



شمپر پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

لومړۍ برخه

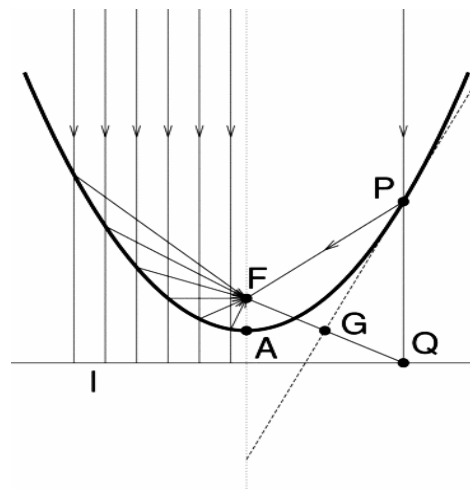
دویم غځېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکټر ماخان (مېړۍ) شینواری

شمير پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب



دويم غزېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکتر ماخان ميري شينواري

دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت -
په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (لومړۍ برخه)

ليکونکي: ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړۍ

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

چاپ چارې

دانش خپرنډويي ټولنې تخنیکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرنډويي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

د خپرنډوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تر اوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادونو ته وړاندې کړي دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګاڼه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحادیې له خوا د ډاکټر ماخان شینواري تر اوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتون زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندويې ټولنې په توگه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملگرو او ملگرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنير ربحان الدين حساس، ښاغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلي ډاکتر سردار گانه وال، ښاغلي ډاکتر مانوکل گانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي دپلوم انجنير محمد ايوب بيان، همداسې زما د ملگري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحې او نه اخر زما د لور ډاکتر څانگې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپړۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر وونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

نيولیک

نوي سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شمير پوهنيزې نخښې

۱	د شمير پوهنې سم اند يا منطق	۰ ۱
۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱ ۰ ۱
۳	د شمير پوهنې سم اند بنسټيزه کليمې	۲ ۰ ۱
۳	ثابتي ، اووښتوني يا واريابلې ، ترمونه	۱ ۰ ۳ ۰ ۱
۵	وينا	۲ ۰ ۲ ۰ ۱
۷	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينڅيپ	۳ ۰ ۲ ۰ ۱
۱۳	وينا فورم يا ۰ بڼه او کوانتورونه	۴ ۰ ۱
۲۸	اړين او پوره کيدونکي شرطونه	۵ ۰ ۱
۳۱	د شمير کليمه يا د لغاتو	۶ ۰ ۱
۳۳	برابرون او نابرابرون	۷ ۰ ۱
۳۸	تمرينونه	۸ . ۱
۳۹	ډير ۱ پوهنه	۰ ۲
۴۰	د ډير ۱ پوهنې کليمه	۱ ۰ ۲
۴۵	د ډير ۱و ترمنځ اړيکې	۲ . ۲

۴۶	برخډېری	
۴۸	د یوې ډېرې توان یا توانډېرې (توانست)	
۵۰	په ډېرې کې کارونې یا عمليې (۱)	۳۰۲
۵۲	غوڅډېرې یا متقاطعډېرې	
۵۷	د یوې ډېرې یا ست کمپلیمنت	
۵۸	څیرونه	۴۰۲
۶۷	تمرینونه	
۷۰	د ریيل گڼونو سره د شمیرلو بنسټيزي...	۰۳
۷۰	د گڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۱۰۳
۷۰	پیدایښتي یا طبیعي گڼونه	۱۰۱۰۳
۷۱	د پیدایښت یا طبیعي گڼونو جوړښت	الف ۱۰۳
۷۲	د پیدایښت گڼونو انځورونه او شمیرنه	ب ۱۰۳
۷۸	د شمیرنې بنسټيز قوانین	پ ۱۰۳
۸۴	ټولگڼونه	۲۰۱۰۳
۸۶	الف د ویش تیوري	۲۰۱۰۳
۸۸	غټ گډ پرویشونې (بزرگترین مقسوم علیه ...)	ب ۲۰۱۰۳
۱۰۶	راشنلگڼونه	۳۰۱۰۳
۱۰۸	ریيلگڼونه	۴۰۱۰۳
۱۱۹	ماتشمیرنه	۱۰۲۰۳

۱۳۰	تمرینونه	۳ . ۳
۱۴۱	پوتنخ یا توان ، رینه یا جذر	۰ ۴
۱۴۱	توان د تولگنیز په جگ یا اکسپوننت	۱ ۰ ۴
۱۴۴	رینه او توان د راشنل اکسپوننت یا جگن سره	۲ ۰ ۴
۱۵۱	توان دریلگن اکسپوننت یا جگن سره	۳ ۰ ۴
۱۵۲	تولکه	۴ ۰ ۴
۱۵۸	لوگاریم	۰ ۵
۱۵۸	د لوگاریم کلیمه	۱ ۰ ۵
۱۶۶	تولکه	۳ ۰ ۵
۱۶۹	گونومتری	۰ ۶
۱۶۹	بنسټیزه ځمکچپونه یا هندسه	۱ ۰ ۶
۱۶۹	ټکی او کرښه	۱ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۱	کونج	۲ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۴	درېگودی	۳ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۸	کونکروانیخ او ورته والی	۴ ۰ ۱ ۰ ۴
۱۸۴	ولارکونجیز دریگودی	۵ ۰ ۱ ۶ ۰
۱۸۸	په ولارکونجیز دریگودی کې د ...	۲ ۰ ۶
۱۹۰	په یوونگردي کې د کونج بلواک ..	۳ ۰ ۶
۱۹۵	د ساین او کوساین جملې	۴ ۰ ۶

