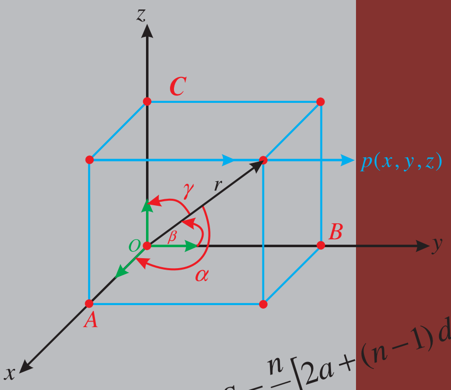
د پوهنې وزارت

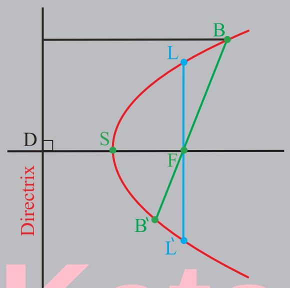
د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس
د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

ریاضي ۱۱

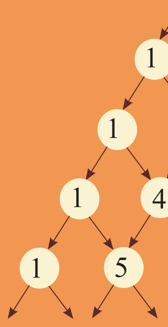
ټولګی



$$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$



ریاضي ۱۱ ټولګی



ره لري پیرودل
ونکو سره به يي

د چاپ کال: ۱۳۹

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او
د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف
لوی ریاست

ریاضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.

ليکوالان:

- پوهنمل طلاباز حبيب زى د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړى
- مهربه ناصر د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړې
- پوهندوى خالقداد فيروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړى
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستورى(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړى

ژباړونکي:

- سرمؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړى
- پوهنمل طلاباز حبيب زى د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړى
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستورى(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړى
- مختار نويد د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړى

علمي او مسلکي ايډيټ:

- ډاکټر عطاء الله واحديار د پوهنې وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئيس.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوى رياست کې.
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستورى(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړى

د ژبې ايډيټ:

- محمد قدوس ذکوخيل

ديني، سياسي او کلتوري کميته:

- مولوي عبدالوکيل د اسلامي تعليماتو علمي غړى.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوى رياست کې.

د څارنې کميته:

- دکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين
- دکتور شېر علي ظريفي د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوى رئيس

طرح او ډيزاين:

ولید ((نويد)) نسيمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

گرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختگ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کيږي. څرگنده ده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي گټورې موضوعگانې پکې زياتې شوې دي. د زده‌کړې په بهير کې د زده‌کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه گرځېدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده‌کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده‌کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې گډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده‌کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ گران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توگه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د څرگندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډگر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده‌کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تآليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملگرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردگ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

سرلیک | **مخونه**

لومړی څپرکی مخروطي مقاطع

- مخروطي مقاطع ۳
- بیضوي ۵
- د بیضوي معادله ۹
- د بیضوي معادله چې مرکز یې یو کیفي ټکی وي ۱۳
- پارابولا ۱۷
- د پارابولا معادله ۱۹
- د هغې پارابولا معیاري معادله چې راس یې یو اختیاري ټکي وي ۲۳
- هایپربولا ۲۷
- د هایپربولا معادله ۲۹
- د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي ۳۳
- دیوې کرښې مو قعیت نظرمخروطي مقاطعو ته ۳۷
- د څپرکي مهم ټکي ۴۱
- د څپرکي پوښتنې ۴۴

دویم څپرکی مثلثات

- د ساین قانون ۴۹
- د کوساین قانون ۵۵
- د ټانجنټ قانون ۵۹
- مثلثاتي مطابقتونه ۶۳
- مثلثاتي معادلې ۶۹
- دویمه درجه مثلثاتي معادلې ۷۵
- د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سېستمونوحل ۷۹
- د څپرکي مهم ټکي ۸۹
- د څپرکي پوښتنې ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی فضايي هندسه

- اساسي مفاهيم او اکسيومونه ۹۵
- په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي ۹۷
- په فضا کې موازي مستقيمونه ۱۰۱
- په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه ۱۰۳
- په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي‌ګانې ۱۰۵
- په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي‌ګانې ۱۰۷
- په فضا کې موازي مستوي‌ګانې ۱۰۹
- د څپرکي مهم ټکي ۱۱۱
- د څپرکي پوښتنې ۱۱۳

څلورم څپرکی ترادفونه

- ترادفونه ۱۱۷
- حسابي ترادف ۱۱۹
- هندسي ترادف ۱۲۷
- د ترادفونو قسمي مجموعه ۱۳۳
- د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه ۱۳۷
- د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل ۱۴۱
- لايتناهي هندسي سلسلې ۱۴۳
- د څلورم څپرکي مهم ټکي ۱۴۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۴۹

پنځم څپرکی لوګاريتم

- اکسپوننشيل تابع ګانې ۱۵۳
- لوګاريتم ۱۵۷
- لوګاريتمي تابع ګانې ۱۵۹
- معمولي لوګاريتم ۱۶۳
- د لوګاريتم قوانين ۱۶۷
- د لوګاريتم د قاعدې اړول په بله قاعده ۱۷۱
- کرکټرسټيک او مانتيس ۱۷۵
- د لوګاريتم جدول ۱۷۹
- انټي لوګاريتم ۱۸۳
- خطي انټرپولېشن ۱۸۵
- د لوګاريتمي او اکسپوننشيل معادلو حل ۱۸۹
- درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه ۱۹۳
- د څپرکي مهم ټکي ۱۹۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۹۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی متریکسونه

- متریکسونه ۲۰۵
- د متریکسونو ډولونه ۲۰۹
- د متریکسونو جمع او تفریق ۲۱۳
- په متریکس کې د سکالر ضرب ۲۱۵
- د دوو متریکسونو ضرب ۲۱۷
- د یوه متریکس ترانسپوز متریکس ۲۲۱
- دیترمېنانت ۲۲۳
- د دیترمېنانت خاصیتونه ۲۲۷
- د 2×2 مرتبې متریکسونو ضربي معکوس ۲۲۹
- له معکوس متریکس څخه په کاراخېستنې د خطي معادلو د سیستم حل ۲۳۱
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه ۲۳۵
- د معادلو د سیستم حل د ګوس(Gouse) په طریقه ۲۳۹
- د شپږم څپرکي مهم ټکي ۲۴۳
- د څپرکي پوښتنې ۲۴۵

اووم څپرکی وکتورونه

- د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه ۲۴۹
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی ۲۵۱
- وکتورونه په سطح او فضا کې ۲۵۳
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات ۲۵۵
- د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه ۲۵۹
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل ۲۶۱
- د وکتوري ضرب حاصل ۲۶۵
- د څپرکي مهم ټکي ۲۷۵
- د څپرکي پوښتنې ۲۷۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی احصایه

- دبدلونو ضریب ۲۸۱
- په نورمال منحني کې پراګنده ګي(تېتوالی) ۲۸۳
- دنورمال توزیع دډول شاخصونه ۲۸۵
- څو متحوله ټولنې ۲۸۷
- د پراګنده ګي ګراف ۲۸۹
- پیوستون او دپیوستون ضریب ۲۹۱
- د خطي میلان معادله ۲۹۵
- د اتم څپرکي مهم ټکي ۲۹۹
- د څپرکي پوښتنې ۳۰۱

نهم څپرکی احتمالات

- پرموټېشن یا ترتیب ۳۰۵
- ترکیب یا کمبنیشن ۳۰۹
- ترکیب ۳۱۱
- تبدیل ۳۱۳
- د بینوم قضیه ۳۱۷
- دوه جمله یي احتمال ۳۱۹
- د څپرکي مهم ټکي ۳۲۳
- د څپرکي پوښتنې ۳۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

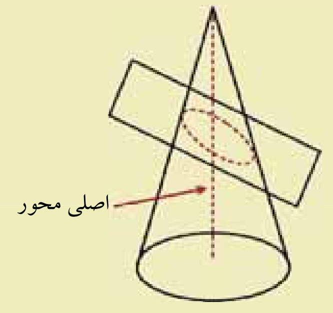
لومړی څپرکی

مخروطي مقاطع

(c) ketabton.com: The Digital Library

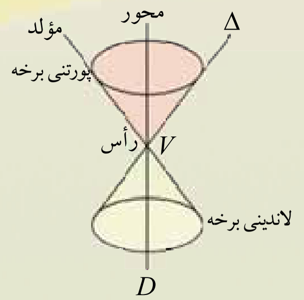
مخروطي مقاطع

sections of Conic



آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحنې ګانې په لاس راځي.

د مخروطي مقاطعو تعریف



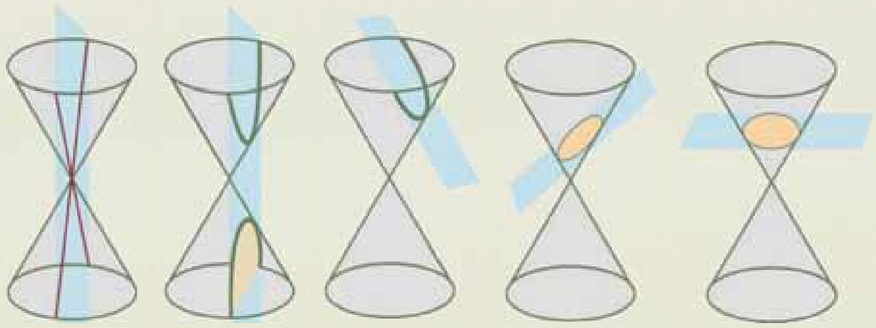
د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د V په ټکي کې قطع (پرې) کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپیرو ځرخیږي، له دې ځرخولو څخه په فضاکې دوه شکلونه چې یو یې د V (ټکې) پورته او بل یې د V د ټکي کښته خواته جوړیږي. هر یو یې مخروط دی، لکه مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی. د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کیږي. په راتلونکې کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدې سره موازي وي، ویلای شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې د مستوي او مخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي (نسبت اصلي محور ته مایل)، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې متسوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نوګډ فصل یې یوه دایره ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي اومخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي، (مایل) لاس ته راغلي شکل الیپس (Ellipse) یا بیضوي ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي وي چې اصلي محور ته موازي او هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له ګډ فصل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوې مستوي دوه سر په سر یا څوکه په څوکه مخروطونه چې اصلي محور ته موازي وي قطع کړي وي، له ګډ فصل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي اصلي محور په برکې ولري، نوګډ فصل یې له دوو متقاطع کرښو څخه عبارت دی. چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوي دي.

پوښتنې

1- د پورتني شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکه په څوکه مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

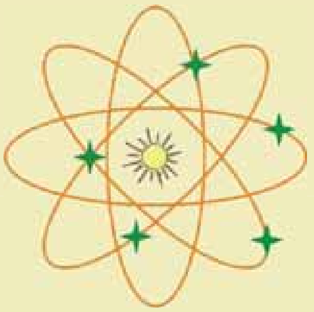
3- د یوې مستوي او مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیضوي

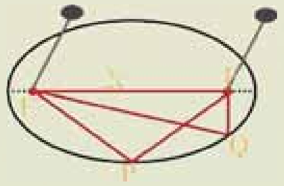
Ellipse

د سیارو حرکت د لمر په شاوخوا یا شمسي نظام څه ډول منحني ګانې جوړوي؟



فعالیت

- د یوې سپینې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د یو تار ځوکې چې اوږدوالی یې د $\overline{FF'}=2c$ څخه زیات دي، په دواړو ستنو کې وتړئ، د لاندې شکل په پام کې نیولو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وښوئ.
- هغه شکل چې د یوې بشپړې دورې په لاس راځي څه ډول منحني ده؟

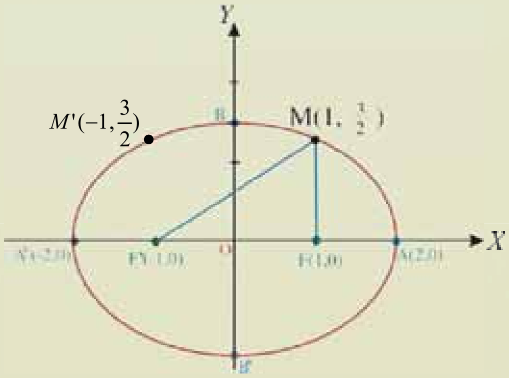


له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له خرخولو څخه په لاس راځي، د الپس منحني بلل کیږي، د F او F′ ټکي د الپس د محراقونو په نامه یادیږي.

فعالیت

- په مخامخ شکل کې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF'|$، $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ او بیا د $|AA'|$ او $|MF|+|MF'|$ اوږدوالی یو له بل سره پرتله کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د الپس په محیط باندې په نښه او همدارنګه د M′ ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

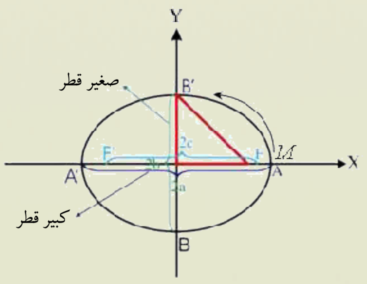
له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی ولري، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکی چې په F او F′ تورو ښودل شوي، د الپس محراقونه او A, A' د الپس راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F| + |M' F'| = 2a \quad , \quad |M F| + |M F'| = 2a$$

$$|M' F| + |M' F'| = |M F| + |M F'| = 2a$$

د الپس قطرونه او راسونه:



الپس بې شمېره قطرونه لري، لوی یې کبیر قطر یا اوږد قطر چې له محراقونو څخه تیریږي او بیضوي په دوو ټکو د A, A' کې قطع کوي، د کبیر قطر یا Major axis په نامه او کوچنی قطر یې د FF′ د نیمایي په ټکي عمود دی چې د صغیر قطر یا Minor axis په نامه یادیږي. د A, A' او B, B' ټکی د الپس راسونه دي، کبیر قطر په A, A' چې اوږدوالی یې یعني $AA' = 2a$ او صغیر قطر په B, B' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کیږي.

یادداښت

که چیرې د M ټکی د صغیر قطر په راسونو یعني په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې له پورته شکل څخه لیکلای شو:

$$\overline{MF} = \overline{MF'}$$

له بلې خوا پوهیږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه:

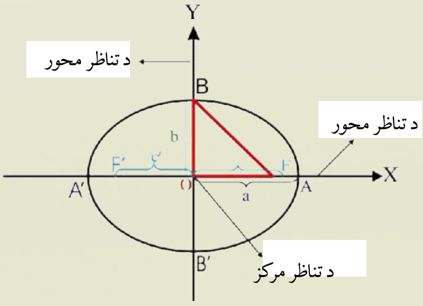
د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکي د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د الپس تناظري مرکز او تناظري محور:

الپس دوه تناظري محورونه لري چې یو یې لوی محور د AA' پر قطر باندې منطبق دی چې محراقي محور هم بلل کیږي او بل یې کوچنی تناظري محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی.

د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی د الپس تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (**Eccentricity**): د یوې بیضوي شکل د عن المرکزیت په واسطه ټاکل کیږي عن المرکزیت د محراق او لوی محور له نسبت څخه عبارت دی، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي او د $e = \frac{c}{a}$ په شکل تعریف شوی دی.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کیږي. د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه شته $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

زده‌کوونکي دې د قطرونو او محورونو ترمنځ د رابطې په کارونې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: که چيرې د e قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه يې د مرکز خوا ته نـژدې کيـږي. دلتـه بيـضوي تقريبـاً دايروي شکل غوره کوي. که چيرې e د 1 عدد ته نـژدې شـي، پـه دې صـورت کـې محراقونـه د قطرونـو د راسـونو خواته نژدې کيږي چې يو اوږد شکل غوره کوي، د بيضوي په ډيرو مسايلو کې د عن المرکزيت څخه کـار اخيـستل کيږي.

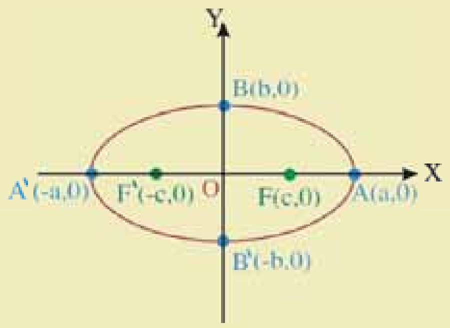
پوښتنې

1 – که چيرې په بيضوي کې د کبير قطر او صغير قطر اوږدوالى يو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنى پـه لاس راځي؟

2 – که چيرې د بيضوي عن المرکزيت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا کړئ.

د بیضوي معادله

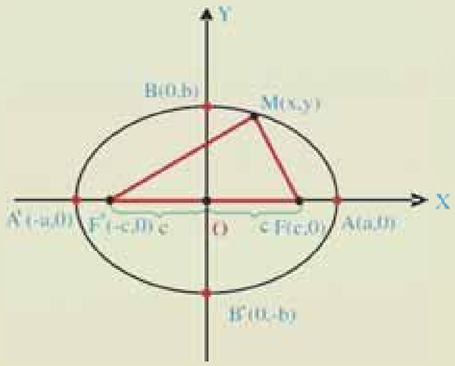
آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي، پیداکولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکي ته ولیکئ.
- د M او F د ټکو ترمنځ واټن او همدارنګه د M او F′ د ټکو ترمنځ واټن پیداکړئ او د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF|+|MF'|=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

یا:
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad /\div(-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

ځرنگه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کیږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توگه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله را ښیي چې د محراقونو وضعیه کمیات یې $(C,0)$, $(-C,0)$ او د x پر محور باندې واقع دي.

ثبوت دویم حالت: که چیرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې بیضوي رسم، د اوږد قطر، لنډ قطر او محراقونو مختصات دې ولیکي.

لومړی مثال: که چیرې د y پر محور باندې د بیضوي د اوږد قطر اوږدوالی یعنې $|AA'|=6$ او لنډ قطر اوږدوالی یعنې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:

$$|AA'|=2a=6$$
$$2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو او معادله لیکو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که چیرې د یوې بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی $|AA'|=10$ او لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهېږو چې:

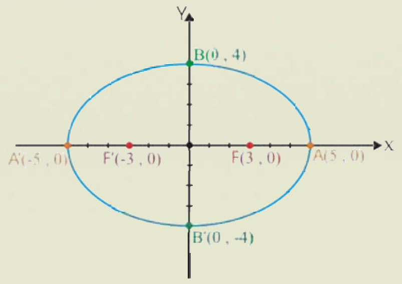
$$|AA'|=2a=10 \Rightarrow a=\pm5$$
$$|BB'|=2b=8 \Rightarrow b=\pm4$$

لیدل کیږي چې $a>b$ دی، نو اوږد قطر یې د x پر محور باندې پروت دی، د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له: $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د c قیمتونه پیدا کوو:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$\Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3,0)$ څخه عبارت دي.

عن‌المرکزیت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دي

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

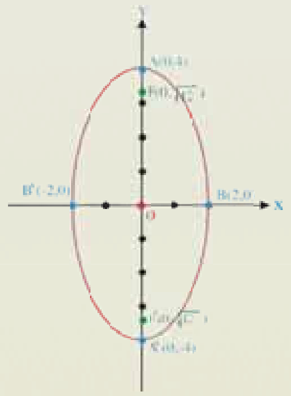
حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 وېشو:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \Rightarrow a=\pm4 \Rightarrow A(0،4)\ ،\ A'(0\ ،\ -4)$$
$$b^2=4 \Rightarrow b=\pm2 \Rightarrow B(2،0)\ ،\ B'(-2\ ،\ 0)$$

د محراقونو مختصات:



$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

خلورم مثال: د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د تعریف په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2}+2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2}}+38-12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76+2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76+2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76+68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \,/ \div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی د راسونو او محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ $\qquad b)\ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې الپس معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

ايا دداسې بيضوي معادله پيداکولای شو چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبداکې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

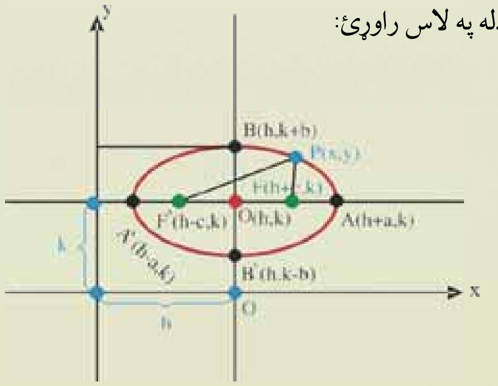
فعاليت

يوه بيضوي د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h,k) او لوی قطر يې د x له محور سره موازي وي.

د $P(x,y)$ يو ټکی د بيضوي په محيط باندې په پام کې ونيسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.

د بيضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B, B' وضعيه کميات په شکل کې وښياست.

د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې او د بيضوي د تعريف د رابطې په کارونې سره معادله په لاس راوړئ:



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

يا:

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او له اختصار وروسته لاندې رابطه په لاس راځي:

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+h^2+2cx-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad / \div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او ليکو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې په بيضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو ليکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2 \quad / \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د يوې بيضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د انجامونو مختصات چې معادله يې $\frac{(y+4)^2}{16}+\frac{(x-6)^2}{36}=1$ ده، پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: څرنگه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات يې $(6,-4)$ ده، لوی محور يې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36 \Rightarrow a=\pm6$$
$$b^2=16 \Rightarrow b=\pm4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm2\sqrt{5}$$

د A او A′ مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6،\ -4)=A(12،\ -4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6،\ -4)=A'(0،\ -4)=A'(0،\ -4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

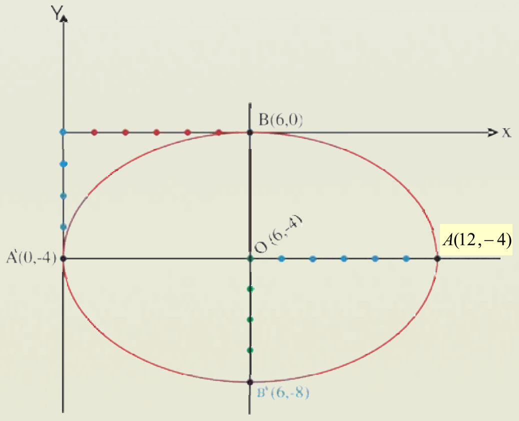
د B او B′ مختصات عبارت دي له:

$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$

$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$

$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$

$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$



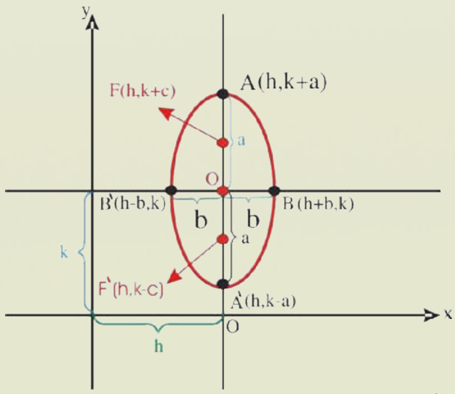
دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$A(h\,,k+a)\,,\ A'(h,k-a)$

$B'(h-b\,,k)\,,\ B(h+b,k)$

$F'(h,k-c)\ ,\ F(h\,,k+c)$



د محراقونو او راسونو مختصات دې زده کوونکو ته دنده ورکړل شي.

يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعني $C>0$, $A>0$ يا $C<0$, $A<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$16x^2+25y^2-64x+50y=311$

$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$

$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$

$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$

$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$

$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$

$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(2, -1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخېستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-(1)^2-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساوات دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیدا کړئ.

$a)\ \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(0,2)$ ټکی، محراق یې د $(2, 6)$ ټکی او د $(4,6)$ له ټکي څخه تیره شي.

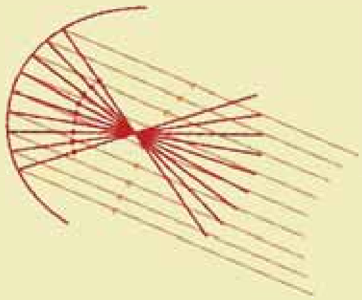
3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او همدارنګه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه یې رسم کړئ.

$a)\ 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

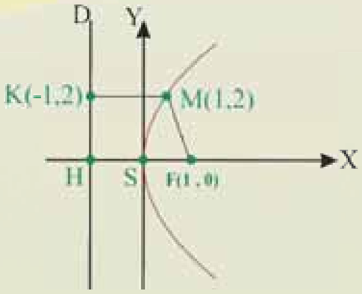
پارابولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په یوې معقرې عدسیې ولوېږي، انعکاسي(منعکسه) وړانګې یې له کوم ټکي څخه تیرېږي؟
دغه ټکی څه نومیږي او د عدسیې ګډ فصل له یوې متقاطع مستوي سره چې د عدسیې محور په برکې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعالیت

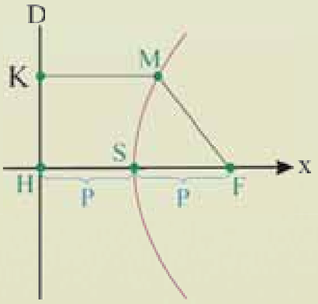


د فعالیت د سرته رسولو لپاره مخامخ شکل په پام کې ونیسئ په شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د FM او KM هر یو اوږدوالی پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

له پورته فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او یوه ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي. دغه ثابت یا مستقر ټکی د پارابولا محراق (F) او د D ثابت مستقیم خط ته د پارابولا موجه (Directrix) وایي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقیم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تیر او د موجه (D) پر مستقیم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي یا تناظري محور په نامه یادیږي.



د تناظري محور او منحني ګډ ټکی د پارابولا راس او په S سره ښودل کیږي.

آیا ویلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نیمايي ټکی دی، ولې؟

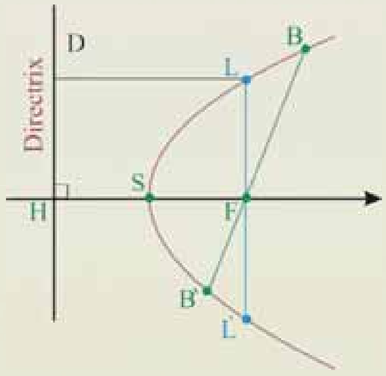
په پارابولا کې عن المرکزیت $(e = 1)$ دی ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا وترونه:

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکی سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي. په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی او LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کیږي.



پوښتنې

د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ څو برابره دی.

د پارابولا معادله

د هغې پارابولا د معادلې د پیداکولو لپاره چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي، لاندې فعالیت په پام کې ونیسئ.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه یو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

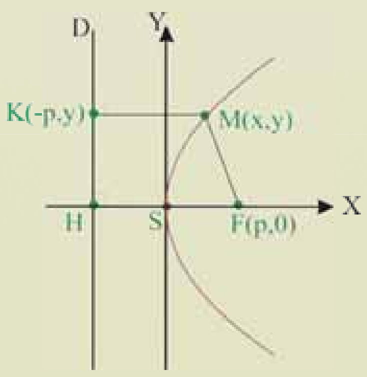
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د F, M او K, M ټکو ترمنځ فاصله پیداکړئ او بیا د پارابولا معادله د $|MF| = |MK|$ له رابطې څخه په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د |MF| او |MK| قیمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

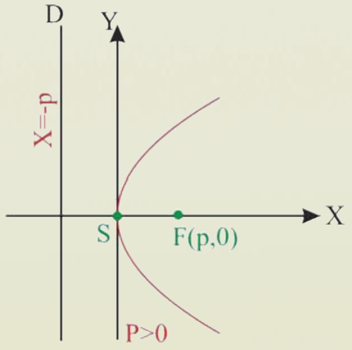
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

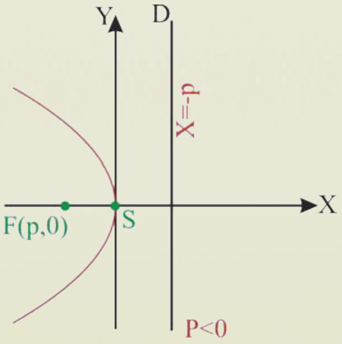
(c) ketabton.com: The Digital Library

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبداکې $F(p,0)$ د پارابولا محراق د x پر محور باندې پروت دی او موجه خط يې $x=-p$ دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقیم خط معادله $x=-2$ سره وي او همدارنګه د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، وبلاي شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قیمت په معادله کې ایږدو:

$$y^2=4\cdot 2x \quad\Rightarrow\quad y^2=8x$$

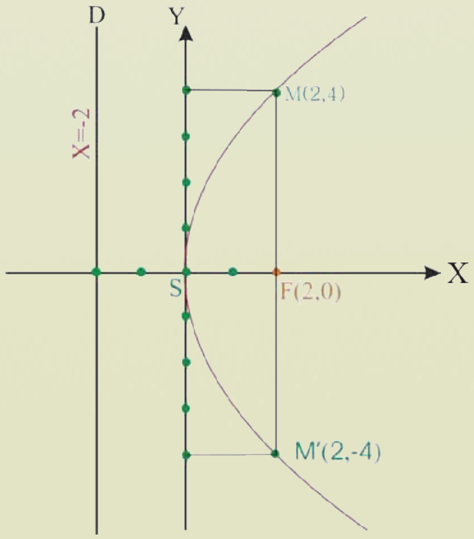
که چیرې د $x=2$ قیمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

$$M(2,4) \qquad , \qquad M'(2,-4)$$

د پورته معلوماتو له مخې $y^2=8x$ پارابولا ګراف رسم کړئ.

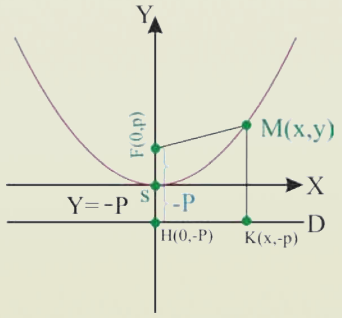


(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت: که چیرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

حل: د پورته غوښتنې لپاره په پارابولا باندې یوټکی، لکه: $M(x,y)$ په پام کې نیسو، د پارابولا د تعریف له مخې لیکلای شو:

ثبوت:

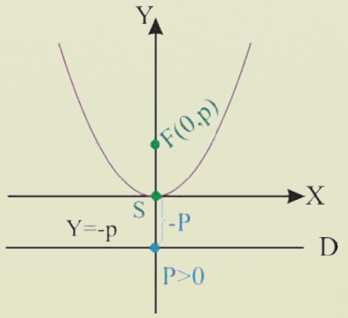


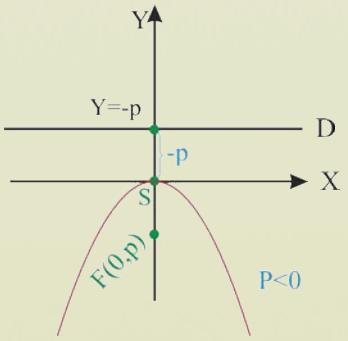
$$|\overline{MF}|=|\overline{MK}|$$
$$|\overline{MF}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$
$$|\overline{MK}|=\sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$
$$\Rightarrow(\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2=(\sqrt{(y+p)})^2$$
$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$
$$\Rightarrow x^2=4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0,p)$ او $y=-p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





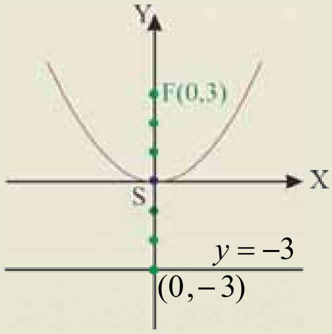
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس، محراق مختصات، د هادي خط معادله پيدا او گراف يې رسم کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

$$4p = 12$$
$$p = 3$$

څرنگه چې $P = 3 > 0$ شخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.



