |x| + c$$

$$f) \quad \int (e^x + \cos x) \, dx = e^x + \sin x + c$$

$$g) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$h) \quad \int \frac{5}{\cos^2 x} \, dx = 5 \tan x + c$$

$$i) \quad \int u \, dx = ux + c$$

$$k) \quad \int (2x + e^x) \, dx = 2x + e^x + c$$

$$l) \quad \int (1 + \ln x) \, dx = x \cdot \ln x + c$$

$$m) \quad \int (\sqrt{x} + \sin x) \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \cos x + c$$

څوارلسم:

$$14. \quad a) \int_0^3 4x dx = [4x]_0^3 = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = 12$$

$$b) \int_{-3}^{-1} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{-1} = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} = -4$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$d) \int_1^e \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = [2x + \ln |x|]_1^e = 1 + 1 - (2 + 0) = 2e - 1$$

$$e) \int_{-1}^0 e^x dx = [e^x]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(e - 1)$$

$$f) \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$

$$g) \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})$$

$$h) \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})$$

$$i) \int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 4 - 4 = 0$$

$$k) \int_2^6 (1+x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^6 = 6 + \frac{6^2}{2} - (2 + \frac{2^2}{2}) = 6 + 18 - 2 - 2 = 20$$

$$l) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^6}{6} - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^6}{6} \right) = -\frac{49}{6}$$

$$m) \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} \right) dx = \left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} \right]_{-2}^0 = 0 + 0 - \left(\frac{(-2)^4}{16} + \frac{(-2)^3}{9} \right) = -\frac{1}{9}$$

پنخلم:

$$15. \quad a) \int_{-3}^1 3x dx = [3x]_{-3}^1 = 3 - (-9) = 12 \quad ; \quad - \int_1^{-3} 3x dx = [3x]_1^{-3} = -(-9 - 3) = 12$$

$$b) \int_0^1 (1 + e^x) dx = [x + e^x]_0^1 = e \quad ; \quad - \int_0^1 (1 + e^x) dx = -[x + e^x]_0^1 = e$$

$$c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx = [\cos x]_{-\pi}^0 = -2 \quad ; \quad - \int_0^{-\pi} \sin x dx = -[-\cos x]_0^{-\pi} = -2$$

شپارلم:

$$\begin{aligned}
 16. \quad a) & \int_0^{\pi} \cos x dx & b) & - \int_{-1}^1 (x + e^x) dx \\
 c) & \int_2^3 3x^2 dx - \int_5^3 3x^2 dx = \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^5 3x^2 dx = \int_2^5 3x^2 dx \\
 d) & \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_4^1 (2+x) dx = \int_{-2}^1 (2+x) dx + \int_1^4 (2+x) dx = \int_{-2}^4 (2+x) dx
 \end{aligned}$$

اولسم:

$$\begin{aligned}
 17. \quad a) & \int_1^{2e} \frac{1}{x} dx = \ln 2e ; \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_e^{2e} \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 1 + \ln 2e - \ln e = \ln 3e \\
 b) & \int_{-1}^2 6x^2 dx = 18 ; \int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^2 6x^2 dx = 2 + 16 = 18 \\
 c) & \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 ; \int_0^{0.5\pi} \sin x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \sin x dx = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

اتلسم:

الف: د اکسپوننشل تابع $f(x) = e^{x+3}$ گراف یو غریز جگیدونکی. له دې امله د انټروال $[-4, -2]$ د ژۍ ارزښتونه غوښتونکي بندیزونه راکوي.

$$18. \quad a) e^{-4+3} \cdot (-2 - (-4)) \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq e^{-2+3} \cdot (-2 - (-4))$$

$$e^{-1} \cdot 2 \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq e^1 \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{2}{e} \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq 2e$$

ب: د کرښیز تابع $f(x) = 1 + x$ گراف یو غریز جگیدونکی دی. د ریښې تابع $f(x) = \sqrt{x}$ د مونوټوني له امله د $f(x) = \sqrt{1+x}$ گراف هم یو غریز جگیدونکی دی. له دې سره د انټروال $[0, 8]$ ژۍ ارزښتونه غوښتونکي بندیزونه یا که غواړۍ بندونه دي.

$$b) \sqrt{1+0} \cdot (8-0) \leq \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \leq \sqrt{1+8} \cdot (8-0)$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \leq 24$$

پ:

د تابع $f(x) = a^x$ گرافونه اکسپوننشل گری یا منحي دي، چې د $a < 1$ له پاره یو غریز لویدونکي

دي. له دې سره د $f(x) = 2^{4-x} = 2^4 \cdot 2^{-x} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ گراف د $\frac{1}{2} < 1$ له امله یو غریز لویدونکي اکسپوننشل گره ده.

د انټروال $[3; 5]$ دواړه ژۍ غوښتونکي بندیزونه یا دیوالونه دي.

$$2^{4-5} \cdot (5-3) \leq \int_3^5 2^{4-x} dx \leq 2^{4-3} \cdot (5-3) \Leftrightarrow 1 \leq \int_3^5 2^{4-x} dx \leq 4$$

ت: د $f(x) = \sin^2 x$ گراف د $0 \leq x \leq 1$ سره تړلی دی یا رابند دی. له دې سره 0 او 1 غوښتونکي بندیزونه دي.

$$0 \cdot (0.5\pi - 0) \leq \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx \leq 1 \cdot (0.5\pi - 0) \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx \leq \frac{1}{2}\pi$$

نولسم: الف : انتیگریشن

$$\int_1^x 5t^4 dt = x^{5-1}$$

$$I_a(x) = 31 \Rightarrow x^5 - 1 = 31 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2$$

ب : انتیگریشن

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

$$I_a(x) = e - 1 \Rightarrow e^x - 1 = e - 1 \Leftrightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$$

شلم:

$$20. \quad a) \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - 9 \qquad b) \int_0^x (2 + e^t) dt = 2x + e^x - 1$$

$$c) \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan x \qquad d) \int_a^x 2 dt = 2(x - a)$$

یو وېشتم:

$$21. \quad a) \int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x \cdot \sqrt[4]{x^3} + c$$

$$b) \int \frac{1}{\sqrt[2]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + c$$

$$c) \int \sqrt[6]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{6}} dx = \frac{6}{11} x \cdot \sqrt[6]{x^5} + c$$

$$d) \int x^{23} \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{3}{10} x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$f) \int \frac{x^3}{x^4} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$g) \int \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{18}{6} + \frac{2}{6} - \frac{2}{3}} dx = \int x^{\frac{17}{6}} dx = \frac{6}{23} x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} + c$$

$$h) \int \frac{\sqrt[4]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x^3}} dx = \int x^{\frac{2}{4} - \frac{4}{4} - \frac{6}{4}} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

دوه وېشتم:

$$22. a) \int 8x^3 dx = 8 \int x^3 dx = 2x^4 + c$$

$$b) \int -4x^{-2} dx = -4 \int x^{-2} dx = \frac{4}{x} + c$$

$$c) \int \frac{3}{-x^3} dx = - \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2x^2} + c$$

$$d) \int \sqrt[3]{3x} dx = \sqrt[3]{3x} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4} x \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$$d) \int k \cdot e^x dx = k \int e^x dx = k \cdot e^x + c$$

$$f) \int -5x^n dx = -5 \int x^n dx = -\frac{5}{n+1} x^{n+1} + c ; n \neq -1$$

$$g) \int \frac{\sin x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + c$$

$$h) \int \frac{3a}{2 \cdot \cos^2 x} dx = \frac{3a}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{3a}{2} \tan x + c$$

$$i) \int \frac{2\sqrt{x}}{3x^3} dx = \frac{2}{3} \int x^{-\frac{5}{2}} dx = -\frac{4}{9\sqrt{x^3}} + c = -\frac{4\sqrt{x}}{9x^2} + c$$

$$k) \int \frac{-\sqrt{2}}{3x} dx = -\frac{\sqrt{2}}{3} \int \frac{1}{x} dx = -\frac{\sqrt{2}}{3} \ln |x| + c$$

$$\begin{aligned}
23. \quad a) \int e^{x+3} dx &= \int e^x \cdot e^3 dx = e^3 \int e^x dx = e^3 \cdot e^x + c = e^{x+3} + c \\
b) \int (4x)^3 dx &= \int 4^3 \cdot x^3 dx = 4^3 \int x^3 dx = 4^3 \cdot \frac{1}{4} x^4 + c = 16x^4 + c \\
c) \int a \cdot e^{x+b} dx &= a \cdot e^b \int e^x dx = a \cdot e^b \cdot e^x + c = a \cdot e^{x+b} + c \\
d) \int (7x^2)^4 dx &= 7^4 \int x^8 dx = 7^4 \cdot \frac{1}{9} x^9 + c = \frac{7^4 \cdot x^9}{9} + c = \frac{2401 \cdot x^9}{9} + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
24. \quad a) \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + c & \qquad b) \frac{x^2}{2} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c \\
c) \frac{5x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 4x + c & \qquad d) \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c \\
e) \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + c & \qquad f) \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + c \\
g) \frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} - \frac{1}{x} + c & \qquad h) -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + c \\
i) \frac{5x^2}{2} - \ln|x| + \frac{\sin x}{3} + c & \qquad k) 5x + \frac{x^6}{6} - \cos x + c \\
l) e^x + \cot x + c & \qquad m) \tan x + \ln|x| + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
25. \quad a) \int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx &= \int \left(x^5 - 3x^3 + 3x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + c \\
b) \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 + \sqrt{x} \right) dx = 2\sqrt{x} - 2x + \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{3} + c \\
c) \int \frac{e^{2x} + e^{x+2}}{e^x} dx &= \int (e^x + e^2) dx = e^x + x \cdot e^2 + c \\
d) \int \frac{3x^2 + 2x - 4}{x^3} dx &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx = 3 \cdot \ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + c
\end{aligned}$$

$$26. \quad a) \int 3^{x+1} dx = \int 3 \cdot 3^x dx = 3 \int 3^x dx = \frac{3 \cdot 3^x}{\ln 3} + c = \frac{3^{x+1}}{\ln 3} + c$$

$$b) \int 2^{-x} dx = \int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{2^x \cdot \ln 2} + c$$

$$c) \int a^{x+b} dx = a^b \int a^x dx = a^b \cdot \frac{a^x}{\ln a} + c = \frac{a^{x+b}}{\ln a} + c$$

$$d) \int \frac{1}{a^x} dx = \int \left(\frac{1}{a}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^x}{\ln \frac{1}{a}} + c = -\frac{1}{a^x \cdot \ln a} + c$$

$$e) \int 2^x \cdot 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + c$$

$$f) \int \frac{2^x}{3^x} dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + c = \frac{2^x}{3^x \cdot (\ln 2 - \ln 3)}$$

$$g) \int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx = \int \frac{4^3 \cdot 4^x}{2^x} dx = 4^3 \int 2^x dx = \frac{4^3 \cdot 2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^{6+x}}{\ln 2} + c$$

$$h) \int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx = \int \left(\left(\frac{5}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \right) dx$$

$$= \frac{5^x}{2^x \cdot (\ln 5 - \ln 2)} + \frac{3^x}{2^x \cdot (\ln 3 - \ln 2)} + c$$

$$i) \int (1 + 2^x) dx = x + \frac{2^x}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$27. \quad a) \int \ln 2x^3 dx = \int (\ln 2 + 3 \ln x) dx = x \cdot \ln 2 + 3(x \cdot \ln x - x) + c$$

$$= x \cdot (\ln 2 + 3 \cdot \ln x - 3) + c$$

$$b) \int \ln \sqrt{x} dx = \int \frac{1}{2} \ln x dx = \frac{1}{2} x \cdot \ln x - \frac{x}{2} + c = x \cdot (\ln \sqrt{x}) - \frac{1}{2} + c$$

$$c) \int \lg \frac{x}{2} dx = (\lg x - \lg 2) dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10} + c$$

$$= \frac{x \cdot (\ln x - 1 - \ln 2)}{\ln 10} + c$$

$$d) \int 3 \log \frac{1}{x} dx = - \int {}_3 \log x dx = \frac{x - x \cdot \ln x}{\ln 3} + c$$