٢٠٥	تریگنومتريکي کټمټوالی	٥٠٦
٢١٥	تریگنومتريکي یا کونجکچیز فرمولونه	٥٠٦
٢٢٢	کمپلکس گڼونه	٥٠٧
٢٣٥	د بنوونې یا ثبوت متودونه	٥٠٨
٢٣٥	سیده بنوونه	١٠٨
٢٣٧	ناسیده بنوونه	٢٠٨
٢٣٩	د پوره ایندکشن له لارې بنوونه	٣٠٨
٢٤٣	لاینینز برابرې له یوې اوږدېونې یا ...	٩
٢٤٤	لاینینز برابرې	١٠٩
٢٤٤	کومبیناتوریک، د بینوم جمله	١٠
٢٤٤	فاکولتیت یا فاکتوریل	١٠١٠
٢٤٧	د بینوم حله ونه	٢٠١٠
٢٧٠	د بینوم جمله	٣٠١٠
٢٧٤	کومبیناتوریک	٤٠١٠
٢٧٥	پرموتیشن	١٠٤٠١٠
٢٨٠	وارییشن	٢٠٤٠١٠
٢٨٤	کمبینیشن	٣٠٤٠١٠
٢٩١	د پرموتیشن، وارییشن او	٤٠٤٠١٠
٢٩٥	لانیز الجبري برابرې	١١٠

۲۹۶	لانیز برابر و نه دوه اوړیدونو یا ...	۱۰۱۱
۳۰۷	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۱۰۱۱
۳۱۲	د گاوس الگوریتم	۴۰۱۰۱۱
۳۱۶	له دوه وو زیات برابر و نه له دوه ...	۵۰۱۰۱۱
۳۱۷	لانیز برابر و نه له درې	۲۰۱۱
۳۱۷	یو برابر و نه له درې ناپیژندونو سره	۱۰۲۰۱۱
۳۱۸	دوه برابر و نه له درې ...	۲۰۲۰۱۱
۳۱۹	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۰۲۰۱۱
۳۲۲	د گاوس لگوریتم	۴.۲.۱۱
۳۲۵	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۰۱۱
۳۲۶	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۱۰۳۰۱۱
۳۲۸	د گاوس الگوریتم	۲۰۳۰۱۱
۳۳۳	تمرونه	
۳۴۰	الجبري برابر و نه	۱۲
۳۴۰	نالاینیز برابر و نه	۱۰۱۲
۳۴۳	څلورۍ ئیز یا مربع برابر و نه	۲۰۱۲
	د دوه په جگ برابر و نه ، د ویتا جمله	۱.۲۰۱۲
۳۵۰	څلورۍ برابر و نه ، چې په نورمال	۲۰۲۰۱۲
۳۵۱	د n -م درجې ځانگړي برابر و ...	۳۰۲۰۱۲

۳۵۷	دریمه درجه برابر ونونه	۳۰ ۱۲
	د ریښې برابر ونونه	۴۰ ۱۲
۳۷۵	ترانسځیندنت برابر ونونه	۱۳
۳۷۵	لوگاریتم برابر ونونه	۱۰ ۱۳
۳۸۰	اکسپوننشل- یا په جگړې برابر ونونه	۲۰ ۱۳
۳۸۵	گونومتريکي یا کنجکچیز برابر ونونه	۳۰ ۱۳
۳۹۶	له نابرابرونو او مطلقه ارزښت ..	۱۴
۳۹۶	نابرابرونونه	۱۰ ۱۴
	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	۱۰ ۱۰ ۱۴
۳۹۷	اینټروال	الف ۱۰ ۱۴
۴۰۰	نابرابرونونه له یوې ناپېژندونکې...	۲۰ ۱۰ ۱۴
۴۰۹	د نابرابرونو سیستم ...	۳۰ ۱۰ ۱۴
۴۱۱	نابرابرونونه له دوه ناپېژندونکو سره	۴۰ ۱۰ ۱۴
۴۱۴	برابرونونه او نابرابرونونه	۲۰ ۱۴
۴۱۴	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۱۰ ۲۰ ۱۴
۴۱۵	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۲۰ ۲۰ ۱۴
۴۲۰	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۳۰ ۲۰ ۱۴
۴۳۰	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۱۵
۴۳۰	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۱۰ ۱۵

۴۳۳ د بلواک خویونه ۲۰۱۵

د ستر کتاب دویمه برخه

۴۶۶	د هواري يا سطحې شننيزه هندسه ...	۱۶
۴۶۶	کرښه	۱۰۱۶
۴۷۵	گردۍ	۲۰۱۶
۴۸۲	ایلیپسي	۳۰۱۶
۴۸۷	هیوپربول	۴۰۱۶
۴۹۲	پارابول	۵۰۱۶
۴۹۴	تولګه	۶۰۱۶
۵۰۲	وکتور شمیرنه	۱۷
۵۰۲	د وکتور پیژند يا تعريف،	۱۰۱۷
۵۰۲	په کارتيزي کواورديناټ سیستم کې د وکتور انځورونه	
۵۰۹	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۲۰۱۷
۵۱۲	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۳۰۱۷
۵۱۷	غبرګهواريز يا موازي الاضلاع ضرب	۴۰۱۷
	په شننيزه ځمککچ کې د وکتورونو	۵۰۱۷
۵۲۱	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۱۰۵۰۱۷
۵۲۴	د هواري يا سطحې وکتوري انځورونه	۲۰۵۰۱۷
۵۲۵	د هواربرابرونو سکالار فورم يا ۰ بڼه	۵۰۱۷

۵۳۳	پرلپسي او پرلپسي لړۍ	۱۸
۵۳۳	پيل	۱۰ ۱۸
۵۳۴	د گڼون - عددونو پرلپسي کليمه	۲۰ ۱۸
۵۴۲	مونوټوني پرلپسي	۱۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۵	اريتميټيکي پرلپسي	۲۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۷	هندسي پرلپسي	۳۰ ۲۰ ۱۸
۵۵۰	لړۍ	۲۰ ۱۸ الف
۵۵۵	هندسي لړۍ	۱۰ ۲۰ ۱۸ الف
۵۵۷	اريتميټيکي لړۍ	۲۰ ۱۸ الف ۲
۵۵۸	د پرلپسي او لړيو د پولې ...	۴۰ ۱۸
۵۷۸	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۱۹
	بنسټيزې کليمې	۱۰ ۱۹
۵۸۶	د پولو يا حدونو خويونه	
۵۹۲	د راشنل، کسري يا نسبتي	
۵۹۶	د مثلثاتي يا درېکودي کچ توابعو پولې	
۶۰۴	ناپريکيدنې	
	په پوله ارزښت او ناپريکيدنې څو جملې	۲۰ ۱۹
۶۱۰	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۳۰ ۱۹
	د بنسټيزو فنکشنونو ناپريکيدنه	۴۰ ۱۹