1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$

پوښتني

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا او گرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)\ S(0,0)$ $\quad F(0,5)$

$b)\ S(0,0)$ $\quad F(-2,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې پارابولا معیاري معادله چې راس یې یو اختیاري ټکی وي

آیا د داسې پارابولا معادله پیداکولای شوچې د راس مختصات یې د وضیعه کمیاتو په مبداکې نه وي.

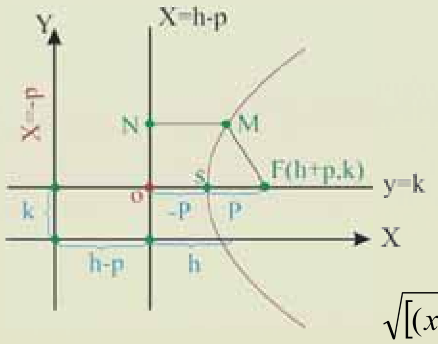
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

فعالیت

- یوه پارابولا د وضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې (h,k) او د تناظري محور یې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بیاد M له ټکي څخه یو عمود خط پر ها دي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N وواياست.

اوس د دووټکو ترمنځ د فاصلې څخه دپیداکولو په ګټې اخېستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ، بیا دهغې پارابولا معادله چې مرکز یې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.

ثبوت:څرنګه چې د F او M ټکو وضیعه کمیات پیژنو او همدارنګه د N وضیعه کمیات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعریف له مخې لیکو



$$|MF| = |MN|$$

د دوو ټکوتر منځ د فاصلې له مخې لرو:

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

د واړه خو اوي مربع کوو او له اختصار وروسته لیکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y+k)^2 = [x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2 = x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

د پورته رابطې له پراختیا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

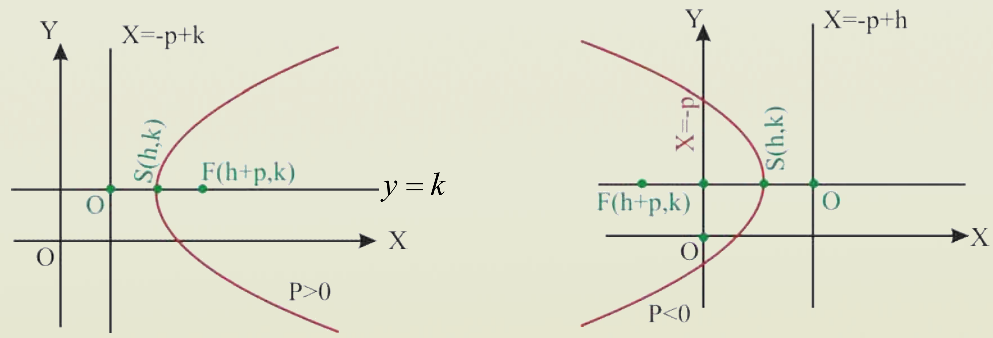
$$y^2-2ky+k^2 = 4px-4ph$$
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس وضعیه کمیات یې $S(h,k)$ محراق یې $F(h+p,k)$ او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.



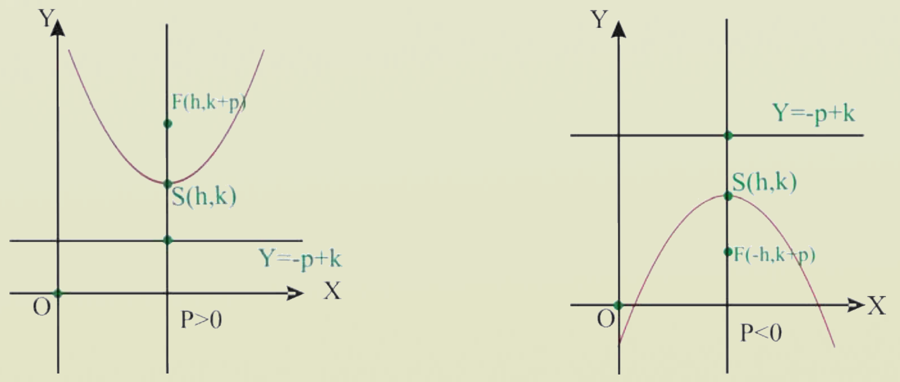
دویم حالت: د هغې پارابولا معادله چې تناظري محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.



لومړي مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ د پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $k=2, h=1$ کیږي، په دې صورت کې د پارابولا دراًس وضعیه کمیات عبارت دي له: $S(1,2)$

$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

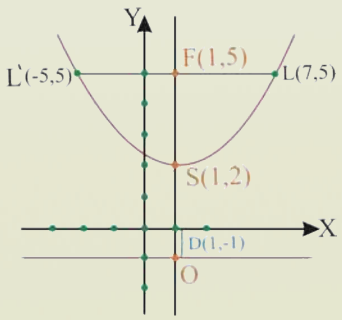
د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \Rightarrow F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \Rightarrow 2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي و تر دانجامونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د y قیمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې اېږدو یعنې $y=5$ دی.

$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$



دویم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونیسئ، د پارابولا دراس او محراق مختصات د موجه خط معادله، تناظري محور معادله، د عمودي و تر د انجامونو مختصات پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: دراس مختصات: $k=4, h=-3 \Rightarrow S(-3,4)$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

څرنگه چې $-\frac{3}{2}<0$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

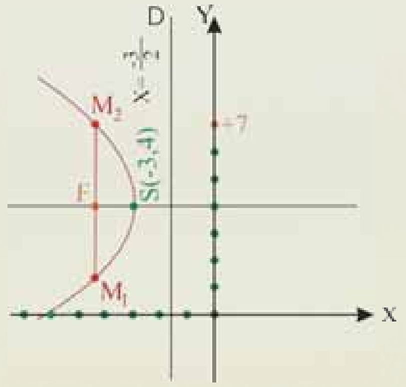
موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \Rightarrow y=4$

د $x=-\frac{9}{2}$ قیمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$



یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې $C\neq 0\ ,\ A=0$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په پراختیایي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس، محراق مختصات، د مؤجه خط معادله او تناظري محور یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوي معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \Rightarrow (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کیږي: $4P=-8 \Rightarrow P=-2$

دراس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

$F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$ ، د موجه خط معادله $x=h-p \Rightarrow x=-3+2=-1$

تناظر محور عبارت له $y=1 \Rightarrow y=k$ څخه دی.

پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړې، په داسې حال کې چې:

$a)\ S(1,3), F(-1,3)$

2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله او د تناظر محور پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ او ګراف یې رسم کړئ.

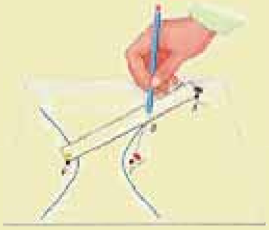
$a)\ y^2-6y+8x+41=0$ $\qquad b)\ x^2-2x-6y-53=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

هایپربولا

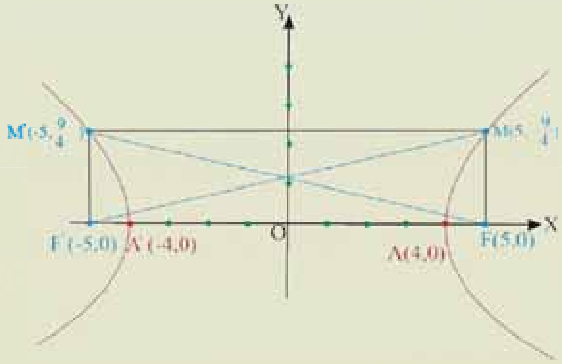
Hyperbola



په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقروټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحني کیدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې دپیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالي پیدا کړئ.
- د $|MF|-|MF'|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.
- پورتني فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ
- د $|MF|-|MF'|$ او $|M'F|-|M'F'|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې دهغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه تل مساوي اوږ دوالی ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کیږي.

دوه مستقر ټکي د هایپربولاد محراقونو په نامه یادیږي، په شکل کې F او F' د هایپربولا محراقونه M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي، په دې صورت کې لیکو:

$$|M'F|-|M'F'|=|MF|-|MF'|=|AA'|=2a$$

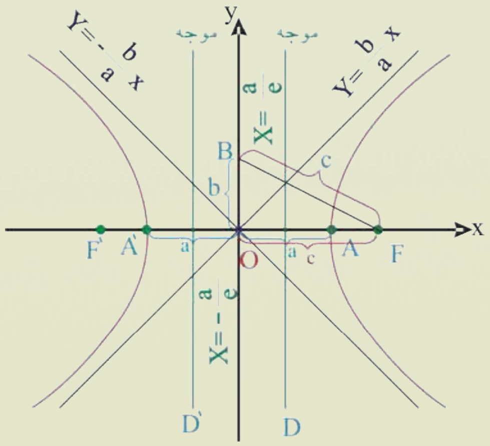
د FF' منځنۍ ټکی د هایپربولا مرکز دی، دمرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله، لکه بیضوی په هایپربولاکې هم $AA'=2a$ او $FF'=2c$ اوږدوالی لري.

د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په ډول هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یوېې په FF' باندې منطبق او د هایپربولا له راسونو څخه تیرېږي. بل يې د FF' عمودې نیمایې کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، دهایپربولا مرکز بلل کیږي. هغه تناظري محور چې له FF' څخه تیرېږي، د متقاطع محور په نامه یادیږي، ځکه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکوته د هایپربولا راسونه وایې او اوږدوالي له $|AA'|=2a$ څخه عبارت دی.

هغه خط چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، خو د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکې په پام کې نیسو چې $OB=OB'=b$ وي، دا دوه ټکې د هایپربولا غیر حقیقي راسونه بلل کیږي چې $|BB'|=2b$ غیر حقیقي محور دی.

په یوه هایپربولاکې د b, a او c اوږدوالو ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2=a^2+b^2$

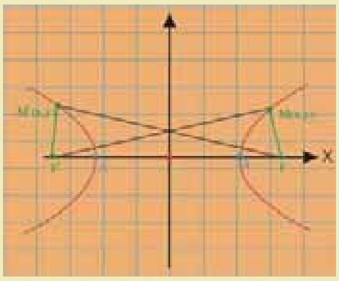


عن المرکزیت: څرنګه چې په هایپربولاکې $c>a$ دي، نو $e>1$ کیږي. چې د c, b, a او عن المرکزیت ترمنځ د $e=\sqrt{1+\frac{b2}{a2}}$ رابطه شته. زده کوونکي دې د $e=\frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

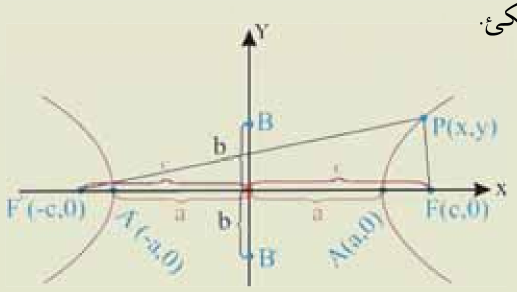
د هایپربولا معادله

آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟



فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکې په هایپربولا باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د PF او PF' فاصلې پیداکړې او بیا د هغو تفاضل په لاس راوړئ.



د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو: $|PF'|-|PF|=2a$

د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فارمول څخه لیکلای شو.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساوات د دواړو خواوله مربع او انکشاف څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ /\div 4$$

$$\Rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع او انکشاف ورکوو:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $c > a$ دی، نو $c^2 - a^2 > 0$ کیږي، له بلې خوا پوهیږو چې $c^2 - a^2 = b^2$ ده، نو په پورته افاده کې د $c^2 - a^2$ قیمت په ایښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
د مساوات د واړه خواوې پر a^2b^2 باندې ویشو:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پورتني معادله د داسې هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیات په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې متقاطع محور یعنې AA' د y پر محور پروت وي، یعنې محراقونه په عمودي محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له: $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

پوښتنه

پورته فارمول او همدارنګه د محراقونو او راسونو مختصات دې د شکل له مخې د زده کوونکو په واسط پیداشي.

د هایپربولا موجه خط:

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د ها دي خط معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د ها دي خط معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه:

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحنې سره مماس وي. د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتني رابطه کې x لایتناهي ته نږدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نږدې کیږئ په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړی مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې وښایاست.

حل: دراسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

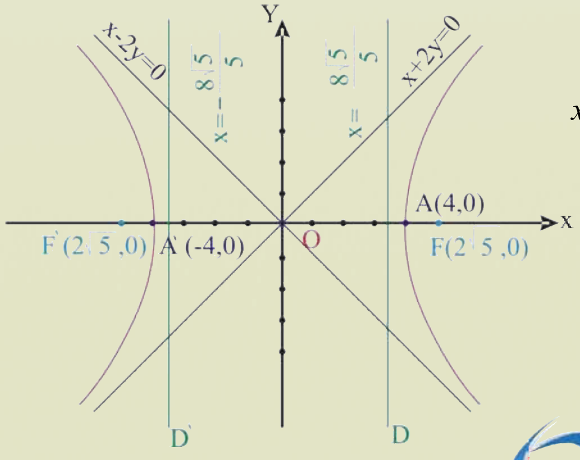
$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي.

له دې امله:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: وښیاست چې $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړي معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هایپربولا د معیاري معادلې شکل لري چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی چې محراقونه ور باندې پراته دي.

د راسونو مختصات: $A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$ $\qquad a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm 3$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

د مجانبونو معادلې: $F'(0,-\sqrt{13})\quad , \quad F(0,\sqrt{13})$

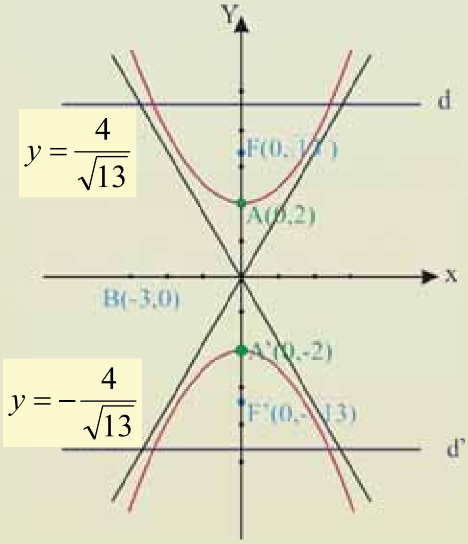
څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm 2x$$

$$3y-2x=0\qquad , \qquad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنګه چې د هایپربولا راسونه د y پر محور باندې پراته دي، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm 1{,}1$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خط معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې یې ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

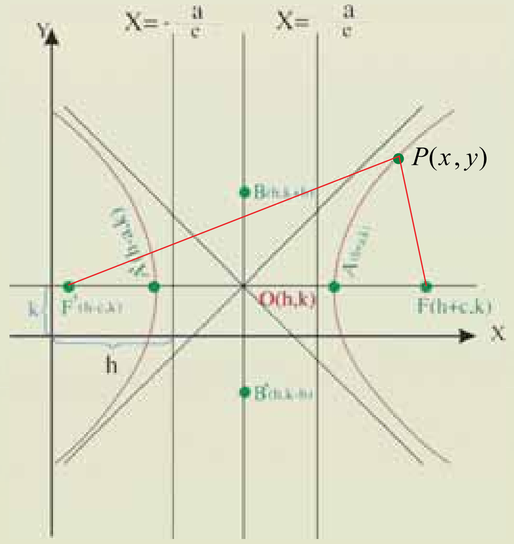
آیا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې (h,k) او متقاطع محور یې موازي د x له محور سره وي.
- په هایپربولا باندې د $p(x,y)$ یو ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د معادلې په پام کې نیولو سره د (h,k) ټکي د محراقونو مختصات یعني F او F'، د راسونو مختصات یعني A, A', B او B' په شکل کې وښایاست.



د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

د دووټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخېستنې سره لیکلای شو:

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو: $cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$

بیاهم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\{cx-(ch+a^2)\}^2=\left\{a\sqrt{\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2}\right\}^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

د ضرب، او طاقتونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریقوو او پورتني رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2+2c^2hx+a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دې، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو: $b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیر حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

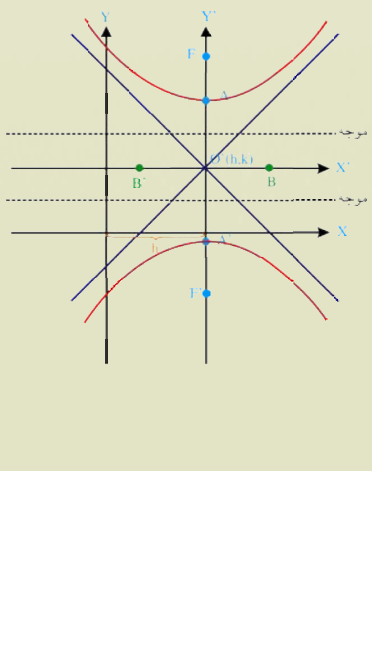
د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

که چیرې د هایپربولا د مرکز مختصات (h,k) او متقاطع محور یې موازي د y له محور سره وي په دې صورت کې د هایپربولا معادله عبارت ده له: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې د مرکز مختصات، د محراقونو مختصات، د موجه خط معادله او د مجانبونو معادلې ولیکي؟

دویم حالت: که چیرې محراقونه د y له محور سره موازي پر متقاطع محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو مختصات، محراقونو مختصات د مؤجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: د هايپربولا غزول شوي معادله له $AX^2+BY^2+DX+EY+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A\neq B$ يا $A=B$ خو مختلف الاشاره وي.

څرنګه کولای شو، د هايپربولا غزول شوي معادله په لاس راوړو؟

لومړي مثال: د $9(x-3)^2-4(y+1)^2=144$ معادله په پام کې ونيسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او همدارنګه د مجانبونو معادلې پيدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معياري ډول ليکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144}-\frac{4(y+1)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

د مرکز مختصات: $k=-1, h=3$ يعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4$

$$A(h+a,k)=A(3+4,-1)=A(7,-1)$$

$$A'(h-a,k)=A'(3-4,-1)=A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2=36\Rightarrow b=\pm6 \\ B(h,k+b)=B(3,6-1)=B(3,5),\ B'(h,k-b)=B'(3,-6-1)=B'(3,-7) \end{cases}$$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)=F(3+\sqrt{52},-1)\qquad F'(h-c,k)=F'(3-\sqrt{52},-1)$

پوهېږو چې په هايپربولا کې: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=16+36=52\Rightarrow c=\pm\sqrt{52}$

که چيرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{6}{4}(x-3)-1=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$

$$y=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1\ /\cdot 2$$

$$2y=\pm3(x-3)-2\ \Rightarrow\ 2y=3x-9-2\ \Rightarrow\ 2y-3x+11=0$$

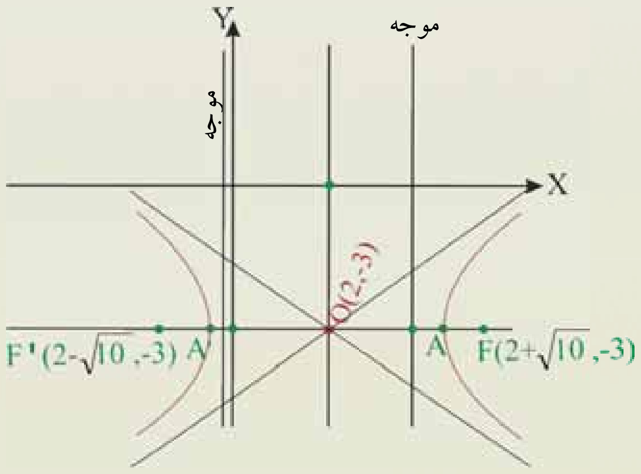
$$2y=-3x+9-2\ \Rightarrow\ 2y+3x-7=0$$

دويم مثال: د $2x^2-8x-3y^2-18y-31=0$ معادله په پام کې ونيسئ.

د هايپربولا د مرکز مختصات د راسونو مختصات، د محراقونو مختصات او د موجه خطونو معادلې، د محانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2[(x-2)^2-4]-3[(y+3)^2-9]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتني معادله په معياري ډول واړول شوه، ليدل کيږي چې $h=2$ او $k=-3$ دی، د مرکز مختصات يې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm2 \quad , \quad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: يې $F'(2-\sqrt{10},-3)$, $F(2+\sqrt{10},-3)$,

د راسونو مختصات: $A'(2-\sqrt{6},-3)$, $A(2+\sqrt{6},-3)$,

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو ليکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$
$$y+3=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3 \quad /\cdot\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2x-4-3\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0}$$
$$\sqrt{6}y=-2(x-2)-3\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0}$$

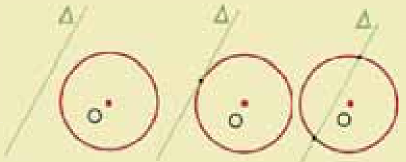
پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هايپربولا پر معياري معادلې باندې واړوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیوې کرښې مو قعیت نظرمخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري کرښه، یوه دایره د امکان په صورت کې په څو ټکوکې قطع کولای شي؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیمه کرښه په پام کې و نیسئ:

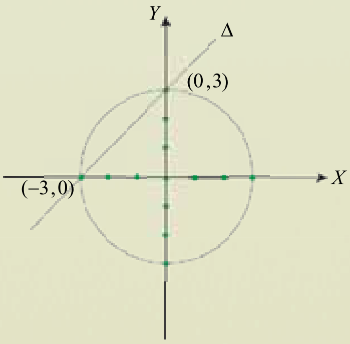
- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کړئ، چې یوازې یوګډ ټکي سره و لري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیمه کرښه، یوه دایره له دو وټکو څخه په زیاتو ټکوکې قطع کړي؟
- که چیرې د یوې دایرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن، د دایرې له شعاع یا وړانګې څخه لوی وي. دایره او کرښه څوګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري کرښه او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هیڅ ګډ ټکي ونلري.

لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = 9$ دایره او $y = x + 3$ مستقیمه کرښه رسم او موقعیت یې وښایاست.

حل: په شکل کې لیدل کیږي، چې پورتني دایره او کرښه یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکوکې قطع کوي ددې پایلې د لاس راوړلو لپاره که چیرې د y قیمت د دایرې په معادله کې و ضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$x^2 + y^2 = 9$$
$$y = x + 3 \quad \Rightarrow x^2 + (x+3)^2 = 9$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -3$$

د x قیمتونه د $y = x + 3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1 = 0 + 3 \quad \Rightarrow y_1 = 3$$
$$y_2 = -3 + 3 \quad \Rightarrow y_2 = 0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ د دایرې او مستقیمې کرښې د تقاطع ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پورتنيو قيمتونو په پام کې نيولو سره د $(0,3)$ او $(-3,0)$ مرتبې جوړې چې د د واړو معادلو د تقاطع ټکي دي په لاس راځي.

په عمومي ډول کله چې د مستقيمې کرښې له معادلې څخه د x يا y متحول حل او د مخروطي مقاطعو په معادله کې يې کېږدو، د حل لپاره يوه دويمه درجه معادله لاسته راځي چې حل يې د Δ په قيمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو، او پام وړ، پايلې لري:

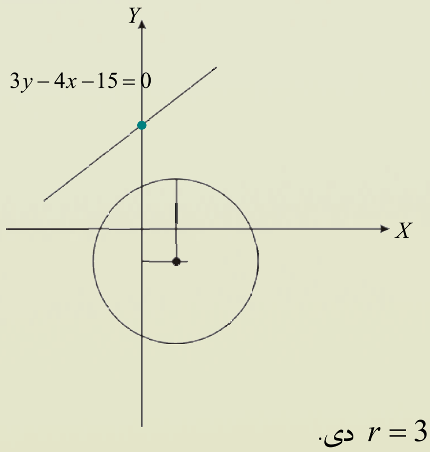
1- که چيرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول کرښه او منحني يوبل په دوو ټکوکې قطع کوي.

2- که چيرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف يا مساوي جذرونه لري او په دې ډول کرښه د مخروطي مقاطعو له منحني سره يوازې يو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، کرښه او منحني يو بل نه قطع کوي.

دويم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دايره او $3y - 4x - 15 = 0$ کرښه په پام کې ونيسئ او موقعيتونه يې له يو بل سره و څېړئ.

حل: دپورتنيو معادلو د بدلولو لپاره چې معياري حالت ته راوګرځول شي، په لاندې ډول ګام پورته کوو:



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

له پورتنی معادلې څخه پو هيږو چې د دايرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع يې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقيمې کرښې لپاره لرو: $3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}x + 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې له پورتني معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې کیږدو او معادله حل کړو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \quad \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 40=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+360=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36000=-13500 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، کرښه او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د کرښې موقعیت د $y-x^2+1=0$ پا رابولا ته وخیړئ.

حل: د پورتني مسئلې د خیړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې وضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

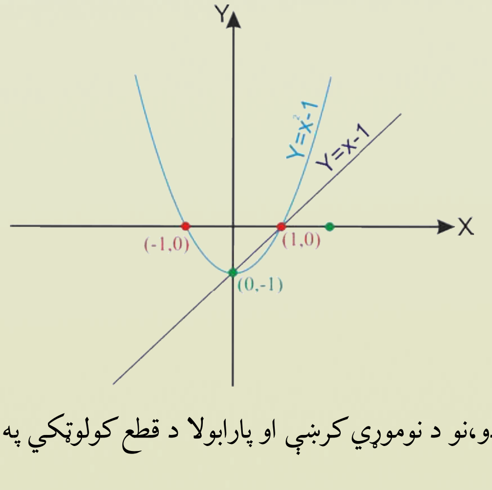
$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \quad \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \quad \Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \quad \Rightarrow \Delta=(-1)-4(1)(0) \quad \Rightarrow 1-0$$

$$\Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې لیدل کیږي $\Delta=1>0$ څخه ده، نو موږې کرښه یعنې $y=x-1$ په لاندې ډول په لاس راځي او د $y-x^2+1=0$ پارابول یو بل په دوو ټکو کې قطع کوي چې د دې دویمې درجې معادلې حل

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د کرښې په معادله کې کیږدو،نو د نوموړي کرښې او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(0,-1)\,,(1,0)$

دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

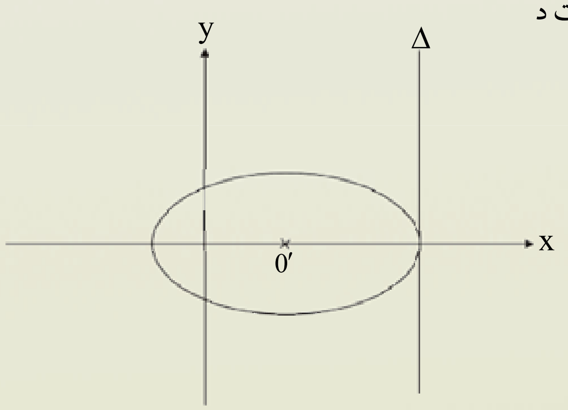
څلورم مثال: د $x=5$ د مستقیمې کرښې او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضوي موقعیتونه وڅیړئ.

حل: که چیرې د $x=5$ دمستقیمې کرښې قیمت د بیضوي په معادله کې کېښېږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

ځرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$



په دې ډول ویلای شو چې مستقیمه کرښه او بیضوي یو ګډټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad ,Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتني معادلې د پیژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چیرې $A=B$ یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چیرې $A\neq B$ او یو شان علامې ولري، یو الیپس دی.

3- که چیرې $A\neq B$ یا $A=B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چیرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یوه پارابولا ده.

$Ax^2+Bx+Cy+D=0$ او $Ay^2+By+Cx+D=0$

پوښتنې

1- لاندې معادلې د هغوی د ګرافونو د منحنې له مخې و ټاکئ.

$a)\ y^2-2y+x+3=0$

$b)\ 9x^2+9y^2=27$

$c)\ 25x^2+16y^2=400$

$d)\ x^2-y^2=0$

$e)\ y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ الیپس او $y=3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هایپربول د تقاطع ټکې پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د يوې مستوي او مخروط د تقاطع ګډ فصل عبارت ده له: دايرې، پارابول،هايپربولا، يو ټکی، بيضوي او يا دوه متقاطع کرښې.

بيضوي: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه يې د فاصلو د جمعې حاصل يې يو ثابت اوږدوالی وي، بيضوي بلل کيږي ، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بيضوي محراقونه او $AA'=2a$ ثابت او ږدوالی دی

شمیره	معادلې	د مرکز وضيعه کميات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$ د x پر محور باندې دي
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$ د y پر محور باندې دي
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ قطر د x له محور سره موازي دي	$(h,k\pm b)$ قطر د y له محور سره موازي دي	$(h\pm c,k)$ د x پر محور باندې دی
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ قطر د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ قطر د x له محور سره موازی دی	$(h,k\pm c)$ د y پر محور باندې دي

د بيضوي غزول شوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې $A>0$ او $C>0$ وي: (يعني دواړه هم علامه وي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

$e=\frac{c}{a}$ دبیضوي دعن المرکز یت په نامه یادیږي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا ها دي(موجه) وایي، معادله یې $y^2=4px$ ده

شمیره	د پارابولا معادلې	دراس وضعیه کمیات	د محراق مختصات	د موجه خط معادله	تناظري محور
1	$y^2=4Px$	$S(0,0)$	$F(P,0)$	$x=-p$	$x=0$
2	$x^2=4Py$	$S(0,0)$	$F(0,P)$	$y=-p$	$y=0$
3	$(y-k)^2=4P(x-h)$	$S(h,k)$	$F(h+p,k)$	$x=h-p$	$y=k$
4	$(x-h)^2=4P(y-k)$	$S(h,k)$	$F(h,k+p)$	$y=k-p$	$x=h$

د پارابولا غزول شوي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه. ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي) په پارابولا کې $e=1$ دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کیږي.

دوه ثابت مستقر ټکي د هایپربولا محراقونه دي، د دواړو محراقونو ترمنځ فاصله $2c$ ده.

د هایپربولا معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر افقي محور پراته دي).

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر عمودي محور پراته دي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

محراقونه	غیر حقیقي رأسونه	د رأسونو وضعیه کمیات	د مرکز وضعیه کمیات	د هایپربولا معادلې
$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$

هایپربولا عمومي غزول شوې معادله: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$ ، خو مختلف الاشاره وي، عن المرکزیت $e>1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه ترې تا و کړئ.

1- که چیرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بیضوي b) دایره c) هایپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د الیپس محراقونه هغه ټکې دي چې د الیپس له مرکز څخه:

a) برابر و اټن ولري b) مختلف و اټنونه لري

c) د اوږد قطر نیمایي واټن لري d) د لنډ قطر نیمایي ده.