$$28. \quad F(x) = x \cdot \ln x - x$$

$$F'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$$

$$29. \quad {}_a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\int {}_a \log x dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \cdot \int \ln x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$$

$$30. \quad a) \quad u = 5x - 7 \quad , \quad dx = \frac{du}{5}$$

$$\int \frac{10}{5x-7} dx = \frac{10}{5} \int \frac{1}{u} du = 2 \ln(5x-7) + c$$

$$b) \quad u = 1 + 3x \quad , \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{12}{(1+3x)^4} dx = \frac{12}{3} \int \frac{1}{u^4} du = -\frac{4}{3(1+3x)^3} + c$$

$$c) \quad u = 5 - 4x \quad , \quad dx = \frac{du}{4}$$

$$\int \frac{1}{5-4x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{4} \ln(5-4x) + c$$

$$d) \quad u = bx + d \quad , \quad dx = \frac{du}{b}$$

$$\int \frac{a}{bx+d} dx = \frac{a}{b} \int \frac{1}{u} du = \frac{a}{b} \cdot \ln(bx+d) + c$$

$$e) \quad u = 5x + 7 \quad , \quad dx = \frac{du}{5}$$

$$\int (5x+7)^x dx = \frac{1}{5} \int u^3 du = \frac{(5x+7)^4}{20} + c$$

$$f) \quad u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \int u^n du = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad , \quad n \neq -1$$

$$g) \quad u = 4x - 2 \quad , \quad dx = \frac{du}{4}$$

$$\int \sqrt{4x-2} dx = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \sqrt{(4x-2)^3} + c$$

$$h) \quad u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + c$$

$$i) \quad u = 2x + 5 \quad , \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{7}{\sqrt{2x+5}} dx = \frac{7}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2x+5} + c \setminus$$

$$k) \quad u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + c$$

$$l) \quad u = 4x \quad , \quad dx = \frac{du}{4} ; \quad \int \sin 4x dx = \frac{1}{4} \int \sin u du = -\frac{1}{4} \cos 4x + c$$

$$m) \quad u = -2x \quad , \quad dx = -\frac{du}{2} ; \quad \int \frac{3}{e^{2x}} dx = -\frac{3}{2} \int e^u du = -\frac{3}{2} 2e^{2x} + c$$

$$n) \quad u = 3x + \frac{\pi}{4} \quad , \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \cos(3x + \frac{\pi}{4}) dx = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \sin(3x + \frac{\pi}{4}) + c$$

$$o) \quad u = 3x - 5 \quad , \quad dx = \frac{du}{3} ; \quad \int e^{3x-5} dx = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^{3x-5} + c$$

$$\int \frac{x}{3+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{3+x^2} dx \text{ یودپرشم: الف: بنیه بدلون:}$$

په ځای اېښوونه یا سبستیچیوښن: $u = 3 + x^2 \quad u' = 2x$

کیردی او انټیگرال یې ونیسی: $\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(3 + x^2) + c$

$$b) \int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{2+x^2}} dx$$

$$u = 2 + x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2+x^2} + c$$

$$c) \int \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3}$$

$$u = 1 + x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + c$$

$$d) \int x \cdot (x^2 - 5)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot (x^2 - 5)^3$$

$$u = x^2 - 5 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} \ln(x^2 - 4)^4 + c$$

$$e) \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx$$

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$f) \int x \cdot \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \sin x^2 dx$$

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int \sin u du = c - \frac{1}{2} \cos x^2$$

$$g) u = 1 + e^x \quad u' = e^x$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(1 + e^x) + c$$

$$g) u = 1 + x \quad u' = e^x$$

$$\int u^3 du = \frac{1}{4} (x^2 + x)^4 + c$$

$$i) \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx$$

$$u = 4 + x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$\frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} \sqrt{4+x^3} + c$$

$$k) \int x^3, \ln^4 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \cdot \ln x^4 dx$$

$$u = x^4 \quad u' = 4x^3$$

$$\frac{1}{4} \int \ln u du = \frac{1}{4} x^4 \cdot (\ln x^4 - 1) + c$$

$$32. \quad a) \quad f(x) = \ln x \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

$$b) \quad f(x) = x^2 = 3 \quad ; \quad \int x(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} (x^2 + 3)^2 + c$$

$$c) \quad f(x) = x^3 - 1 \quad ; \quad \int 3x^2(x^3 - 1) dx = \frac{1}{2} (x^3 - 1)^2 + c$$

$$d) \quad f(x) = x^2 - x \quad ; \quad \int (2x - 1)(x^2 - x) dx = \frac{1}{2} (x^2 - x)^2 + c$$

$$33. \quad f(x) = u \quad \frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow f'(x) dx = du$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} (f(x))^2 + c$$

$$34. \quad a) \quad \int \frac{x^2}{4 + x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{4 + x^3} dx = \frac{1}{3} \ln |4 + x^3| + c$$

$$b) \quad \int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x^2 - 1| + c$$

$$c) \quad \int \frac{5}{x + 2} dx = 5 \int \frac{1}{x + 2} dx = 5 \ln |x + 2| + c$$

$$d) \quad \int \frac{3e^x}{e^x - 5} dx = 3 \int \frac{e^x}{e^x - 5} dx = 3 \ln |e^x - 5| + c$$

$$e) \quad \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} = \ln |\sin x| + c$$

$$f) \quad \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

$$35. \quad a) \quad g(x) = 3 + x^5 \quad g'(x) = 5x^4$$

$$\int \frac{5x^4}{3 + x^5} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |3 + x^5| + c$$

$$b) \quad u = 3 + x^5$$

$$\int \frac{5x^4}{(3+x^5)^2} dx = \int \frac{g'(x)}{(g(x))^2} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{3+x^5} + c$$

$$c) u = 1 - x^2$$

$$\int \frac{3x}{4-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x}{(1-x^2)^4} dx = -\frac{3}{2} \int u^{-4} du = -\frac{1}{2(1-x^2)^3} + c$$

$$d) g(x) = 4 - x^2 \quad g'(x) = -2x$$

$$\int \frac{5x}{4-x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{-2x}{4-x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{5}{2} \ln |4-x^2| + c$$

$$e) g(x) = 3 + \sin x \quad g'(x) = \cos x$$

$$\int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |3 + \sin x| + c$$

$$f) u = 1 - \cos x$$

$$\int \frac{\sin x}{3 + (1 - \cos x)^2} dx = \int \frac{g'(x)}{(g(x))^2} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{1 - \cos x} + c$$

$$36. a) \int \frac{4}{x^2 + 9} dx = \frac{4}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \arctan \frac{x}{3} + c$$

$$b) \int \frac{3}{2x^2 + 2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \arctan x + c$$

$$c) \int \frac{1}{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x \cdot \sqrt{2}}{2} + c$$

$$d) \int \frac{2}{3x^2 + 5} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + \frac{5}{3}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\frac{5}{3} \cdot \left(\left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1\right)} dx$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \arctan \frac{x \cdot \sqrt{15}}{5} + c$$

$$e) \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$f) \int \frac{1}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\frac{b}{a} \cdot \left(\left(\frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 + 1\right)} dx$$

$$= \frac{1}{b} \int \frac{1}{\left(\frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{x \cdot \sqrt{ab}}{b} + c \text{ mit } ab > 0$$

وه دېرېښم: الف: د $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9}$ له امله ماتلاندې پولینوم صفرخایونه نه لري، نو له دې

امله په کرښیزو ځلونو یا ضریبونو نه توتې کيږي یا توتې وړ نه ده. اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \arctan \frac{x+2}{3} + c$$

ب: د $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-1}$ له امله

اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\int \frac{5}{x^2 + 2x + 2} dx = 5 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = 5 \arctan(x+1) + c$$

پ: د $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-1}$ له امله

اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\int \frac{6}{3x^2 + 18x + 30} dx = \frac{6}{3} \int \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx = 2 \int \frac{1}{(x+3)^2 + 1} dx$$

$$= 2 \arctan(x+3) + c$$

ت: د $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-25}$ له امله

اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{2x^2 + 8x + 58} dx &= \int \frac{1}{x^2 + 4x + 29} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 25} dx \\ &= \frac{1}{25} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{5} \arctan \frac{x+2}{5} + c \end{aligned}$$

$$38. \quad a) \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx = 2 \arcsin \frac{x}{3} + c$$

$$\begin{aligned} b) \int \frac{1}{\sqrt{2-4x-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{6-(2+x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2}} dx \\ &= \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c \end{aligned}$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$\begin{aligned} d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 5}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 6}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{x^2 - 2x - 5} \right| + c_1 \\ &= \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 5}| - \ln\sqrt{6} + c_1 = \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 5}| + c \\ e) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} dx = \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + c \\ f) \int \frac{6}{\sqrt{9x^2 + 9}} dx &= 6 \int \frac{1}{3\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39. a) \int \frac{1-x}{x^2+x+1} dx &= -\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)}{x^2+x+1} dx = -\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1-3)}{x^2+x+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{3}{4} \cdot \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \sqrt{3} \cdot \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6} dx &= \int \frac{2x+4-3}{x^2+4x+6} dx \\
 &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx - 3 \int \frac{1}{(x+2)^2+2} dx \\
 &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx \\
 &= \ln|x^2+4x+6| - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \arctan \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \frac{3x}{2x^2+2x+8} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{x}{x^2+x+4} dx = \frac{3}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{x^2+x+4} dx \\
 &= \frac{3}{4} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx - \frac{3}{4} \int \frac{1}{\frac{15}{4} \cdot \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1\right)} dx \\
 &= \frac{3}{4} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1} dx \\
 &= \frac{3}{4} \ln|x^2+x+4| - \frac{\sqrt{15}}{10} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{15}} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{x-3}{x^2+8x+17} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-6)}{x^2+8x+17} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+8-14)}{x^2+8x+17} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx - \int \frac{7}{x^2+8x+17} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx - 7 \int \frac{1}{(x+4)^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln|x^2+8x+17| - 7 \cdot \arctan(x+4) + c
 \end{aligned}$$

40. a) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^x$ mit $v(x) = e^x + c_1$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot (e^x + c_1) - \int 1 \cdot (e^x + c_1) dx$$

$$= x \cdot e^x + c_1 x - \int e^x dx - \int c_1 dx = (x - 1) \cdot e^x + c$$
- b) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = \sin x$ mit $v(x) = -\cos x + c_1$

$$\int x \cdot \sin x dx = x \cdot (-\cos x + c_1) - \int 1 \cdot (-\cos x + c_1) dx$$

$$= -x \cdot \cos x + c_1 x + \int \cos x dx - \int c_1 dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$$
- c) $u(x) = \ln x$ mit $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = x^2$ mit $v(x) = \frac{x^3}{3} + c_1$

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{x^3}{9} - c_1 \ln x + c = \frac{x^3}{3} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c$$
- d) $u(x) = \ln x$ mit $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = x^{-2}$ mit $v(x) = -\frac{1}{x} + c_1$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \left(-\frac{1}{x} + c_1 \right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{1}{x} - c_1 \ln x + c = -\frac{1}{x} \cdot (\ln x + 1) + c$$
- e) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^{2x}$ mit $v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1$

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c_1 \right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c_1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} + c_1 x - \frac{1}{4} e^{2x} - c_1 x + c = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + c$$
- f) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = \sin 2x$ mit $v(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + c_1$

$$\int x \cdot \sin 2x dx = x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + c_1 \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + c_1 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + c_1 x + \frac{1}{4} \sin 2x - c_2 x + c = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$
41. a) $\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x dx + c_1$

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + c.$$
- b) $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx + c_1$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x - 2e^x + c = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c.$$
- c) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \int 2x \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx + c_1$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \int x \cdot e^{2x} dx + c_1$$

$$\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + c = \frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) + c.$$
- d) $\int x^2 \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \int 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2} dx + c_1$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \int x \cdot \sin 2x dx + c_1$$

$$\int x^2 \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} x \cdot \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$42. \quad a) \quad \int x^4 \cdot e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) + c$$

$$b) \quad \int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + \frac{3}{8} x + c$$

$$c) \quad \int x^3 \cdot e^x \, dx = e^x \cdot (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

$$d) \quad \int \cos^6 x \, dx \\ = \frac{1}{6} \cos^5 x \cdot \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \cdot \sin x + \frac{5}{16} \cos x \cdot \sin x + \frac{5}{16} x + c$$

$$43. \quad a) \quad \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx + c_1$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx + c_1$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx + c_2$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x + c_2$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$$

$$b) \quad \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx + c_1$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

$$c) \quad \int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx + c_1$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx + c_1$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx + c_2$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c$$

$$d) \quad \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \, dx + c_1$$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

$$44. \quad a) \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

ب : کیردی

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

د ټوټه کسرونو اېښونه

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 8} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