۶۱۶	د څپرکي ټولگه	
۶۲۶	دفرنځيالشميرنه	۲۰
۶۲۶	د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قیمت)	
۶۲۸	په يوه ټکي کې د تابع گراف ...	
۶۳۰	د لخصوی(سترگورپ) تغير...	
۶۳۱	کمښتوېش (تقسيم تفاضل؟)	
۶۳۳	دفرنشلوېش يا راييليدنه يا مشتق	
۶۳۶	کمښتوېش او مشتق يا راييليدنه	
۶۴۳	د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق	
۶۴۷	د تانجنت پيژند او خويونه	
۶۵۰	د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات	
۶۵۲	په بېديا کې جگوالی	
	الف : د تانجنت يا جگيدني غوره والی	۲۰. ۱۰۱
۶۵۶	د فرنځيال يا راييليدني يا مشتق قاعدې	۲۰. ۲۰
۶۶۲	د درېگوديزو يا مثلثاتي	
۶۷۰	د اکسپوننشل يا په جگ توابعو....	
۶۷۶	د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې	
۶۸۳	د ايمپليڅيت توابعو مشتق	
۶۸۶	د بنسټيزو راييليدنو(مشتقونو) جدول	

٦٨٨	تولگه
٦٩١	د یوې تابع د مشتق قابلیت
٦٩٨	د معکوس- - یا په خټ توابعو مشتق
٧٠١	٢٠. ٣. د بنسټیزو بلواکو رابیلیدنه
٧١٠	د رول قضیه
٧١١	د وایر شتراس قضیه
	افراطي ارزښتونه او اوړونټکی ٠٤. ٢٠
٧١٢	د دفرنشل منح ارزښت قضیه
٧١٥	یو عزیزې توابع
٧٢٠	حای اړوند افراطي ټکي
٧٢٤	د انعطاف – یا اوړونټکی
٧٣٣	د کوي یا منحنی بحث یا خبرې
٧٤٤	ناتاکلي حدونه یا پولي
٧٥٠	د برنولي او د لو پیټال
٧٥٧	د غټو گټو پرابللم ٥٠ ٢٠
٧٦٧	تمرینونه
٧٧٨	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه
٧٨٧	انتیگر الشمیرنه ٢١
٧٨٧	پیلاورنه

- ۷۸۹ انتیگر الشمیره
- ۷۹۰ د ریمن(ناټاکلی) انتیگرال
- ۷۹۴ بنسټیزه یا لومړنۍ تابع
- ۷۹۶ سطحه او لومړنۍ تابع
- ۷۹۹ ناټاکلی انتیگرال
- ۸۱۲ د ټاکلي انتیگرال شمیره
- ۸۱۴ تکمیلیدونکي بنسټونه
- ۸۱۵ د ټاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي ...
- ۸۱۷ د انتیگرالونې قاعدې
- ۸۱۹ د اکسپوننشل توابعو انتیگرال
- ۸۱۹ د لوګاریتمي توابعو انتیگرال
- ۸۲۱ بدلون قانون
- ۸۲۷ توابع، چې بې د بدلون له لارې...
- ۸۳۲ ټوټه انتیگرالونه
- ۸۳۴ د ټوټه انتیگرالونې لار
- ۸۳۸ د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال
- ۸۴۱ ناپای(مبهم) انتیگرال
- ۸۵۲ د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې
- ۸۶۲ د انتیگرال شمیرنې استعمال

تمرینونه

۸۸۸

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوی لیکنې او ژباړې
د ډاکټر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې
د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

د مهربان او بخښونکي خدای (ج) په نامه

سريزه

گرانو هیوادوالو!

يو څه چي پيل لري نو پاي هم بايد ولري، د داسی يوه کار پيل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چي مهربت يی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چي په یوه کار پیل وکړي، ځکه چي سملاسی ورته څرگند یږي، چي په هیڅ شي کی ځمور په هیواد کی لا تراوسه څه نه دي شوې په جوړښتیزه لور، په وړانگی کی مو د نړی سرکښي خاتنه گټلی.

موږ گورو چي په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چي تراوسه حتی هغه بنسټیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چي مسلک ته اسانتیاوې پېښوي. له کومه ځاي چي ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځو ییو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستونځي یي نه دي گاللي، چي دلته طبعاً افراد ملامت نه دي، بلکه ځمور د هیواد د تاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چي ځمور په هیواد کی ځمور حکومتونو خپل خاتونه د دې کار جوگه نه دي گټلي، کیدی شي چي ووايو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چي په افغاني ژبه دې څه کار وشي.

گرانو لوستونکو!

داکار ځکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چي زه په مسلکي اړخ کی یواځی، په علمي توگه په المانی ژبه پوهیږم، د انگلیسی سره هم بلد یم، نو دا

نومونه چې له دې دباندنيو ژبو را اړووم ، داچي په ښوونځي کي ځما ليک لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنيزه توگه اړولی شم. ماته دا کليمي په مروج افغاني ژبه نه دي معلومې او يا کومي چي ماته معلومې دي او زه ورسره بلد يم هغه همغه وخت ماته د پوهيدلو له امله د ستونځو ډکې ښکاريډلې .