3- که چیرې M د الیپس یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ داوږده قطر اوږ دوالي وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د الپس عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\frac{a}{c}$ b): $e=\frac{c}{a}$ c): $e=\frac{b}{c}$ d): $e=\frac{c}{b}$

5- د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ یو پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. دمحراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چیرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کیدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9: د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته　　b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته　　c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10: په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیې؟

a) $e<1$　　b) $e=1$　　c) $e>1$　　d) $e=-1$

11: د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.　　b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.　　d) د y له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکی څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره　　b) دایره　　c) پارابولا　　d) بیضوي

13: د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$　　b) $(4,2)$　　c) $(2,0)$　　d) $(-2,0)$

14: د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې　　b) بیضوي　　c) پارابولا　　d) هایپربولا

15: د $y=2x$ مستقیم خط د $\frac{(x-1)^2}{4}-(\frac{(y-2)^2}{9}=1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

16: د $2y=3x$ مستقیم خط د $2y^2-6y+5x-12=0$ منحني په څو ټکو کې قطع کوي؟

17 : لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$　　$b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$　　$d)\ x^2+12x-120y+288=0$

18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=-2$ ، $e=0,75$ دي او لوی قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=64$ $e=0,5$ دي او لوی قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټول اجزاوې پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$　　b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

20: د پارابولا لاندې معادلې لومړي په معیاري شکل ولیکئ او بیایې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

21: د پارابولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

22: د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

23: د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالی یې 4 واحده وي.

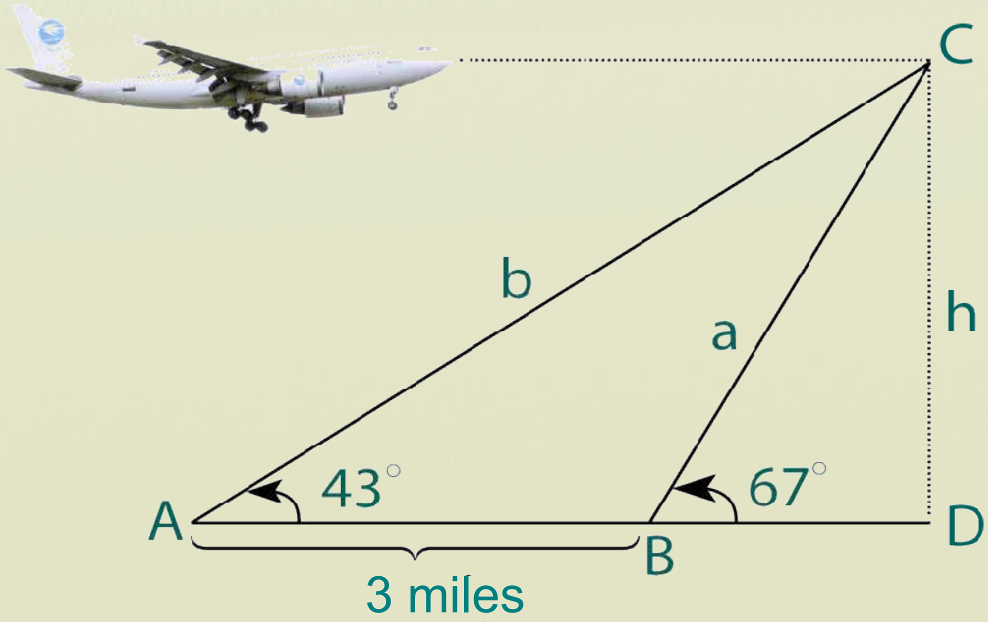
24: د $y = 2x$ مستقیم خط د $1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9}$ هایپربولا په څو ټکوکې قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مثلثات

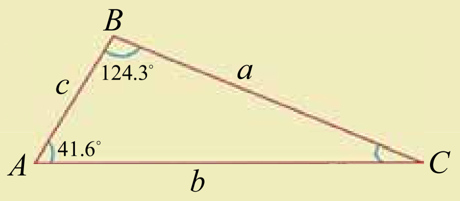
(c) ketabton.com: The Digital Library



د ساین قانون

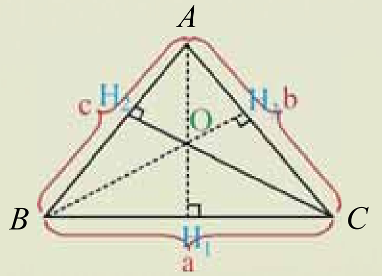
Law of sine

خرنګه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاويې اندازه پيدا کړو؟



فعاليت

- د ABC يو حادەالزاويه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی يې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH}_1$, $\overline{BH}_3$, $\overline{CH}_2$) ارتفاعګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او BCH_1 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې د ($\overline{AH}_1$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړئ.
- د ABH_3 او ACH_2 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې د ($\overline{BH}_3$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړئ.



له پورتني فعاليت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت:

د ACH_1 او BAH_1 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH}_1 = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH}_1 = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) اړیکو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \text{I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د ABH_3 او BCH_3 په قايم‌الزاويه مثلثونو کې ليکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_3}}{c} \Rightarrow \overline{BH_3} = c\sin A \;......... (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_3}}{a} \Rightarrow \overline{BH_3} = a\sin C \;......... (4)$$

د (3) او (4) اړيکې له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C / \div ac$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... \text{II}$$

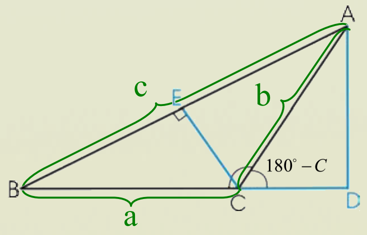
د I او II اړيکې له پرتلې څخه ليکلی شو چې: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

پايله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې په داسې حال کې چې A, B, C زاويې او a, b, c د ضلعو اوږدوالي وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

پورتنۍ اړيکه(رابطه) په يوه مثلث کې د ساين د قانون(Law of sine) په نامه يادېږي.

د ساين د قضيې ثبوت په منفرج الزاويه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاويه يې منفرجه ده په پام کې نيسو د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع‌ګانې رسموو.

د ADC په قايم الزاويه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاويو څخه پوهېږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو: $\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(I)$

همدارنګه د ADB له قايم الزاويه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا يو پربل وېشو:

نو: $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} ....(1) \longrightarrow$ يا $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ACE په قایم الزاویه مثلث کې لیکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b}.....(3)$$

د BEC په مثلث کې:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a}.....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل ووېشو او لیکو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

یا

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}......(5)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

فعالیت

- زده‌کوونکي دې، د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅېړي او ثبوت دې کړي.

لومړی مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې د $B = 60^\circ$, $b = 9cm$ او $c = 6\sqrt{3}\,cm$ وي، د یوې ضلعې او دوو زاویو اندازې یې پیدا کړئ؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

خرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

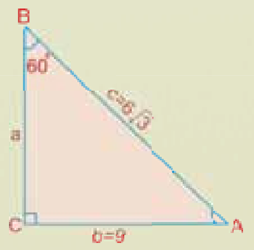
همدارنګه پوهېږو چې په یوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$A = 30^\circ$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د a ضلعي قیمت په لاندې ډول پیداکولی شو :

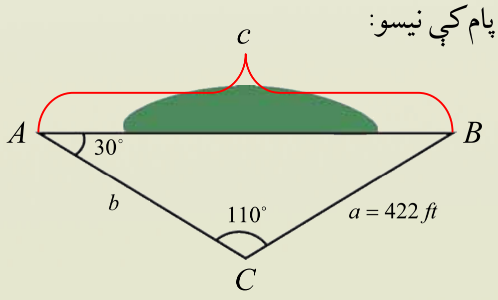
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=\frac{\sin A\cdot b}{\sin B}\Rightarrow a=\frac{\sin 30^\circ\cdot 9}{\sin 60^\circ}$$

$$a=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې يې یوه غونډۍ پرته ده پیداکړي.

حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ په پام کې نیسو:



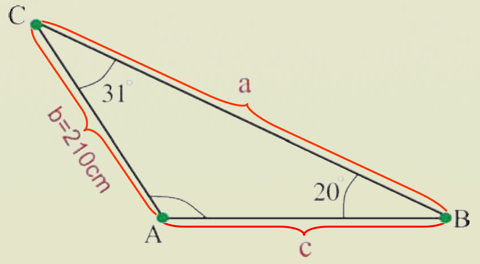
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422\,ft\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\dfrac{422\,ft\cdot 0.9396}{0.5}\Rightarrow c=793.0224\,ft$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه راکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازه پیداکړئ.



حل: پوهېږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومې زاویې یې داسې پیداکولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a دپیداکولو لپاره لاند تناسب په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771 \cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$c=\frac{210cm \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ او $\sin 20^\circ = 0.342$ دی د پورته قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$c=\frac{0.5150 \cdot 210}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.2$$

یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

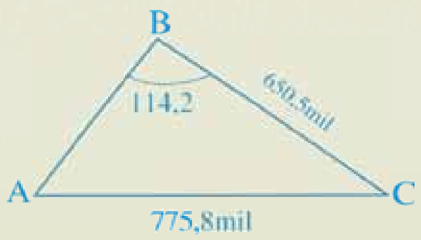
- دوې زاويې او دمنځ ضلع يې معلومه وي.(ASA)، A زاويه او S ضلع ښيي.
- دوه ضلعې او د منځ زاويه يې معلومه وي.(SAS)، S ضلع او A زاويه ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. که چیرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ واحده وي، د B د زاویې انـدازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟

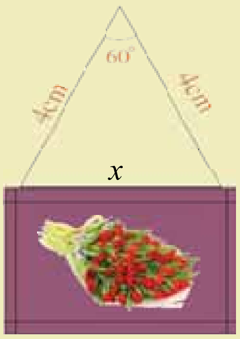


(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین قانون

Law of cosine



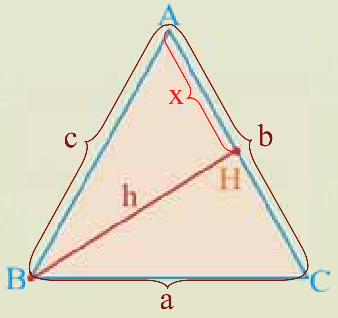
د یوه شکل چارت د میخ په مرسته د دېوال پر مخ ځړول شوی دی، که چیرې د میخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4cm$ وي او د منځ زاویه یې 60° وي، د (x) د تار دوو ټکو ترمنځ واټن د کوم قانون په مرسته پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د هر رأس مخامخ ضلعې په ترتیب سره په c, b, a وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په قایم‌الزاویه مثلثونو کې د $\overline{BH}$ او $\overline{HC}$ قیمتونه د B او C زاویو د cos له جنسه، په ترتیب سره پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:

ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفاع رسموو



$$\overline{BH} = h \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{CH} = b - x$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالي پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I او II له اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قایم‌الزاویه مثلث کې:

$$coA = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

په پورتنی اړیکه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قیمت اېږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{یا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پایله:په هر مثلث کې دا لاندې اړیکې سمې دي:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{یا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{یا} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{یا} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

فعالیت

- په همدې مثلث کې دې دوې نورې اړیکې یعنې $\sin C$ او $\sin B$ زده‌کوونکي ثبوت کړي.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- چې دوې ضلعې او د منځ زاویې یې معلومې وي.(SAS)، S ضلع او A زاویه ښیي.
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي.(SSS)، S یوه ضلع ښیي .

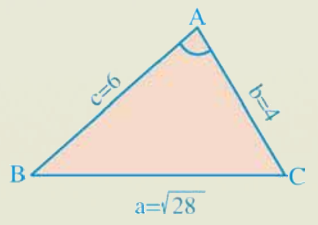
د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
راکړل شوی معلومات	د کارولو فورمول
SSS) ضلع، ضلع، ضع	د کوساین او وروسته دساین قانون
SAA (زاویه، زاویه، ضلع)	د ساین قانون
ASA (زاویه، ضلع، زاویه)	د ساین قانون
SAS (ضلع،زاویه، ضلع)	د کوساین قانون وروسته د ساین
AAA (زاویه، زاویه، زاویه)	امکان نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دريو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاويې اندازه وټاکئ.

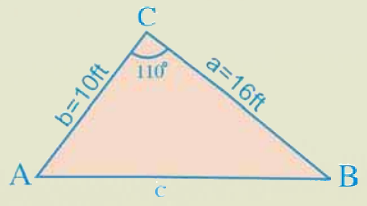
حل:



$$a=\sqrt{28}\ ,\ b=4\ ,\ c=6\ ,\ A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A\ \Rightarrow\ 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28\ \Rightarrow\ 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دويم مثال: د ABC په مثلث کې که چيرې دوې ضلعې يې هر يوه $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاويه يې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)10\cos110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos110^\circ}$$

څرنګه چې : $\cos110^\circ=0.342$ دی، نو:

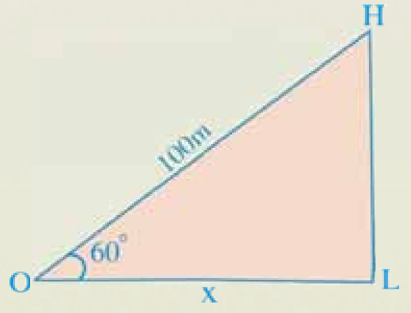
$$c=\sqrt{356-320(0.342)}\ \Rightarrow\ c=\sqrt{356-109.44}$$
$$\boxed{c=15.70}$$

دريم مثال: يو پتنګ(کاغذ پران) له $100m$ واټن تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاويه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پيدا کړئ.

حل: د OHL په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو، چې:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\ \Rightarrow\ x=100\cdot\cos60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دکوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

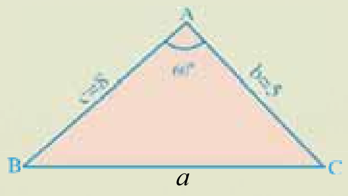
څلورم مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې $A = 60^\circ$, $b = 5, c = 8$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی دکوساین د قضیې په کارلوسره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیداکوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:



$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

پوښتنې

1. که چیرې د ABC په مثلث کې $b = 4ft, a = 5ft$ او $A = 45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.
2. که چیرې په یوه مثلث کې $a = 3cm$ او $b = 9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

په هر مثلث کې د زاويو او ضلعو ترمنځ د tan له جنسه مخامخ اړيکه شتون لري.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعاليت

- د ساين قانون مساوي په D وليکئ.
- د sin قانون هر دوه، نسبتونه يعني $\frac{b}{\sin B}$ او $\frac{a}{\sin A}$ په جلا جلا ډول مساوي له D سره وليکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې وليکئ.
- دوه پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا يې تفريق کړئ.
- لاسته راغلي اړيکې يو پر بل وويشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پايلې فورمول وليکئ.

پورته فعاليت په لاندې ډول ثبوتوو.

ثبوت: د ساين قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B \quad , \quad \frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A$$

پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا تفريقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنی اړيکې يو پر بل ويشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

څرنګه چې $\dfrac{1}{\tan\dfrac{A-B}{2}} = \cot\dfrac{A-B}{2}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې اړیکې پیدا کړئ.

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\dfrac{B+C}{2}}{\tan\dfrac{B-C}{2}} \quad , \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\dfrac{C+A}{2}}{\tan\dfrac{C-A}{2}}$$

- پورتنی اړیکې په یوه مثلث کې د ضلعې او زاویې ترمنځ اړیکې د tan اړیکه بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ او $A = 90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$
$$B + C = 180^\circ - 90^\circ$$
$$B + C = 90^\circ \quad \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 45^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ A = 90^\circ \\ B = ? \\ C = ? \end{array}\right\} \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}} \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \quad , \quad \tan\frac{B-C}{2} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{B-C}{2} = 30^\circ \quad \Rightarrow B - C = 60^\circ \ \ldots\ldots\ldots \ \mathrm{I}$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

له بلې خوا په هر مثلث کې:

$$B + C = 180^\circ - A \quad \Rightarrow B + C = 180^\circ - 90^\circ$$
$$B + C = 90^\circ \ \ldots\ldots\ldots \ \mathrm{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د نوموړي سیستم له حلولو څخه وروسته د B قیمت په لاس راوړو:

$$B-C=60^\circ \quad .... \quad I$$
$$B+C=90^\circ \quad .... \quad II$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په ایښودلو سره د C زاویه پیداکوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چیرې د ABC په یوه مثلث کې $c=432$, $B=42^\circ\ 30'$ او $a=925$ وي، د مثلث نورې اجزاوې پیداکړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ 30'$$
$$A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \quad .... \quad I$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2} \Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}$$

اوس د زاویې او ضلعو قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو، یعنې:

$$\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$

یا:

$$1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.5714$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.9341 \quad \Rightarrow \frac{A-C}{2} = 42^\circ\ 59'$$

$$\boxed{A-C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \text{II}}$$

اوس د I او II اړیکو په پام کې نیولو سره لیکو:

$$A+C = 137^\circ\ 30' \ \ldots\ldots\ \text{I}$$

$$A-C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \text{II}$$

$$2A = 222^\circ\ 88'$$

$$\boxed{A = 111^\circ\ 44'}$$

$$C = 137^\circ\ 30' - A \ \Rightarrow C = 137^\circ\ 30' - 111^\circ\ 44'$$

$$C = 136^\circ\ 90' - 111^\circ\ 44'$$

$$\boxed{C = 25^\circ\ 46'}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \ \Rightarrow b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{432\sin 42^\circ\ 30'}{\sin 25^\circ\ 46'}$$

$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.6756$$

$$\sin 25^\circ\ 46' = 0.4346$$

$$b = \frac{432}{0.4346}\cdot 0.6756 = 994.01\cdot 0.6756 = 671.5582cm$$

پوښتنې

د لاندې ورکړل شوو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

a) که چیرې $C = 75^\circ$, $B = 60^\circ$, $a = 35ft$ وي.

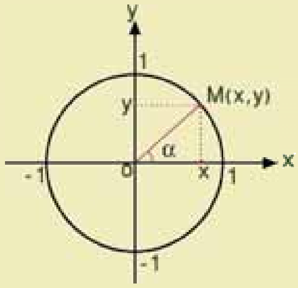
b) که چیرې $\alpha = 45^\circ$, $b = 37m$ او $\gamma = 75^\circ$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعاليت

- په لاندي جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \frac{\cot\alpha}{\csc - 1}$	$B = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او اړيکه يې وليکئ.

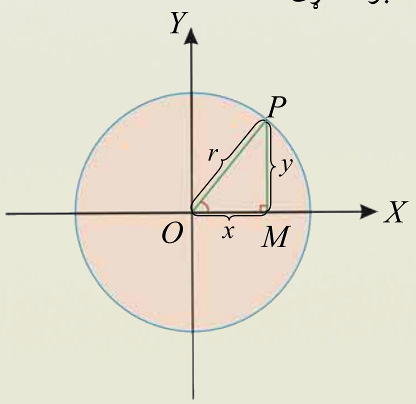
له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات داوړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساوات داوړه خواوې مساوي کېږي.

د α د زاويې د هر قيمت لپاره د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په مثلثاتي دايره کې د OMP په قايم-الزاويه مثلث کې ګورو او ليکلى شو چې:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

له بلې خوا د فيثاغورث له قضيې څخه لرو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 وېشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \qquad \text{يا} \qquad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځاى $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځاى $\cos\alpha$ ليکو.

نو ليکلى شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يا $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

مثلثاتي اساسي اړيکې عبارت دي له:

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

د مثلثاتو فرعي اړيکې عبارت دي له:

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1 \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad tag\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ اړيکه ثبوت کړو.

ثبوت: د فيثاغورث د قضيې په کارولو سره ليکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 وېشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2+(\frac{r}{x})^2$

په نتيجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}$ او $\frac{y}{x}$ د قيمتونو په ليکلو سره ليکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې: $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات له یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاسته راوړو، یعنې یوې خواته مختلفې عملیې لکه مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سرته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاسته راشي، که چیرې په یوه الجبري افاده کې مثلثاتي نسبتونه یوه یا څو زاویې وي، مثلثاتي افاده بلل کیږي، د مثلثاتي اړیکو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو.

د موضوع دلا ښه پوهیدو لپاره لاندې لارښوونې او مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي مطابقت ثبوت کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\dfrac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\dfrac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت دکیڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښایاست چې $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A$$

$$\tan^2 A=\tan^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کيڼې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قيمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه ايږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهيږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ دی.

اوس د معادلې دواړه خواوې په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=2\sec x$$

پوښتني

1. د مثلثاتو د اساسي اړیکو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پیدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $\qquad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\qquad c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\qquad b)\ \cot^2\beta$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \frac{\cos ec\alpha}{\cot an\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\qquad b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

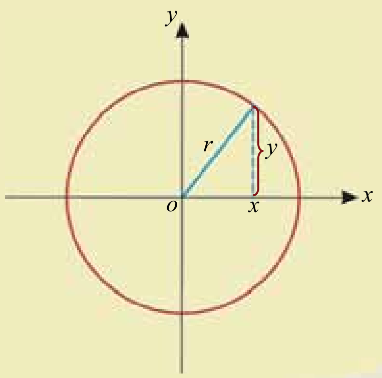
$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=tag\alpha$ $\qquad d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يو مثلثاتي مطابقت دی،

آيا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ يو مطابقت دی که يوه معادله؟



فعاليت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قيمتونو لپاره صحيح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قيمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړيکې شتون لري.

_ آيا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

_ آيا $1-2\sin\beta=0$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کيږي، مثلثاتي معادله بلل کيږي.

هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کيدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کيدلای.

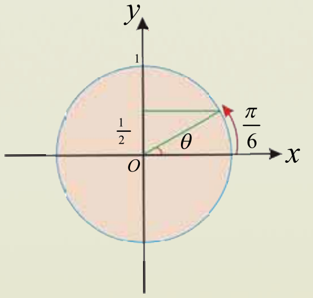
هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په يو حالت باندې حلولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت: د $a\sin\alpha + b = 0$ معادله د پورتنی معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

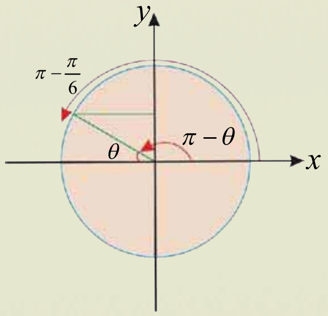
مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin x = 1 \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{1}{2}$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې پیدا کوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6},\ 4\pi + \frac{\pi}{6},\ \ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6},\quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه هغه زاویې پیداکوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6},\ 3\pi - \frac{\pi}{6},\ 5\pi - \frac{\pi}{6},\ \ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6},\quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ د معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6},\ 4\pi + \frac{\pi}{6},\ \ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6},\quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6},\ 3\pi - \frac{\pi}{6},\ 5\pi - \frac{\pi}{6},\ \ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6},\quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \;\wedge\; x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in Z\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $2\sin x - 3 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 3 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو چې $\sin x = \frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې sin د -1 او $+1$ په منځ ($-1 \le \sin x \le 1$) دی، نو هغه زاویه چې sin یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x + b = 0$

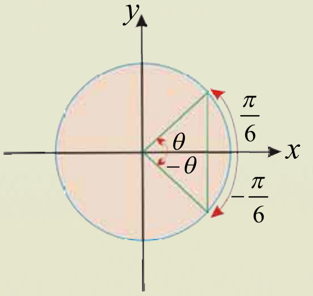
د پورتنی معادلې د حل مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0, \pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو یا لټوو چې cos یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$.



اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیداکوو.

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad 2\pi + \frac{\pi}{6}, \quad 4\pi + \frac{\pi}{6} \ldots$$

$$x = -\frac{\pi}{6}, \quad 2\pi - \frac{\pi}{6}, \quad 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي: $x = 2n\pi \pm \theta$

$$A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \ k \in z\right\}$$

په عمومي توګه د هرې θ زاویې لپاره لیکو:

$$A = \{x / x = 2k\pi + \theta \wedge x = 2k\pi - \theta, \ k \in z\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2} \ \Rightarrow\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0,2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ يې مساوي دی له:

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

ليدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دريم حالت: $\tan x+b=0$

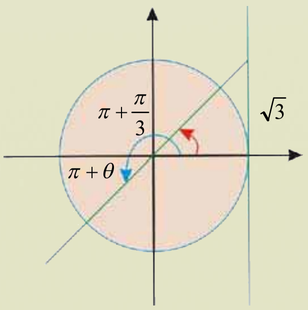
د عمومي حل د پيدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته ځير شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاويه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{3}$ يا 60° څخه عبارت دی.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ په صورت لاسته راځي، په مثلثاتي دايره کې وينو چې کومې زاويې له $\tan\frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.



$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ldots\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ldots\right\}$$

په عمومي ډول پورتنی ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{3} \quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x / x=k\pi+\theta\ , \quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړی.

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{6} \quad k\in Z\right\}$

دريم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو زاويې چې د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x_1=\frac{7\pi}{12}$$

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$$

څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

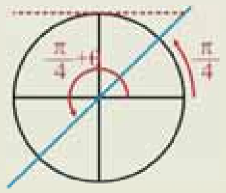
لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه گورو چې $\cot$ يې $(+1)$ وي او هغه زاويه لـه $\frac{\pi}{4}$ يا 45° څخه عبارت ده :

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots$$

نو د معادلې د حل سټ په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in Z\right\}$$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره داسې ليکو: $A = \{x / x = k\pi + \theta \quad k \in Z\}$

دريم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پيدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$ $\qquad b)\quad 4\tan x + \cot x - 5 = 0$

$c)\quad \tan x = \sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دويمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c,b,a او d ثابت عددونه دي.

$a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x=d$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنی معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنی زاویه چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده نو:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{6} \end{array} \quad k \in Z \right\}$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} & \\ & k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} & \end{array} \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چیرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولي دي، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې sin یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دې د حلونو سټ یې عبارت دی له:

$$A=\begin{Bmatrix} \sin x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2} \\ \sin x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6} \end{Bmatrix}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\;,\;2\pi+\frac{\pi}{2},\;\;4\pi+\frac{\pi}{2},\;\;...\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\;\;4\pi+\frac{7\pi}{6},\;6\pi+\frac{7\pi}{6},\;\;...\right\}$$

یا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\;\;,\;\;n=0,1,2,3\;...\right\}$$

دریم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0\quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\,,\,\pi\,,\,3\pi\,,\,5\pi\,,\,...\}$$

$$A_2=\{2\pi\,,\,4\pi\,,\,...\}$$

په عمومي توګه لیکلای شو:

$$x=n\pi+(-1)^n\theta$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$$

پوښتني

د لاندې معادلو د حل ستونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې ویشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \ldots \; \mathrm{I} \\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathrm{II}\end{cases}$$

د لومړی معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \; I \\ x + y = \alpha \ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \; I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتني معادلې ښي لوری له $+1$ څخه لوی او له -1 څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس یا زاویې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرمساوات د $1 > \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

صدق کوي او که نه؟ $\qquad a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړي معادلې کیڼ لوری شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........} & I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........} & II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: ددغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

خرنگه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتنی سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\quad\frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیستم د حل شرط ته په کتنې سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2} \le a \le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0 \le a \le 1$$

د II معادلې کېڼ لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

څرنگه چې $\sin x \sin y = 1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2$

له بلې خوا $x + y = \pi$ دی نو: $\cos(x-y) - \cos\pi = 2$

همدارنگه پوهېږو چې $\cos\pi = -1$ دی.

نو:

$$\cos(x-y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) + 1 = 2$$
$$\Rightarrow \cos(x-y) = 2 - 1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1$$
$$\cos(x-y) = \cos 0^\circ$$
$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad , y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = y = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کېږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\frac{\text{sinx} - \text{siny}}{\text{sinx} + \text{siny}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتني اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کیږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل څانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3} \text{ او } y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

څلورم ګروپ: دغه ګروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases} \qquad \begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاوېې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې اېږدو: $\dfrac{-2\sqrt{3}}{1+\tan\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا: $\dfrac{-2}{1+\tan\cdot\tan y}=1 \Rightarrow 1+\tan x\cdot\tan y=-2$

یا: $\Rightarrow \tan x\cdot\tan y=-3$

نو: $\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=-3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ I}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\ldots\ldots\ldots \text{ II}\end{cases}$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې ایږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

هغه مثبت کوچنی قوس چې په دغه معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $y = \frac{\pi}{3}$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$x = 2\frac{\pi}{3}$$

پنځم گروپ: دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \le \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \le 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

قیمتونه په اړونده اړیکه کې ایږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x + y$ قیمت د سیستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x - y = \frac{5\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له: $-1 \le \dfrac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کېڼي خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د $\sin$ او $\cos$ له جنسه داسې ایږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنگه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \ldots\ldots I \\ x-y=\frac{\pi}{2} \ldots\ldots II \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$a)\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

$b)\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم يادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي يې b,a او c وي، د ضلعو او زاويو تر منځ لاندې اړيکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاويو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړيکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې د ټولو قيمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سيستمونه

مثلثاتي معادلو سيستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

دويم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دريم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځير سره ولولئ، هرې يوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چيرې $A = 20^\circ$, $b = 10$, $c = 7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چيرې $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چيرې $A = 48^\circ$, $B = 22^\circ$ ، $a = 5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

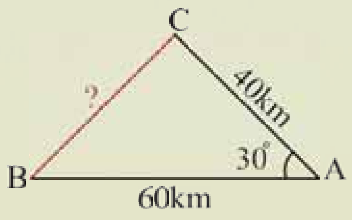
$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چيرې د $A = 30^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.
2. که په يوه مثلث کې $a = 8$, $b = 5$, $c = 10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ او $\sin\beta$ له جنسه $\cos\beta$ محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

a) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

b) $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

c) $\tan A+\cot A=2\csc 2A$

d) $\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$

e) $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\frac{A}{2})$

f) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

a) $\cos^2 x+\cos^4 x=0$

b) $\tan^2 x-4\tan x+3=0$

c) $4\cos\beta-2=0$

d) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

e) $\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات يو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

a) $\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

b) $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

c) $\cos 4x+2\sin^2 2x$

d) $(\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا يې حل کړئ.

a) $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

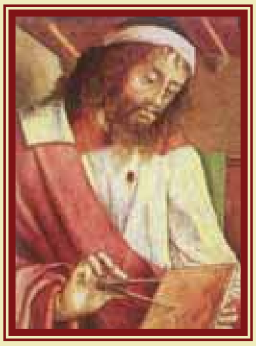
فضايي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library

اقلیدس د دوه اړخیزې (دوه‌بعدي) او درې اړخیزې (درې بعدي) هندسي بنسټ اېښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اساسي مفاهيم او اکسیومونه



د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي. هغه هندسي مفاهيم، چې په دريو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نوميږي.

فعاليت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه لومړنی اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل مينځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:

لومړنی اصطلاحګاني Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاحګانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه(خط)، مستوي او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستنيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضيهTheorem : هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط:کش شوی تار، دميزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيريدلای شي مستقيم خط د لومړنی اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزيدلای شي.

لومړی اصل: دوې بېکاره او ټاکلې نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط څرګندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط لږ ترلږه دوې څرګندې نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.