کیردی او انټیگرال یې ونیسی

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + c$$

$$= \sqrt{\frac{|x+2|}{|x+4|}} + c$$

پ : مالتاندي توتہ کری

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

د توتہ مات له پارہ ایښونه

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx = \frac{8}{3} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{8}{3} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + c$$

ت : مالتاندي توتہ کونه

$$d) \quad x^3 - 4x = (x(x-2)(x+2))$$

$$\frac{x^2+12x+12}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$د توتہ مات توتہ کونو ایښونه \quad A = -3, \quad B = 5, \quad C = -1 \quad \text{سرہ}$$

کینول او بنتیگرانیول

$$\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x} dx = -3 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= -3 \ln |x| + 5 \ln |x-2| - \ln |x+2| + c$$

$$45. \quad a) \quad x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx = 6 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + 9 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= 6 \ln |x| - \ln |x+1| - \frac{9}{x+1} + c$$

$$b) \quad x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\frac{3x}{x^2-6x+9} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{3x}{x^2-6x+9} dx = 3 \int \frac{1}{x-3} dx + 9 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx$$

$$= 3 \ln |x-3| - \frac{9}{x-3} + c$$

$$c) \quad x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\frac{3x}{x^2-6x+9} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$$

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 2$$

؛

$$\int \frac{3x}{x^2-6x+9} dx = - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^3} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 2 \ln |x+1|$$

ت : ماتلاندې ټوټه کونه

د $(x-1)^4 = (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-1)$ له امله یوه په کرښیز ځلوونو یا ضریبونو ټوټه کونه مخ ته لرو

د ټوټه ماتونو ټوټه کونه ږدو یا ځی په ځای کوو

$$\frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$$

سره $A = 5, \quad B = 4, \quad C = -2, \quad D = 3$ د

کیردی او لنتیگرال یې ونیسی

$$\int \frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^4} dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^4} dx$$

شیرخلو بښتم. الف:

ماتلاندې ټوټه کونه

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x-1)(x^2 + 4)$$

د ټوټه ماتونو ټوټه یو له پاره ایښونه

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

د سره. $A=2$, $B=-2$, $C=2$, $D=4$

کیردی او انټیګرال یې ونیسی:

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x+4}{x^2+4}.$$

$$= 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + \int \frac{2x}{x^2+4} dx + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx$$

$$= 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + \ln(x^2 + 4) + \arctan \frac{x}{2} + c$$

$$b) \quad x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$\frac{3x+4}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{x^2 + 2x + 2}$$

$$A=1 \quad , \quad B=-1 \quad , \quad C=-1$$

$$\int \frac{3x+4}{x^3 - 2x - 4} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$= \ln |x-2| - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + c$$

$$c) \quad x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$$

$$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{x^2 + x + 1} dx$$

له پاره $A=1$, $B=1$, $C=-1$ د

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$= \ln |x-2| + \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx$$

$$d) \quad x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = (x+1)(x^2 - 4x + 13)$$

$$\frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+c}{x^2+4x+13}$$

$$A=3, \quad B=4, \quad C=-2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} dx &= 3 \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{4x-2}{x^2+4x+13} dx \\ &= 3 \ln |x+1| + 2 \int \frac{2x-4}{x^2+4x+13} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1} \\ &= 3 \ln |x+1| + 2 \ln |x^2 - 4x + 13| + 2 \arctan \frac{x-2}{3} + c \end{aligned}$$

$$47. \quad a) \quad x^2 : (x+1) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln |x+1| + c$$

$$b) \quad (x^3 - 2x^2 + x + 5) : (x^2 - 1) = x - 2 + \frac{2x+3}{x^2-1}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} = x - 2 + \frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx &= \int x dx - \int 2 dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + c \end{aligned}$$

$$c) \quad (3x^3 + 5x^2 - 29x - 25) : (x^2 + x - 12) = 3x + 2 + \frac{5x-1}{x^2+x-12}$$

$$\frac{3x^3 + 5x^2 - 29x - 25}{x^2 + x - 12} = 3x + 2 + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 + 5x^2 - 29x - 25}{x^2 + x - 12} dx \\ &= 3 \int x dx + \int 2 dx + 2 \int \frac{1}{x-3} dx + 3 \int \frac{1}{x+4} dx \\ &= \frac{3x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x-3| + 3 \ln |x+4| + c \end{aligned}$$

$$d) \quad (2x^3 + x^2) : (x^3 - 1) = 2 + \frac{x^2+2}{x^3-1}$$

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} dx &= \int 2dx + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= 2x + \ln |x-1| + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

$$d) \int \sqrt{2x^2 + 4x + 6} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{(x+1)^2 + 2} dx$$

په ځای ایښوونه یا سبستیچیشن
 $u = x+1$

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{2x^2 + 4x + 6} dx \\ &= \frac{x+1}{2} \sqrt{2x^2 + 4x + 6} + 2\sqrt{2} \cdot \ln \left| x+1 + \sqrt{2x^2 + 4x + 6} \right| + c \end{aligned}$$

$$49. \quad a) \int \sqrt{x^2 + 2x} dx = \int \sqrt{(x+1)^2 - 1} dx$$

$$u = x+1$$

$$\int x^2 + 2x dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x} - \frac{1}{2} \left| x+1 + \sqrt{x^2 + 2x} \right| + c$$

$$b) \int \sqrt{x^2 - 4x - 5} dx = \int \sqrt{(x-2)^2 - 9} dx$$

$$u = x-2$$

$$\int \sqrt{x^2 - 4x - 5} dx = \frac{x-2}{2} \sqrt{x^2 - 4x - 5} - \frac{9}{2} \ln \left| x-1 + \sqrt{x^2 - 4x - 5} \right| + c$$

$$c) \int x\sqrt{x^2 + 4x + 3} dx = \int x\sqrt{(x+2)^2 - 1} dx$$

$$u = x+2 \Rightarrow x = u-2$$

$$\int (u-2)\sqrt{u^2-1} du - 2 \int u\sqrt{u^2-1} du$$

$$\int x\sqrt{x^2 + 4x + 3} dx$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2 + 4x + 3)^3}}{3} - (x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - \ln \left| x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right| + c$$

$$d) \int (x+2)\sqrt{x^2+2}+2dx = \int (x+2)\sqrt{(x+1)^2+1}dx$$

په خای ایینوونه:

$$u = x+1 \Rightarrow x = u-1$$

$$\int (u+1)\sqrt{u^2+1}du = \int u\sqrt{u^2+1}du + \int \sqrt{u^2+1}du$$

$$\int (x+2)\sqrt{x^2+2x+2}dx$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}{3} + \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + c$$

$$50. a) \int \frac{x^2}{6} dx = \frac{x^3}{18} + c$$

$$b) \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$c) \int (1-2x^2+x^3) dx = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c$$

$$d) \int (x^2-3x-6) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 6x + c$$

$$e) \int x \cdot \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{x} + c$$

$$f) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{3}{10} \cdot x^{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$$g) \int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{\frac{13}{10}} dx = \frac{10}{23} \cdot \sqrt[10]{x^{23}} + c = \frac{10}{23} \cdot x^2 \cdot \sqrt[10]{x^3} + c$$

$$h) \int \frac{3x \cdot \sqrt{x^3}}{x^2} dx = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 3 \int \sqrt{x} dx = 2x\sqrt{x} + c$$

$$i) \int \frac{x^2+3x-2}{x} dx = \int \left(x+3-\frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x| + c$$

$$k) \int \frac{x-5}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 10\sqrt{x} + c$$

$$51. a) u = 5-4x$$

$$\int 2(5-4x)^3 dx = -\frac{2}{4} \int u^3 du = -\frac{1}{8}(5-4x)^4 + c$$

$$b) u = 5x+2$$

$$\int \sqrt{5x+2} dx = \frac{1}{5} \int \sqrt{u} du = \frac{2}{15} \sqrt{(5x+2)^3}$$

$$c) u = g(x) = x^2, \quad g'(x) = 2x$$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$d) u = g(x) = 2x^3-4, \quad g'(x) = 6x^2$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3-4} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2 \cdot \sqrt{2x^3-4} dx = \frac{1}{6} \int \sqrt{u} du = \frac{\sqrt{(2x^3-4)^3}}{9} + c$$

$$e) u = g(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g'(x) = 2x + 2$$

$$\int \frac{3x+3}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+1| + c$$

$$f) u = g(x) = 2 + \sin x, \quad g'(x) = \cos x$$

$$\int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2(2 + \sin x)^2} + c$$

$$g) \int \frac{1}{2x^2+9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$\int \frac{1}{2x^2+9} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} x + c = \frac{1}{6} \sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} x + c$$

$$h) u = g(x) = x^2 - 4, \quad g'(x) = 2x$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-4| + c$$

$$i) \frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}; \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x+3| + c$$

$$k) \int \sqrt{x^2+2x+3} dx = \int \sqrt{(x+1)^2+2} dx$$

$$l) \int \sqrt{x^2+2x+3} dx = \int \sqrt{(x+1)^2+2} dx$$

$$= \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2+2x+3} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}| + c$$

$$m) \frac{1}{x^2+12x+40} dx = \int \frac{1}{(x+6)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+6}{2}\right)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+6}{2} + c$$

52. a) $u = 2x - 3$

$$\int \ln(2x-3)dx = \frac{1}{2(2x-3)} + c$$

b) $u = 3x$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

c) $u = 3x + 1$

$$\int 2^{x+1} dx = \frac{2^{x+1}}{3 \ln 2} + c = \frac{2^{x+1}}{\ln 8} + c$$

d) $u = 4x$

$$\int \lg 4x dx = \int (\lg 4 + \lg x) dx = x \lg 4 + \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10} + c$$

e) $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, \quad v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + c_1$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{x^2}{4} = c_1 \ln x + c = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

f) $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, \quad v' = \sqrt{x} \Rightarrow v = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1$

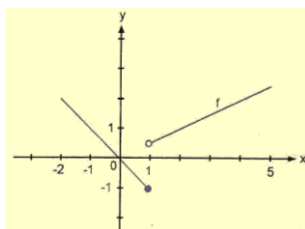
$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot \ln x dx &= \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1 \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} - c_1 \ln x + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + c \end{aligned}$$

h) $u = e^x \Rightarrow u' e^x, \quad v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x + c_1$

$$= \int x \cos x dx = x \cdot (\sin x + c_1) - \int (\sin x + c_1) dx$$

$$= x \cdot \sin x + c_1 x + \cos x - c_1 x + c = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

درېښځوس: الف: یو بنسټیز تابع f دې لاندې څیره ولري



53. a) $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{4} + c & x > 1 \end{cases}$

دا د $-1F'(1) =$ او

$$\lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2}$$

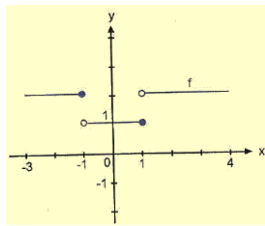
له امله د $x=1$ په ځای کې مشتق نه ده او له دې امله f بنسټیز تابع نه ده. د دوه نه پرېکړونکو توابعو انټیګرېشن:

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^1 -x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 + \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^5$$

$$= -\frac{1}{2} - (-2) + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

دا f تابع په ورکړ شوي اتروال کې انټیګرېشنور د هو سره له دې چې دا پرېکړونکې ده او بنسټیز تابع هم نه دي.