شمير پوهنه هم، د نورو پوهنو په څير، يوه پراخه پوهنه ده او زياتی څانگی لري. دا چې ځما په فکر دا متأسفانه نه يواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توگه يو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټيزه توگه په درسي او تمرینی ډول سرته رسيږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پرمختگ کړی او دا نور هم په خورا چټکتياوډه کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترگه گوري، مگر موږ لا تراوسه په هغه بنسټيزو ستونځو (د ستونځو حل باندې) پيل نه دی کړی ، که دا په هره څانگه کی هم وي. ځموږ پرابل نمونه هراړخيز دي او هراخيرو هڅو ته مو ضرورت شته،

شمير پوهنه څه شی دی ؟

شمير پوهنه يو مرستندويه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کی نغښتي يا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهيدلو بنسټيزه ريښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی (پيداينښتی) يعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کيميا وي يا فزيک، بيله شمير پوهنی يی وده او په پوهيدنه ناشونی ده. شمير پوهنه له بلی خوا يواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمير پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب ليکلو زما زيات وخت په بر کی ونيوه او ليکل يی د پوره ستونځو سره

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې یوه کتاب لیکنې مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسې لیکنې څخه خپل ژوند تأمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلک زدکړه کيږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې څمور د هیواد ستنڅي نورې هم گوته لک کړم.

زه غواړم چې خپلې د سر خبرې په لاندې توګه رالاندې کړم

— لیکونکي راهڅونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول

— داسې کتاب لیکنه په هغه وخت کې شونې کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تأمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیاتو پیسو باندې. کار نه پیدا کیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسې وګټم.

— وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه می په سیاسي هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلک ته رامنځته شوه.

— ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکي د خپلې ټولنې او د خپلې ټولنې د خلکو سره مینه ولري او په همدې ډول، د خپلې ټولنې او د ټولنې د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یواځې د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسې کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځې په پوره مینه په غاړه واخستلې او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.

په دې برسیره لیکونکي دې وظیفې ته هم باید شعوري وي، چې دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسې لږ پور ادا کولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي، خود داسی کار مخه باید ونه نیول شي، د نورو ستونځو بیو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانگړی توگه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مگر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یی ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توگه گوته نیسم.

۱ - دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خود مرگ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید گوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی گوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته، چی کمیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، گوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توگه هم افغاني ژبه پریښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی د پریښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متأسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل څا څخه څوک باید گيله من نه وي. افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیک لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشي یا بهتره پوهنیزه شي.

ژبه يواځې د پوهولو او پوهيدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنيزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټې دي، په دې برسیره د پوهې د اسانولو خورا غوره اله ده. د يوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوډه يو بل باندې سيده او په خټ اغيز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه يې وروسته پاتې ده او که يوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سيالي نه شي کولی او د ولس خلک د نورو ولسونو د خلکو سره د سيالي کولو استعداد خان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوشنېن کړې چې کم له کمه بنسټيزې کليمې په افغاني واپروم، چې دا کار مې په پوره برياليتوب، د پوره ستونځو سره سره سرتې رسولی او په دې هکله مې زيات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټيزې کليمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهيت په کې روښانه دي. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره بايد وشي، چې په پوهنيزو شيانو او نومونو پوهيدل بايد ساده شي.

په پوهنه کې له بلې ژبې تيريدنه ناشونی ده او يا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کيدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار يواځې هلته کيږي، چې يوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي. د پوهنيزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننځي او ضرور هم دي. ما کوشنېن کړې چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم يا نه وي او يا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروج لغاتو وليکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بيا هم زيندې شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو يا بهتره د افغاني ژبې د زيندې څخه خلاصون يا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړې لري کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغي بايد موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وگرځوو.

د يوه ولس په ژبنيو ستونځو هلته پوهيدل ممکن کيږي، چي څوک د ژبي سره په پوهنيزه توگه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمري ځل لپاره داسي يوه ليکنه د ستونځو سره مل ده، مگر ناشوني نه ده.

دلته غواړم چي دې ته هم گوته ونيسم، چي د نومونو په ټاکلو کي ما کله کله دوه نومونو کارولي، چي هغه مي په ټول کتاب کي شايد اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چي په هدف کي ستونځي نه پيښوي لکه د بيلگي په توگه: ما لمري گڼپوهنه لکيلي وه، چي وروسته مي شمير پوهني باندې واړوله، شايد په ټولو ځايونو کي مي نه وي شميرپوهنه کړي. درېگودي ما لمري دريکونجی ليکلي وو، چي دا هم شايد د کتاب په اوږدو کي نه وي اصلاح شوی، داسي نور څه به هم وي، خو دې ته بيا گوته نيسم، چي د پوهيدلو لپاره دا کوم ستونځي ه پيښوي.

۲ - تخنيکي ستونځي:

د گرانو لوستونکو پام به دې ته راوگرځي، چي څمور لپاره د داسي کتاب ليکلپه لار کي تخنيکي ستونځي هم خورا زياتي دي. ما په کمپيوټر د شميرپوهني د فرمولونو ليکلو سره ستونځي لرو دي، نو له دې امله مي د نورو کتابونو دکاپيو څخه بياني کړي او دلته مي سريښ کړي، چي کله کيږي هم سريښ شوې دي او په دې هم پوهيږم، چي دا يو غير قانوني کار هم دی، خو هيله ده چي د رااخستلشو کتابونو ليکونکي او چاپوونکي به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښي څرگندونه کوم.

غواړم د گرانو لوستونکو دې ته هم پام راوگرځوم چي املايي غلطی به شوي وي، خو په پوهيدلو کي به ستونځي پيښي نه کړي، د هغي بڅښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم خنډولی، ځکه چي ډير ورسره ستړی شوم. ما هيڅ دا فکر نه کاوه، چي زه دې داسي يو کار سر ته ورسوم، خو خداي (ج) په

حرکت کی برکت ایښوولی دی.

لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره سترې شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملگرو په فشار ما، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم - کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

گران لوستونکی به د را اخستلشو کتابونو څخه دې ته پام راوگرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنې، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي. دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی. ختی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکړونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راگرځیدلی شي.

څلورم - دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرو دې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنسټیز کتاب په توگه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.