دريم اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

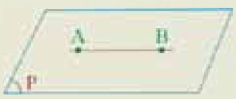
لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.

دويم اصل: له هرو دريو نقطو څخه، چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تيريږي.

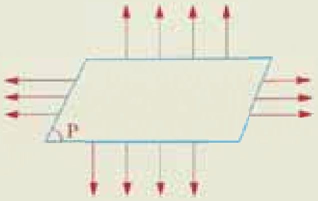
دریم اصل: که چیري د یوه مستقیم خط دوې نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلوته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه دکاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي څرګندوي رسمیږي، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډیرې دي. زیاتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کیږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.

مستوي نه ده



محدوده مستوي



نا محدوده مستوي

دا مستوي ګانې چې په تېرو شکلونو کې لیدل کیږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلایتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کیږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالیږي، په فضايي هندسه کې هم استعمالیږي.

هغه اکسیومونه، چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخېستل کېږي.

سربیره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانیږي.

د مستوي لومړنی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تیریږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسیوم: که چیرې دوې مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګډ مستقیم خط ولري، د دغه متقاطع خط ته د دوې مستوي ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وایي.

دویم اصل: لږترلږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی میز د څلورو پښو لرونکی میز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاحګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لري؟

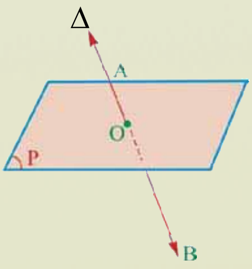
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

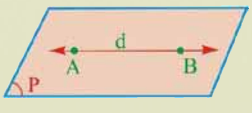
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو بعد، دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

1. **که چیرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.**



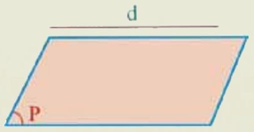
2. که چیرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه له مستوي سره منطبقه



ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله

ده،د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.

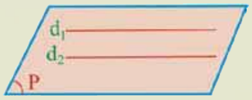
3. که چیرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دي، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



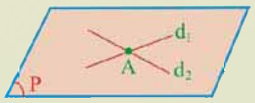
له یو بل سره د دوو مستقیموکرښو نسبي حالت:

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کیږي، او یو له لاندینیو حالتونو(وضعیتونو)څخه لري.

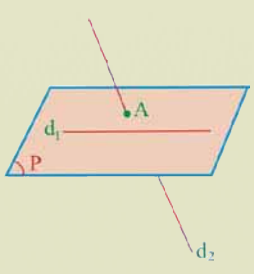
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه، چې یوه ګډه(مشترکه) نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کیږي.



3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کیږي؟

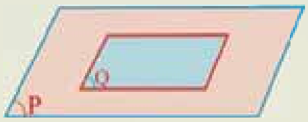


(c) ketabton.com: The Digital Library

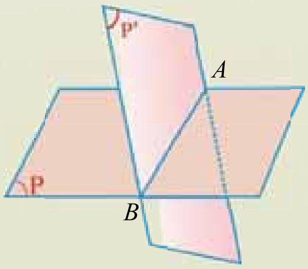
د دوو مستويګانو نسبي حالت:

په عمومي ډول دوې مستويګانې لاندې درې حالتونه لري.

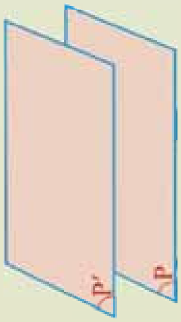
منطبق: كه چيرې دوې مستويګانې لږ تر لږه درې مشتركې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستويګانې بلل كيږي، لكه په مخامخ شكل كې د P او Q دوې مستويګانې يو پر بل منطبقې دي.



متقاطع مستويګانې: كه چيرې دوې مستويګانې يو ګډ مستقيم خط ولري متقاطع مستويګانې بللې كيږي. دغه د AB مشترك خط ته مشترك فصل هم وايي. لكه مخامخ شكل.



3- كه چيرې دوه مستويګانې هيڅ كوم ګډ ټكى و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستويګانې.



فعاليت

- په فضاكې له يوې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تيريږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تيريږي؟
- له يوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تيريږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تيريږي؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي ګانې تيريږي چې درې واړې نقطې يكې شاملې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

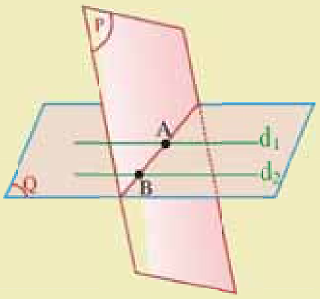
2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چیرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي ګانې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

په فضا کې موازي مستقیم خطونه

آیا په فضا کې مستقیم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقیم خطونه چې په یوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسیوم: له یوې خارجي نقطې څخه له یوې مستقیمې کرښې سره یوازې او یوازې یوه موازي مستقیمه کرښه رسمولای شو او بس.

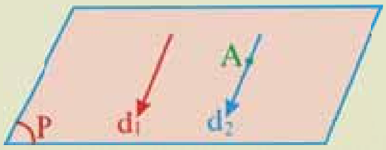
فعالیت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقیم خط چې د A ټکی وربانـدې پـروت نـه وي، پـه پام کې ونیسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقیم خط څخه څو مستوي‌ګانې تېریدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعالیت څخه د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: له یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره یوازې یو موازي مسقیم خط رسـمولای شـو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقیمې کرښې څخه یـوازې یوه د P مستوي تیرېږي، ولې؟



اوس د P پـه مـستوي کـې د A لـه نقطـې څخـه یـوازې د d_2 مستقیم خط د d_1 له مستقیم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتني ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتني دعوا چې ټکی او خط پـه فضا کې وي، هـم سموالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

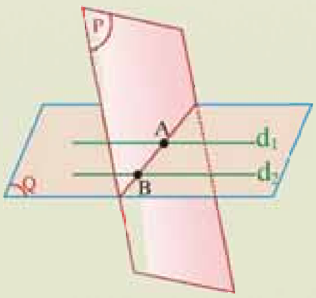
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او يوه د A نقطه د P له مستوي څخه بهر(خارج) په پام کې ونيسئ.

- آيا د d_1 او d_2 مستقيم خطونه يوه بله مستوي ټاکلي شي؟
- که چيرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکی کې قطع کړي، آيا د P مستوي به د d_2 مستقيم خط هم قطع کړي؟
- آيا دوې مستوي‌گانې يوه بله د يوه مستقيم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: که دوه مستقيم خطونه موازي وي او مستوي يو له هغو څخه قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 يو له بل سره موازي مستقيمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقيم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقيم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعريف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه يوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A يوه مشترکه نقطه لري، که چيرې دوې مستوي‌ګانې يوه بله په يوه نقطه کې قطع کړي، نو ويلای شو چې هغوی يو بل د يوې مستقيمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقيمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي. ځکه يو مستقيم خط چې په يوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه يو قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.

پوښتنې

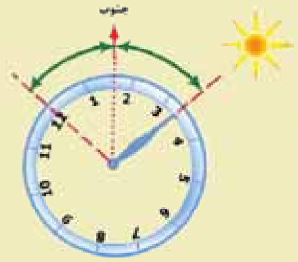
1- که چيرې دوه مستقيم خطونه له يوه دريم مستقيم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقيم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چيرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_2 // L_1$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آيا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترک فصل او د F او P له مشترک فصل سره موازي دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه



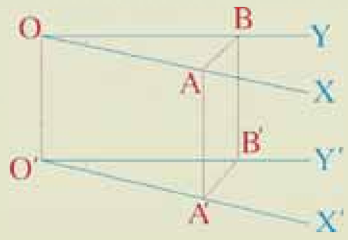
کـه چیـرې د یـوې زاویـې دورانـي لـوری د سـاعت د عقربې په مخالف لوری حرکـت وکـړي، زاویـه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عین لـوری) وي زاویه منفي ده.

فعالیت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاویې داسې په پام کې ونیسئ چې ضلعې یې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ لـه ضـلعو څخـه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مـساوي قطعـه خطونـه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ لـه ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بیل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دلیل یې ووایاست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي مثلثونه له یو بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت له مخې د قضیې متن او ثبوت په لاندې ډول بیانولی شو.

قضیه: په فضا کې دوې زاویې، چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، یوه له بلې سره مساوي دي.



ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاویې په پام کې نیسو، داسې چې $\overline{OX} // \overline{O'X'}$ او $\overline{OY} // \overline{O'Y'}$ دي، یـو لوری(یوجهت) هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل یوه متوازي‌الاضلاع ده. لـه دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونـه مـوازي، مـساوي او هم لوري(هم‌جهت) دي. نو $ABB'A'$ هم یوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{A'O'} = \overline{OA}$ او $\overline{O'B'} = \overline{OB}$ دي

له دي امله $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$ دي.

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نوموړي زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه(لوري) ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالي 180° دی.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضاکې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصليږي

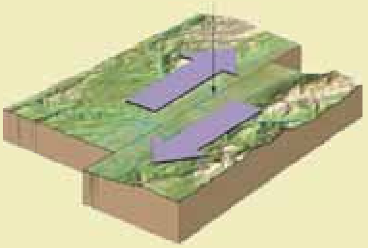
پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي گانې



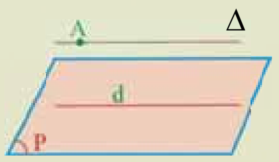
يوه مستقيمه کرښه هغه وخت له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هيڅ گډ ټکی و نه لري.
مستوي گانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هيڅ گډ ټکی و نه لري.

فعاليت

که چيرې د d مستقيم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقيم سره موازي وي، آيا د Δ مستقيم د P له مستوي سره موازي کيدلای شي؟

- دوې د P او Q متقاطع مستوي گانې او يو مستقيم خط له دغو مستوي گانو څخه بهر د P او Q له مستوي گانو سره موازي په پام کې ونيسئ.
- د d مستقيم (مشترک فصل) د Δ له مستقيم خط سره موازي کيدای شي؟
- له يوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقيمو کرښو سره څو موازي مستوي گانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعاليتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضيو متن او ثبوت په ترتيب بيانوو.

قضيه: که يو مستقيم خط د يوې مستوي له يوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقيم خط له همدې مستوي سره موازي دی.

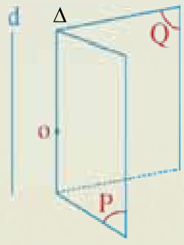


ثبوت: د d مسقيم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقيم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقيمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقيمه کرښه قطع کړي، د d مستقيمه کرښه چې د Δ له مستقيمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقيمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقيم قطع کولای نشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

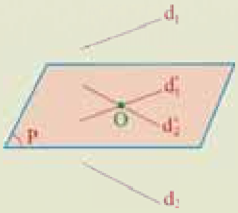
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستویګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه مخامخ شکل.

که د P، Q د مستويګانو د Δ په مشترک فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.

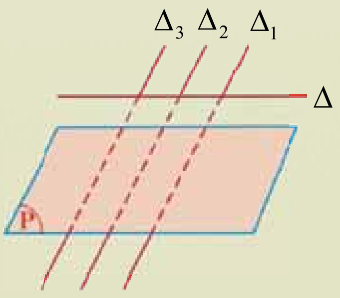


ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چیرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چیرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

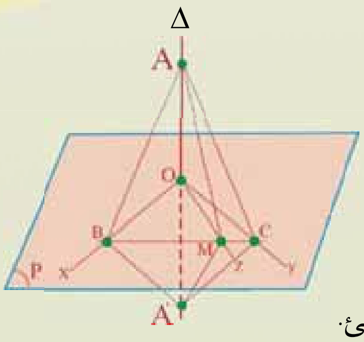


2- که چیرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي ګانې

که د Δ مستقيمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آيا هغه ټول مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيرېږي، د Δ په مستقيمې کرښې باندې عمود دي؟

فعاليت



- مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقيمونه د Δ په مستقيم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې ونسيئ.
- د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

يو اختياري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقيمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقيمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقيمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA'}$ سره څه اړيکه لري.

- د OZ مستقيمه کرښه د Δ پر مستقيمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت داسې بيانوو.

قضيه: که د Δ يوه مستقيمه کرښه پر هغو دوو مستقيمو کرښو چې دواړه د Δ مستقيمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقيمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تيرېږي، عمود ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تيريږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري(کيفي) مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنې عمودونه دي؛ نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$
$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکي دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C,B او M نقطې ثابتې پاتې کيږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کيږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\hat{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دي او د $\overline{MO}$ منځنۍ(ميانه) په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنۍ عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري(کيفي) نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چيرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌گانې رسمولای شئ؟

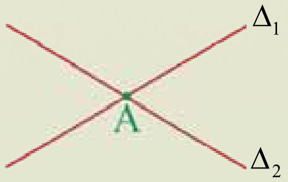
2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستويگانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دی؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کېږي.

فعالیت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسیئ
- له دې دوو مستقیمو خطونو او د A له نقطې څخه یوه مستوي تیرولی شو.
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقیمې کرښې چې په ترتیب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او یو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

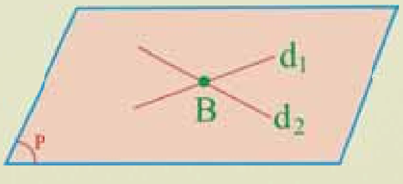


- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقیمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانولی شو.

قضیه: که د یوې مستوي دوې متقاطع مستقیمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقیمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي‌ګانې سره موازي دي.

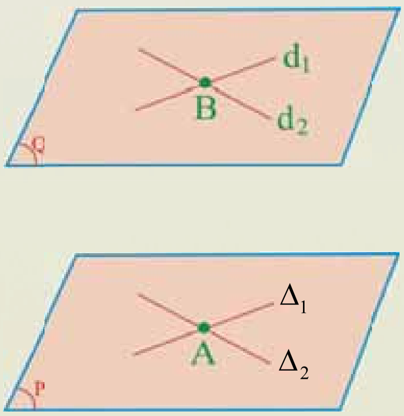
ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او یوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقیم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم یوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنگه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو د d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چیرې د P او Q مستویګانې یو بل سره قطع کړي، مشترك فصل يې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستویګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.



پوښتنې

که چیرې د E او F مستویګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکې مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنی اصطلاحګاني Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کيږي، لـومړني اصـطلاحات بلـل کـېږي د مثـال په توګه. ټکی(نقطه)، کرښه (خط)، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کيـږي چـې لـه يـو لـړ مخکينيـو سـمو وړانـديزونو او څېړونـو څخـه و روسـته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کيږي.

ټکی(نـقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پيژنو او هغه د لومړنی اصـطلاح(تعريـف شـوې نـه ده) پـه توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تيغه د مستقيم خط مفهـوم او مطلـب بيـانوي.

مستقيم خط د لومړنی اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سـره ونـښلوي، پـه همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په اسـتقامت پرتـې نـه وي، يـوه مستوي تيرېږي.

د متقاطع مستويګانو اکسيوم: که چيرې دوه مستويګانې يو ګـډ ټکـی ولـري، متقـاطع دي او پـه همـدې ډول که چيرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستويګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم(تعريف شوې نه ده) لومړنی اصطلاح په توګه پيژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعده فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدې فضا ده.

له یو بل سره په فضا کې د دوو مستقیمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستویگانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقیمونه:

دوې مستقیمې کرښې چې په یوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقیمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستقیمونو تر منځ زاویه: په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاویې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقیمونه او مستوي: یو مستقیم خط له یوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هیڅ مشترکه(ګډه)نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقیمونه او مستویګانې:

که د Δ مستقیم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقیمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې: دوې مستویګانې، چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کېږي.

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا او کړی ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی

b _ د AB خط یې له منځه تیریږي

c _ د AB خط عمودي ناصف دی

d _ د AB له خط سره موازي دي یا له AB څخه تیریږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b _ د Δ خط یوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d _ د Δ خط یوازې د P مستوي له یوه خط سره موازي دی.

3- په دقیق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه یوه مستوي نه تیریږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر یو مستقیم واقع دی.

b _ له دوو متقاطع خطونو څخه

c _ د یو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه

d _ څلور متمایزې(مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقیم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه یوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' یو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په یوه نقطه کې شریکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د یاد شوې ټکي په امتداد شریکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0   b) 1   c) 2   d) بې شمېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمایز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

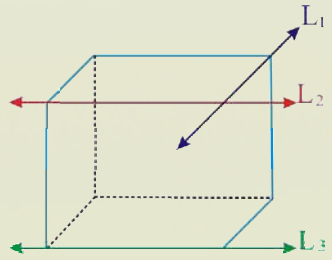
b _ که یو خط یو له متقاطع مستویگانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که یو خط یوه له دوو موازي مستویگانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

d _ که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

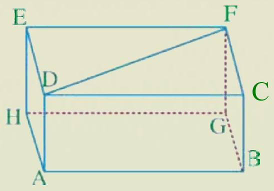
لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوې سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کیدای شي.



2- په لاندې مستطیل کې د L_1, L_2 او L_3 خطونو موقعیت نظر یو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟

3- که د P_1 او P_2 مستويګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستویګانې په خپل منځ کې موازي دي؟



4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.

a _ د دوو مستويګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمود وي او ووایئ ولې عمود دي؟

b _ د دریو قطعه خطونو، نومونه واخلئ چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاویه قایمه ده.

d _ د $D\hat{F}C$ زاویه قایمه ده.

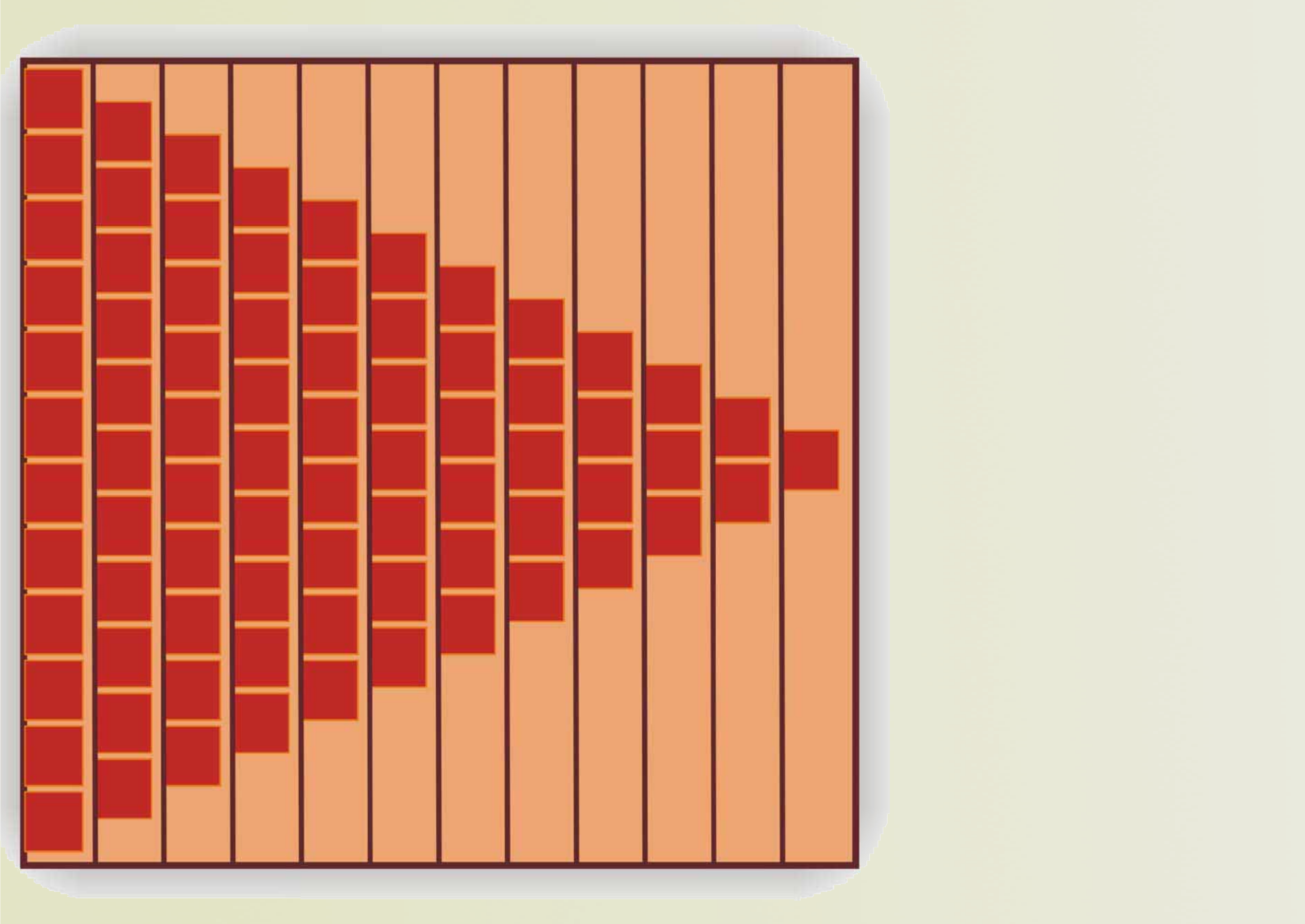
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

ترادفونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي، یا په بل عبارت ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم(نامرتب) دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دی، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف $n-$ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n \in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n-$ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$
د 5 د مضرب عددونوترادف	$5, 10, 15, 20, \ldots, 5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n-$ام حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$a_n = 2n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$c_n = 5n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزاید ترادف بلل کېږي، لکه د جفت، طاق او 5 مضرب عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه: د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزاید دی، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots \quad , \quad a_n = 1,4,9,16,25,36, \ldots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots \quad , \quad b_n = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$$

لیدل کېږي چې د a_n د ترادف د حدونو عددي او عددي قیمت په تدریجي ډول زیاتېږي، نو د a_n ترادف متزاید، همدارنګه لیدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف یو متناقص ترادف دی.

یادونه: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر یې معلوم وي معین ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د غیر معینو ترادفونو په نامه یادیږي.

دویم مثال: که د یوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه یې پیدا کړئ.

حل: د 5 لومړنیو حدونو د پیدا کولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قیمتونه ورکوو او په ترادف کې یې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7, \ldots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots \end{array}\right\}$$

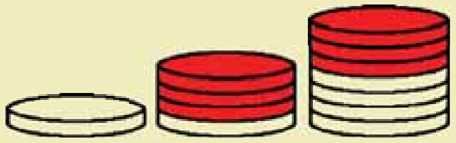
2- که یو ترادف $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences

که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې(متعاقبو) حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي ،ترادف په څه نوم یادېږي.



فعالیت

- مخامخ عددونه په پام کې ونیسئ $5, 8, 11, 14, 17, 20$
- د لومړي او وروسټي حدونو ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترتیب له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له ښي څخه کیڼې خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

تعریف: که په یوه حسابي ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference's) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه په لاندې مثالونو کې:

$2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} d=5-2=3 \\ d=8-5=3 \\ d=11-8=3 \end{array}\right\} \Rightarrow d=3>0$$

نو ترادف متزاید دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=0-4=-4 \\ d=-4-0=-4 \\ d=-8-(-4)=-4 \\ d=-12-(-8)=-4 \\ d=-16-(-12)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې يو ترادف وليکئ چې لومړی حد يې $\frac{3}{2}$ اوګډ توپير يې 2 وي.

حل: څرنګه چې لومړی حد يې $a_1=\frac{3}{2}$ اوګډ توپير يې $d=2$ دی، نو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots$$

$$a_2-a_1=d \quad \Rightarrow \quad a_2=a_1+d$$

$$a_3-a_2=d \quad \Rightarrow \quad a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$

$$a_4-a_3=d \quad \Rightarrow \quad a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,a_n$ قيمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ ,(a_1+d)\ ,\ (a_1+2d)\ ,\ (a_1+3d),\ \dots$$

$$\frac{3}{2}\ ,(\frac{3}{2}+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2+2),\ \dots$$

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\ ,\ \frac{11}{2}\ ,\ \frac{15}{2},\ \dots$$

دويم مثال: کوم يوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$a)\ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ \dots$

$b)\ 1,2,4,8,16,\ \dots$

a د جزء حل: د حسابي ترادف د تعريف په پام کې نيولو سره د حدونو ګډ توپير په لاس راوړو:

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف د تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

b د جزء حل:

$$1 \ , \ 2 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16$$
$$d = 2 - 1 = 1$$
$$d = 4 - 2 = 2$$
$$d = 8 - 4 = 4$$
$$d = 16 - 8 = 8$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو یاد شوی ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چیرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ ... \ , a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ ...$ ترادف په پام کې نیسو.

$$5, 7, 9, 11, \ ...$$
$$d = 7 - 5 = 2$$
$$a_1, a_2, a_3, \ ...$$
$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ ...$$
$$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ ...$$
$$a_1 = 5, \ a_2 = 5 + 2 \cdot 2 \ , \ a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ ...$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توگه کولای شو ولیکو چې:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 - a_1 = d \;\Rightarrow\; a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 - a_2 = d \;\Rightarrow\; a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 - a_3 = d \;\Rightarrow\; a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d \;\Rightarrow\; a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ , \ldots$ حسابي ترادف 30 - ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ d = 5-(-2) = 7 \\ n = 30 \\ a_{30} = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n = a + (n-1)d \\ a_{30} = -2 + (30-1)7 \\ a_{30} = -2 + 29\cdot 7 \\ a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{array}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ , \ldots ,2000$$

حل: پوهېږو چې:

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 35 \\ d = 40 - 35 = 5 \\ a_n = 2000 \\ n = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2000 = 35 + 5n - 5 \\ 2000 = 30 + 5n \\ 2000 - 30 = 5n \\ 1970 = 5n \;\Rightarrow\; n = 394 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که چیرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad \Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad \Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad \Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\ ,\quad 2(-12)-4\ ,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1,\ -24-4,\ -36+3\ \Rightarrow\ -23,\ -28,\ -33,\ -38,\ -43,\ ....$$

یادونه

که د یوه حسابي ترادف $n-$ام او $m-$ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\quad ....\ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\quad ....\ II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د I له اړیکې څخه د II اړیکه کمړو، په پایله کې کولای شو ګډ توپیر داسې په لاس راوړو

$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d ګډ توپیر، a_n د ترادف

n – ام حد ، a_m د ترادف m – ام حد دی.

لومړی مثال: د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، ګډ توپیر او لومړی حد یې پیدا کړئ، په پای کې یې ترادف بشپړ کړئ.

$$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 47 \\ n = 9 \\ a_m = 27 \\ m = 5 \\ d = ? \\ a = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{47 - 27}{9 - 5} = \frac{20}{4} \\ d = 5 \\ a_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow \quad 47 = a + (9-1)5 = a + 40 \\ \Rightarrow \quad 47 - 40 = a \quad \Rightarrow \quad a = 7 \end{array}$$

ترادف یې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونیکي ترادف: د $\{a_n\}$ یوه ترادف ته هغه وخت هارمونیکي ترادف وایي چې معکوس یې $b_n = \frac{1}{a_n}$ یو حسابي ترادف وي.

لومړی مثال: د ... $2,4,6,8,10,$ ترادف یو حسابي ترادف دی، ځکه چې $d = 2$ دی، د دغه ترادف د حدونو معکوس یعنې... $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ یو هارمونیکي ترادف تشکیلوي.

دویم مثال: د طبیعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \; \dots \; , \frac{1}{n}$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال : که چیرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هـارمونیکې تـرادف یـې پـه لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4}-3), (\frac{1}{4}-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3-3), \ldots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \ldots$$

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هـارمونیکي حـسابي اوسـط: کـه درې مسلـسل عناصـر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} پـه داسـې حـال کـې چـې $n = 2, 3, 4 \ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شـي، څرنگـه چـې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنی اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکې اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\,,\,5\,,\,12\,,\,...$

2- آیا $\frac{5}{4},1,\frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالی په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_{10}=\frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2\,,\frac{9}{4}\,,\frac{5}{2},\frac{11}{4},\,...$

$b)\ 3\,,6\,,9\,,12,\,...$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي ترادف

Geometric Sequences

که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستۍ خانه کې په مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه ياديږي، يعني:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1,2,3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت پېژندل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د $\ldots, 6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، ګډ نسبت یې په لاس راوړئ.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي وېشو:

$$96 \quad 48 \quad 24 \quad 12 \quad 6$$

$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید دی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $\ldots, 100, 300, 900, 2700$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډ نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

$$\text{لومړی حد} = a = 2700$$

$$\text{ګډ نسبت} = q = \frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

په پورتني مثال کې $q=\frac{1}{3}<1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چیرې هندسي ترادف د .... $a_1, a_2, a_3, a_4,$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د .... $a_1, a_2, a_3, a_4,$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

n - ام حد		څلورم حد	دریم حد	دویم حد	لومړی حد
a_n	, … ,	a_3	a_3	a_2	a_1
$\downarrow$	, … ,	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$a_1 q^{n-1}$	, … ,	$a_1 q^3$	$a_1 q^2$	$a_1 q$	a_1

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پيدا کړئ.

$$5\ ,\ -10, 20, -40,\ ....$$

حل:

$$\left.\begin{aligned} &a=5\\ &q=\frac{-10}{5}=-2\\ &n=6\\ &a_6=?\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &a_n=aq^{n-1}\\ &a_6=5(-2)^{6-1}\\ &a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32)\\ &a_6=-160\end{aligned}$$

دويم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} &n=12\\ &a=8\\ &q=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_n=aq^{n-1}\\ &a_{12}=8(\frac{1}{2})^{12-1}=8(\frac{1}{2})^{11}=8\frac{1}{2^{11}}\\ &a_{12}=\frac{8}{2^{11}}=\frac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}\end{aligned}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د M, a او M, b ترمنځ اړيکه پيدا کړئ.

$$\left.\begin{aligned} &q=\frac{M}{a}\\ &q=\frac{b}{M}\end{aligned}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پاسني فورمول څخه ويلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقيقي عددونه وي، نو د M حقيقي مثبت عدد ته د a او b هندسي اوسط(Geometric mean) وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=12 \end{matrix}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a_5=a\cdot q^{n-1} \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\frac{32}{2}=16 \Rightarrow q^4=16 \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{matrix}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف یې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2,4,8,16,32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n، n – ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیداکړئ.

لومړی مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \;,\; x+3 \;,\; x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \;,\; x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې ولیکئ چې لومړی حد یې 5 او اخیري حد یې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم یو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$

$b)\ -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

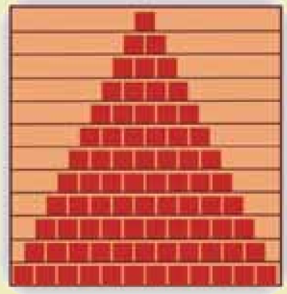
3- د $\ldots, \frac{5}{8}, \frac{5}{2}, 5$ هندسي ترادف دوولسم حد پیدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړئ.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترادفونو قسمي مجموعه



a - په لسم کتار کې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟

فعاليت

- د $2,4,6,8,\ \dots$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعې حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
- د $n-$ام حد د جمعې حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنګه چې د لومړی n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړی حدونه ليکو او وروسته له درېو ټکو $n-$ام حد ليکو.

څرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل يې سرخوږي جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف n لومړيو حدونو $a_1\ , a_2\ , a_3\ , \dots\ , a_n$ د جمعې حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې د $\sum$ له سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنی او ښکتنی نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول تام عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د $i\,,n\,,k\,,j$ حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n}2k=\sum_{i=1}^{n}2i=\sum_{j=1}^{n}2j=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdot\cdot\cdot+2n$

لومړی مثال: لاندې مجموع($\sum_{i=1}^{7}$) په غزیدلي شکل ولیکئ.

حل:
$$\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$$

دویم مثال: لاندې د جمعې حاصل د مجموعې ($\sum$) په شکل ولیکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \dots\ +n^2$

د a جزء حل:
$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:
$$1+4+9+\ \dots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

دریم مثال: لاندې مجموعه په پرمختللي(غزیدلي) شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=?$$

حل:
$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\dots+n(n+2)$$
$$=4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8+\dots+n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\dots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:
$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړل، که وغواړو د یوه ترادف $\{a_n\}_{n\in IN}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شئ.

د $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې(Series) په نامه یادېږي.

د $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خویه ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولوسره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوي مجموعي نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\ldots + a_n + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$ د نوموړي سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو:.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21$$
$$S_8 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c يو ثابت عدد وي لاندې، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ ... \ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\quad b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\quad c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{19}{20}$

$b)\ 1 + 4 + 9 + ... + n^2$

$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1)$

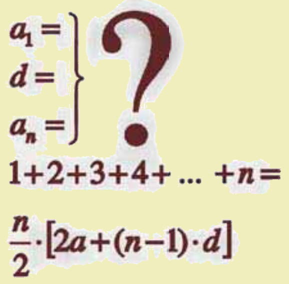
3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\quad b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i-2)$ $\quad c)\ \sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه



که $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ يو حسابي ترادف وي، نو $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ د دېوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کيدلای شي؟

که چيرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. ياپه بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې a ګډ فرق يې d او اخيري حد يې a_n وي، د حدونود جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad \ldots \text{ I}$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots + (a+2d) + (a+d) + a \quad \ldots \text{ II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S = \underbrace{(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+\ldots+(a+a_n)+a+a_n}_{n(a+a_n)\ \text{خلې}\ n}$$

$$2S = n(a+a_n) \quad \Rightarrow S = \frac{n}{2}(a+a_n) \ldots \text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع رانښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$a = 4$

$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$

که چیرې په یوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپیر ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل یې له لاندې اړیکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}\left[a + a + (n-1)d\right] \Rightarrow S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \text{ .... III}$$

دویم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}\left[2 \cdot 7 + (201-1)4\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ تـوپیر او $n-$ام حد یې ولیکـئ وروسـته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفت پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \ \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \Rightarrow S_n=n(n+1) \end{array}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+\ldots)$ د 200 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \Rightarrow S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

او د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې حاصل د $S=\frac{n}{2}(n+1)$ فورمول په واسطه محاسبه کېږي(د پورته فورمولونو ثبوت د زده‌کوونکو دنده ده).

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پيدا او همدرانګه د نومړو ترادفونو د لس حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

2. که يو ترادف د $\ldots\ 2,5,8,11,$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قيمتونه حساب کړئ.

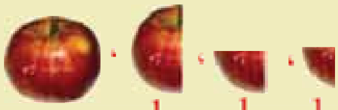
$a)\ S_8$ $\qquad$ $b)\ S_{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

که چیرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړی برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل مساوي په 2 مڼو شي.



$1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{4} \ , \ \frac{1}{8}$

فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چیرې دویمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ قیمت عبارت دی، له: $q \neq 1$ ، $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنۍ اړیکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1}$ I

$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n$ II

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad , \quad q \neq 1$$

پاسنۍ اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په يوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی. د پاسني ترادف 5 لومړی متوالي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پيداکړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دويم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$$2, 6, 18, \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

يعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پيداکړئ.
3. په $4, 12, 36, \ldots$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قيمت پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانی لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.
أیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

که چیرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، هغه د متباعدې سلسلې (Divergent series) په نامه یادېږي.

اوکه چیرې $|q| < 1$ وي، هغه د متقاربې سلسلې (Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعد $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایت وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنگه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ ...\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323...=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ ...\ ]$$

په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\bar{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\bar{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$0.\bar{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\ 0.\bar{3}=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

2. لاندې اعشاري پیریودیک(متوالي) کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادېږي.

پاسنی هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه یادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a+(n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر حد او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1} , a_n , a_{n-1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $\sum_{1=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+ \ \dots \ +a_n$ د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+ \ \dots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، سلسله متقارب او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کيږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايت وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايت ده، يعنې $S_n = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کرۍ تاوکړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف $n-$ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $c)\ \frac{n}{n-1}$ $d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $b)\ 38$ $c)\ -35$ $d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $b)\ 0.1$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $b)\ \frac{5}{510}$ $c)\ -\frac{5}{512}$ $d)\ \frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $d)$ هيڅ يو

8. په بې نهايت هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q=0$ $b)\ |q|>1$ $c)\ |q|<1$ $d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د ځلورو مضرب وي؟

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېل بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21, \square, \square, \square, 31$

3. که ديوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.

6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د ځلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.

9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېل بېل ډول وليکئ.

$3, \square, \square, \square, \square, 96$

10. د $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$ هندسي سلسلې د اته لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.

12. لاندې پيريوديک(متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

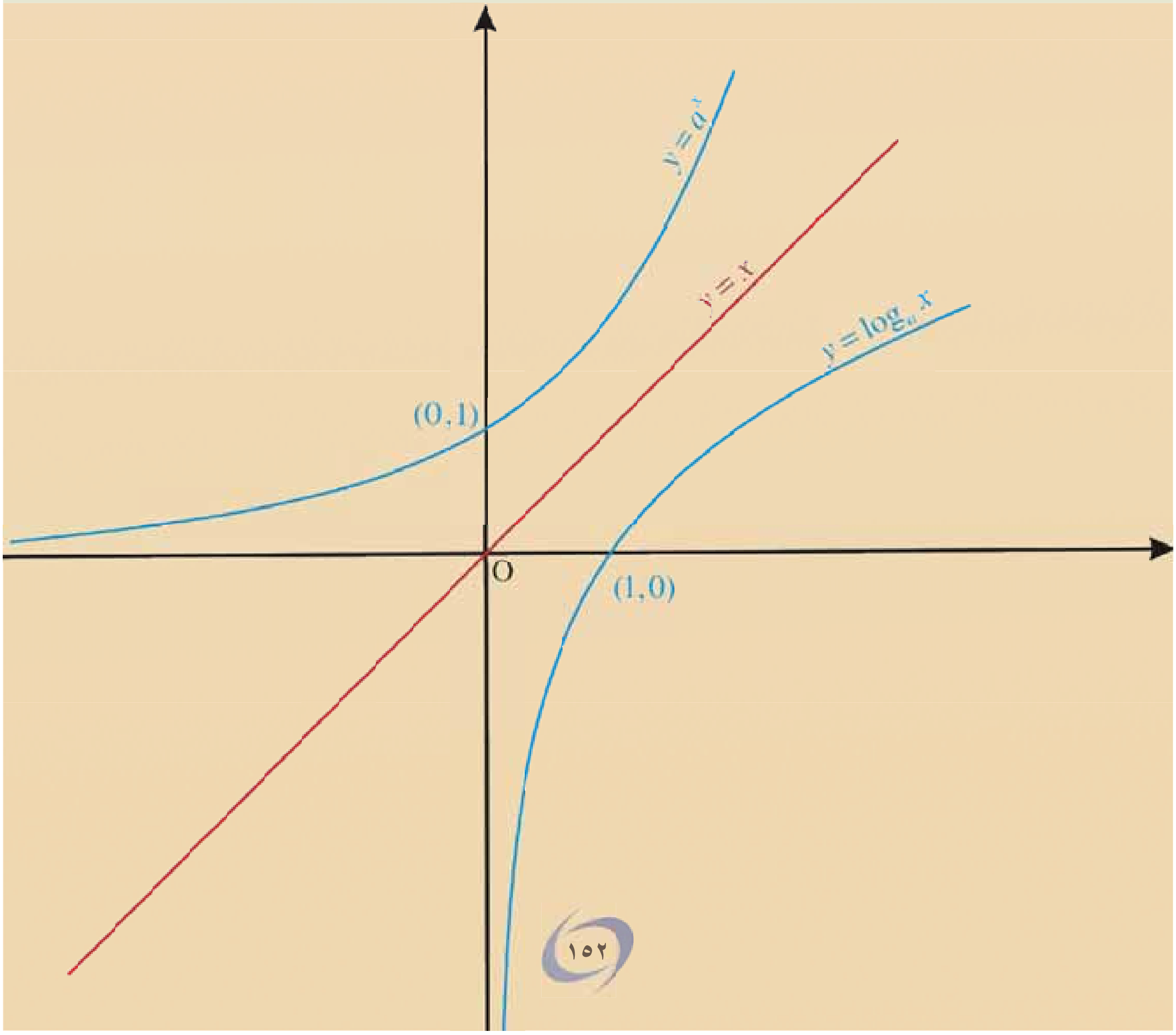
$a)\ 2.\overline{8}$ $b)\ 3.\overline{57}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

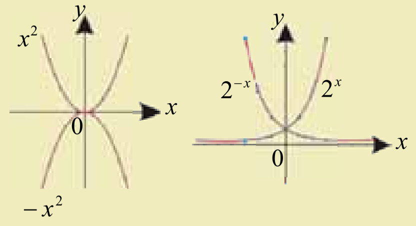
لوګاریتم



(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشیل تابع ګاني

Exponential function



پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظرد y محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چیرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\ ,\quad x\in IR\ ,\quad f:\ IR\to IR^+$$

$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګاني د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعیه کمیاتو یه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

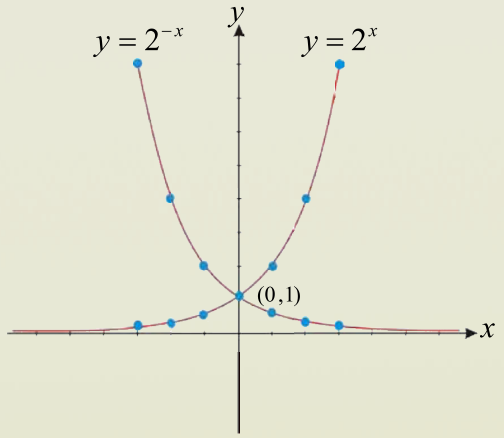
د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره یوپه یو متناظر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

د $y=2^{-x}$ تابع متزاید ده، ځکه چې $a=2>1$ دی.

د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه رسموو.



د $y=2^{x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

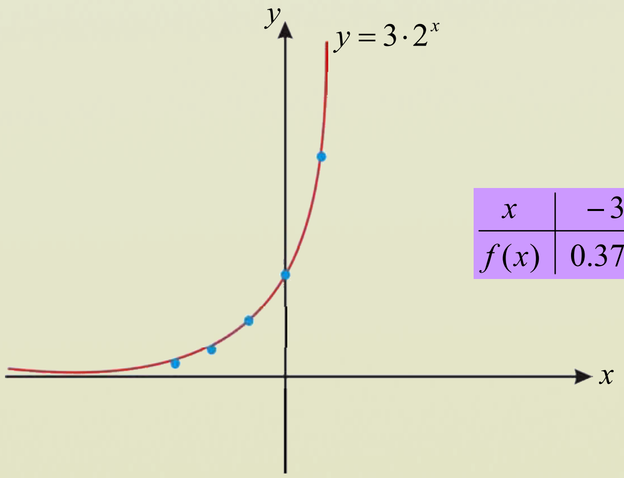
د $y=2^{-x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهیږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننشیل تابع ګراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې ګراف رسم کیږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تیرو معلوماتو څخه په ګټه اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

4. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
5. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تیریږي.
6. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
7. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی او د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس تابع $g(x)=a^{-x}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)$ $f(x) = 2 \cdot 3^x$

$b)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

$c)$ $f(x) = (-2)^x$

$d)$ $f(x) = (-2)^{-x}$

لوگاریتم

Logarithm

آیا کولای شئ چې اکسپوننشیل تابع په بل ډول هم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړ کړئ

درکړل شوي عددونه $= y$	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
طاقت لرونکي عددونه $= a^x$		10^{-3}				10^4
توان $= x$	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بیلې ښوونې ته لوګاریتم وایي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوګاریتم په نامه یادیږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې a ته د لوګاریتم قاعده (Base) او y ته لوګاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکی عدد توان له لوګاریتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تیر جدول کې د 10د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاریتم څخه عبارت دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساري په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال:د لوګاریتم د تعریف په کارولو سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې افادې (طاقت لرونکی عددونه) د لوګاریتم په شکل ولیکئ

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

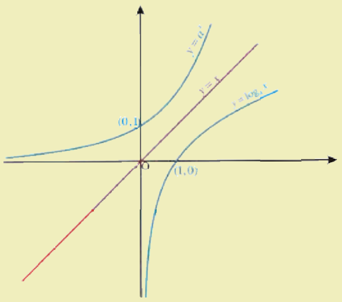
$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شي هغه تابع ګانې چې معکوس لري، په قایمو مختصاتوکې نظرکوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

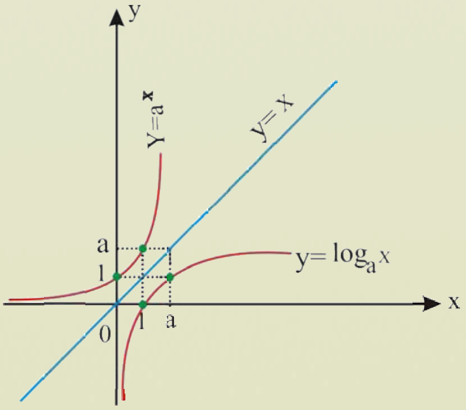
تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده. د یوې ($a \in IR^+$ او $a \neq 1$) اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښوول کېږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري چې د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابع-ګانې اوګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$

$f^{-1} : IR^+ \to IR, f^{-1}(x) = \log_a x,\ a \in IR^+,\ a \neq 1$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

که چیرې $a>1$ وي، نود $\forall x_1 , x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=0$ لپاره $\log_a 1 = 0$ $a^0 = 1 \Leftrightarrow$

لومړی مثال: د $y=3^x$ او $y=\log_3 x$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y=3^x$ تابع په پام کې نیسو:

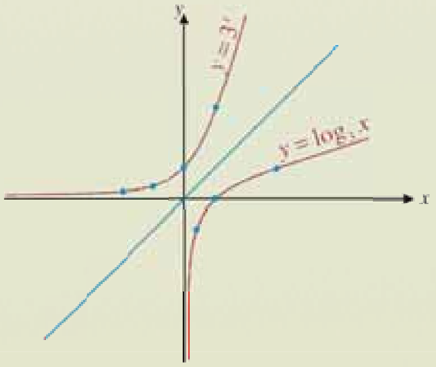
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y=\log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=\log_3 1\end{matrix}\right\}(1,0) \qquad \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=\log_3 3\end{matrix}\right\}(3,1)$$

$$\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{3} \\ y=\log_3 \frac{1}{3} = y=\log_3 3^{-1} = -1\end{matrix}\right\}(\frac{1}{3},-1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y=2^x$ او $y=(\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابعګانو ګراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشیل تابعګانو د تعریف له مخې ددوی داړوندو معکوسو اکسپوننشیل تابعګانو قیمتونه د $x=1,2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوګاریتمي تابع لکه $y=\log_a x$ د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ a \in IR \, , a>0 \, , a \neq 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که چیرې $f(x)=\log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(3)$, $f(9)$, $f(3^{-2})$, $f(1)$ په لاس راوړي.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3)=\log_3 3=1$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2\cdot 1=2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3^{-2})=\log_3 3^{-2}=-2\cdot\log_3 3=-2\cdot 1=-2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(1)=\log_3 1=0$$

دریم مثال: که $\log_3 x=4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x=4 \Leftrightarrow x=3^4 \Rightarrow x=81$

د تیرومعلوماتو په کارو لوسره د لوګاریتمي تابع خاصیت په لاندې ډول بیا نیږي.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د مثبتو عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0=1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تیریږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1\neq x_2$ لپاره تل $f(x_1)\neq f(x_2)$ دی.

د 2 په قاعده لوګاریتم:

د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=16,\frac{1}{8}$ لپاره پیداکړئ.

حل: په راکړل شوی تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\cdot\log_2 2=4\cdot 1=4$$
$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8})=\log_2(\frac{1}{8})=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3\cdot 1=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28, \sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(2), f(1), f(\frac{1}{32}), f(32)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

طبیعي لوګاریتم *Natural logarithm*

آیا یوازي 2 او 3 د لوګاریتم قاعدې دي او که نور عددونه هم د لوګاریتم قاعده کېدای شي ؟

$$\left.\begin{matrix}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{matrix}\right\} = ?$$

تعریف

څرنګه چې ومو لیدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کېدای شي د لوګاریتم قاعده شي، خو په عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کیږي.

1 - هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، د معمولي لوګاریتم Common logarithm یـا اعشاري (Briggs) لوګاریتم په نامه یادیږي چې د log په سمبول یې ښیي او په لاندې ډول ښودل کیږي.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR \ , \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاریتمونه پیدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

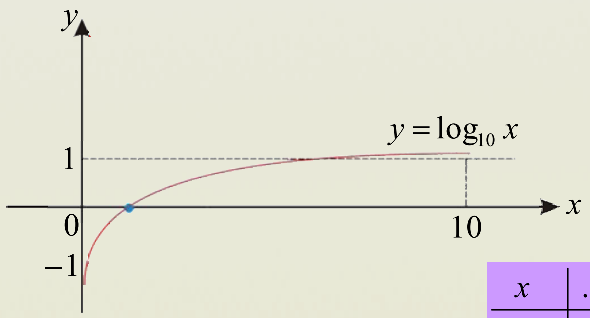
$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\vdots$$

$$n \in z \ , \quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2 - هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادېږي او په ln سره ښوول کیږي ، e یو ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e=2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^x$ فورمول څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدی شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او $f(x)=e^x$ تابع د طبیعي اکسپوننشیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x)=e^x$

د $y=e^x$ تابع ګراف لکه $y=a^x$ تابع ګراف په څېر ده.

د $y=e^x$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

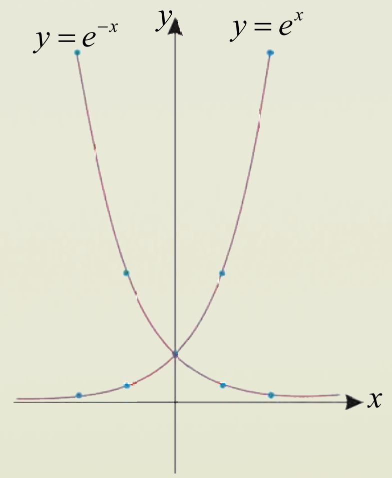
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y=e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو تقريبي قيمتونو په پام کې نيولو سره د $y = e^{x}$ او $y = e^{-x}$ تابع‌گانو گرافونه رسموو:



د طبيعي لوگاريتم مطالعه په لوړو رياضياتوکې لکه ساينس، انجنيري، تجارت او تخنيک کې زيات استعمال لري.

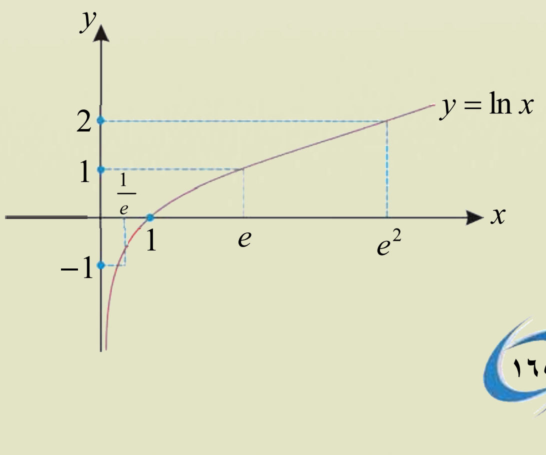
د طبيعي لوگاريتم د تابع $y = \ln x$ گراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}$, $\ln e^{-1}$ $\ln e^{0}$, $\ln e^{3}$, $\ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پيدا کړئ.

حل: د تعريف په پام کې نيولو سره لرو چې: $y = \ln x = \log_e x$

$$\ln e^{1} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{1} \Rightarrow y = 1$$
$$\ln e^{2} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{2} \Rightarrow y = 2$$
$$\ln e^{3} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{3} \Rightarrow y = 3$$
$$\ln e^{0} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{0} \Rightarrow y = 0$$
$$\ln e^{-1} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\ln e^{-2} = y \Leftrightarrow e^{y} = e^{-2} \Rightarrow y = -2$$

د $y = \ln x$ تابع گراف عبارت دی له:



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت

- د $y = \ln \frac{1}{e7}$ قيمت پيداکړئ او د $\log 0.0001$ قيمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوگاريمتونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$

$b)\ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$

$d)\log \frac{1}{10^{-2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

پوهیږي چې د عـددونو طاقت خپـل قـوانین لـري، آیـا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قوانین ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قوانین ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په خودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځیني قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف پـه ساحه کې پـه خپلـه قاعـده مـساوي پـه یـو دی؛ مـثلاً:

$a \in IR,\ a \neq 1, \log_a a = 1$

ثبوت: پوهیږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نـو

$\log_a 1 = 0$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموع سره مساوي دی یعنې:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو

$x = a^p \ \ldots\ \text{I}$

$y = a^q \ \ldots\ \text{II}$

د I او II اړيکې خوا په خوا ضربوو: $I \cdot II \Rightarrow x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړيکې له دواړو خواوې لوګاريتم نيسو: $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د p او q قيمتونو په اېښودلو سره ليکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاريتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دويم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعاليت

- دلاندې غير مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښاياست.

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون: د دوو عددونو د تقسيم لوګاريتم د لوګاريتمونو له تفاضل سره مساوي دي، يعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چيرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \,.........\, I \\ y = a^q \,.........\, II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا يو په بل ووېشو.

$$\frac{I}{II} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنې اړيکې له اطراف څخه لوګاريتم نيسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q قيمتونو په اېښودلو سره ليکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3980$

دويم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبيقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy}$$
$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$
$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د يوه توان لرونکي عدد لوګاريتم مساوي دى د توان او د طاقت د قاعدي د لوګاريتم له حاصل ضرب سره يعني که چيرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x \cdot x \cdot x \cdot \ \dots\ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{lag_a x \text{ ځلې } n}$$

په پايله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخيستنې سره کولای شو وليکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دويم مثال: دغه لوګاريتم $\log_3 \sqrt[3]{9}$ پيداکړئ؟

حل: $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 (3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعاليت

- لاندې لوګاريتمونه پيداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad \log_5 \sqrt{8} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل وليکئ او د امکان په صورت کې يې وروستی قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

$d)\ \log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستي ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7 \frac{63}{49} = ?$

$b)\ \log \frac{125}{80} = ?$

$c)\ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوګاريتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$

$b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، څرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: په عین قاعده مساوي دی په د دوو عددو نو د تقسیم د حاصل لوګاریتم:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د $\log_b m = y$ ثبوت لپاره معادل شکل یې لیکو یعنې $m = b^y$ اوس له اطرافو څخه د a په قاعده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتني اړیکه کې ایږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنی اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ ویشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3 \cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: د يوه عدد معکوس لوګاريتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاريتم څخه چې هغه د کو لوګاريتم (co-logarithem) په نامه ياد يږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$

اووم قانون: د يوه عدد معکوس لوګاريتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نيسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1$

د 1 عدد په ځاي ليکلی شو چې $\log_M M = 1$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M \Rightarrow a^x = M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاريتم نيسو يعني $\log_a M = x$

په پورتنی اړيکه کې د x په ځای قيمت ايږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعاليت

لاندې لوګاريتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\qquad \log_4\sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: ديوه عدد لوګاريتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نيسو او هغه داړوند طاقت په شکل ليکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطي د دواړو خواوو څخه لوګاريتم نيسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

اوس د m په ځای قیمت ایږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتني قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

1) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ 2) $\log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x$ 3) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل: $\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو(اعشاري او طبیعي) په پام کې نیولو سره یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې a, b او x مثبت عددونه او a او b د 1 خلاف دي:

که چیرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهیږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $b = e$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

خرنگه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیداکړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تیرې اړیکې په کارولو سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$ $\quad b)\ \log_9 27 = ?$

$c)\ \log_8 4 = ?$ $\quad d)\ \log_{121} 14641 = ?$

$e)\ \ln 672000$ $\quad f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 672000$ $\quad h)\ \ln 0.235$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرکټرسټیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

پوهېږو چې:

$\log_{10} 1000 = 3 \ , \ \log_{10} 100 = 2 \ , \ \log_{10} 1 = 0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمیر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

$$\left.\begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array}\right\} = ?$$

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x = S \cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد وي.

که چیرې د x لوګاریتم غوښتل شوي وي، په لاندې ډول یې پیداکولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n \log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \le S < 10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرسټیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1 \le S < 10$ دي نو.

$$\log 1 \le \log S < \log 10$$

$$0 \le \log S < 1$$

له پورتني اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد لوګاریتم د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^{0}$	$1000 = 10^{3}$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^{1}$	$20 = 10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چیرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چیرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چیرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومیږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څیر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل :

$a)\ 2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)\ 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)\ 0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چیرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمیر، منفي یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرستیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمیرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرستیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرستیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دښي خوا د صفرونو له شمیر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرستیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرستیک یې -3 دی.

له تیرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرستیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرستیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)\ \log 0.9560$	$b)\ \log 956.0$
$d)\ \log 2345$	$e)\ \log 3.875$
$c)\ \log 9560$	$f)\ \log 0.0009560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم جدول

ځرنګه چې په تیرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو (کرکټرستیک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهیږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخو څخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی، ټاکل کېږي، دغه جدول تر 7،ځینې تر 5 او ځینې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري تامو عددونو د ارقامو د شمیر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښي خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$
$$\log 765 = \log(7.65\cdot 10^2)$$
$$= \log 7.65 + \log 10^2$$
$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس ← $\log 7.65$ ، کرکټرستیک ← 2

د 2 عدد د کرکټرستیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیدا کولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړی؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوګاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دریم مثال: د 0.0247 لوګاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوگاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \overline{2}.3927$$

يادونه: څرنگه چې مانتيس هميشه مثبت دی، که کرکټرستيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو؛ مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \overline{2}3927$$

فعاليت

- د لوگاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوگاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د $15, 105, 900, \frac{3}{4}, 0.007$ عددونو لوگاريتمونه پيدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوگاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\begin{aligned}\log(105) &= \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7 \\ &= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570 \\ &= 2.02079\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(900) &= \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2 \\ &= 0.95424 + 2 \\ &= 2.95424\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(\frac{3}{4}) &= \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206 \\ &= -0.12486\end{aligned}$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)\ \log 222$	$b)\ \log 0.921$
$c)\ \log 928$	$d)\ \log 527$
$e)\ \log 0.024$	$f)\ \log 2400$
$h)\ \log 0.00024$	$j)\ \log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)\quad \log(2.73)^3 \qquad b)\quad \log\sqrt[5]{0.0762}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوي وي څرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعریف: که چیرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چیرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چیرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټرسټیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرسټیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیداکوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړونده سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتنی پوښتنه کې 2 د کرکټرسټیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمیرېي 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: که چيرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پيدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه د تير په شان ليکو، څرنګه چې 953 مانتيس ښيي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرستيک صفر دی، نو مطلوب عدد يعنې N يو صحيح رقم لري چې عبارت دی له:

$N = 9.53$

$\log 9.53 = 0.9791$

$anti\log 0.9791 = 9.53$

دريم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پيدا کړئ.

په مثال کې ليدل کيږي چې کرکټرستيک او مانتيس دواړه منفي دي او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې مانتيس مثبت شي، د 1 عدد له مانتيس سره جمع او له کرکټرستيک څخه يې کموو، په مساواتو کې تغيرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتيس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پيدا کړو، چې عبارت دی له 886 .

کرکټرستيک ښيي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاريتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2$ $\quad b)\ 0.2$ $\quad c)\ 0.02$ $\quad d)\ 0.0002$

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پايله په لاس راځي چې ديوه عدد د لوګاريتم مانتيس يوازې د رقمونو په ترتيب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه يو شان مانتيس 0.3010 لري، ښي او يا چپ لورې ته د صفرونو زياتول په مانتيس باندې کومه اغيزه نه لري.

پوښتنې

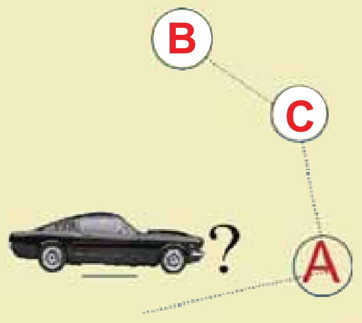
دلاندې هر يوه انتی لوګاريتم قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $\quad b)\ anti\log -5.0521$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



يوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقيقو کې د A ښارته او يونيم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسيږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسيږي.

فعاليت

- که چيرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکړل شوي وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکل ډول ووایاست چې که (a, b) يوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاريتم چيرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قيمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پايله: که چيرې ديوه نامعلوم قيمت د پيداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پيداکړو، په دې صورت کې نوموړې طريقه د خطي انټرپولېشن په نامه ياديږي. که يو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاريتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاريتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پيداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قيمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاريتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونويه منځ کې پراته دي چې لوګاريتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول يې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چيرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونيسو ، نو په دې صورت کې ليکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

د لوګاریتمونو توپیر	لوګاریتمونه	عددونه	د عددونو توپیر
	0.7193	5.240	
0.0008 ، d	x	5.235	0.005 ، 0.010
	0.7185	5.230	

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$
$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957&=\log(7.957\cdot 10^{-4})\\&=\log 7.957+\log 10^{-4}\\&=\log 7.957-4\log 10\\&=\log 7.957-4\end{aligned}$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې -4 دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$
$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.960>7.957>7.950$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه يې لوګاریتم په لاس راوړو.

	عددونه	لوګاریتمونه	
د عددونو توپیر 0.01	7.96	0.9009	د لوګاریتمونو توپیر 0.0005
0.007	7.957	x	d
	7.950	0.9004	

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چیرې $x = anti\log 4.5544$ وضع شي، نو باید x پیدا کړو، له پورتني اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي لوګاریتم يې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه په تیرو مثالونو کې په لاس راوړو او تناسب يې د تیرېه شان تشکیلوو.