ب: تابع f لاندې څیره ولري:



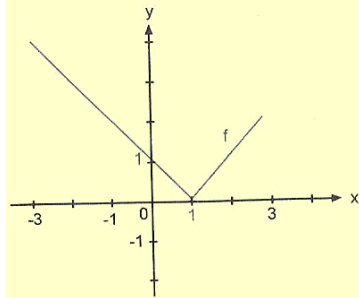
$$b) f(x) = \begin{cases} 2x + c & -3 < x \leq -1 \\ x + c & -1 < x \leq 1 \\ 2x + c & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

دا په ځایونو $x = -1$; $x = 1$ کې انټیګرال ور نه ده،
نوله دې سره f بنسټیز تابع نه ده.
د درې نه پرېکړونکو توابعو انټیګرال:

$$\int_{-3}^4 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} 2x dx + \int_{-1}^1 2x [2x]_{-3}^{-1} + [x]_{-1}^1 + [2x]_1^4$$

$$= -2 + 6 + 1 + 1 + 8 - 2 = 12$$

څلور پنځوس: ارزښتازاده لیکنه راکوي:



$$54. f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

د تابع f یو بنسټیزه تابع باید لاندې څیره ولري

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + c & x < 1 \end{cases}$$

د

$$F'(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x + 1) = 0$$

له امله په ځای کې بنسټیزه ده (تابع ارزښت برابر پوله ارزښت):

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\frac{1}{2} - 1 + c_1 = -\frac{1}{2} + 1 = c_2$$

$$c_1 = 1 + c_2$$

له دې سره تابع f ناپرېکړونکې، مشتقور بنسټیز تابع F لري.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + c & x > 1 \end{cases}$$

پنځه پنځوس: الف: د f پارابول پورته لورته واز دی د ککړۍ ټکي $S(1;1)$ سره. دا یواځې د $-x$ محور پورته لور ته ځلي.

$$55. \quad a) \quad \int_{-1}^4 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_{-1}^4 = \frac{40}{3} + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot 4 - (-1) = \frac{50}{3} \Rightarrow f(x_0) = \frac{10}{3}$$

د اړونده ارزښتونو ایښوونه

$$\frac{10}{3} = x^2 - 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{\sqrt{21}}{3}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}$$

ب: د f گراف چگیدونکي کرښه ده د $-y$ محور غوڅي $y=1$ سره. دا د ورکړشوي انټروال سره یواځې له دې سره د $-x$ محور پورته لور ته ځلي.

$$b) \quad \int_0^6 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^6 = 24 - 0 = 24$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot (6-0) = 24 \Rightarrow f(x_0) = 4$$

د اړونده $-x$ ارزښتونو سره ایښوونه.

$$x+1=4 \Rightarrow x_0=3$$

پ: ساینکره د ورکړشوي انټروال کې د x - محور پورته لور ته پرته ده.

$$c) \quad \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 1+1=2$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot (\pi-0) = 2 \Rightarrow f(x_0) = \frac{2}{\pi}$$

د ورکړشوي اړونده $-x$ محور لپاره ږدو:

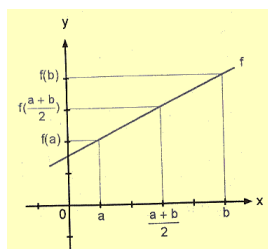
$$\sin x = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow x = \arcsin \frac{2}{\pi} \Rightarrow x_1 \approx 0.690, \quad x_2 \approx 2.451$$

شپږ پنځوس:

$$56. \quad a) \quad \int_a^b (mx+n) dx = \left[\frac{mx^2}{2} + nx \right]_a^b = \frac{bm^2}{2} + bn - \frac{a^2m}{2} - an$$

$$= \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + n(b-a) = (b-a) \left(\frac{m}{2}(b+a) + n \right)$$



منځ ارزښت:

$$f(x_0) \cdot (b-a) = (b-a) \left(\frac{m}{2}(b+a) + n \right) \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

د وېنټونکو - ارزښتونو له پاره ایښوونه

$$= \frac{m}{2}(b+a) + n = mx \Rightarrow \frac{m}{2}(b+a) = mx \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b (mx+n)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

د دې حالت له پاره چې کرښه د x -محور پورته لور ته ځغلي، نتیجه (۱) باوري کيږي، چې د تراپڅ فرمول سره سره خوري، که موږ اوږدوالی $(b-a)$ د جگوالي په څیر او د تابع ارزښت

د منځارزښت په حیث نیسو $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

اوه پنځوس: الف: د f گراف د x -محور یواځې پورته لور ته پروت دی.

$$\int_{-2}^1 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^1 = 6$$

$A = 6$ د سطحې یونونو سره

ب - د f گراف د x -محور یواځې پورته لور ته پروت دی.

$$b) \int_0^{\pi} (2 + \sin x)dx = [2x - \cos x]_0^{\pi} = 2\pi + 2 \Rightarrow A = (2\pi + 2) \approx 8.283$$

د سطحې یونونه $A = (2\pi + 2) \approx 8.283$ سطحې واحدونو یا یونونو سره

پ: دا کښته لور ته واز پارابل ککر ټکی $S(-2;-1)$ لري او له دې سره یواځې د x -محور کښته لور ته پروت دی،

$$c) \int_{-3}^0 (-x^2 - 4x - 5)dx = -\int_{-3}^0 (x^2 + 4x + 5)dx = -\left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right]_{-3}^0 = -6$$

د هوارې یا سطحې یونونو په واحدونه. $A = |-6| = 6$

ت: یواځې صفرځای $N(-1;0)$ دی، یواځني قطبځای په $x_1 = 0$ کې پروت دی. د f گراف په ورکړ شوي انټروال کې ناپېرېدونکی دی او یواځې د x -محور پورته لور ته پرته ده.

$$d) \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = [x + \ln x]_1^e = e$$

$A = e$ د سطحې یونونه ~ 2.718 د سطحې یونونو سره:

اته پنځوسم: دا پورته لور ته واز پارابل ککر ټکی $S(-1,1)$ لري او له دې سره یواځې د x -محور پورته لور ته پروت دی، ایښوونه:

$$\int_{-2}^b (x^2 + 2x + 2)dx = 6$$

$$\frac{b^3}{3} + b^2 + 2b + \frac{8}{3} = 6 \Rightarrow b^3 + 3b^2 + 6b - 10 = 0$$

بڼه بدلون: $b^3 + 3b^2 + 6b - 10 = 0$

لومړی حل: $b_1=1$ د پولینوموېش: $(b^3 + 3b^2 + 6b - 10) : (b - 1) = b^2 + 4b + 10$ د $b_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-10}$ له امله بل کوم اوبی یا حل شتون نه لري.نه پنځوس: د گراف یوځي په لومړۍ څلورۍ کې او له دې امله د x -محور پورته لور ته پروت دی.

$$\int_a^4 3\sqrt{x} dx = 14 \quad \text{ایښوونه:}$$

$$2\sqrt{4^3} - 2\sqrt{a^3} = 14 \quad \text{انتگرالونه او ایښوونه:}$$

$$16 - 2\sqrt{a^3} = 14 \Rightarrow a = 1 \quad \text{بڼه بدلون:}$$

غوښتونې د انتیگرال لاندې پوله $a=1$ ده.شپيته: یو پورته لورته کښولشوی نورمال پارابول تابع مساوات $y=x^2 + a$ لري د $a > 0$ سره.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + a) dx = 9 \quad \text{ایښوونه:}$$

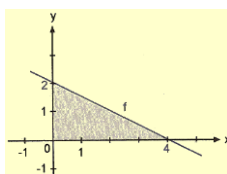
$$3 + 3a = 9 \Rightarrow a = 2 \quad \text{انتیگرال - او ځای په ځای کړی:}$$

$$y = x^2 + 2 \quad \text{بنو غښتونې پارابول برابرون دی:}$$

یوشپيته: د f انتروال د $0 < x < \pi$ له پاره صفرځای نه لري. دا یاد x -محور پورته لور ته او یا کښته لور ته پروت دی.

$$\left| \int_0^\pi a \cdot \sin x dx \right| = 4 \quad \text{ایښوونه:}$$

$$|2a| = 4 \Rightarrow a_1 = 2, \quad a_2 = -2 \quad \text{انتیگرال کړی او ځای په ځای کړی:}$$

د $a_1 = 2$ یاد $a_2 = -2$ په حالتونو کې په ورکړشوي انتروال کې د سطحې کچه ۴ ده. ۶۲: د سطحې شمیرنه د انتیگرال له لارې یا د انتیگرال سره

$$\int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} = 2x \right]_0^4 = 4$$

د سطحې ساده شمیرنه

$$A = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

۶۳: الف: صفرځایونه $N_1(-4;0); N_2(1;0)$

$$A = \left| \int_{-4}^1 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3\right) dx \right| + \left| \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3\right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-4}^1 \left[\frac{x^4}{16} - \frac{13x^2}{8} + 3x\right] dx \right| + \left| \int_1^3 \left[\frac{x^4}{16} - \frac{13x^2}{8} + 3x\right] dx \right| = \left| 23\frac{7}{16} \right| + |-2|$$

$$A = 25 \frac{7}{16}$$

د غوښتونې سطحې منځه‌واري کچه $25 \frac{7}{16}$ ده

صفرخايونه: $N_1(-2;0); N_2(0;0); N_3(3,0)$

$$A = \left| \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} + 3x\right) dx \right| + \left| \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} + 3x\right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \right| = 10 \frac{13}{24}$$

پ: صفرخايونه: $N_1(0;0); N_2(2;0); N_3(4,0)$

$$c) A = \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \right| = 8$$

غوښتونې منځه‌واره د هوارې ۸ واحدونه کچکوي

ت: صفرخايونه: $N_1(1;0); N_2(5;0)$

$$d) A = \left| \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 \right| = 10 \frac{2}{3}$$

د غوښتونې سطحې منځه‌واري کچه $10 \frac{2}{3}$ ده

څلور شپيته:

الف: صفرخايونه: $N_1(2;0)$

$$A = \left| \int_{-2}^2 (x - 2) dx \right| + \left| \int_2^3 (x - 2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^2 \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 \right| = 8 \frac{1}{2}$$

غوښتونې هوار دنده د هواريوونونو يا واحدونو کچه $8 \frac{1}{2}$ ده.

ب: صفرخايونه: $N_1(-2;0); N_2(3;0)$

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 - x - 6) dx \right| + \left| \int_3^5 (x^2 - x - 6) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_1^3 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_3^5 \right| = 20$$

غوښتونې هوار دنده د هواريوونونو يا واحدونو کچه ۲۰ ده.

پ : صفرخايونه: $N_1(2;0); N_2(6;0)$

$$c) A = \left| \int_0^2 (x^2 - 8x + 12) dx \right| + \left| \int_2^6 (x^2 - 8x + 12) dx \right| + \left| \int_6^8 (x^2 - 8x + 12) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_2^6 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_6^8 \right|$$

$$A = 32$$

غوښتوني هواردنه د هواريونونو يا واحدونو کچه ۳۲ ده.

پنځه شپيته: اکسپوننشل - يا جگړن $y = e^x$ کړه يواځې د x -محور پورته لور ته پرته ده. دا کښته لور ته واز پارابول $y = -x^2 - 1$ د ککړۍ ټکي $S(0;-1)$ سره د x -محور کښته لور ته پروت دی. له دې امله دواړه گرافونه يو بل نه غوڅوي.

$$65. A = \left| \int_0^1 (e^x + x^2 + 1) dx \right| = \left| \left[e^x + \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 \right| = e + \frac{1}{3}$$

غوښتوني سطحه $\frac{3e+1}{3}$ د سطحې يونونه يا واحدونه ورکوي

شپږشپيته: جگړدونکې کرښه د -محور په کې غوڅوي. لهدې سره دا په لومړۍ څلورۍ کې د ساينکزي پورته لور ته ځغلي. په ورکړشوي انټروال کې د دواړو کړو غوڅکي نه شته.

$$66. A = \left| \int_0^{2\pi} (2x + 2 - \sin x) dx \right| = \left| \left[x^2 + 2x + \cos x \right]_0^{2\pi} \right| = 4\pi^2 + 4\pi$$

غوښتوني سطحه $4\pi(\pi + 1)$ د سطحې يونونه يا واحدونه ورکوي اوه شپيته: د

$$67. x^2 - 3 = 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = -4$$

له امله دواړه کرښي يوبل نه غوڅوي

$$A = \left| \int_{-1}^2 (2x^2 + 1 - (x^2 - 3)) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (x^2 + 4) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^2 \right| = 15$$

اته شپيته: پارابول $y = \sqrt{x}$ ټول په لومړۍ څلورمه کې ځغلي. هغه د لوېدونکو(نزولي) کرښو $y = -x - a$ -محور برخه سره ۱- نه غوڅوي.

$$68. A = \left| \int_0^4 (\sqrt{x} - (-x - 1)) dx \right| = \left| \int_0^4 (\sqrt{x} + x + 1) dx \right| = \left| \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^4 \right|$$

$$A = 17\frac{1}{3}$$

غوښتونې منځهواره $17\frac{1}{3}$ د سطحې یوونونه کچکوي.