ما د بنسټیز کتاب په څیر د شيفر-جورج-تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په هغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعنی منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی. ځما وړاندیز دادی، چی اوومه- اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هيواد كې زما په فكر ، چي نا اشنا وي . په هر صورت د اوومي برخي سريزه خودي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسي د ډيري پوهي سره اشنايینه هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې كتاب ليكلو كي ، كه څما د دوستانو لخوا دې كار ته راهڅول نه وي ، نو دا كار سرته نه شو رسيدلي ، په تيره بيا په المان كي د « افغانستان كلتوري ودې ټولني » دوستانو . زه له دې د ټولو د زړه له كومي خوښه كوم . د دې ټولني د غړو او پلويانو زياته خوښتنه ، چي ددې كتاب چاپ يي د ټولني په چوكاټ كي په غاړه اخستي .

ډير محترم پوهاند مجاور احمد زيار څخه زياته مننه ، چي د لغاتو د نظر څخه تيريدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو كي ماته خورا گټوره مشوره هم راکړې . زما ميرمن زما د ستونځو شاهده وه . په زړه ناروغه ، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسيله يي زما د دې ليكني ملاتړ كاوه ، چي بي ددې له ملاتړ به دا كار هم سرته نه وي رسيدلي ، كه څه هم دا به يي كله كله ويل ، چي گوندې پيښي مي بايد گټلي وي ، خو په دې پوهيږي ، چي ددې چانس نه شته ، كله كله به ، چي به تنگه شوه نو ويل به يي چي نور دا د چرگانو ټونگي بايد بس كړم . له دې امله زما دميرمن ښاپيري څخه هم د زړه له كومي خوښنه كوم او دا پراخه سينه او دا ناروغه زړه يي همداسي ښه تكړه ورته د لوي خداي (ج) څخه غواړم ، چي زما د داسي كارونو ملاتړ نور هم وكړي .

راتلونكي كارونه: د همدې كتاب سره سم ما يو د هندسي كتاب ژباړلي ، چي د

المان د پنځم ټولگي څخه هندسه په کي راغلي د څه نونورو شمير پوهنيزو موضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسي ټولي چاپ ته ورکړي شي.

زه يو بل خوب هم لرم، چي همدا اوس دې د يوه بل الجبر کتاب ليکلو باندې پيل وکړم. موضوعات مي په سر کي راگرځي.

که چيرې نور دوستان او شمير پوهان د شمير پوهنې په څانگه کي څه ليکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبيو وړانديزونه لري نوزه به ورسره وعده وکړم، چي دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمير پوهنې کوم کتاب ته يي د ژباړني نيت وي او په افغانستان او پاکستان کي ژوند کوي نو د هغو سره به وعده وکړم چي دلته ورته په دې ټولنه کي او يا د ټولني دباندې د مرستې هلي ځلي وکړم. ځما هدف دادی، چي موږ بايد داسي کارونو ته ملا راوتړو. له ما څخه لت بل څوک نه شته، دا چي ما دا کار سرته رسولی، باور وکړي، چي هر بل افغان يي هم سرته رسولی شي،

په مينه ستاسو ماخان

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
ځ	ځ	ځ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ږ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ک	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ی	ې	ئ ی

الماني الف بي

A a	<i>Al</i>	<i>Al</i>	a
B b	<i>Bb</i>	<i>Bb</i>	b
C c	<i>Cc</i>	<i>Cc</i>	c
D d	<i>Dd</i>	<i>Dd</i>	d
E e	<i>Ee</i>	<i>Ee</i>	e
F f	<i>Ff</i>	<i>Ff</i>	f
G g	<i>Gg</i>	<i>Gg</i>	g
H h	<i>Hh</i>	<i>Hh</i>	h
I i	<i>Ii</i>	<i>Ii</i>	i
J j	<i>Jj</i>	<i>Jj</i>	j
K k	<i>Kk</i>	<i>Kk</i>	k
L l	<i>Ll</i>	<i>Ll</i>	l
M m	<i>Mm</i>	<i>Mm</i>	m

N n	<i>Nn</i>	<i>Nn</i>	n
O o	<i>Oo</i>	<i>Oo</i>	o
P p	<i>Pp</i>	<i>Pp</i>	p
Q q	<i>Qq</i>	<i>Qq</i>	q
R r	<i>Rr</i>	<i>Rr</i>	r
S s	<i>Ss</i>	<i>Ss</i>	s
T t	<i>Tt</i>	<i>Tt</i>	t
U u	<i>Uu</i>	<i>Uu</i>	u
V v	<i>Vv</i>	<i>Vv</i>	v
W w	<i>Ww</i>	<i>Ww</i>	w
X x	<i>Xx</i>	<i>Xx</i>	x
Y y	<i>Yy</i>	<i>Yy</i>	y
Z z	<i>Zz</i>	<i>Zz</i>	z

يوناني الف بی

A α	<i>A α</i>	Alpha
B β	<i>B β</i>	Beta
Γ γ	<i>Γ γ</i>	Gamma
Δ δ	<i>Δ δ</i>	Delta
E ε	<i>E ε</i>	Epsilon
Z ζ	<i>Z ζ</i>	Zeta
H η	<i>H η</i>	Eta
Θ θ	<i>Θ θ</i>	Theta
I ι	<i>I ι</i>	Iota
K κ	<i>K κ</i>	Kappa
Λ λ	<i>Λ λ</i>	Lambda
M μ	<i>M μ</i>	My

N ν	<i>N ν</i>	Ny
Ξ ξ	<i>Ξ ξ</i>	Ni
Ο ο	<i>Ο ο</i>	Omikron
Π π	<i>Π π</i>	Pi
Ρ ρ	<i>Ρ ρ</i>	Rho
Σ σ	<i>Σ σ</i>	Sigma
Τ τ	<i>Τ τ</i>	Tau
Υ υ	<i>Υ υ</i>	Ypsilon
Φ φ	<i>Φ φ</i>	Phi
Χ χ	<i>Χ χ</i>	Chi
Ψ ψ	<i>Ψ ψ</i>	Psi
Ω ω	<i>Ω ω</i>	Omega