	عددونه	مانتیسونه	
د عددونو توپیر 0.01	3.59	0.5551	د مانتیسونو توپیر 0.0012
d	t	0.5544	0.0005
	3.58	0.5539	

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیداکولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتني

په لاندي اړیکو کې د x او z قیمتونه پیداکړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582$ $\qquad$ $b)\quad x = \log 6.289$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو حل

Exponential and logarithmic equations

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

آیا تر اوسه مود $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، داکسپوننشیل معادلو په نامه یادیږي، د مجهول د پیداکولو لپاره که چیرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32\Rightarrow 2^{x-1}=2^5\Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازموئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$

$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$

$$9x-3=4\Rightarrow 9x=4+3$$

$$9x=7\Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- د $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوگاریتمي معادلې:

هغه لوگاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوگاریتمي معادلو په نامه یادیږي. له یوې لوگاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیدا کولو لپاره لومړی معادله د لوگاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په کار اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوگاریتمي معادلو بېلگې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوگاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1) = 3$$

پورته لوگاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1+8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \qquad x = \pm 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: په $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2) = 2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2 = 9^2 \Rightarrow x = 81-2$$
$$x = 79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 4 = 0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3\cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2) = x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$
$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$
$$(3^x)^2 - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$

که $3^x = t$ وضع کړو،نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$
$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

پنځم مثال: په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتنې

په لاندې لوګاريتمي او اکسپوننشيل معادلو کې د x قيمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آيا کولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{matrix}\frac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{matrix}\right\}=?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو دووو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

لومړی مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

ليدل کېږي چې د 0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او 0.4472 مانتيسونو عددونه په جدول کې شته.

له جدول څخه ليدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

د عددونو توپير	عددونه	مانتيسونه		د مانتيسونو توپير
0.01	2.79	0.4456		0.0016
d	t	0.4466	0.0006	
	2.80	0.4472		

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$

$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$

په داسې حال کې چې $anti \log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهیږئ؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیداکوو، وروسته یې انټي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انټي لوګاریتم د نومړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $62 \cdot 74.2$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې: $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$\log 8750 = 3.9420$

$\log 3.49 = 0.5428$

$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$

$anti \log 3.3992 = 2507$

$\frac{8750}{3.49} = 2507$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم له لوګاریتم څخه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوګاریتم په لاس راوړو چی داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اویاکسرونه وي، د لوګاریتم له پنځم قانون څخه کار اخلو یعني $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوګاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\ \frac{8}{737} = ?$ $\qquad$ $b)\ \frac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومیږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم ډولونه:

معمولې لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده يې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کیږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کیږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده يې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادیږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کیږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چیرې $\log x = n + \log S$ وي داسي چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادیږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کیږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادیږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتـي لوګـاریتم (antilogarithm): کـه $\log_a y = x$ وي، نـو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې

$$y = anti \log x$$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادیږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمی معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادیږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځیرکۍ پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا اوله هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

a) 4　　b) −4　　c) 3　　d) −3

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

a) $\frac{1}{4}$　　b) 81　　c) $\sqrt{81}$　　d) −4

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قیمت په لاس راوړئ.

a) 0　　b) 4　　c) 8　　d) 9

4. د x قیمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

a) 2　　b) 3　　c) 4　　d) 5

5. $\log_2 16 = ?$

a) 4　　b) 3　　c) 5　　d) −4

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

a) 3　　b) −3　　c) 4　　d) 5

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قیمت عبارت دی له :

a) $\frac{1}{2}$　　b) $-\frac{1}{2}$　　c) 1　　d) −1

8. د x قیمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

a) $x=-3$　　b) $x=9$　　c) $x=-9$　　d) $x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه یاکرکټرستیک عبارت دی له:

a) 0　　b) 1　　c) 2　　d) 3

10. د یوه عدد دلوګاریتم معکوس عبارت دی له:

a) $\log_a m = \frac{1}{\log_a m}$　　b) $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$　　c) $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$　　d) هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $\quad b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\ \log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $\quad d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)\ 15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $\quad f)\ \log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$

$g)\ \log(4x-3) = 2 - \log 20$ $\quad h)\ \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\ \log_8 3\sqrt{4} = ?$ $\quad b)\ \log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\ \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\ \log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $\quad e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $\quad b)\ \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\ \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $\quad e)\ \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $\quad b)\ 0.8954$ $\quad c)\ 4.5682$ $\quad d)\ \overline{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)\ 89500$ $\quad b)\ 91$ $\quad c)\ 3065.3$ $\quad d)\ \log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\ 2.01\cdot 52.9$ $\quad b)\ (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888 \div 256$ $\quad b)\ 17.3 \div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ (7.42)^3$ $\quad b)\ (-84.7)^2$ $\quad c)\ \sqrt{418}$ $\quad d)\ \sqrt{0.21}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوگاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

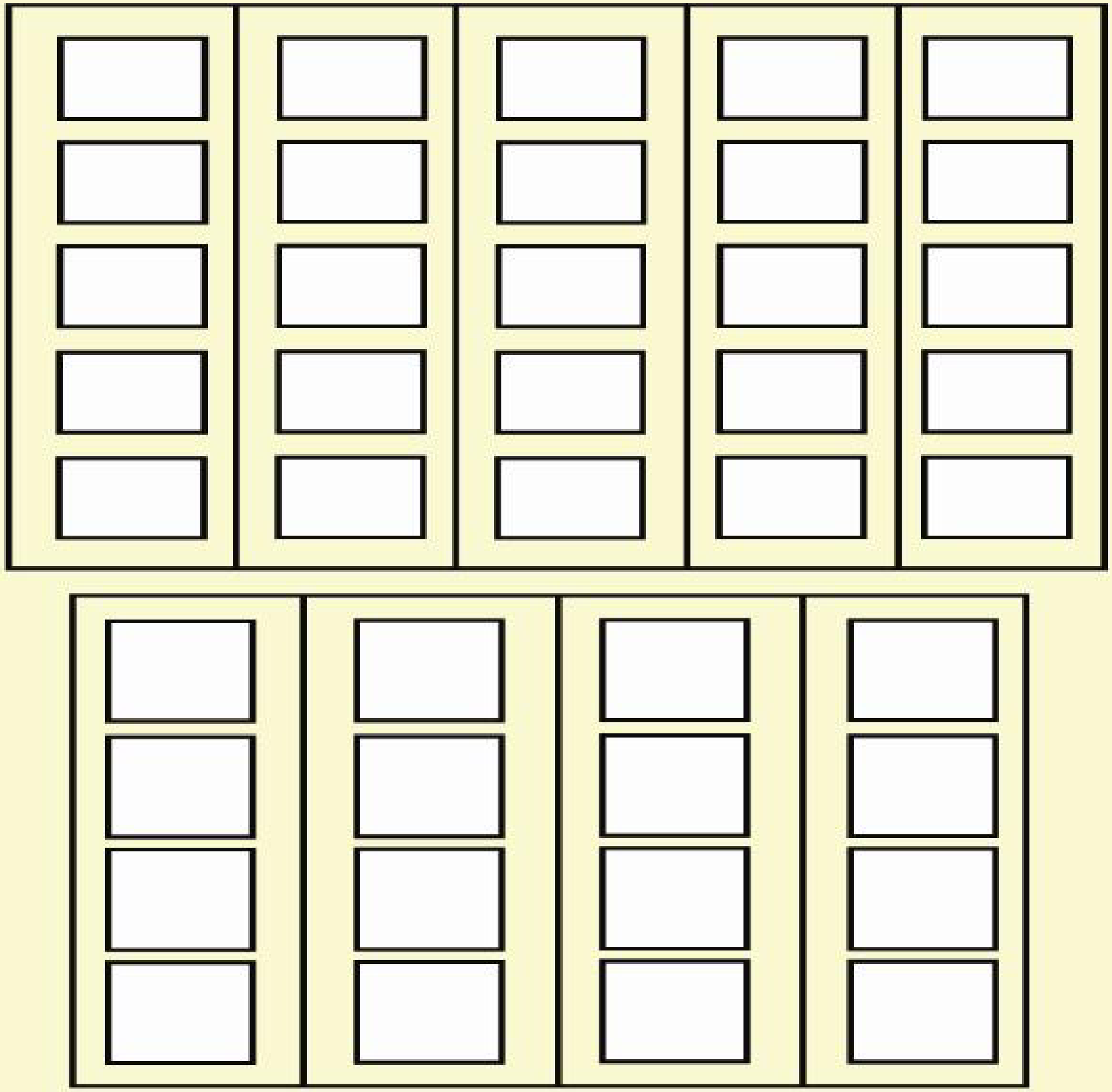
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

متریکسونه

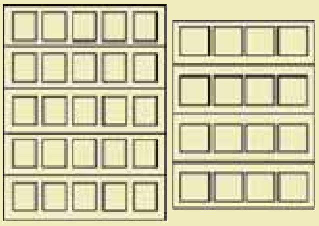
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

متریکسونه

Matrixes



د څو پوړيزې ودانۍ تصوير په پام کې نيسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وينو چې د لويې ودانۍ د کړکيو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعاليت

- د قايمو مختصاتو په سيستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر يعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړيکې وليکئ.
- پورتنۍ اړيکې د ضريبو-نو په څېر وليکئ.
- د پورتني فعاليت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سرته ورسوئ.

د پورتني فعاليت له اجراء څخه وروسته لاندې پايله ليکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنی چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او يا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر يو د $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ يوه نوې وسيله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر یو د p', p او s', s دېټکوبدل شوي وسیله ده.

لاندې هرې یوې وسیلې ته (چې دټکود بدلولو د بدلیدو دنده په غاړه لري) مټریکس وایي.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعریف: د شیانو، عددونو یا تورو ګېډئ چې په سطري او ستوني ډول، په یوه مستطیلي جدول کې ترتیب شي، د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مستطیلي جدول هر عنصر د مټریکس د عنصر په نامه یادېږي. لوی حروفونه د $A, B, C\ldots$ مټریکس ښيي او واړه حروفونه $a, b, c\ldots$ د مټریکس عناصر دي.

د عددونو هر یولاندی جدول یو مټریکس په ګوته کوي.

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

لومړی سطر
دویم سطر
دریم سطر

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

لومړی سطر
دویم سطر
دریم سطر

لومړی ستون — دویم ستون — دریم ستون

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix}$$

سطر

که چیرې a د یوه مټریکس په $i-$ ام سطر او $j-$ ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښوول کېږي چې i او j طبیعي عددونه دي، په ترتیب سره د سطر او ستون له شمیر څخه ښکارندویي کوي.

$$i=1,2,3\ldots \ , \ j=1,2,3\ldots$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټريکس مرتبه: که د A د مېټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مېټريکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي m په n کې مېټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مېټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مېټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مېټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مېټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعني $A=(X)_{1\times1}$، نو د A مېټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times1}=7$

مثال: لاندې مېټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$a)\quad (a_{ij})_{2\times2}=(i+j)_{2\times2} \qquad b)\quad (a_{ij})_{3\times2}=(i\cdot j)_{3\times2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مېټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مېټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مېټريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$

په پايله کې غوښتل شوی مېټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د مېټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مېټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot1=3$

$a_{12}=1\cdot2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot2=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې غوښتل شوی میټریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

دوه، هم مرتبه میټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ میټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې میټریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې میټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د میټریکسونو ډولونه

د میټریکسونو مخامخ شکلونه څو سطرونه او څو ستونونه لري؟

آیا صفرونه د میټریکس عناصر کیدای شي؟

$$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \quad (4 \quad 5 \quad 6) \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

1. **سطري میټریکس**(Row Matrix)**:** هغه میټریکس چې یوازې او یوازې یو سطر ولري، سطري میټریکس یې بولي، مثلاً: $A=(4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times4}$

2. **ستوني میټریکس** (Column Matrix)**:** هغه میټریکس دی چې یوازې یو ستون ولري، د ستوني میټریکس په نامه یادیږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}_{3\times1}$

3. **صفري میټریکس**(Null matrix): هغه میټریکس چې ټول عناصرېې صفرونه وي، له صفري میټریکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل یې ښیي.

$$0_{2\times4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{2\times4} \qquad 0_{3\times2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}_{3\times2}$$

4. **مربعي میټریکس**(Square Matrix)**:** که چیرې په یوه میټریکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېر سره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي میټریکس په نامه یادیږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&9\\-1&0&2\end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \qquad m=n \;\Rightarrow\; 3=3$$

هر مربعي میټریکس دوه قطرونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \dots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

اصلي قطر ، فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر ، اصلي قطر

فعالیت

- داسې مترېکسونه ولیکئ چې مرتبې يې 3×1 , 1×4 وي، دا څه ډول مترېکسونه دي؟

5. **قطري مترېکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه مترېکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مترېکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2} \quad ، \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

6. **سکالر مترېکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري مترېکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مترېکس په نامه يې يادوي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مترېکس** (Unite Matrix)**:** که چیرې په یو سکالر یا قطري مترېکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مترېکس ته واحد مترېکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots0 \\ 0 & 1 & 0\dots0 \\ 0 & 0 & 1\dots0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0\dots1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چیرې په یوه مربعي مټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر یې صفرونه وي، په دغه صورت کې مټریکس د مثلثي مټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چیرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي مټریکس (Upper triangular matrix) او که چیرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي مټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتني مثلثي مټریکس او B ښکتنی مثلثي مټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مټریکس:

که چیرې د A متقابل مټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مټریکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چیرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مټریکس وي، نومتقابل(متضاد) مټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow} -A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix} \Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې میټریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ h) $H=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مټریکسونو جمع او تفریق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مټریکسونو کې د هغوی د جمعې او تفریق په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شئ.

$$\left.\begin{matrix} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{matrix}\right\} ?$$

1) **د مټریکسونو جمع:**

که چیرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مټریکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مټریکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر یې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، یعنې د دوو مټریکسونو جمع کول یوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مټریکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقیقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د مټریکسونو تفریق:**

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو مټریکسونو تفاضل یا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفریق حاصل یې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د متریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لری، خو د متریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعني:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د متریکسونو جمع او تفریق اتحادی خاصیت لری. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د متریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د متریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو متریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B متریکسونو مرتبې سره خلاف دی، له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د متریکس مرتبه 3×2 او د B متریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې متریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په متریکس کې د سکالر ضرب

مور د متریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله، که $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو **متریکس** او K یو سکالر وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ.

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **متریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **متریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد متریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجراء وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **متریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وی، نو د KA له **متریکس** C څخه عبارت دی، داسې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot6 \\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot0 \\ 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په متریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چیرې A او B دواړه د یو شان مرتبې متریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښایاست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په متریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیدا کړئ.

د دوو متریکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

آیاد دوو متریکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

تاسو د دوو متریکسونو د جمعې لپاره پیداکړل چې $A+B=B+A$ دی، د متریکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=?$$

تعریف

دوه متریکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونیسئ، د دې لپاره چې دا داوړه متریکسونه یو په بل کې ضرب شي، نو باید د لومړي متریکس د ستونونو شمېر د دویم متریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د متریکسونو د ضرب حاصل بیا هم یو متریکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر یې د لومړي متریکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر یې د دویم متریکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو متریکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي متریکس لومړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې یې لیکو، په دویمه مرحله کې بیا هم د لومړي متریکس دویم سطر د دویم متریکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه(دویم سطر) کې یې لیکو، دغه عمل ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي متریکس په دویم متریکس کې ضرب شي، په دغه ډول د متریکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښیو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پراو

لومړی پراو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot(-1)\\ -1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 2+(-1)(-1) & 2\cdot 3+3\cdot 0+(-1)\cdot 2\\ (-2)(1)+1\cdot 2+2(-1) & -2(3)+1\cdot 0+2\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\ -2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+3\cdot 6 & 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 0+3\cdot 7\\ 5\cdot 3+2\cdot 6 & 5\cdot 2+2\cdot 1 & 5\cdot 0+2\cdot 7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\ 15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\ 27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

څلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot 4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot 4+2(-3)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$
$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 2+4\cdot 1 & (-3)(-1)+4\cdot 2\\ -4\cdot 2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD = DC$ دی.

د مېټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مېټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعني که A او B دوه مېټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

په ځانګړي حالت کې د $m\times m$ مرتبې مېټریکسونه د تبدیلي خاصیت لري.

دویم خاصیت: د مېټریکسونو د ضرب د ضرب اتحادي خاصیت لري. که چیرې B, A او C د $m\times n$ مرتبې مېټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې مټریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مېټریکس ترانسپوز مېټریکس

Transpose of Matrix

که په یو مېټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوي مېټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادیږي.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مېټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولېږدوی، هغه نوی مېټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چیرې د یوه مېټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو(افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو)، هغه نوی مېټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړی مېټریکس سره مساوي دي، نوی مېټریکس په څه نوم یادیږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چیرې د یوه مېټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مېټریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز(Transpose) مېټریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز مېټریکس په A^T ښودل کیږي. د ترانسپوز مېټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز مېټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ترانسپوز مېټریکس یعني A^T له خپل ځان یعني A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مېټریکس ته متناظر مېټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مېټریکس دی، ځکه:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A$$

د متناظر مېټریکس پیژندل: په متناظرو مېټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترانسپوز متریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ترانسپوز متریکس ترانسپوز له خپل لومړي متریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ترانسپوز متریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ترانسپوز متریکسونو سره مساوي دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm ...)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm ...$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چیرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A - B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې متریکسونو ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

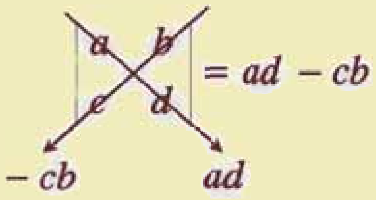
2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز متریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیترمېنانت

Determinant

پــه یــوه عــددي مثـال کـې یـو مربعي متـریکس داسـې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چیرې د A متریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د متریکس له دیترمینانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د متریکس دیترمینانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښوول کېږي.

پــه همـدې ډول کـه چیـرې د $n\times n$ مرتبـې یـو متـریکس چـې n سـطرونه او n سـتونونه ولـري، اړونـد دیترمینانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي متـریکس پـه پـام کـې نیـسو او د تعریـف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

د 2×2 مرتبې متریکسونو د دیترمینانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متریکس دیترمینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس دیترمینانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ متریکس دیترمینانت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3×3 متریکسونو د دیترمینانت محاسبه: د $A_{3\times3}$ متریکس، دیترمینانت په پام کې نیسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ دیترمینانت د محاسبې لپاره لاندې ګامونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دریم سطر له منځه ورو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه او د لومړي ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\Rightarrow(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دویم پړاو: دویم ستون او دریم سطر حذف، د 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه او د دویم ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د دیترمینانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\Rightarrow-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دریم پړاو: دریم ستون او دریم سطر له منځه ورو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه، د دریم سطر او دریم ستون د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\Rightarrow(a_{11}a_{22}-a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A دیترمینانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې ديترمينانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=\left(6\cdot 2-1(-3)\right)\cdot 4=\left(12+3\right)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & 3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعاليت

- د $A=\begin{vmatrix}a & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$ له ديترمينانت څخه د a قيمت په لاس راوړئ.

دويمه طريقه: **د ساروس په طريقه د ديترمينانت محاسبه**: په دغه طريقه کې د ديترمينانت دوه لومړي ستونونه ښي لورې ته په لاندې ډول تکرار ليکو:

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر يوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر يوله بل سره ضربوو او وروسته يې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د متريکس ديترمينانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32})-(a_{13}\,a_{22}\,a_{31}+a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{12}\,a_{21}\,a_{33})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړی او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیترمینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کړنه سرته رسوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

فرعي قطر، فرعي قطر، فرعي قطر

اصلي قطر، اصلي قطر، اصلي قطر

دویم مثال: د لاندې دیترمینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$= \big(3\cdot3\cdot6 + 2\cdot0\cdot5 + (-1)(-4)(-2)\big) - \big((-1)\cdot3\cdot5 + 3\cdot0(-2) + 2(-4)\cdot6\big)$$

$$= (54+0-8) - (-15+0-48) = 46+63 = 109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیترمینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیترمینانت لاندې برخې ته ولیږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیترمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad , \quad d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیترمینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډيترمېنانت خاصيتونه

که چيرې په يوه ډيترمېنانت کې د سطر ځاى لـه ستون سره بدل شي، د ډيترمېنانت په قيمت کې تغير راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعاليت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ډيترمېنانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ډيترمېنانت پـه پـام کې ونيسئ، ترانسپوز يې پـه لاس راوړئ ، وروسته يې $|A^T|$ (ډيترمېنانت) محاسبه کړئ او وښاياست چې $|A^T|=|A|$.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

که چيرې $A_{n\times n}$ يو مټريکس وي، د $|A|$ ډيترمېنانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ډيترمېنانت مساوي له صفر سره دى.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0\ ,\quad |A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چيرې د $A_{n\times n}$ مټريکس دوه سطرونه يا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ډيترمېنانت يې مساوي له صفر سره دى.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون عناصر د بل سطر او يا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دى.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A مټريکس ډيترمېنانت او A^T مټريکس ډيترمېنانت يو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ډيترمېنانت ځينې نور خاصيتونه يا ځانګړنې هم لري، لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په یوه دیترمینانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیترمینانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\1 & 2 & -2\\3 & 1 & 0\end{vmatrix}$ دیترمینانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیترمینانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\1 & 2 & -2\\3 & 1 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow(0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\2 & 1 & -2\\1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیترمینانت کې دویم ستون له لومړی ستون سره بدل شوی، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیترمینانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیترمینانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیترمینانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیترمینانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\8 & 2 & 21\\20 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیترمینانت په لومړی ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیترمینانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\8 & 2 & 21\\20 & 1 & 25\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4 & 3 & 22\\2 & 2 & 21\\5 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دیترمینانت دخواصو په مرسته د لاندې دیرمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 3 & 4\\0 & 5 & 6\end{vmatrix}$ $b)\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\7 & 9 & 11\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$ $c)\ \begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\0 & 4 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2×2 مرتبې متریکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

په همدې ډول د ځينو مربعي متریکسونو لپاره هم دا خاصيت، د متریکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس په پام کې ونيسئ او ديترمينانت يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس د A له متریکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي متریکس په پام کې نيسو، که چيرې د B مربعي متریکس داسې موجود وي، چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B متریکس د A د متریکس معکوس بلل کيږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شو چې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

پـه يـاد ولـرئ: د A مربعي متریکس تـه منفرد متریکس(Singular Matrix) ويـل کيـږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي متریکس ته غير منفرد متریکس(non singular matrix) ويل کيږي، که چيرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو متریکس د معکوس متریکس لرونکی دی چې:

1. متریکس مربعي وي.
2. ديترمينانت يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کيږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الحاقي متریکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي متریکس د پیدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی متریکس چې لاس ته راځي، له الحاقي متریکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو متریکس معکوس متریکس لري چې دیترمینانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې متریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس متریکس یې پیدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A متریکس دیترمینانت د صفر خلاف دی، نو د A متریکس معکوس متریکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متریکس چې دیترمینانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې متریکسونو څخه کوم یو متریکس معکوس لري.

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې متریکسونو معکوس متریکس په لاس راوړئ او وازموئ.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

له معکوس مټريکس څخه په کاراخېستني د خطي معادلو د سيستم حل

آيا تر اوسه مو له معکوس مټريکس څخه په ګټه اخېستني د خطي معادلو د سيستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعاليت

د خطي دوه مجهوله معادلو سيستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نيسئ:

- د ضريبونو مټريکس، د مجهولينو مټريکس، د ضريبونو او مجهولينو مټريکس وليکئ.
- هر مټريکس د معادلې په ډول وليکئ.
- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضريبونو د مټريکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سيستم د چپ لورې د ضريبونو مټريکس، B د ښي لورې د ثابتو عددونو ستوني مټريکس او X د مجهولو عددونو ستوني مټريکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نيولو سره سيستم داسې حليږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مېټريکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مېټريکس ديټرمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټريکس معکوس لري او په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad x=1 \quad , \quad y=2$$

دويم مثال: له معکوس مېټريکس څخه په کار اخيستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1 \Rightarrow A\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $|A|\neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}AdjA=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 2+2\cdot 3\\ -3\cdot 2+5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+6\\ -6+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x=4 \quad , \quad y=9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قیمتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases}2x-3y=4\\ 4x-6y=1\end{cases}$$

د یاد شوی سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\ ,\ \ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=-12+12=0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیترمینانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیترمینانت او له مجهولینو یعنې د z, y, x سره د متناظرو متریکسونو د دیترمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

د خطي دري مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو متریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$ وي.

$$X = \frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د y, x او z اړوند متناظرو متریکسونو دیترمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي متریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړي ستون(د x ضریبونو) په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دی) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې میټریکس دیترمینانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون(د y ضریبونه) په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د میټریکس دیترمینانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون(د z ضریبونو) په ځای ځلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې میټریکس دیترمینانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخېستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل: $A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

اوس زیات شوی میټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: لاندي درې مجهوله سيستم د كرامر په طريقه حل كړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} = -9-4+4-12-6-2 = -21-8=-29\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 2 \end{matrix} = 12-22+20-(66-8+10) = 10-68=-58$$

$$X=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{matrix} = -15-8+22-(20+33+4) = -23+22-57=-58$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

میزان:

د x, y او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \; -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \; 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \; 11=11$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلو د سیستم حل دګوس (*Gouse*) په طریقه

آیا کولای شو له میټریکس څخه په کار اخیستنې سره

د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو میټریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیې(جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د میټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, ...$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو میټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطرد تفریق حاصل په دویم سطر کې}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(-1) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4=x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه دویم سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینوضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې د x ضریب په دریم سطر کې له منځه وړو داسې چې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې اېږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$
$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$
$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\4&5&6&24\\2&7&12&40\end{array}\right)\xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\2&7&12&40\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دویم پړاو}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\0&3&6&22\end{array}\right)\xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دریم پړاو}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\0&0&0&10\end{array}\right)$$

لیدل کیږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دی، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چیرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د ګوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مټريکس تعريف: يوه ګڼېځ عددونه يا توري چې په سطري او ستوني ډول په يوه مستطيلي جدول کې ځای پر ځای شوې وي. د مټريکس(Matrix) په نامه يادېږي.

د مټريکسونو ډولونه:

- **سطري مټريکس**: هغه مټريکس چې يوازې يو سطر ولري.
- **ستوني مټريکس**: هغه مټريکس چې يوازې يو ستون ولري.
- **صفري مټريکس**: هغه مټريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي.
- **مربعي مټريکس**: هغه مټريکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې سره برابر وي.
- **مساوي مټريکسونه**: دوه مټريکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر يې يو په يو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مټريکس هغه مټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مټريکس بلل کېږي.
- **سکالر مټريکس**: هر قطري مټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره برابر وي، سکالري مټريکس بلل کېږي.
- **واحد مټريکس**: په هر سکالري مټريکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټريکس بلل کېږي.

په مټريکسونو باندې لومړني عمليات:

- **د مټريکسونو جمع او تفريق**: د مټريکسونو جمع او تفريق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مټريکسونو د جمعې او تفريق خواص:

1) $A+B=B+A$

2) $A-B \neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$

4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټريکس کې د سکالر ضربول: که $K \in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مټريکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مټريکسونو ضرب: د دوو مټريکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټريکس د ستونونو شمېر، د دويم مټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B = (a_{ij})_{m\times n} \cdot = (b_{ij})_{n\times p} = (C_{ij})_{m\times p} = C_{m\times p}$$

يعنې د دوو مټريکسونو د ضرب حاصل هغه دريم مټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مټريکس سره برابر وي.

د مټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مټريکس ترانسپوز مټريکس: که د يوه $A_{m\times n}$ مټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مټريکس چې لاسته راځي ،د ترانسپوز مټريکس په نامه يادېږي. د A ترانسپوز مټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مټريکس: که په يوه مټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مټريکس د مثلثي مټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مټريکس: که د A يو مټريکس له خپل ترانسپوز A^T مټريکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مټريکس ته متناظر مټريکس وايي.

ديترمېنانت: که د A مټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټريکس له ديترمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديترمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی، يعنې: $\det A = |A| = 0$
2. که د ديترمېنانت دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر(مساوي) وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مټريکس او د A ترانسپوز مټريکس ديترمېنانتونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مټريکس په پام کې نيسو ،که چيرې د B مربعي مټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مټريکس د A د مټريکس معکوس دی او د A د مټريکس معکوس مټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مټريکس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- دګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کرۍ تاو کړئ.

1. که $|A| = 3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $b)\ 9$ $c)\ \frac{1}{9}$ $d)\ 3$

2. که $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی مټریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m = 1, \frac{1}{2}$ $b)\ m \neq 1$ $c)\ m = 0$ $d)\ m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه مټریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax = A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ مټریکس لاندې د $y = 2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور b) د x محور c) $y + 2x = 0$ d) $y = 0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

6. $a)\ x = 1,2$ $b)\ x = 3,1$ $c)\ x = \frac{1}{2},3$ $d)\ x = 3,2$

7. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $b)\ 39$ $c)\ 19$ $d)\ 9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5&1\\2&3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B$ $\qquad$ $b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&0&3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\2&-1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او ووایاست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسي:

$C=\begin{pmatrix}-2&4\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\-2&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&4\\0&1\end{pmatrix}$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د مټریکسونو ضرب د درو مټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیترمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix}$

5. د لاندې مټریکس معکوس مټریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$M=\begin{pmatrix}2&-5\\3&-9\end{pmatrix}$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$a)\begin{cases}2x+y+z=6\\x-2y+2z=10\\3x-y-z=4\end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases}x_1-2x_2=4\\2x_1+4x_2=5\end{cases}$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$a)\begin{cases}2x-3y+3z=0\\3x+2y-5z=0\\5x-4y-2z=0\end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases}2x+3y-7=1\\2y+27=-2\end{cases}$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس مټریکس په طریقه حل کړئ.