نهه شپيته: د غوڅتکي شميرنه

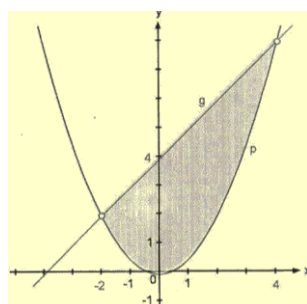
$$69. \quad 2x+1=x+3 \Rightarrow x=2$$

دواړه

$$A = \left| \int_{-2}^1 (x+3-(2x+1))dx \right| = \left| \int_{-2}^1 (-x+2)dx \right| = \left| \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \right| = 7\frac{1}{2}$$

غوښتونې منځهواره 7,5 د سطحې یوونونه کچکوي.

اویا:



$$0.5x^2 = x + 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 4$$

هواره یا سطحه وشمیری

$$A = \left| \int_{-2}^4 \left(x + 4 - \frac{x^2}{2} \right) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6} \right]_{-2}^4 \right|$$

$$A = 18$$

غوښتونېد سطحې دننه د سطحې ۱۸ یوونونه کچکوي.

یواویا: د غوڅتکو پروتمحور

$$x^2 - 6x + 5 = -x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, \quad x_2 = 4$$

هوارې یا سطحې وسمیری

$$A = \left| \int_1^4 (-x+1-(x^2-6x+5))dx \right| = \left| \int_1^4 (x^2+5x-4)dx \right|$$

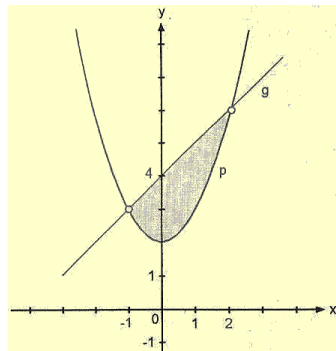
$$A = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 \right| = \frac{9}{2}$$

د غوښتونې هورې یا سطحې کچیوونونه $\frac{9}{2}$ دي،

دوه اویا: د کرښیز برابررونو لیکل

$$f(-1) = 3, \quad f(2) = 6$$

د کرښیز برابررونو دوه ټکي ښه



$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{6-3}{2-(-1)}(x - (-1)) + 3$$

$$y = x + 4$$

هوارې يا سطحې شميرنه:

$$A = \left| \int_{-1}^2 (x+4) - (x^2+2) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \right| = \frac{9}{2}$$

غوښتونې منځهواره 4,5 د سطحې يوونونه کچکوي.

هوارې شميرنه:

$$A = \left| \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 3 - (x^2 - 4x + 6)) dx \right| = \left| \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-x^3 + 6x^2 - 9x \right]_1^3 \right| = 4$$

پنځه اويا: د غوڅټکو پراته ارزښتونه:

$$4\sqrt{x} = \frac{x^2}{2}$$

$$16x = \frac{x^4}{4}$$

$$64x = x^4$$

$$x^4 - 64x = 0$$

$$x(x^3 - 64) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

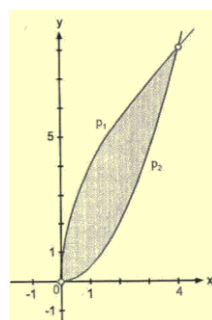
هوار شميرنه:

$$A = \left| \int_0^4 (4\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{8\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 \right| = \frac{32}{3}$$

غوښتونې منځهواره $\frac{32}{3}$ د سطحې يوونونه کچکوي.

شپږ اويا: د غوڅټکو پراته ارزښتونه:



$$2\sqrt{x} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$6\sqrt{x} = 2x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 4$$

د سطحې يا هوارې شمېرنه:

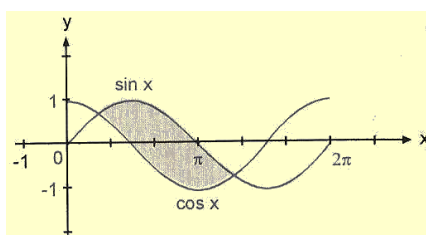
$$A = \left| \int_1^4 (4\sqrt{x} - (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})) dx \right| = \left| \int_1^4 (2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{4x}{3} \right]_1^4 \right| = \frac{1}{3}$$

غوښتونې منځهواره $\frac{1}{3}$ د سطحې يوونونه کچکوي.

اوه اويا: د غوڅتکو پراته ارزښتونه:

$$77. \sin x = \cos x$$



$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

د هوارې شمېرنه:

$$A = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[(-\cos x - \sin x) dx \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \right| = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = 2\sqrt{2}$$

غوښتونې منځهواره $2\sqrt{2}$ د سطحې يوونونه کچکوي.

اته ويا: د تانجنټبر ابرون ليکل:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

لومړي رابيليدنه يا مشتق: $f(2) = 1$ تابع ارزښتونه

$$f(2) = 1, \quad f'(2) = 5$$

جگيدنه په $x_0 = 2$: کي

$$f(x_0) = y_0 = 1 \quad \text{او} \quad x_0 = 2$$

اينونه په

$$y = m(x - x_0) + y_0: \quad y = 5(x - 2) + 1$$

کي

$$y = 5x - 9$$

د تانجنټ بر ابرون دی:

اينونه:

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 5x - 9$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$$

پولينوموېش:

$$(x^3 - 2x^2) - 4x + 8 : (x - 2) = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

د دویم ګډ غوڅتکي د پروت محور ارزښت: $x_1 = -2$
د هواري شمیرنه:

$$A = \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x - 9) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2 \right| = \frac{64}{3}$$

غوښتونې منځه‌واره $\frac{64}{3}$ د سطحې یوونونه کچکوي.

نهه اويا: نورمالبرابرون
لومړۍ رابيليدنه يا لومړي مشتق:

$$f'(x) = 2x$$

تابع ارزښت $f(-1)$:

$$f(-1) = 1$$

تانجنت جکيدنه په $x_0 = -1$ کې.

$$f'(-1) = -2$$

په $x_0 = -1$ کې د نورمال جکيدنه:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

نورمالبرابرونه:

$$y = \frac{1}{2}(x - (-1)) + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

د دویم غوڅتکي د پروت محور ارزښت

$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

نورمال د $x_2 = \frac{3}{2}$ په ځای کې د پارابول سره یو بل ګډ غوڅتکي لري.

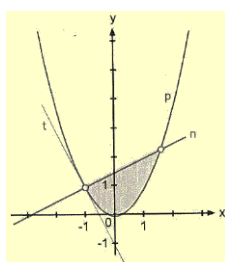
د هواري شمیرنه:

$$A = \left| \int_{-1}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x^2 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1.5} \right| = \frac{125}{48}$$

غوښتونې سطحه $\frac{125}{48}$ د سطحې یوونونه ده.

یواتیا: په $x=0$ کې پیژند- یا تعریفشیا ده.

له دې سره په ورکړشوي انټروال کې د f تابع ناپرېکونکي ده،
یو اتیا: د غوڅتکو د پروت محور ارزښتونه:

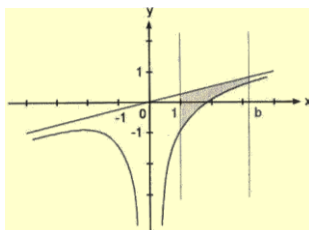


$$\frac{1}{4}x = \frac{x^3 - 8}{4x^2} \Leftrightarrow x^3 = x^3 - 8$$

کریشه د تابع له گراف سره گډ ټکي نه لري. (دا د گراف گاوند يا اسیمپټوتي ده) اینسونه:

$$A = \left| \int_1^b \left(\frac{1}{4}x - \frac{x^3 - 8}{4x^2} \right) dx \right| = \left| \int_1^b \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{4} + \frac{2}{x^2} \right) dx \right| = \left| \int_1^b \frac{2}{x^2} dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{2}{x} \right]_1^b \right| = \left| -2 \cdot \frac{1}{b} + 2 \right|$$



د $b > 1$ له امله دی

$$-2 \cdot \frac{1}{b} + 2 > 0, \text{ له دې سره دی}$$

$$-2 \cdot \frac{1}{b} + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 4$$

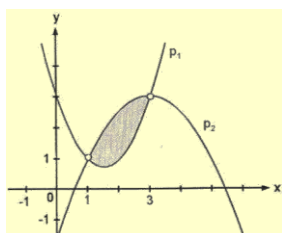
د $b=4$ له پاره هواره ورکړشوي ارزښت غوره کوي يا اخلي.

دوه اتيا: د غوڅتکو د پروت محور ارزښتونه:

$$x^2 - 3x + 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$



د هوارې شمیرنه په انټروال $[1, 3]$ کې سرته رسیري.

د هوارې شمیرنه:

$$A = \left| \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2} - (x^2 - 3x + 3) \right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^3 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{2} \right) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{2} + 3x - \frac{9x}{2} \right]_1^3 \right| = 2$$

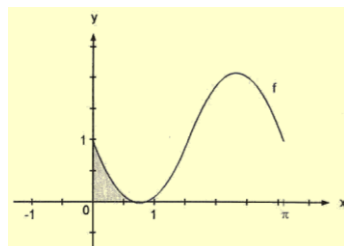
غوښتونې هواره د هوارې دوه یوونونه ده.

درې اتيا: د $a - \sin 2x \geq 0$ او $a > 0$ له امله د f گراف د $-x$ محور یواځې پورته لور ته پروت

دی. (د $a=1$ له پاره په څنګ کې څیره وګورئ)

صفر ځایونه:

صفر ځایونه له a خپلواک دي.



$$1 - \sin 2x \geq 0$$

$$1 - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

د هوارې شمیرنه له پیل تر لومړي صفر ځای پورې شمیرل کیږي.

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} a(1 - \sin 2x) dx \right| = a \cdot \left| \left[x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right|$$

$$A = a \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - a \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{a}{4} \cdot (\pi - 2)$$

برابر اینگونه:

$$\pi - 2 = \frac{a}{4} \cdot (\pi - 2) \Rightarrow a = 4$$

د $a = 4$ له پاره هوار وړکړ شوي ارزښت هوره کوي.

څلور اتیا: د غوڅتکو پروت محور

$$\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x = -x^2 + 6$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{9}{2}$$

د هوارې شمیرنه:

$$A = \left| \int_0^{4.5} \left(-x^2 + 6x - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{4.5} \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{1}{6}x^4 + x^3 \right]_0^{4.5} \right| = \left(\frac{9}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{4}$$

غوښتونې هواره $\left(\frac{9}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{4}$ هوار یوونونه کچوي.

پنځه اتیا: صفر ځایونه

$$0 = \sqrt{16 - 2x} \Rightarrow x = 8$$

هوار شمیرنه

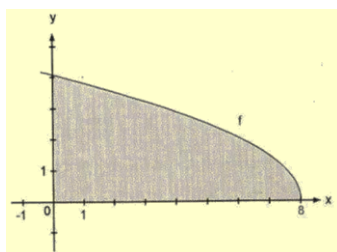
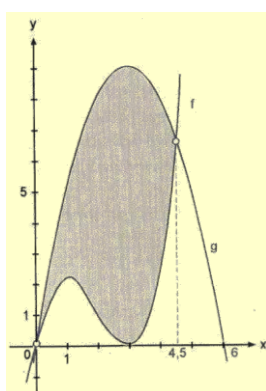
$$A = \left| \int_0^8 \sqrt{16 - 2x} dx \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(16 - 2x)} \right]_0^8 \right|$$

$$A = \frac{64}{3}$$

غوښتونې هواره $A = \frac{64}{3}$ هوار یوونونه کچوي.