↑ ټ په الماني د ښه
د ښه ټرښه

شمیر پوهنیزې نڅښنې

=	مساوي
=(=)	نامساوي (نورو کتابونو کی)
<	کوچنی له
>	لوي له
≤	کوچنی یا مساوي له
≥	لوي یا مساوي له
≪	ډیر کوچني
≫	ډیر لوي
~	ورته یا متناسب
≈	کونګرواینڅ
	همداسی یا بشايي یا په ګوره کوي
≡	کټمټي
	غبرګ
	ناغبرګ
⊥	ولاړ په
△	دریګودی
○	ګردی
⊙	نیمی یا قطر
<	کونج
< (g,h)	د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج
$\overline{AB}$	کرښه، له A و B ته
$\vec{AB}$	له A و B ته لوریزه کرښه

XIII

شمیر پوهنیزې نڅښنې

AB	لینده.....
a	مطلقه ارزښت د.....
i	ایماجینار یوون (واحد).....
e	د اویلر گڼې $2,7182818... = e$
	پي د لودولف گڼې $3, 14149... = \pi$
	د په لور هڅیري یا کونورجنت کیږي $\rightarrow$
œ	ناپای.....
f(x)	د x فنکشن یا په واک چی بلواک مو بللی
	(لوستل یي (f د x یا د f, x لنډ : fx)
$f: x \rightarrow f(x)$	د x خپرونه په f(x) : لیکو: $f(x) \rightarrow x$
h(x); g(x)	دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن
lim	لیمس یا پوله.....
sin	ساین.....
cos	تریگونو متریکي کوساین.....
tan	بلواک تانجنټ.....
cot	کوټنجنټ.....
arc sin	ارکوس ساین.....
arc cos	خیکلومتریکي ارکوس کوساین.....
arc tan	بلواک ارکوس تانجنټ.....
arc cot	ارکوس کوټانجنټ.....
$\log_a$	لوگاریتم و بنسټ a ته
$\lg_{10}$	لوگاریتم و بنسټ ۱۰ ته
	دیکادیکی لوگاریتم.....
ln	لوگاریتم و بنسټ e ته
	طبعي یا پیدا اینستي لوگاریتم

C	کمپلکس ګڼونه.....
$\mathbb{R}$	رييل ګڼونه.....
Z	ټولګڼونه.....
	نامنفی ټولګڼونه يا
$\mathbb{N}^*$	طبعي ګڼونه د صفر سره
$\mathbb{N}$	طبعي ګڼونه.....
D	تعريف یری.....
W	ارزښته یری.....
L	حل یری.....
$P(A)$	د ډيري A پوتنځه یری
M, N, A, B	ډيري.....
$\emptyset$	تشه یری.....
	برخه ډيري.....
	پورته يا لويدي یری (چی بل ډيري خوندي لري)
$\cup$	ټولنه یری.....
$\cap$	غوځه یری.....
CA, A'	د A کومپليمنت.....
$A \sim B$	د ډيريو ورته والی.....
$A \times B$	د ډيريو ځل.....
	لوستل B اتيران A يا - ځل -
$A \setminus B$	توپير ډيري : A بي له B ده
$a b$	دلته : a د b پرويشونی ده يا a b ويشي
$\text{ggt}(a, b)$	د a او b غټ ګډ په ويشونی (لنډ : غ ګ و)
$\text{kgv}(a, b)$	د a او b کوچني ګډ زياتځله (لنډ : ک ګ ځ)

دلته $a \in M$: a د M توکی دی

او $a \notin M$: a د M توکی نه دی

$\forall$ ټولنڅېنه (د ټولو x لپاره باور لري)

$\exists$ د موجودیت نڅېنه: یو x موجود دی

$A \wedge B$ کونیونکشن A او B لیکو

$A \vee B$ دیسینکشن A یا B لیکو

(کله کله الترناټیو)

$A \Rightarrow B$ ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي

$\neg$ نیگیشن یا نه والی

$A \Leftrightarrow B$ د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس A نورو کتابونو کی $\|A\|$

$|A|$ دیرمینانت

$\sqrt[n]{a}$ د a څخه n -مه ریښه

x د اکسپوننشبلو اک

$n!$ د n - فاکولتیت یعنی $n! = 1.2.3...n$

$\binom{n}{p}$ بینومخلوونی

لوسټل: n په p باندې

$]a, b[$ له a تر b واز اینټروال

$$= \{x \mid a < x < b\}$$

$[a, b]$ له a تر b بند اینټروال

$$= \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$]a, b]$ کیڼ واز اینټروال

$$= \{x \mid a < x \leq b\}$$

$[a, b[$ ښی واز اینټروال

$$= \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$\sum_{k=1}^n$$

د زیاتون نڅښه (سیگما)

که د زیاتون نڅښه داسی وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

$$\prod_{i=1}^n$$

نڅښه (پی)

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

۱. د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند (فکر) یا وی (لغات) ته وایي).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند (منطق) څخه کار اخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنې بنسټ، د فکر ډول او فکر کولو قوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس (۳۸۴ تر ۳۲۲ ز. ک. ا) له خوا کینول شوې.

د ریاضیاتو منطق (د شمیرپوهنې سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخې په څیر پرمختګ یا وده وکړه. سم اند د شمیرپوهنې بنسټ دی او د شمیر پوهنې په ټولو څانګو کې ننوتی.

یادونه: سم اند په خپله څټه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دی نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والو لپاره په زړه پورې خونديونې (متن) لرو دی شي. هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کې.

۱.۱. پوهنیزه ژبه او پیدایښتي-یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشونې ده. په ورځني ژوند کې انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبې په څیر د

پوهنۍ (علم) لپاره بسيا نه کوي، ځکه چې د ځنو لغاتو مانا کره یا ټينگه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چې په طبيعي ژبه کې يو لغات بيلی بيلي ماناوې لري لکه لور(د ريلو لور) او لور(په کومه لور) او يا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټيپر او منگريټي، چې همغه يو څه يا شی په گوته کوي.