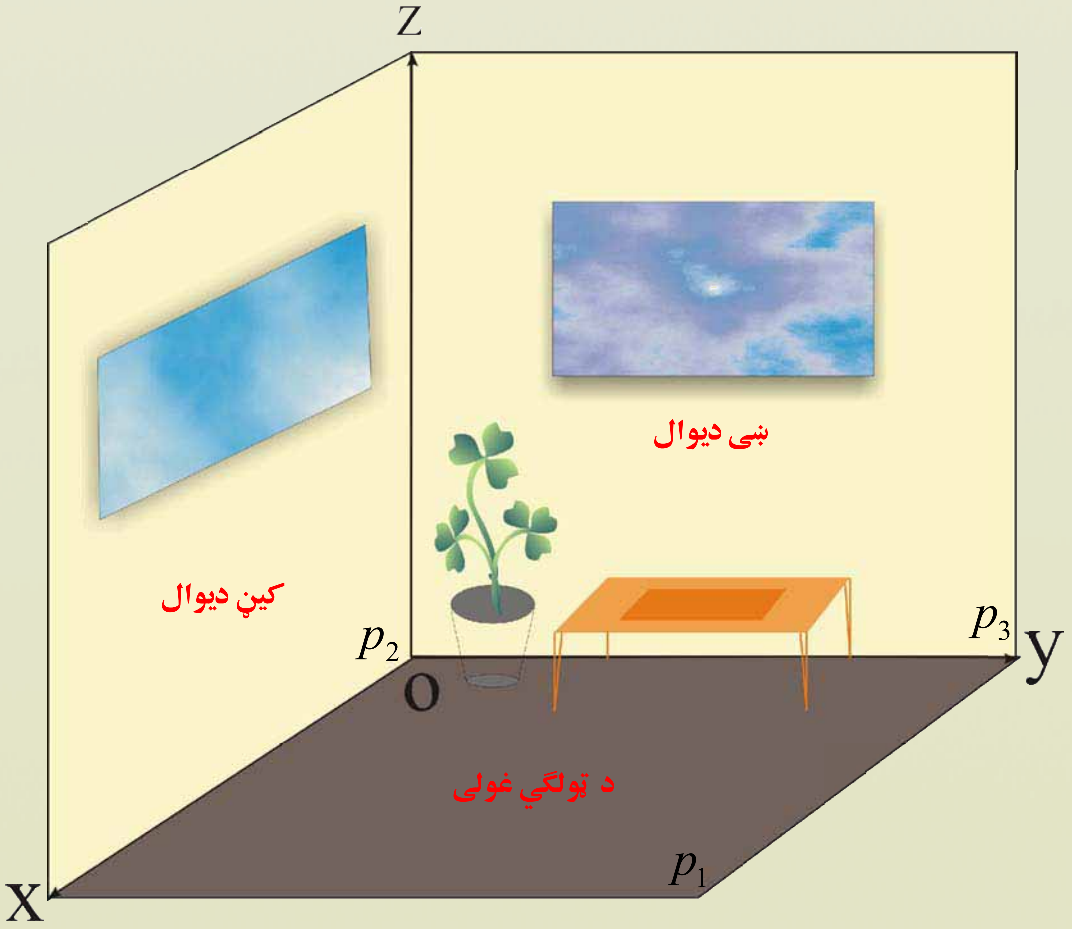
$a)\begin{cases}3x+y+1=0\\4x+3y-2=0\end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases}x-y=2\\x+2y=-1\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

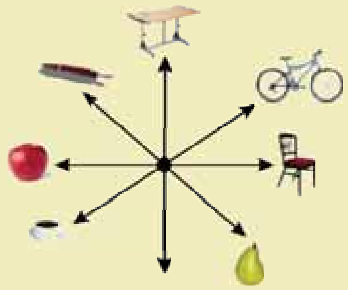
وکتورونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.



تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادیږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د $B\ (5,5)$ مختصات ولري.
- د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتوکې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې توپیر سره ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضاکې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، نولرو چې:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

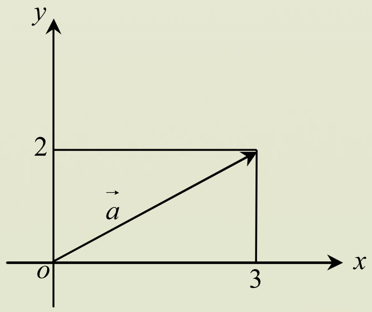
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کیږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بیلګې په توګه:

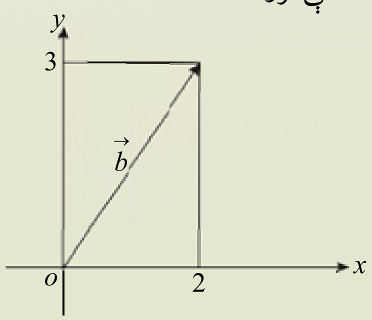
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې: $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښوول کیږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښوولو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کیږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتني

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

a. د هر یوه وکتور دري ممثل وکتورونه رسم کړئ.

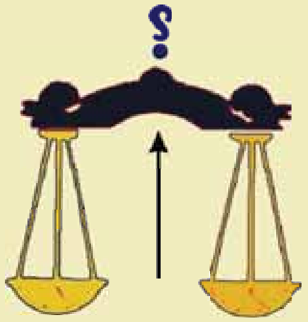
b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

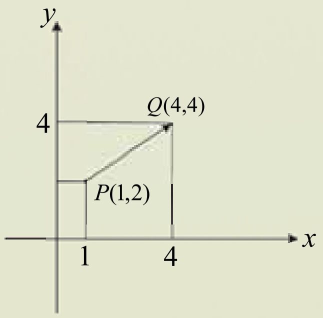
د تلې دوه یو شان او هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې ترل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟



فعالیت

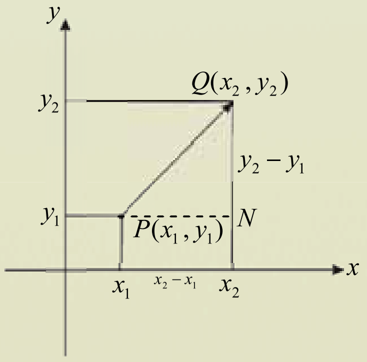
د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څیر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟
- آیا د $\vec{PQ}$ د وکتور د اوږدوالی یا د P او Q دوو ټکو ترمنځ د واټن لپاره فارمول ورکولای شئ؟
- د $\vec{PQ}$ د منځنی ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟
- آیا کولای شئ د دوو ټکو د واټن او د هغوی د منځنی ټکي لپاره د فورمول په واسطه یو عمومي حالت څرګند کړئ؟



د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

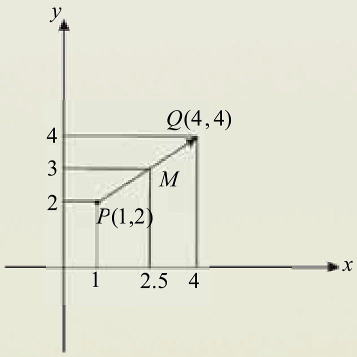


- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_x^{\,2}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتني

د لاندې درکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځني ټکي پیدا کړئ.

$i)\ B(2,7)\quad,\quad A(3,4)$

$ii)\ N(5,1)\quad,\quad M(1,5)$

$iii)\ Q(8,8)\quad,\quad P(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه په سطح او فضا کې

د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري ليدل په فضا کې ځانګړي وکتورونه ښيي.

د يوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره يوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعاليت

د لاندې شکل له مخې د وضعيه کمياتو د قايم سيستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نيولو سره لاندې فعاليت سرته ورسوئ.

- د وضعيه کمياتو په سيستم کې د P يو ټکی چې وضعيه کميتونه يې (x,y) دي، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ يو شعاع وکتور چې وضعيه کميتونه يې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعيه کميتونو په سيستم کې وښيئ.
- په مستوي کې د P يو ټکی چې وضعيه کميتونه يې (x,y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ يو وکتور سره څه توپير لري چې وضعيه کميتونه يې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختياري وکتورونه او $a\in IR$ يو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعيه کميتونو په قايم سيستم کې په جلا جلا ډول وښيئ، چې:

i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

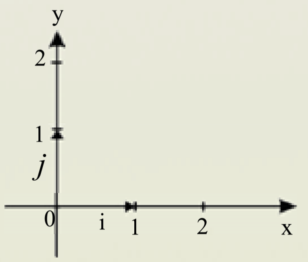
تعريف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبيق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او يا په مستوي کې د وکتور په نامه يادېږي.

له پورتني فعاليت او تعريف څخه لاندې پايله لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

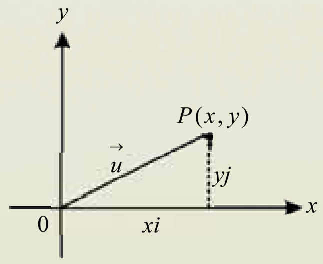
(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دي چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$

$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$

$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$

$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$

$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$ ، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضاکې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضاکې يو ټکی وټاکئ آيا داسې يوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولی او مجاور ديوال ته وټاکو؟

تعريف

درې بعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو دري ګونو (x,y,z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفيږي:

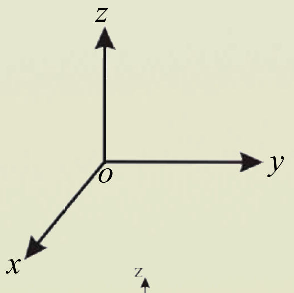
$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x,y,z)/x,y,z \in IR\}$$

هغه درې مستويګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه يو په بل عمود دي، د درې بعدي فضا د مختصاتو مستويګانې بلل کيږي.

د دغو مستويګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قايمې زاويې جوړوي چې هغه د درې بعدي فضا قايم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قايم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودريږي، هغه محور چې د ليدونکي د ټټې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د ليدونکي د ليد په لور دی د y محور او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی. چې د قايمو مختصاتو مبداء ښيي.

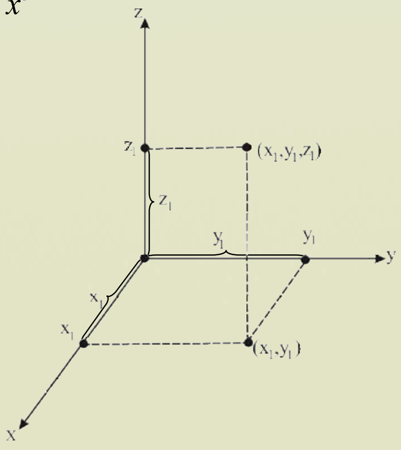
په درې بعدي فضاکې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دی چې له درې واړو مستويګانو څخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستويګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.



په درې بعدي فضاکې د يوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قايمو مختصاتوکې د $A(x_1,y_1,z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نيولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی يې چې (x,y) دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي څخه يو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پايله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضاکې بشپړيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په درې بعدي فضاکې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دي.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قايم سیستم کې وښایاست.

په فضاکې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي په فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ پیداکړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

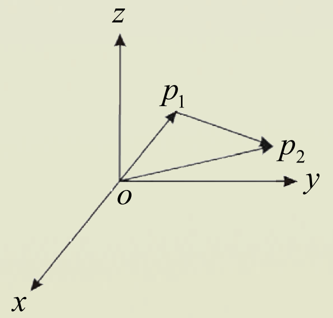
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

A- کیدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوی، د z,y,x محورونو په امتداد د واحد د وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن**: که چېرې $\overrightarrow{OP_1}$ او $\overrightarrow{OP_2}$ د $P_1(x_1,y_1,z_1)$ او $P_2(x_2,y_2,z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدې فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2,y_2,z_2)=(x,y,z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیداکولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتنې خرنګه چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

وموميځ $ii)\ |\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}|=?$ $\qquad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\ \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$
$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=(10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k})$$
$$ii)\ \left|(2-4-6)\vec{i}+(3-6-9)\vec{j}+(1-2+3)\vec{k}\right|=\left|-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}\right|$$
$$=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}$$
$$=\sqrt{212}$$

پوښتنې

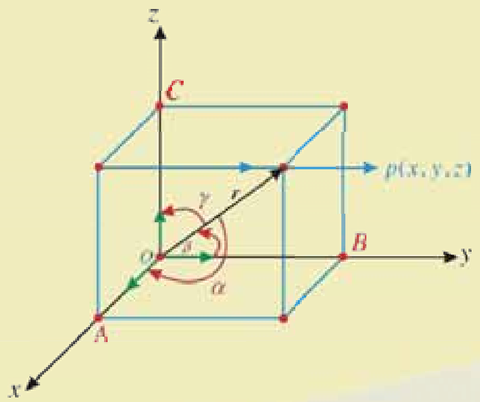
1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.
4. هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په پام لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$$

پوهیږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چیرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، داسې چې د پورته شکل په شان β, α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ وکتور زاویې او $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آيا ويلاي شئ چې د α , β او γ زاويې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آيا له پورتنيو زاويو څخه يوه يې منفي کيداى شي؟
- که چيرې له زاويو څخه يوه يې صفر شي، د وکتور د موقعيت په هکله څه ويلاى شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور جهت زاويو کوساين لپاره يوه ګډه اړيکه پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسيږو:

پايله: که په فضا کې د $\vec{v}$ يو وکتور، چې صفر نه وي، يعني $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ، راکړل شوى وي، نو د جهت د زاويو د کوساينونو ترمنځ لاندې اړيکې شته:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

د پورتنى پايلې د ثبوت لپاره پوهيږو، چې:

$$\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور يا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسير عبارت دى، له:

$$\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=\begin{pmatrix}\frac{\vec{v}_x}{\left|\vec{v}\right|}\\ \frac{\vec{v}_y}{\left|\vec{v}\right|}\\ \frac{\vec{v}_z}{\left|\vec{v}\right|}\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پيدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\quad b)\ \vec{v}-3\vec{w}=?$ $\quad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پيدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالى مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینری او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چیرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضاکې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\le\theta\le\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضاکې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصيت يا خانگړتيا).

iii) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (د ضرب توزيعي خاصيت په جمع).

iv) $(c\cdot\vec{u})\,\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ در ضرب توزيعي خاصيت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د تعريف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

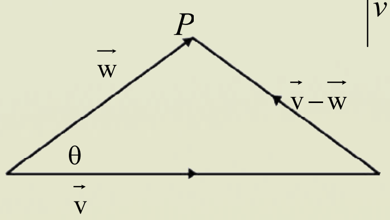
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$

$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دويم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د يو ې مستوي دوه وکتورونه وي، وښاياست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعريف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنگه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پايله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنۍ اړيکې څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2|+|x_2^2+y_2^2|-2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cos\theta /\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=\left|\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که چېرې د $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نیولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښایاست چې د $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$

$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنګه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قیمت داسې پیدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پایلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\,(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښایاست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د یو قایم الزاویه مثلث ضلعې دی.

حل: که $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونیسو، نو دریمه ضلع یې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نیولو سره چې د مثلث دریمه ضلع تاکي عبارت دی له:

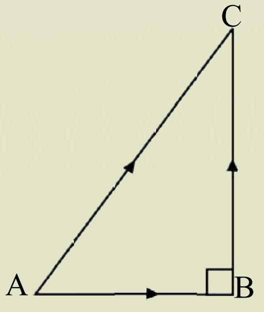
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دریمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښیو چې نوموړی مثلث قایم الزاویه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\,(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ د وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له c,b,a سره مساوي دي.

2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

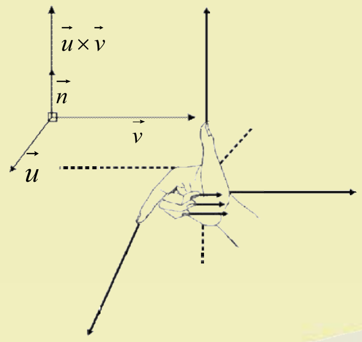
$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ $\qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ګنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښي لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلال) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب:** د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: کـه $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونـه راکـړل شـوی وي، وښایاسـت چـې د $\vec{a} = (6\ ,\ -5)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: ځرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78-140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتـور پـه لاس راځـي، نو وموليدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0\ ,\ x_2)$

نو: $= x_1(1\ ,0) + x_2(0\ ,1)$

که $e_1 = (1\ ,0)$ او $e_2 = (0,1)$ وي.

نو: $(x_1, x_2) = e_1x_1 + e_2x_2$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1,0) + y(0\ ,1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1\ ,0\ ,0) + (0, x_2\ ,0) + (0\ ,0\ ,\ x_3)$$
$$= x_1(1,0\ ,0) + x_2\,(0\ ,1\ ,0) + x_3(0,0\ ,1)$$

څرنگه چې $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$
$$(x, y\ , z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1\ , 0, \dots,\ 0) + (0\ , x_2, \ \dots,\ 0) + \dots + (0, 0\ ,\dots, x_n)$$
$$= x_1(1\ ,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0\ ,\ 0,\dots,\ 1)$$
$$= x_1\,e_1 + x_2\,e_2 + \dots + x_n\,e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \dots, e_n$ طبعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چیرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنگه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ وي.

فعالیت

که $S = \{(1\ ,0\ \ ,0)\ ,(0\ ,1\ ,0)\ ,(0\ ,0\ ,1)\}$ وي وښایاست چې S خطي خپلواکي لري.

غیر خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط(خطي غیر خپلواک) یا خطي انحصار لري، که چیرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو،په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چیرې له ټولو سکالرو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثـــــال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونـــــه پـــــه لانـــــدې ډول راکـــــړل شـــــوي دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاست چې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$\alpha_2 = -\alpha_3$

$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$

$0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$

$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ دي، نو نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت

د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښيي.

- وښیاياست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښیاياست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{i},\vec{j}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړنی او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه د ورکړل شوي دایرې په څېر لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو (چې صفر نه وي). د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

i) $\vec{u}\times\vec{u}=0$

ii) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

iii) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

iv) $\vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\ (\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چیرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښیاياست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

حل: د تعریف په کارولو لرو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$
$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$
$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال په کارولو سره پوهېږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$
$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$
$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(دري ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ دضرب حاصل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنیو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایله یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ د وکتور سره هم جهت دی.

په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

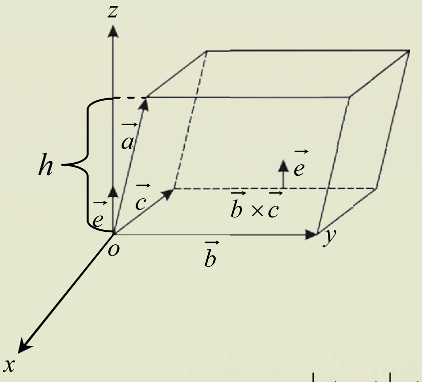
د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

i) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iii) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

iv) د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اریکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دي، څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي‌السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:



$$\text{د متوازي‌السطوح حجم} = v = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|h$$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چیرې $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب او غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، ایا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

حل: د مخې لاس د قاعدې په کارولو پوهېږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

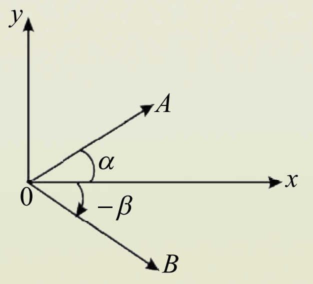
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د $\vec{a}\times\vec{b} = 7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k} = -(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}) = -\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهیږو: $\hat{AOB} = \alpha+\beta$

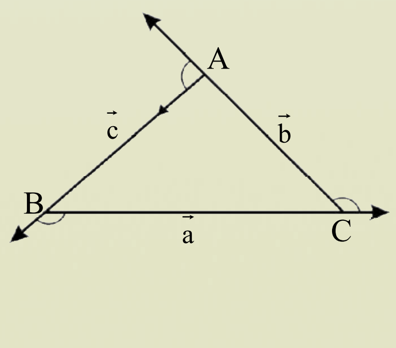
له بلې خوا پوهیږو چې $\vec{OA} = \cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB} = \cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = (\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = -\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{OA}|\times|\vec{OB}| = |-\vec{k}|\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b}+\vec{c} = -\vec{a} \qquad .... (i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad |\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|$$

دپورتينو مساواتو د تعريف له مخې داسې ليکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin A=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\ \sin A=|\vec{c}|\,|\vec{a}|\sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A=a\sin B\ /\div AB$$

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a} \quad .... \ (ii) \qquad \text{يا} \qquad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \quad .... \ (ii)$$

د پورته په شان که چيرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

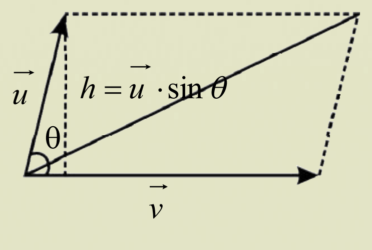
$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A=|\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$

$$c\sin A=a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \quad .....\ iii \qquad \text{يا} \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې (مقايسې) څخه د ساين قضيه لاسته راځي: $\dfrac{a}{SinA}=\dfrac{b}{SinB}=\dfrac{c}{SinC}$

4- **د يوې متوازي الاضلاع مساحت**: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاويه θ د لاندې شکل په څير په پام کې نيسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پيداکولو لپاره کولای شو، وليکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

څرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $|\vec{u}|\sin\theta = h =$ ارتفاع ده

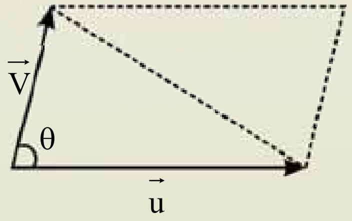
$$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}| = \text{د متوازي الاضلاع مساحت}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني د يوي متوازي الاضلاع مساحت، د يوي متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چي د متوازي الاضلاع ضلعي هم دي.

پایله: څرنګه چي د یوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نیمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندي شکل په پام کي نیولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\,(\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$



پوښتني

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$ ، $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښایاست چي نوموړی وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

2. وښایاست چي $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟

3. ثبوت کړئ چي $\vec{a}_1 = 2i$ ، $\vec{a}_2 = 5j$ او $\vec{a}_3 = 9k$ وکتورونه خطي خپلواکي لري.

4. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چي راسونه يې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چي پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.

5. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پیدا کړئ چي: د $P(0,0,0), Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.

6. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندي وکتورونو د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په څیر ښودل کیږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$ ښیو او د $\overset{\Delta}{PQN}$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=|\vec{a}|=$ د $\vec{a}$ اوږدوالي د P او Q منځني ټکی $\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}=M$ د $\vec{PQ}$ د منځني ټکې وضعیه کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د یوې مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري ضرب: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

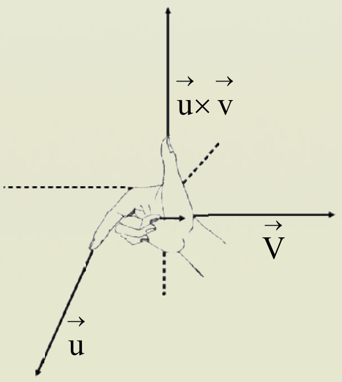
په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښی لاس قاعدې په واسطه تړاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت گوته په قایم ډول کړه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت گوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د ځنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه گوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښيي.

په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

کــه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوي وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعني $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

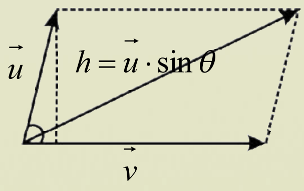


$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکیلیږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځیرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څیر ولیکئ.

3): که چیرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چیرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$(iv$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}$ $ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$

$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}$ $iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کيږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

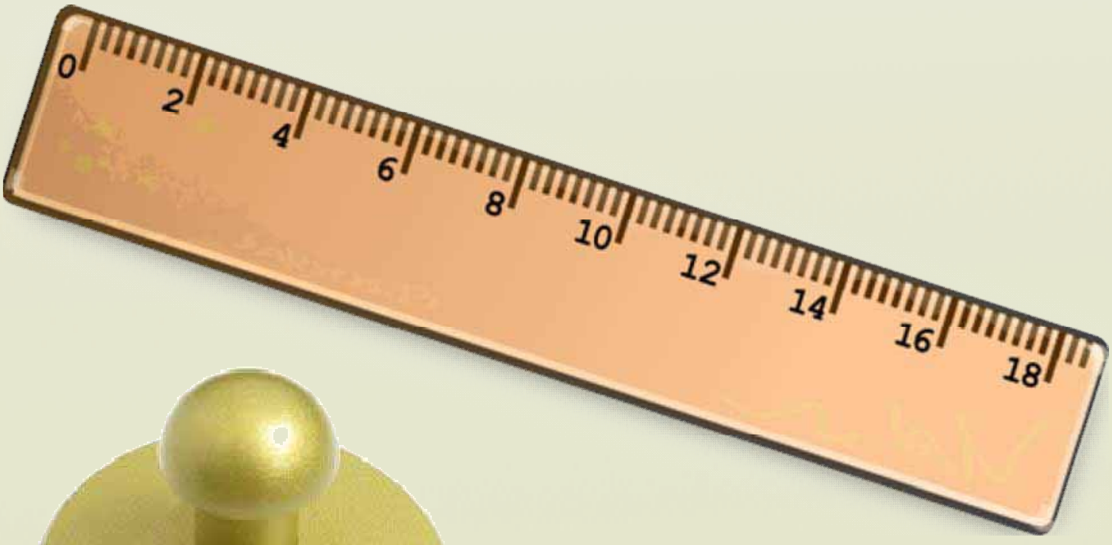
$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k\,, \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چیرې د یوې ټولنې پراګنده ګي په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه پراګندګي په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{150kg}{170cm} = ?$$ = وزن / ونه

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د پراګندګي د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چیرې معیاري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو د په لاس راغلي مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي پراګنده ګي داسې کارونې لري، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$ یا دبدلونونو یا تغییراتو ضریب = معیاري انحراف / اوسط

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوي وي.
- که چیرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري تلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه تصویر لامپ تصویر له پاسینو ډولونو څخه د نسبي پراګنده ګي(یا دبدلون ضریب) قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A>C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېره پراګند ه ګي لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

پوښتنې

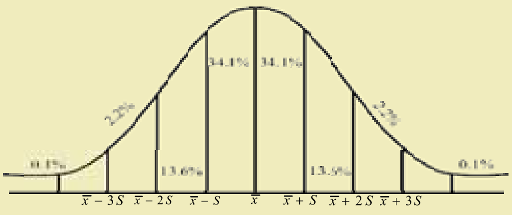
1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دي؟
3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نورمال منحني کې پراګنده‌ګي(تيتوالی)

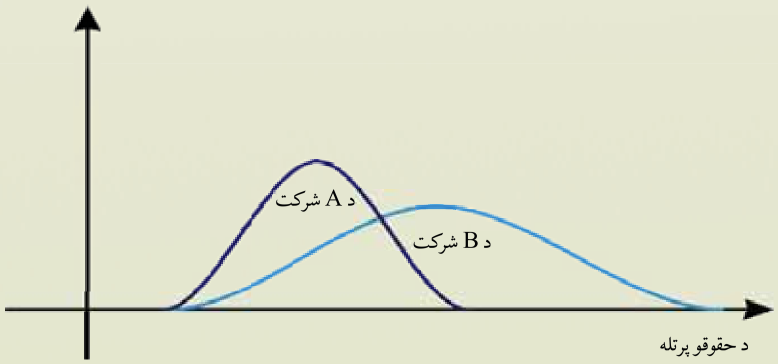


اوریدلي به مو وي چې وايي: يو ښه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړونـد فکـر او بحث وکړئ.

فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډيره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لړه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چيرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد د $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد د $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد $(\bar{x}-3S\ ,\ \bar{x}+3S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په يوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غير عادي او له $3S$ څخه زيات انحراف زيات غير عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله يا واټن ولري؛ نو بايد د پراګنده ګي يا تيتې ډېټا په نامه وګڼل شي.

مثال: که د يوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معياري انحراف يې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزيع څخه د فيصدي په ګټه اخېستو، د ورکړل شوي معاش توزيع تشريح کړئ؟

ب: آيا ويلای شي چې د 1400 افغانيو معادل معاش يو غير عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm 3S$ قيمتونه په لاس راوړو.

فاصله د S له مخې	فاصله د افغانيو له مخې	فيصدي
$\bar{x}\pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x}\pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x}\pm 3S$	10400 – 14600	99.6 %

د ب حل: لومړی $1400-\bar{x}$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ يعنې 1400 افغانيو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S وويشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

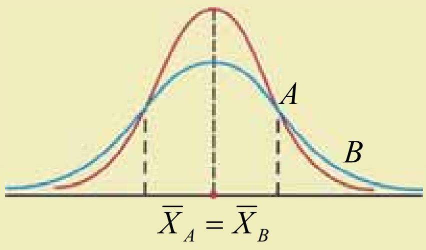
په دې ډول د 1400 افغانيو معاش غير عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زيات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه

که چيرې 62.28% فيصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\,\bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آيا ويلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منحني سره وښاياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورمال توزیع دډول شاخصونه



د مرکزي پراګندګي دوه شاخصونه یو زیات شمېر د یوې احصایوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي. ددې لپاره چې د یوې احصایوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحني څخه باید ګټه واخلو.

فعالیت

- په یو ه نورماله توزیع کې وسط، اوسط او د موډ شاخصونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزیع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ دکمیتونو په اړه څه فکر کوی؟
- که چیرې یوه توزیع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
- که چیرې دواړه توزیع ګانې یو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټیټوالي له اړخه به څه وضعیت ولري؟

دتوزیع د ډول شاخصونه په دوو لاندې حالتونو څېړل کېږي:

-1 **د خیمېدلو**(skewness)**(خمیده ګي) شاخص**: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضریب: دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ نو توزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزیع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، یعنې ښي لورې ته خمېدګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزیع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري یعنې کیڼ لورې ته خمېدګي لري.

که چیرې دکثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$ فورمول په واسطه پیداکېږي. چې f_i فریکونسي ښیي.

ب: د پیرسون د خمېدلو ضریب: د پیرسون ضریب په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$Sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

په مناظره توزیع کې د پیرسون د خلمیدلو ضریب مساوي په صفر دی. د پیرسون د خمېدلو د لو ضریب مثبت او منفي قیمتونه په ترتیب سره د توزیع د منحني مثبت یا منفي خمېدل ښیي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- **د پړسوب kurtosis شاخص**: د پړسوب شاخص ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

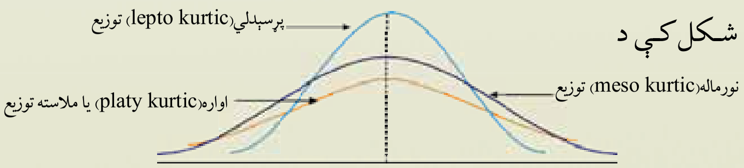
د پړسوب شاخص هغه معمولي شاخص دی چې د یوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب شاخص فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډېټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب شاخص د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه شاخص د پرتله کیدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د دريې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوی توزیع ښودل شوې ده ښيي.



حل: د نورمالې توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالې توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چیرې α_4 له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحنی ته د منحنی پړسوب زیات دی.

یا په بل عبارت یوه پړسیدلي توزیع چې څوکه لري او که چیرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالې منحنی ته یې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.

پوښتنې

د یوه ټولګي د زده کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

د زده کوونکو شمېر	نمرې
4	40-50
6	50-60
10	60-70
4	70-80
4	80-90
2	90-100

(c) ketabton.com: The Digital Library

څو متحوله ټولنې

که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهیږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې ارائه کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- په لاس راغلې ډېټا د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضيکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سېستم کې جوړیږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښیي.

مثال: یو متخصص د غذایي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړی چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې ډېټا په لاس راغلې ده: $(2,4)$, $(3,5)$, $(1,7)$, $(2,3)$, $(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول لومړی مختصه د موږک لومړنی او دویمه مختصه د موږک وزن دغذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته ښیي.