شپږ اتیا: الف: تابع په $x = -2$ کې پیژندښت شوی لري.

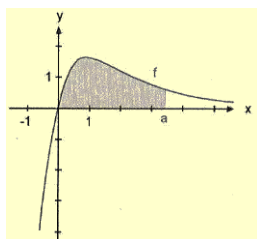


یواځنی صفر ځای د

$$86. a) \frac{48x}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow 48x = 0$$

له امله په $x_2 = 0$ کې دی.

له دې امله گراف د $a > 0$ له پاره ناپېرېدونکی دی په لومړي انټروال $[0, a]$ کې د سطحې شمېرنه ده:



$$\frac{48x}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$\frac{48x}{(x+2)^3} = \frac{Ax^2 + (4A+B)x + 4A+2B+C}{(x+2)^3}$$

د ضریبونو یا ځلوونو پرتله کونه

$$A = 0$$

$$4A + B = 48$$

$$4A + 2B + C = 0 \Rightarrow A = 0, B = 0, C = -96$$

انتیگرال یې کړی

$$\int_0^a \frac{48x}{(x+2)^3} dx = \int_0^a \left(\frac{48}{(x+2)^2} - \frac{96}{(x+2)^3} \right) dx = \left[-\frac{48}{x+2} + \frac{48}{(x+2)^2} \right]_0^a$$

$$= \left[-48 \frac{x+1}{(x+2)^2} \right]_0^a = -48 \cdot \left(\frac{a+1}{(a+2)^2} - \frac{1}{4} \right)$$

د $A=8$ له پاره د هوارې یوونونه

$$8 = -48 \cdot \left(\frac{a+1}{(a+2)^2} - \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{a+1}{(a+2)^2} \Leftrightarrow 0 = a^2 - 8a - 8$$

د $a > 0$ له امله $a = 4 + \sqrt{24} \approx 8.900$ یواځنی حل دی.

د $a = 8.900$ له پاره د هوار بینونه غوښتونې ارزښت نیسي

ب: پارامتر t په صفر ځای کوم اغیز نه لري.

موږ په بلډول لیکو:

$$y = \frac{tx}{(x+2)^3} = t \cdot \frac{x}{(x+2)^3}$$

اوس د $t=48$ له پاره د برخې الف سره پرتله کول شوني دي.

$$y = \frac{48x}{(x+2)^3} = 48 \cdot \frac{x}{(x+2)^3}$$

د ناټاکلي انتیگرال لاس ته راوړي کیدی شي له برخې الف هم ونيول شي.

$$\int_0^4 t \frac{x}{(x+2)^3} dx = \left[-t \cdot \frac{x+1}{(x+2)^3} \right]_0^4 = \frac{1}{9} t$$

د $A=10$ هوارې یوونون له پاره ایښونه.

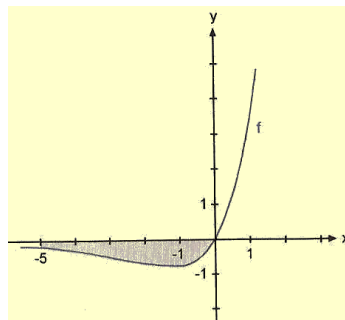
$$\frac{1}{9} t = 10 \Rightarrow t = 90$$

د $t = 90$ له پاره د هورې یوونونه غوښتلی ارزښت نیسي.

اوه اتیا: صفر ځایونه:

$$0 = x \cdot e^{0.5x} > 0$$

گراف د $e^{0.5x} > 0$ له امله یواځنی صفرځای په $x = 0$ کې لري.



له دې سره د هوارې شمیرنه په انټروال $[-5, 0]$ کې کيږي. ټوټه - یا پارسل انټیګرالونه.

$$u(x) = x$$

$$د \quad u'(x) = 1 \quad \text{سره}$$

$$v'(x) = e^{0.5x}$$

$$د \quad v(x) = 2e^{0.5x} \quad \text{سره}$$

$$\begin{aligned} \int_{-5}^0 x \cdot e^{0.5x} dx &= \left[2x \cdot e^{0.5x} \right]_{-5}^0 - \int_{-5}^0 2 \cdot e^{0.5x} dx \\ &= \left[2x \cdot e^{0.5x} \right]_{-5}^0 - \left[4 \cdot e^{0.5x} \right]_{-5}^0 \\ &= \left[2x \cdot e^{0.5x} (x-2) \right]_{-5}^0 \\ &= -4 + 14 \cdot \sqrt{e^{-5}} \end{aligned}$$

دا چې هواره د - محور کښته لور ته پرته ده، ناپاکلی انټیګرال کمیز یا منفي ګڼ ارزښت لري.

غوښتوني منځهواره د هوارې نږدې ۲،۸۵۱ یوونونه کچوي.

اته اتیا: صفرځایونه

$$0 = e^x (x-1)$$

$$د \quad e^x > 0 \quad \text{له امله گراف د} \quad x-1=0$$

له پاره یواځنی صفرځای په $x=1$ کې لري.

له دې سره د سطحې شمیرنه په انټروال $[0, 1]$ کې کيږي. ټوټه انټیګرالونه

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^x$$

$$v'(x) = e^x$$

$$v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x (x-1) dx &= \left[e^x (x-1) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[e^x (x-1) \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1 \\ &= \left[e^x (x-2) \right]_0^1 = 2 - e \approx -0.718 \end{aligned}$$

دا چې هواره د -محور کښته لور ته پرته ده، نوپاکلی انټیګرال کمیز ښ ارزښت لري.

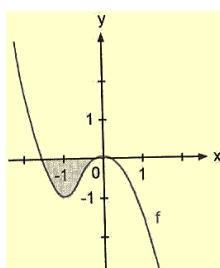
غوښتوني منځهواره ۰.۷۱۸ د هوارې یوونونه کچه وي.

نه اتیا: صفرځایونه:

$$-2x^2 - 3x^2 = 0$$

$$-x^2(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1.5, \quad x_{2,3} = 0$$

د دواړو صفرځایونو په منځ کې د هوارې شمیرنه:



$$A = \left| \int_{-1.5}^0 (-2x^3 - 3x^2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{x^4}{2} - x^3 \right]_{-1.5}^0 \right| = \left| -\frac{27}{32} \right|$$

غوښتونې منځهواره 0,844 د هوارې يوونونه کچه وي.

نوي: صفرخايونه:

تابع (يا څيرونه) f يواځې د $x > 0$ له پاره پېژندلري يا تعريف ده.

نو له دې امله يواځنې صفرخاي د $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$ لپاره په $x = e$ کې

شتون لري.

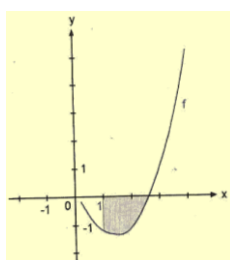
توبه انتيگرالونه

$$u(x) = \ln x - 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x^2$$

$$v(x) = \frac{x^3}{3}$$



$$\int_0^1 x^2 \cdot (\ln x - 1) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot (\ln x - 1) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot (\ln x - 1) \right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{4x^3}{9} \right]_1^e = \frac{1}{9} (4 - e^3) \approx -1.787$$

دا چې هواره د x -محور لاندې پرته ده، نو دا ټاکلي انتيگرال يو کميز ډن ارزښت لري.

غوښتونې هواره **-1.787** هوار يوونونه کچ کوي.

يونوي: د جگگنونو د پرته له مخې د غوڅکو شميرل

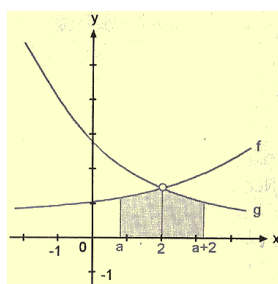
$$e^{\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x+1}$$

$$\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$x = 2$$

دواړه گرافونه په $x = 2$ کې غوڅوي.

د هوار شميرنې ايښونه:



دواړه هيرخهواړي د x -محور پورته لور ته پرته دي، نو له دې امله د ټاکلي انتيگرال ارزښتونه زاتيز يا مثبت دي، له دې امله د ارزښت ليکنډول څخه تيريزو.

$$A = \int_a^2 a^{\frac{1}{4}x} dx + \int_2^{a+2} e^{-\frac{1}{4}x+1} dx = \left[4e^{\frac{1}{4}x} \right]_a^2 + \left[-4e^{-\frac{1}{4}x+1} \right]_2^{a+2}$$

$$= 4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{\frac{1}{4}a} - 4e^{-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}+1} + 4e^{-\frac{1}{2}+1}$$

$$A = 4 \cdot \left(2e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}} \right)$$

د ځای اړوند اکسټریموم له پار اړین شرط دی: $A'(a) = 0$

$$A'(a) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$0 = -e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

پوره کیدونکي شرطونه.

$$A''(a) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

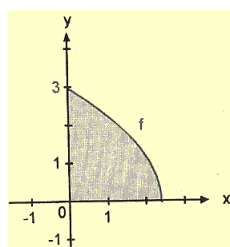
$$A''(1) = -\frac{1}{4}\sqrt[4]{e} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{4}(\sqrt[4]{e} + \sqrt{e}) < 0$$

د $a=2$ له پاره هواره ممکن ستره خونديونه غوره کوي. له دې امله هواره په انټروال $[1,3]$ کې پرته ده.

دوه نوي: فرځايونه:

$$0 = \sqrt{9-4x} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

گراف د پارابل د څرانگې يا يوې برخه ښايي، چې کين لور ته از دی، کوم چې د x -محور پورته لور ته پروت دی. غښتونې هواره له دې سره په انټروال $[0;2, 25]$ کې پرته ده. د هوارې شمیرنه:



$$A = \left| \int_0^{\frac{9}{4}} \sqrt{9-4x} dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(9-4x)^3} dx \right]_0^{\frac{9}{4}} \right| = \left| \frac{1}{6} \sqrt{9^3} \right| = \frac{9}{2}$$

غښتونې هواره د $\frac{9}{2}$ د هوارې یوونونه کچوي.

$$0 = -e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

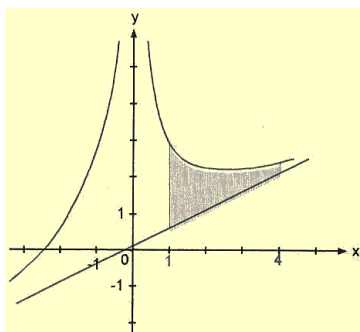
پوره کیدوني شرطونه

$$A''(a) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$A''(1) = -\frac{1}{4}\sqrt[4]{e} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{4}(\sqrt[4]{e} + \sqrt{e}) < 0$$

د له پاره هواره ممکن ستره خونديونه غوره کوي. له دې سره هواره په انټروال $[1,3]$ کې پرتله ده.

درې نوي: تابع يا څيرونه په $x=0$ کې پېژندنتښځای لري. په انټروال $[1;4]$ کې ناپېرېکيدونکی دی.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 12}{2x^2} = \frac{1}{2}x$$

د گاونډۍ يا اسيمپټوت برابرېدون

$$y = \frac{1}{2}x$$

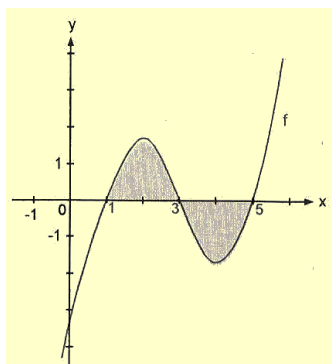
هوارشميرنه:

$$A = \left| \int_1^4 \left(\frac{x^2 + 12}{2x^2} - \frac{1}{2}x \right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{2}x \right) dx \right| = \left| \int_1^4 \left(-\frac{6}{x^2} \right) dx \right| = \left| -\left[\frac{6}{x} \right]_1^4 \right| = \frac{9}{2}$$

9

وېستوني منځهواره د هوارې يوونونه کچوي.