په مسلکي نومونو کې يو څو ترمينولوجي(Terminology لاتين، يونانی): په يوه مسلک کې شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولگه او په همدې توگه د هغوي بنسټونه ، منځ ته راوړل کيږي، چې د کلمو موخو(هدفمند) کره يا کلک ايښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ويناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبې ويناوود څخه گټه اخلي.

په دې ډول په شمير پوهنه يا رياضياتو کې هم يوه پوهنيزه ژبه منځ ته راغلې، چې له پيدايشي يا طبيعي ژبې او يوې ځانگړې ترمينولوجي سره يوځاي شوې يا په بل ډول : د پوهنيزې ژبې او يوې ځانگړي ترمينولوژي ټولگه ده.

له دې امله شمير پوهنه په يوه لوړه کچه ټيکوالی(Exaktheit) ، په يوه لنډ، روښانه ، څرگند او له دې امله يو ليدور « وينا ډول» درلودی شي.

شمير پوهنه او سم اند يا منطق دواړه د يوې سمبوليک ژبې څخه د کارونې يا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ايښوول کيږي، چې مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانگړو ماناوو سمبال دي.

د شمير پوهنۍ پوهنيزه ژبه کې غوښتنه داده، چې بايد په کلکه او روښانه توگه د ريښتونو (Realität واقعيتونو) شيانو Objects ، د هغو شميرنيزو څيرو او د دې لپاره پيدا يا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپير وکړي. شيان له انسانانو احساسيږي، د يوه ذهنيت (Abstraction ابسترکشن) له لارې په يوه کلیمه څيره (متصور ؟) کيږي. او شته والی يې د يوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څيره کوونه يې د شميرنې شيان دی او يوه «نخښونه» غوره کوي، چې د يوه نوم اوزيات وخت د يوې نخښې په څير ځان نيسي، د بيلگې په توگه : لکه هر طبيعي گڼ(عدد) د يوې نخښې داسې په نامه د عددنښې (گڼنښې) له لارې انځور يږي. دا نخښه څيفر Ziffer يا گڼنښه(عددنښه)، چې عربي همغه صفر دی، بلل کيږي. داسې نخښونې د بنسټيزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سيستم کې بنسټيز څيفرونه يا گڼنښې په لاندې ډول دي:

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹.

۱۰۲۰۱ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

۱۰۲۰۱ ثابتې، متحولې او ترومونه (۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو ترنې په نڅېنو (سومبولونو) انځورېږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نڅېنې

- د ثابتو (تل همغو) لپاره نڅېنې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نڅېنې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷، ۱۲، π ، e او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو (متحولو) لپاره نڅېنې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا ست (په ډیرۍ پوهنه کې روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکي لپاره یوه نڅېنه ده، کومه چې د اووښتونو یا متحولو بنسټیز یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نڅېنه کیږي او کله کله په اندکس (ز) اندکسونو یا پیژندنڅېنه index (ز) پیژندنڅېنې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نڅېنه کیږي.

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1, 2, 3 \dots$

- اړیکنڅېنې: دا د شیانو اوگنونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نڅېنې دي لکه $<, >, =, \leq, \geq,$

- د نښلونو، کارونو، ترنو یا عملیونڅېنې: لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-، ځل- (ضرب-)، او ویش-یا تقسیم نڅېنې: $+, -, \cdot, /$ ، *

- تخنیکي نخښی : لکه سیمیکولوم (,, ,), نوکان () او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی (اووښتوني)، ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکي نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړۍ ترې منځ ته راځی.

(۱) ثابتي((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتيزي) ،

متحولي : اووښتونی یا اووړیدونی یا واریابلی او ترمونه

بیلگه :

الف : د $3.(2a + 1) - a + 144$ یوه د نخښو لړۍ (ترادف) ده

ب : $3a - 6 = 11x$ ، $(12 - b)$ ، دا د نخښو لړۍ نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابر نخښي پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یوځاي ثابتي (همغه)، اووښتوني(متحولي، واریابلی) نښلونې او تخنیکي نخښي کارول شوي وي، یانې اړیکي نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولري پیژندډیری یا تعریفست هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټست یوه برخدیری او یا هغې سره برابر برخه ست یا - ډېری ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بېرته د بنسټدیری توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکل شوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتوني یا واریابلی د پیژندډیری د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو (اکه: T, T_1, T_2) په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتوني ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

$T(x); T(x,y)$

بیلگه :

الف : ترم $126 + 3/4$ ، چې اووښتونې يا متحولې نه لري په T سره په نڅښه کوو او

$$T = 126 + \frac{3}{4} \quad \text{يا} \quad T = 126 + 3/4 \quad \text{ليکو:}$$

ب : ترم $10 + 2x$ چې اووښتونې يا متحولې x لري يانې $T(x) = 10 + 2x$ د

اووښتونو بنسټيزې يا -ډېرې دې يا د طبيعي اعدادو ډيرې N^0 وي

تعريفيزې د بنسټيزې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې يا واريابلی x په ځاي

يو پيدايښتي گڼ يا طبيعي عدد 2 کيږدو، نو د ترم ارزښت دی : $T(2) = 14$

$$\frac{x+2y}{x} \quad \text{يا} \quad (x+2y)/x \quad \text{پ:}$$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په $T(x,y)$ سره يې په نڅښه کوو . د اووښتونو يا متحولو بنسټيزې دې د پيدايښتي يا طبيعي اعدادو سټ N وي، نو د x لپاره تعريفيزې N^0 ده . د y لپاره N (پيدايښتي گڼونديزې N^0 تعريفيزې لپاره ترم نه دی تعريف ياپيژند نه لري)

د $x = 0$ لپاره ترم نه دی تعريف يا پيژند ند لري

$$T(x, 2y) = \frac{x+2y}{x} \quad \text{يا} \quad T(x, 2y) = (x,y) / x \quad \text{د ترم}$$

ارزښتشميرنه د $x=2$ او $y=3$ لپاره په دې ډول ده : $T(2,3) = (2+6) / 2 = 4$

يادونه: د گڼونو لپاره دې دريمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته گڼونديزې ورکړ شوي دي .