- ډېټا په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چیرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د موږکانو شمیر	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړني وزن	1	2	1	3	2
د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د موږکانو شمیر	د موږکانو لومړني وزن	د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پاسنی ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

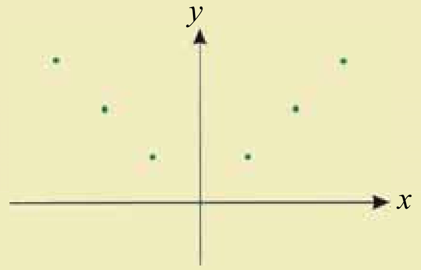
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورنه، لکه اوبه کود د کود ډول لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آیا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لرئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراګنده ګي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یې ولیکئ:

فعالیت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

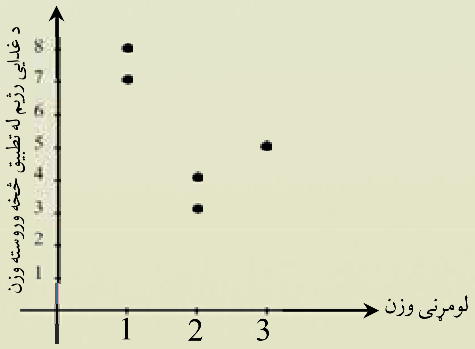
(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغې ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغی له y څخه یو واحد کم کړئ، د په لاس راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې ترلي قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

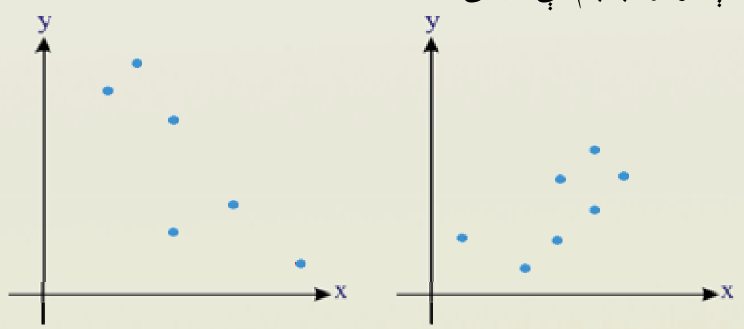
دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

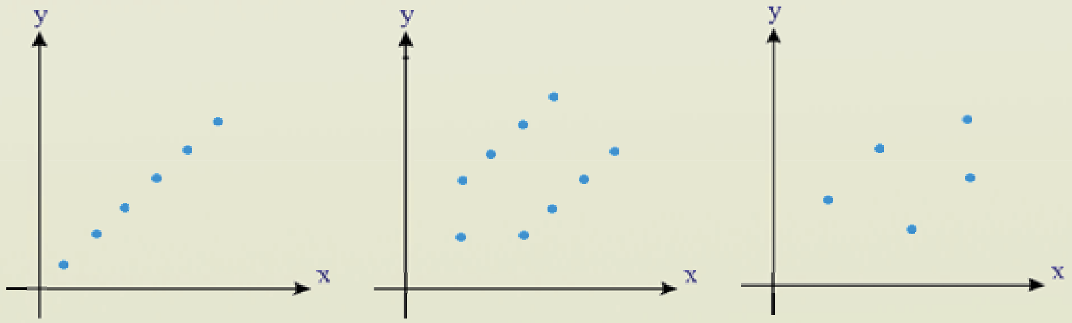
پاسنی ګراف چې د موږکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



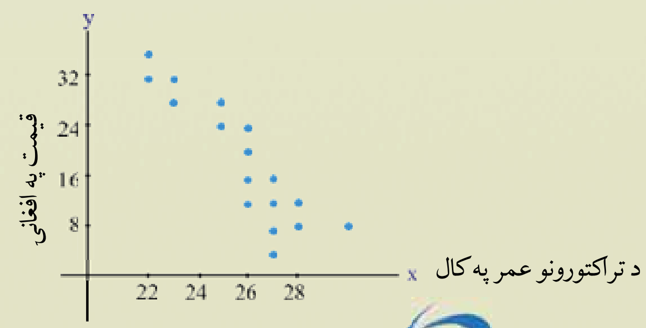


د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتیږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونوپه اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر پام په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو په پرتله زیاته ده، د ( )په ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

پوښتنې

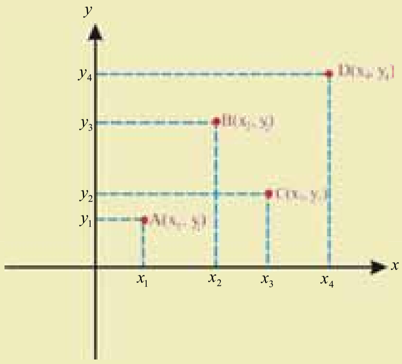
لاندې ګراف دیو شمیر تراکترونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط وینې؟ توضیح یې کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

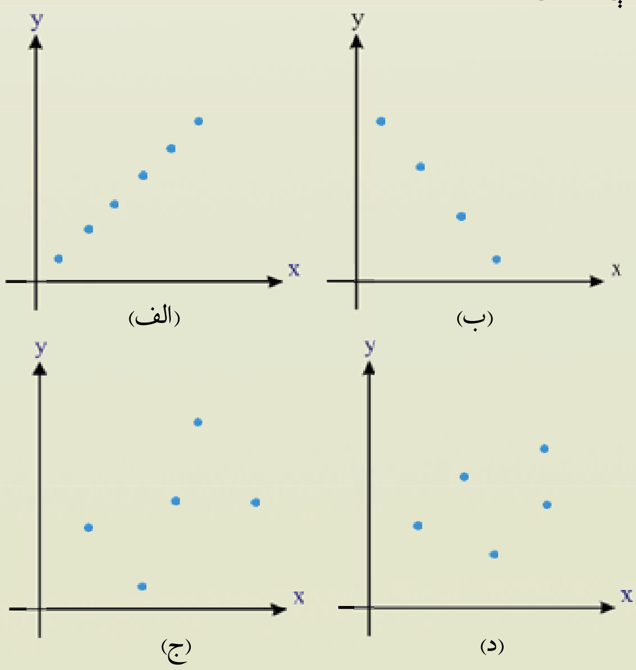
پیوستون او دپیوستون ضریب

د C, B,A او D ټکي لکه مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟



فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پاسني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چیرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوې ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کیږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n} - (\text{د } x \text{ونو اوسط})(\text{د } y \text{ گانو اوسط})}{(\text{د } x \text{ونو معیاري انحراف})(\text{د } y \text{ گانو معیاري انحراف})} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذایي رژیم څخه وروسته ډیټا لکه لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د موږکانو شمیره	لومړني ورن X	له عملیې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروسته د غذايي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چیرې X لومړني وزنونه او Y د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n = 5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د X او Y اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \qquad , \qquad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \text{د } y \text{ گانو واریانس} = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډیټا شمېر}} = \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{(1\cdot 8) + (2\cdot 3) + (1\cdot 7) + (3\cdot 5) + (2\cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول په پايله کې د پيوستون ضريب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پيوستون ضريب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

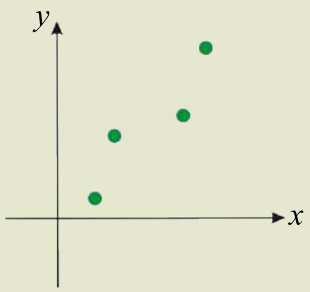
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پيوستون د -0.67 ضريب د x او y ترمنځ د ډېر پيوستون ښودونکی ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پيدا کېدو لپاره د پيوستون ضريب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نيسئ:

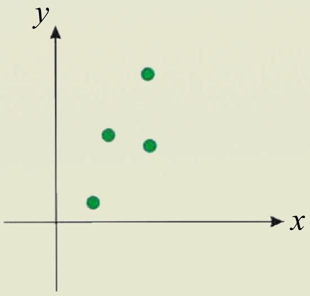
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

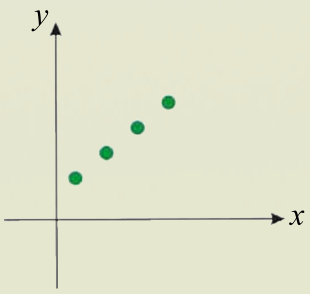
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په يوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پيوستون ضريب ډېر لوړ قيت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د يوې مستقيمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پيوستون ضريب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقيمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو بايد ضريب يې په دې حالت کې د(ب) له حالته زيات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول ځيرو، د پيوستون ضريب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واريانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واريانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو دضرب حاصل} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y گانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$, $\bar{x} = 2.5$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= 4.6875$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

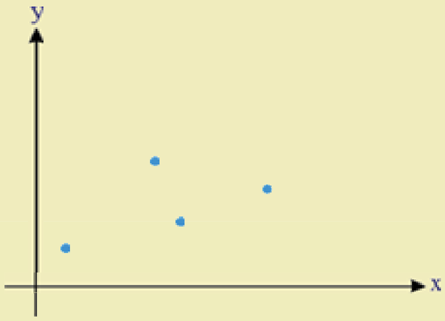
2- د خپلو ټولګیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي ميلان معادله

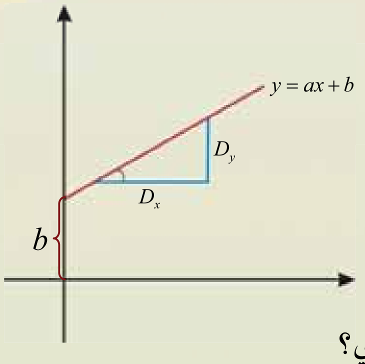
The linear regression equation

فرض کړئ چې يو پاشلي ګراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. يوه مستقيمه کرښه چې معادله يې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوې وي، پيدا کړئ چې ګراف يې ټولو ټکو ته نږدې فاصله يا واټن ولري.



فعاليت

په مخامخ شکل کې يوه خطي تابع(لومړۍ درجه) چې ګراف يې مستقيمه کرښه ده، رسم شوې ده.

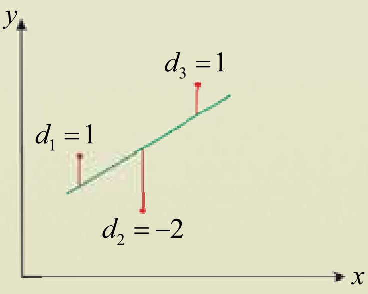


- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولين په کوم نوم ياديږي؟
- د $y = ax + b$ مستقيمې کرښې ميل پيدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د يو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چيرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزايد او که متناقص دی؟

همدغه راز که چيرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چيرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

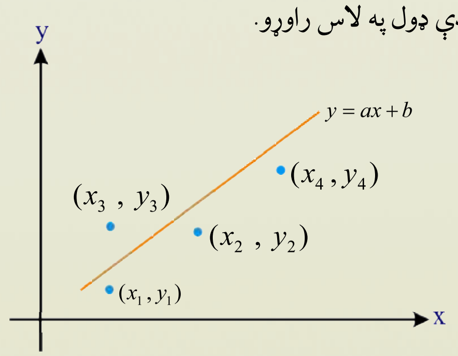
مخامخ شکل په پام کې ونيسئ:



د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پاسني فعاليت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله يوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.
پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په ګراف پروت دی.
هر څومره چې د ټکو پاشل مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وړاکو او که چېرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تګلاره چې د لږکيو(ميتود اصغري سازي)[1] مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

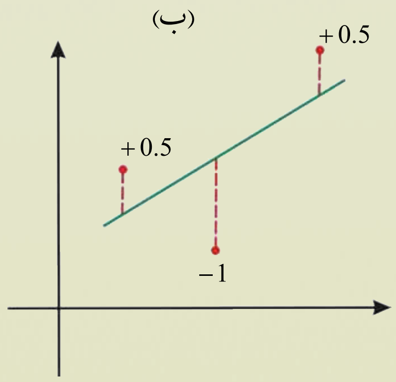


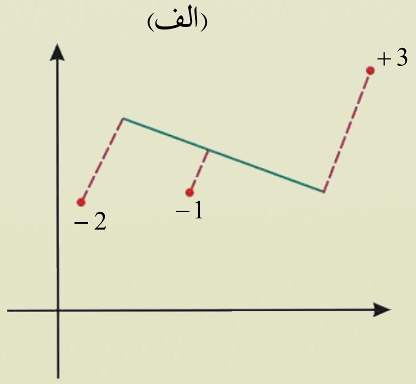
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دیاګرام یا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تيره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.





1- the method of least square

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتبو د(الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله ویلای نشو چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې خطاوې مثبت او منفي یو بل له منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$(-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = 14$ = د خطاګانو د دویم توان مجموع

$(0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$ = د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعګانو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چیرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$
$$= \sum (y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې موږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو څو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعګانو تګلارې په نامه یادېږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال: لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریگریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنگه چې:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{4+3+2+1+0}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_x^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{2}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2 \quad \Rightarrow S_x=\sqrt{2}$$

$$S_y^2=\frac{\sum (y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5} \quad \Rightarrow S_y=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n}=\frac{4+6+6+4+0}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

له دې کبله:

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-b\cdot 3$$

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=-1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$$

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-(-1)(3)=2+3=5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له: $y=ax+b=-x+5$

پوښتنه

که چیرې $y=2x+3$ د y د ریگریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط څومره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی؛ لکه:

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} = \text{د بدلون ضریب}$$

دغه ضریب ډېر خلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{د تحول ضریب}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چیرې ډېټا سره مساوي وي، نو د پراګندګۍ ټول شاخصونه مساوي له صفر سره دي.

په نورمال منحني کې پراګندګي: نورمال منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورمال منحني کې ډېټا په نورمال توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کېدل او معیاري انحراف په نورمال توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابره ده.

د نورمال توزیع شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید خرنګوالی د کږېدو(خمېدو) او پړسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو شاخص د کږېدو او پیوستون ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

د پړسېدو(جګېدلو) شاخص د پړسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه(هدف) وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دی. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې هدف یوه دوه متحوله ټولنه ده؛ لکه د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې ټولې دغه راز اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراګنده‌ګي ګراف: د پراګنده‌ګي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل پـه يـوه مستوي کې د قـايمو مختصاتو په سیستم کې ښوول کېږي. کیدای شي د ټکو او پراګنده‌ګي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعـات زمـوږ پـه اختیار کې راکړي.

الف: آيا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړيکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د يو ډول اړيکې د شتون په صورت کې دغه اړيکه خطي ده او که نه؟

ج: که چيرې اړيکه خطي وي، نو څه ډول اړيکه ده؟

پیوستون او د پیوستون ضریب: پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړيکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحـولین په يوه لورې بدلون کوي يعنې x او y دواړه په يوه کربنه لـوی او يـاهم کـوچني شي، چې پيوستون يـې مـستقيمه کربنه ده. که چيرې د دوو متحولينو اندازه يو د بل پر خلاف بدلون وکړي يعنې که چيرې x لـوی شـي y کـوچنی کېږي. او يا هم برعکس صورت نيسي.

د پېژندنې ډېر ښه معيار د پيوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پيوسـتون ډول، جهـت او ميـزان د پيوسـتون ضريب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\overline{x}\,\overline{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنيو اړيکو کې $\sum xy$ د x ونو او y ګانو د ضرب د حاصل مجمـوع، $\overline{x}$ د x ونـو اوسـط او $\overline{y}$ د y ګانو اوسط دی، همداراز S_x د x ونو معياري انحراف او S_y د y ګانو معياري انحراف دی.

د ريګريشن کرښه: ريګريشن(تخميني) د تابع د يوه متحول له قيمـت لاسـته راوړل او سـنجش څخـه عبـارت دی، چې د يو يا څو مستقلو متحولينو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ اړيکې افاده کوي، د ريګريښن معادلې په نامه يادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعګانو د محاسبې په طريقـه حساب او همدارنګـه د a او b ضـريبونه د دغې طريقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \qquad , \qquad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

چې S_y د y معياري انحراف او S_x د x معياري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پيوسـتون ضـريب، $\overline{x}$ د x ونو اوسط او $\overline{y}$ د y ګانو اوسط دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

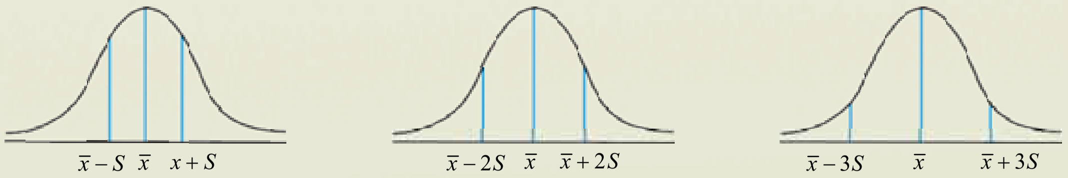
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

1-که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x} = 50$ او واریانس یې $S^2 = 64$ سره وي، د بدلون ضریب y چې له $y = 2x + 10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چیرې د هر زده کوونکي په نمرو کې 20% نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې وواياست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شی د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالي او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګی د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زده کوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخیستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دي:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

7- که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

8- که چیرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پاسنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د ډېټا د پراګنده‌ګي ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چیرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ریګرېشن خط کوم دی؟

1) $y = -\frac{1}{2}x + b$ 2) $y = \frac{1}{2}x + b$ 3) $y = x + b$ 4) $y = -x + b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون 20% د آزموینې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د ریاضي نمرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزیک نمرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د ریاضي نمرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزیک نمرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ریګریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتېکېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د یون پلازما میزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پاسنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

ـ په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

ـ یو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښیي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

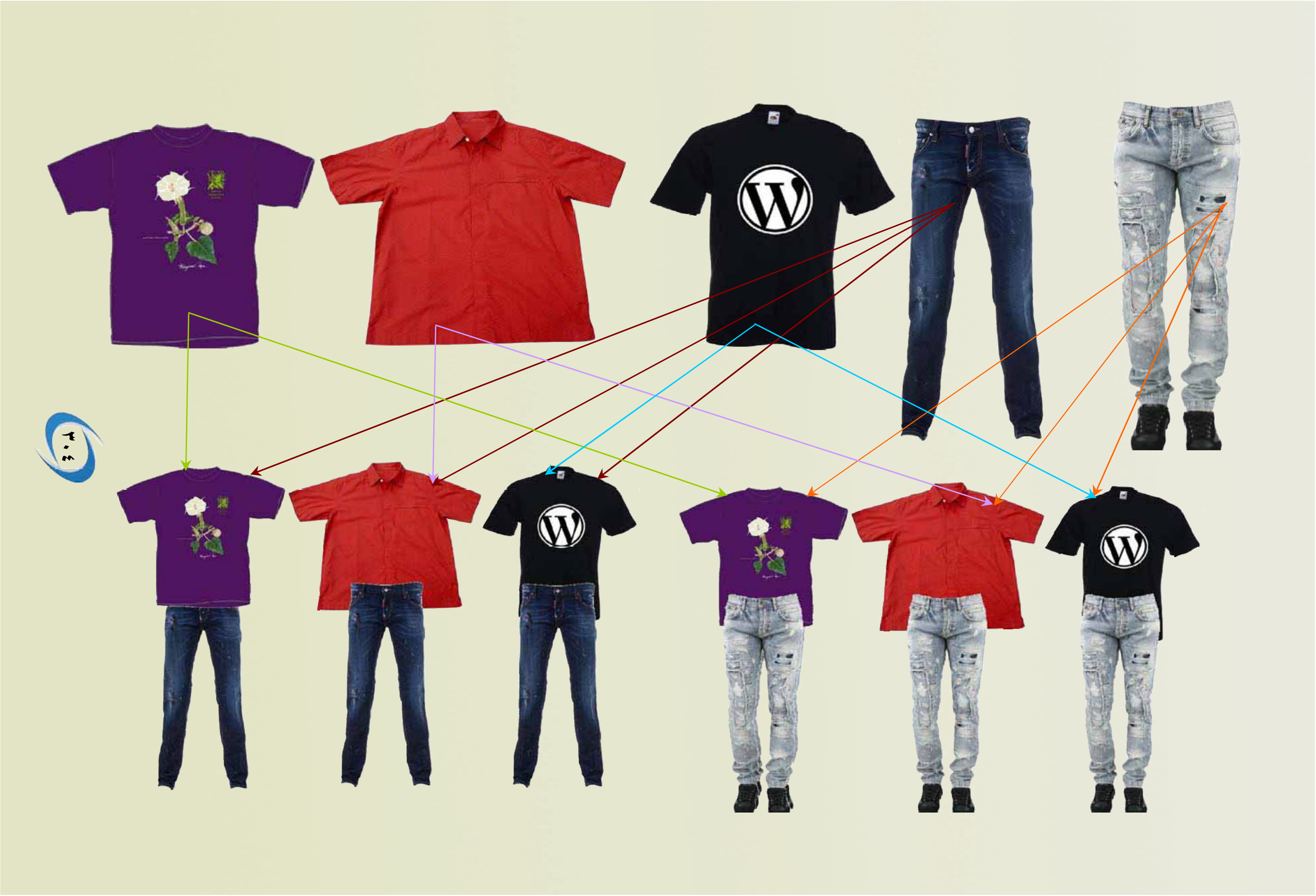
(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

احتمالات

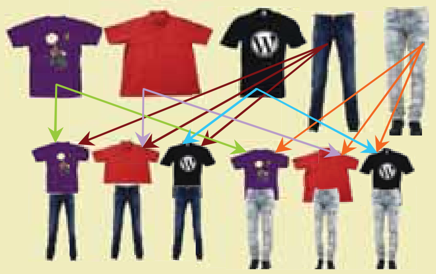
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېرې درې بیلابیل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزموئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وی.
- د پاسني فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایې چې څه اړیکې سره لري؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1$ سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n}_{n\ \text{ځلې}} = n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډ ډول په $n!$ (n – فکتوریل) ښودل کیږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن (Permutation) په نامه هم یادیږي په P_n سره ښودل کیږي. که چیرې تکرار په ترتیب کې ناشوني او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره $P_n = n!$ سره کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ترتیب تکرار شوني او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې $(k \le n)$, $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$

لومړی مثال:

(i) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$3!, 8!, 5!$

(ii): د هر یو طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سوېي آزموینې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېنئ چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب 16! دي چې تکرار پکې ناشونی دی. که چیرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاريږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!}$, $(k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چیرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چیرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د n $P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)}$ ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دي له: $P_3^{(2,3)} = \dfrac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 مېنې بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او مېنې بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مېنې بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5 \times 3 = 15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه(پرته له تکراره) جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

دامکاناتو ډولونه	4	3	2
	د لومړي رقم ځای	د دویم رقم ځای	د دریم رقم ځای

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ او د فورمول له مخې لروچې: $p_4^{(3)} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$

(c) ketabton.com: The Digital Library

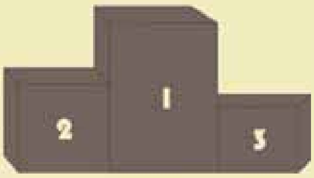
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه گردی میز په شاوخوا کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کینې.
3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زیړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. (د هم رنګه توپونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه سره توپیرلري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \ , \ k\wedge n\in IN$$

فعالیت

د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\square a^2+\square ab+\square b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ له $k=0,1,2$ قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $\binom{2}{0}=\binom{2}{2}=1$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$ $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) $\binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{0}=1$

(ii) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کېدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي؛ نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو؛ نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دي؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!}=\dfrac{7!}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو څخه لکه A,B,C,D,E,F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

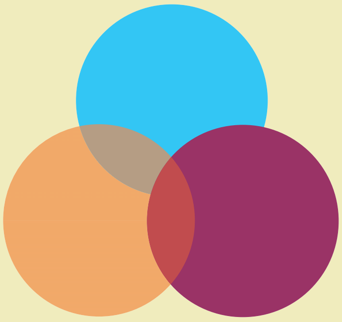
2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. په څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینهوو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب

Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنگونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنگ ترکیب کوم رنگ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنگ د کومو رنگونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنگ، بنفش رنگ، نارنجي رنگ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولگیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توگه په ټولگي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چیرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرگروپ، دویم د سرگروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو گروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تر بله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو گروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو گروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26!}{26!\cdot4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمیر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^{5}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

پوښتنې

1- که چیرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چیرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

تبدیل

Variation

په یوه المپیاکې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بیلابیلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمیر شیان ټاکو،د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چیرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتني حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

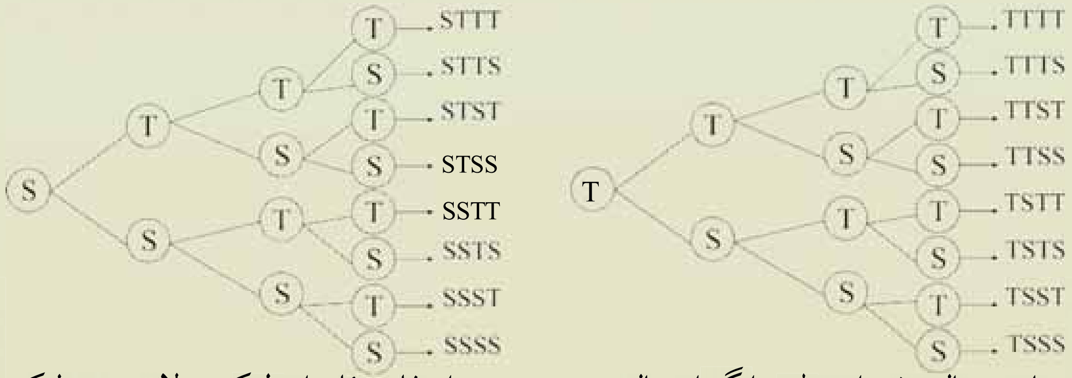
د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمیر	
	له تکرار سره $k \le n$	پرته له تکراره $k \le n$
ترتیب یا پرموټیشن	$P(n,k)=\frac{n!}{k!}$	$P(n,k)=n! \quad , \quad n=k$
ترکیب یا کمبینیشن	$C_k^n=\binom{n+k-1}{k}$	$C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n=n^k$	$V_k^n=k!\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$

پوښتنې

1- په یوه ورزشي سیالی کې د فوټبال 12 ټیمونه، په څو ډوله لومړی، دویم او دریم مقام ګټلی شي؟

2- د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله 2 تنه د ټولګي د استازي او د استازي د مشر مرستیال په توګه ټاکلی شو؟

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهیږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضاکې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $S=$ او خط $T=$) دی.



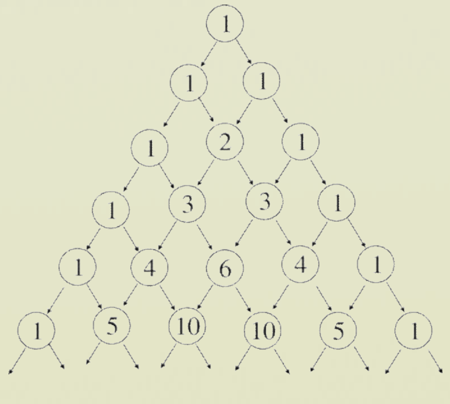
د پاسني مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سکې غورځول	هیڅ ځل		یو ځل		دوه ځله		درې ځله		څلور ځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط د راتګ شمیر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
					2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
							3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$
									4	$\frac{1}{16}$

که چیرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپیژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بینهایت پورې دوام ورکړو، چې که چیرې هغوی د یو دوه جملهیي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي؛ مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله‌يي په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده يو شان ده:

$(a+b)^0 = ①$

$(a+b)^1 = ①a + ①b$

$(a+b)^2 = ①a^2 + ②ab + ①b^2$

$(a+b)^3 = ①a^3 + ③a^2b + ③ab^2 + ①b^3$

$(a+b)^4 = ①a^4 + ④a^3b + ⑥a^2b^2 + ④ab^3 + ① b^3$

①

① ② ①

① ③ ③ ①

① ④ ⑥ ④ ①

چې دغه ضريبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضريبونو استعمال په لاندې ډول ليکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دی له: $P(\text{خط راتگ}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په يوه سيالی کې 12 ټيمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دويم او دريم مقام ته وټاکو.

2. د يوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازې او د استازې د مرستيال په توګه وټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم قضيه

د پاسکال د مثلث له مخې د بينوم د انکشاف ضريبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

فعاليت

- په یوه ناڅاپي تجربه کې چې يوازې دوه ناڅاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، يعنې د $\{A,\overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چيرې $P(A)=P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکمله پېښې احتمال يعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A})=?$
- د پورتنی تجربې له بيا بيا تکرار څخه که چيرې د A حادثې پيښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته يې 0 ووايو لاندې جدول د تجربې د بيا بيا تکرار يعنې $n=2$ لپاره بشپړ کړئ.

د بينوم د ضريبونو ارايه	احتمال	ممکنې پايلې	k
$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$	$(1-p)^2$		0
	$2p(1-p)$	10	1
$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$		11	2
$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=?$	$(p+(1-p))^2$		

د بينوم د حدونو د انکشاف مجموع يعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي يې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بینوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو ځخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې ځخه 2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k \le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌یي فضا کې داسې فرضوو چې د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زېږېدنې ورځ د سوال وړ ده نه، د زېږېدنې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌یي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځونه ځخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$|\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چیرې د A ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې ځخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 ځخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=(365,k)=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-(365,k)=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$

پوښتنې

وښیئ چې:

$$(I)\qquad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$(II)\qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناخاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو.

موضوع د ستړ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا کې، دوه ناخاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړې.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناخاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناخاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څه ډول کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډير غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چيرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چيرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمير له n ځلې ($0 \le k \le n$) ورل او نور يې بايلودل وي، د k ځلې بريالېتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناخاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

- که چيرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.
- که چيرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$k_{\text{ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چیرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$، د بایللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناڅاپي پیښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابیږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه k ځلې یې وړل وي، یوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیږئ؟

دویم مثال: په یو 5 اولاده فامیل کې، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چیرې د اولادونو د هلك او نجلی زیږد برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنگه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ = د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځیدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چیرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو؛ نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي)= $\binom{6}{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال يې مساوي په $\frac{1}{3}$ وي، که چيرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چيرې د سکې د خط راتللو حالت ته ورل او احتمال يې p په پام کې ونيسو، نو د خط د نه راتللو يا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی؛ يعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{3\text{ ځلې شېر}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+\underbrace{\binom{4}{4}}_{1\text{ ځل خط}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{4\text{ ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

⟨ د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي. ⟩ =

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال يې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه يو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

(د هر n ځلې شير راتګ احتمال) $-1=$ دی، لږ تر لږه يو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ يا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ يا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول بايد سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه يو ځل خط راشي، احتمال به يې له 0.99 څخه لوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړې چې:

(i): په 4 ځله غورځیدوکې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدلې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدوکې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

فکتوریل: د هر طبیعي n عدد لپاره د $n \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ د ضرب حاصل په لنډ ډول په n! (n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n عږو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چیرې:

- په ترتیب کې تکرار مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چیرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دي په: $P_k^n = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$

$\binom{n}{k}$ د n, k **له پاسه**: د $\binom{n}{k}$ د n, k له پاسه، د بینوم هغه ضریبونه دي چې k د بینوم د توان په ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ، $n,k \in IN$ ، $0 \le k \le n$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په: $C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ، $r \le n$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غړو څخه مطلوب وي، په نامه دی، n په k بدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جمله‌یي انکشاف عبارت دی له: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q = 1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې ورلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلول ګڼل کېږي؛ یعنې $q = 1-p$ سره دي او صورت نیسي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د k ځلې ورلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې}\end{array} \right\rangle = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ ، } 0 \le k \le n$$

د څپرکي پوښتني

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ دریدلي شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، هنزله او خبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخېستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library