څلورنوي: صفرځايونه

ازمېنېښت يو لومړي صفرځای راکوي، د $x_1 = 1$ سره

پولينوموېش

$$(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) : (x - 1)$$

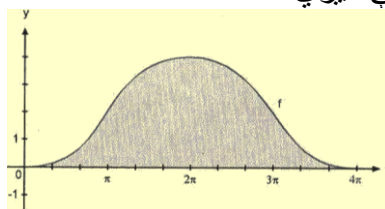
$$= x^2 - 8x + 15$$

نور صفرځايونه دي:

$$x_2 = 3, \quad x_3 = 5$$

له دې سره هوارشميرنه په

برخه انټروالونو $[1;3]$ او $[3;5]$ کې کيږي.



هوارشميرنه:

$$A = \left| \int_0^{4\pi} 2(1 - \cos \frac{x}{2}) dx \right| = 2 \cdot \left| \left[x - 2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} \right|$$

غوښتونې هواره ۲۵،۱۳ د هوارپوونونه لري.

اوه نوي: صفرخايونه:

$$3 \cdot \sqrt{9-x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 9$$

له دې سره غوښتونې هواره په

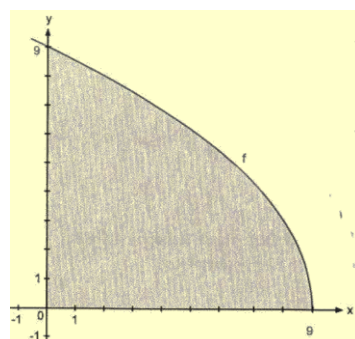
انتروال $[0;9]$ کې پرته ده

$$A = \left| 3 \int_0^9 \sqrt{9-x} dx \right|$$

$$= 3 \left| \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(9-x)^3} dx \right]_0^9 \right|$$

$$A = 54$$

غوښتونې منځهواره ۵۴ د هوارې پوونونه کچه کوي.



اته نوي: صفرخايونه:

$$0 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$$

$$0 = x(x^2 - 2ax + a^2)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = a$$

د $a > 1$ له امله پارابول د $0 < x < 1$

له پاره صفرخای نه لري

د هوارشميرني ايښوونه:

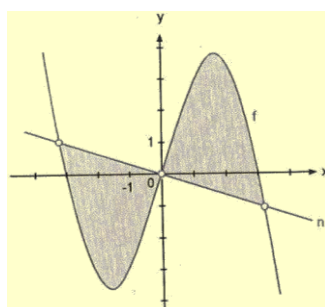
$$A = \left| \int_0^1 (x^3 - 2ax^2 + a^2x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{a^2x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \frac{11}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2a}{3} + \frac{a^2}{2} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow 6a^2 - 8a - 30 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{3}, a_2 = 3$$

د $a > 1$ له امله $a=3$ يواځني اوبي يا حل دی.

نه نوي:



$$99. \quad f'(x) = -x^2 + 3$$

$$f'(0) = 3$$

$$\Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

دا چې کرښه سرچینه یزه - یا پیلکرښه ده ، نو برابرن یې دي :

د غوڅټکو د پروت محور ارزښتونه:

$$\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$$

$$\frac{1}{3}x(x^2 - 10) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{10}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{10}$$

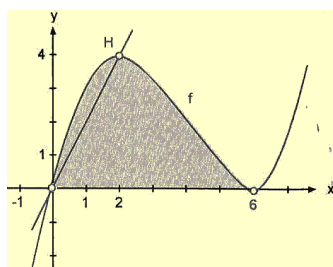
هوار شمیرنه:

دا چې f په برابر ونونو کې یواځې ناجوره کښکښونه منځ ته راځي، له دې امله د گراف سرچینې ته ټکی سیموټریک دی. نو له دې سره بسیا کوي چې هواره په یوه برخه انټروال کې وشمیرو.

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{10}} \left(-\frac{1}{3}x - \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x \right) \right) dx \right| = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{10}} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{3} \right) dx \right|$$

$$A = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{12} - \frac{5x^2}{3} \right]_0^{\sqrt{10}} = 2 \cdot \frac{25}{3} = \frac{50}{3}$$

خورا لویه منځهواره $\frac{50}{3}$ د هوارې یوونونه گچوي.
سل:



$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = 0$$

$$\frac{1}{8}x(x^2 - 12x + 36) = 0$$

$$\frac{1}{8}x(x-6)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_{2/3} = 6$$

جگټکی

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$0 = \frac{3}{8}(x^2 - 8x + 12)$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 6$$

د

$$f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \Rightarrow f''(2) = -\frac{3}{2} < 0 \quad x = 2$$

له امله د $x=2$ له پاره دا یو مکسوم په گوته کوي.
د کرښیز برابرې لیکنه

$$f(2) = 4$$

$$y = \frac{4-0}{2-0}(x-0) + 0 \Rightarrow y = 2x$$

د منځه وړې شمیرنه:

ټوله هواره:

$$A = \left| \int_0^6 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{2} + \frac{9x^2}{4} \right]_0^6 \right|$$

د برخه وړې له پاره ایښونه

$$A = \left| \int_0^6 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 2x \right) dx \right| = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 2x \right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^2}{4} \right]_0^2 \right| = \frac{3}{2}$$

یوسل او یو: صفر ځایونه:

$$0 = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

د هوارې شمیرنه:

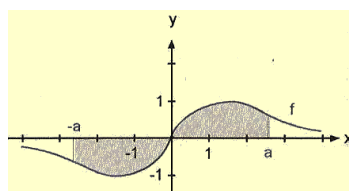
موخه ور بڼه بدلون مو یوه ساده انتیگرال نه بیایي.

$$A = \left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \right| = \left| [x - \arctan x]_0^1 \right|$$

$$A = 1 - \arctan 1 - 0 + \arctan 0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

غوښتونې منځه واره 0,215 هوار یوونونه کچه وي.



یوسل ودوه:

$$0 = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow x = 0$$

د هوارې شمیرنې له پاره ایښونه:

دا چې گراف پیل یا سرچینې ټکی ته سیومتريک دی، نو په لومړۍ څلورمه کې د انتیگرال شمیرنه بسیا کوي.

د $u(x) = 1 + x^2$ او $u'(x) = 2x$ سره د انتیگرالونې تابع بڼه

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{لري. له دې سره دي: } f'(x) = \ln u$$

$$A = 2 \cdot \left| \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x}{1+x^2} dx \right| = \left| \left[\ln(1+x^2) \right]_0^a \right| = \ln(1+a^2) - \ln 1$$

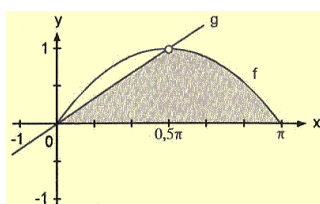
$$A = \ln(1+a^2)$$

برابر ایښونه:

$$\ln(1+a^2) = 1 \Rightarrow 1+a^2 = e \Rightarrow a = \sqrt{e-1}$$

د $a=1,311$ له پاره منځه‌واره ورکړشوی ارزښت اخلي.

یوسلو درې:



$$103. \quad \frac{2}{\pi} = \sin x \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}$$

هوار شمیرنه:

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^2}{\pi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \frac{\pi}{4} + 1 \frac{\pi+4}{4}$$

غوښتونې سطحه نږدې 1,785 د هوارې یوونونه کچوي.

یوسلو څلور: د غوڅټکو پراته ارزښتونه:

$$x \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

هوار شمیرنه:

$$A = \left| \int_0^2 (2 \cdot \sin x - x \cdot \sin x) dx \right| + \left| \int_0^{\pi} (2 \cdot \sin x - x \cdot \sin x) dx \right|$$

$$= \left| [-2 \cdot \cos x]_0^2 - \int_0^2 x \cdot \sin x dx \right| + \left| [-2 \cdot \cos x]_2^{\pi} - \int_2^{\pi} x \cdot \sin x dx \right|$$

له

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1 \quad v'(x) = \sin x, \quad v(x) = -\cos x$$

سره ټوټه انتیگرالونه را کوي:

$$A = \left| [-2 \cdot \cos x]_0^2 - [-x \cdot \cos x]_2^2 - \int_0^2 \cos x dx \right| + \left| [-2 \cdot \cos x]_2^{\pi} - [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} - \int_2^{\pi} \cos x dx \right| +$$

$$= \left| [-2 \cdot \cos x + x \cdot \cos x - \sin x]_0^2 \right| + \left| [-2 \cdot \cos x + x \cdot \cos x - \sin x]_2^{\pi} \right|$$

$$A = 2 - \sin 2 + |2 - \pi + \sin 2| = 2 - \sin 2 - 2 + \pi - \sin 2 = \pi = 2 \sin 2$$

$$A = 2 - \sin 2 + |2 - \pi + \sin 2| = 2 - \sin 2 - 2 + \pi - \sin 2 = \pi = 2 \sin 2 \quad \text{یادونه:}$$

$$|2 - \pi + \sin 2 < 0| \Rightarrow -2 + \pi - \sin 2 = -2 + \pi - \sin 2$$

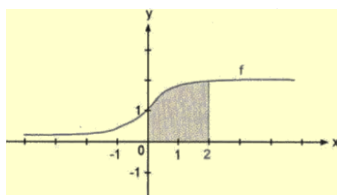
غوښتونکي سطحه ۱,۳۲۳ د سطحې یوونونه کچوي.

یو سل او پنځه: د f گراف صفرځای نه لري او ناپېرېدونکی دی.

هوار شمیرنه: د $u(x) = e^x + 1$

او $u'(x) = e^x$ سره دی:

$$f'(x) = \ln u \quad \text{او} \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$



$$A = \left| 2 \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \right| = \left| [2 \cdot \ln(e^x + 1)]_0^2 \right| = 2 \ln(e^2 + 1) - 2 \cdot \ln 2$$

غوښتونې سطحه د سطحې یوونونو نږدې ۲،۸۶۸ کچوي

یوسلو شپږ: الف: د ډکي- یا حجم فرمول کې ایښوونه:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (2 + \sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 (4 + 4\sqrt{x} + x)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \left[4x + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{136}{3} \pi$$

غوښتونې ډکي (حجم) نږدې ۱۴۲،۴ د فضا یوونونه کچه وي.

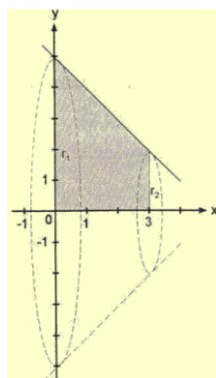
ب: د ډکي فرمول کې ایښوونه:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 12x + 9 \right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2 + 9x \right]_2^4 = \frac{94}{15} \pi$$

غوښتونې ډکي (حجم) نږدې ۱۹،۶۹ د فضا یوونونه کچه وي.

یوسل او اووه: الف: دانتيگرال شمیرني له لارې د ډکي یا حجم شمیرنه:



$$V = \pi \cdot \int_0^3 (-x + 5)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^3 (x^2 - 10x + 25) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x \right]_0^3 = 39\pi$$

ساده ډکي شمیرنه. څرخونېدن یو پخ مخروط یا گازره راکوي د

$$h = 3 - 0 = 3$$

سره

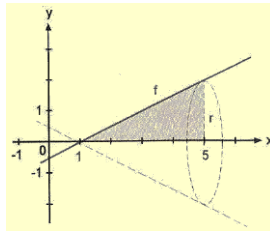
او

$$r_1 = f(0) = 5, \quad r_2 = f(3) = 2$$

$$v = \pi \cdot \frac{3}{3} (5^2 + 5 \cdot 2 + 2^2) = 39\pi$$

هر ځل ۱۲۲،۵ د یوه فضا یوونونه کچه وي.

ب: د انتيگرال شمیرني له لارې د ډکي یا حجم شمیرنه



$$V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \right] = \frac{16}{3} \pi$$

ساده ډکشميرنه:

څرخونېدن يو کيگل انځوروي، د $r=2$

سر ه $h=4$

يوسل او يوولس: کرښه د y -محور په $y=4$ او د x -محور په $x=a$ کې غوڅوي.

له دې سره د يوه څرخون له لارې د x -محور باندې يو کيگل منځ ته راځي د $r=4$ او $a=8$ سره.

د پوښهوارې شميرنه په انټروال $[0;8]$ د انټيگرالولو له لارې.

$$M = 2\pi \cdot \int_0^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \cdot \int_0^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$$M = 2\pi \cdot \left[\frac{\sqrt{5}}{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 4x\right) \right]_0^8 = 16\pi \cdot \sqrt{5}$$

ساده شميرنه

د پوښکرښه:

$$M = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 16\pi \cdot \sqrt{5}$$

د پوښهوارې فرمول:

دواړه شميرنې د نږدې د ۸۵،۲۹ کچيوونونو سره پوښشهواري ورکوي.

يوسل او دولس: د رابيليدنې - يا مشتق تابع:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

انټيگرال يې کړی.

$$M = 2\pi \cdot \int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 2\pi \cdot \int_0^4 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = 2\pi \cdot \int_0^4 \sqrt{x+1} dx$$

$$= 4\pi \cdot \left[\frac{2 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{3} \right]_0^4 = \frac{8}{3} \pi (5\sqrt{5} - 1)$$

غوښتونې هواره د نږدې د ۱۱۲،۴ کچيوونونو سره پوښشهواري ورکوي.

يوسل او ديارلس: د رابيليدنې - يا مشتق تابع:

$$f(x) = \frac{1}{6} x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^2$$

انټيگرال يې کړی

$$M = 2\pi \cdot \int_1^2 \frac{1}{6} x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4} dx = \frac{1}{3} \pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4} dx$$

انتیگرال د مخه ویل شوی قانون له لارې ورکوي:

$$u(x) = 1 + \frac{1}{4} x^4 \Rightarrow u'(x) = x^3$$

$$M = \frac{1}{3} \pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4} dx = \frac{2}{9} \pi \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} x^4\right)^3} dx \right]_1^2$$

$$M = \frac{1}{3} \pi \cdot (5\sqrt{5} - \frac{5}{8}) = \frac{35}{36} \pi \cdot \sqrt{5}$$

غوښتونې پوښهواره نږدې ۶،۸۳۰ هوار یوونونه په کچه کوي
یوسل او څوارلس: د کرښې څرخول د $-x$ محور باندې یو پخ مخروط د
سره راکوي. $h = f(5) - f(1) = 6 - 2 = 4$ او $r_1 = 5$, $r_2 = 1$

د رابیلیدنې - یا مشتقتابع

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

د انتیگرال له لارې د پوښهوارې شمیره:

$$M = 2\pi \cdot \int_1^5 x \cdot \sqrt{2} dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \sqrt{2} \right]_1^5 = 25\pi \cdot \sqrt{2} - \pi \cdot \sqrt{2} = 24\pi \cdot \sqrt{2}$$

ساده شمیرنه:

پوښکرښه:

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2) = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{2} (1 + 5) = 24\pi \cdot \sqrt{2}$$

د دواړو بنمیرنو پوښهوارې نږدې ۱۰۶،۶ پوښیوونونه راکوي.

یوسل او پنځلس: کښته لور ته واز پاربول د $-y$ محور باندې ککړیتکې $S(0/4)$ لري او زیاتیزه
 $-x$ محور په $x=4$ کې غوڅوي.

د رابیلیدنې - یا مشتق تابع یا - څیرونه.

$$f(x) = -\frac{1}{4} x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x$$

انتیگرال یې کړی

$$M = 2\pi \cdot \int_0^4 x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^2} = \pi \cdot \int_0^4 x \cdot \sqrt{4 + x^2} dx$$

بڼهبدلون او په ځای ایښوونه یا بدلون یا سبستچيوشن

$$u(x) = 4 + x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$M = \frac{1}{2} \pi \cdot \int_0^4 2x \cdot \sqrt{4 + x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot \left[\frac{x \cdot \sqrt{(4 + x^2)^3}}{3} \right]_0^4$$

$$M = \frac{40}{3} \pi \sqrt{5} - \frac{8\pi}{3}$$

پوښهواره نږدې ۸۵،۲۹ د هوارې یوونونه کچه وي.

یوسل او شپارس: د کرښیز برابرول لیکل

$$y = \frac{(8-4)}{(5-2)}(x-2) + 4$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

انتیگرالول

$$s = \int_2^5 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} dx = \int_2^5 \frac{5}{3} dx = \left[\frac{5x}{3}\right]_2^5 = \frac{25}{3} - \frac{10}{3} = 5$$

ساده شمیرنه

$$s = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

دواړه شمیرنې ۵ اوږدوالي یوونه راکوي.

یوسل او اولس: رابیلید خیره ونه یا مشتقتابع:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}$$

انتیگرال یې کړی

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{16}x} dx$$

سبستیچیوشن یا بدلون یا په ځای ایښوونه:

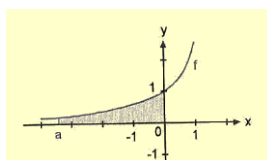
$$u(x) = 1 + \frac{9}{16}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{9}{16} \Rightarrow dx = \frac{16}{9}du$$

$$s = \frac{16}{9} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{16}{9} \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$s = \frac{32}{27} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{25}{16}\right)^3} - \sqrt{3} \right) = \frac{32}{27} \cdot \left(\frac{125}{64} - 1 \right) = \frac{61}{54}$$

غوښتونې لینده اوږدوالی ۱،۱۲۹ اوږدوالي یوونونه کچه وي.

یوسل او اتلس: الف: انتیگرال یې کړی



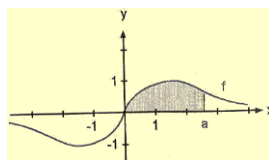
$$\int_a^0 e^x dx = [e^x]_a^0 = 1 - e^a$$

پولي ټاکنه:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1$$

ناتاکلی انتیگرال پوله ارزښت ۱ لري.

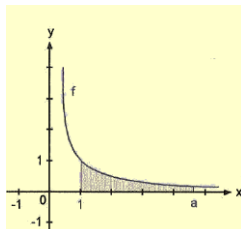
ب: انتیگرال یې ونیسی



$$\int_a^0 e^x dx = [e^x]_a^0 = 1 - e^a$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2 + 1)]_0^a = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1)$$

پ: انتیگرال کری



$$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^a x^{-\frac{1}{2}} dx$$

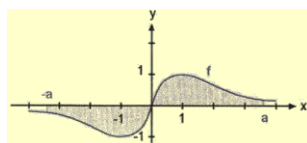
$$= \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^a = [2\sqrt{x}]_1^a = 2(\sqrt{a} - 1)$$

پوله ارزښت شمیرنه:

د $a \rightarrow \infty$ له پاره هڅیري: $2(\sqrt{a} - 1) \rightarrow \infty$

له دې سره یا له دې امله ناټاکلی انیگرال پوله ارزښت نه لري او په پای کې یا بالاخره دوه برابروال.

ت: د f گراف پیل یا سرچینې سره ټکیسومتریکی دی. له دې سره ټاکلی انتیگرالونه په انټروالونو $[-a/0]$ او $[0/a]$ کې د ارزښت له مخې برابر مگر د مختلفو مخنښو سره. په انټروال $[-a/a]$ کې له دې امله ټاکلی انتیگرال ارزښت صفر نیسي.



$$d) \int_0^a \frac{4x}{(x^2 + 2)^3} dx = \int_0^a \frac{2x}{(x^2 + 2)^3} dx$$

بدلون یا په ځای ایښوونه.

$$u(x) = x^2 + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$2 \int_0^a \frac{2x}{(x^2 + 2)^3} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{(u(x))^3} du = 2 \cdot \left[-\frac{1}{2 \cdot (u(x))^2} \right]_0^a$$

$$A = 2 \cdot \left[\frac{-1}{2(x^2 + 2)^2} \right]_0^a = -\frac{1}{(a^2 + 2)^2} - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

پوله ارزښت ټاکنه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{(a^2 + 2)^2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

یو سل او نولس: انتیگرالونه. الف:

$$\int_1^a \frac{1}{x^p} dx = \int_1^a x^{-p} dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{1-p} \right]_1^a = \left[\frac{1}{(1-p) \cdot x^{p-1}} \right]_1^a$$

$$= \frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}} - \frac{1}{1-p}$$

له دې امله ترم $a \rightarrow \infty$ د $\frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}} - \frac{1}{1-p}$ له پاره یو پوله ارزښت باید ولري او

ماتلاندې $\frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}}$ باید د جگړونکې a له پاره لوی یا جگ شي، له دې امله

باید a یو زیاتیز جگړن یا اکسپوننت ولري.

د $p > 1$ له پاره ناټاکلی انتیګرال پوله ارزښت $\frac{1}{1-p}$ لري.

یوسل او شل: الف: تابع یا څیره ونه f په $x=0$ کې زیاتیز دی.

$$\int_u^1 \frac{x^3+1}{x} dx = \int_u^1 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \ln x\right]_u^1 = \frac{1}{3} - \frac{u^3}{3} - \ln u$$

د $u \rightarrow 0$ له پاره $\frac{1}{3} - \frac{u^3}{3} - \ln u \rightarrow \infty$ هڅیږي.

ناټاکلی انتیګرال شتون نه لري.

ب: تابع یا څیرونه یا فنکشن f په $x=0$ کې قطبځای لري.

$$\int_u^1 \ln x dx = [x \cdot \ln x - x]_u^1 = u - u \cdot \ln u - 1$$

د لو پیتال له مخې دی

$$u \cdot \ln u = \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \Rightarrow \frac{\frac{du}{du}}{\frac{d}{du} \frac{1}{u^2}} = \frac{u}{-1} = -u \Rightarrow u \cdot \ln u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

د $u \rightarrow 0$ له پاره له دې سره هڅیږي: $u - u \cdot \ln u - 1 \rightarrow -1$

پ: څیرونه یا تابع f په $x=1$ کې قطبځای لري.

$$\int_u^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx = \int_u^2 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} dx = \int_u^2 (\sqrt{x}+1) dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x\right]_u^2$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{2\sqrt{u^3}}{3} - u$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{2\sqrt{u^3}}{3} - u\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

ت: څیرونه یا تابع f په $x=1$ کې قطبځای لري.

په ورکوشوې ورشو کې صفرځایونه مخ نه دي پراته.

د چې د f ګراف y -محور ته سی، متریک پروت دی نو یوه برخه انټروال کې هوار شمیرنه بسیا کوي.

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^u = \arcsin u - 0 = \arcsin u$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \arcsin u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

ب: تابع f په $x=2$ کې قطبځای لري

$$\int_0^u \frac{x^2}{x^3-8} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3-8} dx = \frac{1}{3} \cdot [\ln|x^3-8|]_0^u = \frac{1}{3} (\ln(u^3-8) - \ln 8)$$

د $u > 2$ له پاره لرو: $\ln(u^3-8) \rightarrow \infty$

ت: څیرونه یا تابع f په $x=1$ کې قطبځای لري.

$$f) \int_u^1 \frac{e^x}{1-e^x} dx = -\int_u^1 \frac{-e^x}{1-e^x} dx = -\left[\ln|1-e^x|\right]_u^1 = -\ln(e-1) + \ln|1-e^u|$$

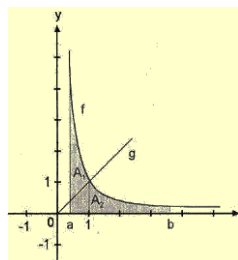
د $u \rightarrow 0$ له پاره هڅیږي: $\ln|1-e^u| \rightarrow -\infty$

ناتاکلی انتیګرال شتون نه لري.

یو سل او یو وېشت: دواړه ګرافونه په $p(1/1)$ کې غوڅوي.

برخه‌واري په انټروالونو $[0/1]$ او $[1/\infty]$ پرتې دي.

هوارشمیرنه د A_2 له پاره د ګرافونو په منځ کې هوارې په څیر.



$$121. \int_a^1 \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_a^1$$

$$= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} - \frac{3}{2}$$

د $a \rightarrow 0$ له پاره هڅیږي:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} - \frac{3}{2} \rightarrow \infty$$

برخه‌واره A_1 کومه پوله ارزښت نه لري.

د برخه‌واري A_2 شمیرنه د دوه برخه‌وارو په څیر:

$$\int_0^1 x dx + \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{b} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{b}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}$$

برخه‌واره A_2 پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ لري.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library