دا چې انسان د خپل چاپيريال د ټولو شيانو او پيدايښتونو سره لاس په گريوان دی، نو پوښتنې او هيلې رامنځ ته کيږي، غوښتنې لري او ويناوې کوي، په کومو ويناو کې،

چې شيان او ريښتوني (واقعيتونه) بيرته هنداره (منعکس) کيږي يا په يوه څه يا شي، چې وينا کيږي، نو موخه ترې د هغه څه ريښتون حالت يا ځاننيونه ده. يوه وينا په واقعيت کې ټيک هلته ريښتيا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت يا بهتره شي ځاننيونه په ريښتوني شته يا موجود وي، په بل حالت کې دا وينا نارينتيا (غلطه) ده. مور نيسو، چې دا څه دې په شميرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پريکړه دې پرې کيدی شي.

پژند(تعريف) ۱۰۱ :

وينا د يوه شی ، څرنگوالي (چې څنگه دی)، د هغه بيرته هندارونه يا منعکسونه ده. (دا په دې مانا، چې وينا يو شی په وينا کې همغښتی بنایي لکه څنگه چې دی له دې امله شي هندارونه يا منعکسونه)، چې د ژبې له لارې وړاندې کيږي يا په همدې ډول په نڅېه کيږي.

يا په بل عبارت وينا د کلیمو داسې هدفمند يوځایوالی يا يوځای اېښوول دي، چې د يوه شی حالت (ځاننيونه) يا شکل او د شيانو ريښتوني اړیکې بيرته هنداره يا منعکسوي او موخه وردي، چې د هغه دريښتياوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي.

يا په بل ډول :

د وينا لاندې سړی يو ژبنی يوون، يا يووالی (واحد unit, Einheit) پوهيږي، کوم چې د شي اړیکې (د شي څرنگوالي) بيانوي. دلته دا مهمه نه ده، چې دا وينا په کومه ژبه، په پيدايښتي (طبيعي) او که په مصنوعي ژبه ويل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وينا د طبيعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده.

په بل او ورځني ډول: يوه وينا يوه جمله ده يا فرمول دی، چې يا رښتيا او يا نارښتيا ده. داسې هم ويل کيږي، چې وينا يو «رښتيا ارزښت»، «رښتيا يا نارښتيا»، لري.

یعنی: د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا «رېښتیا ارزښت» (رېښتیا یا نارېښتیا) دی. نور خویونه په راتلونکي کې نه څیرل کېږي.

ویناوې د لاتین په لویو تورو A, A^* په نڅېنه کوو او داسې نور.

۱۰۲۰۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یوای یو ممکن «رېښتیا ارزښت» لروډی شي، دا په دې نامه، چې وینا یا رېښتیا ده او یا نارېښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ).

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبني افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چې د وینا ارزښت حتماً باید څرگند یا معلوم نه وي. که بالاخره ټوله پوهنه د رېښتیا لور غوره کړي وي، بیا هم موږ څرگند ژبنيو موادو ته اړ یو، چې د هغه شي حالت (ځانښوونه) افاده کړای شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چې پریکړه وشي.

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولگیو یا کلاسو ویشل کېږي، د رېښتیا ویناو ټولگی او د نارېښتیا ویناو ټولگی یا کلاس (صنف).

که وینا رېښتیا وي، نو رېښتیا ارزښت یې رېښتیا دی او په w سره یې ښایو، که وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا ولري، نو په f یا، نه، یې ښایو او وایو، چې د وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا دی.

تکرار: هره جمله، چې «رېښتیا ارزښت» (رېښتیا یا نارېښتیا) ولري، وینا بلل کېږي.

شميرپوهنيز سم اند (منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلگي:

غونډاله (جمله)

الف : « د کابل سين د کونړ له سين سره گډيري » ريښتيا وينا ده .

ب : $3 + 4 = 7$ ريښتيا وينا ده

پ : « ۶ لومړنی گڼ دی » دا نارينښتيا- يا ناټيک وينا ده . (د اعدادو

په برخه کې لومړني اعداد يا گڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : « ته د څو کالو يې ؟ » نه شي کیدی يو ريښتيا ارزښت باندې تنظيم شي . له دې امله وينا نه ده .

نورې بيلگي :

ويناوې دي:

(دپيتاگوراس (فيثاغورس) جمله .

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعگانو (څلوريو) زياتون (جمعه) د هيپوتينوزي (اوږده اړخ قابمي زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلورۍ يا مربع سره برابر دی.

نورې بيلگي :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځای یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسید وېشایي CO_2

د دې پرځت یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار; NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنگ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت» ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

$5 < 3$ پنځه له دریو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یا اګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو.

په لاندې کې به وڅیړو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخې په څیر په ځان کې خوندي (لنډ : خوندي) لري . داسې ویناوو ته یوځای شوي یا یوځای ایښول شوي یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړئ ! مرکبي ویناوې.

د دې لپاره بیلگه راوړو « که د کوم گڼ(عدد) a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشور وي، نو دا عدد یا گڼ په 3 ویشور دی، یانې که عدد 1521 ولرو، نو د دې عدد پرته جمعه $9=1+2+5+1$ په 3 ویشور ده له دې لاس ته راځي، چې پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشور دی.»

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشور یا توتته کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي.

لکه : سپین غر یوه خورا جگه څوکه لري

یوه بله بیلگه د یوځای شوي (خنځيري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي.

څرگنده ده، چې دواړه ساده جملې د برخویناوو په څیر یوځای شوي ویناوې دي: « سپینغر خورا خواریکښ دی» همدا ډول « هغه (سپینغر) پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي».

دا ویناوې کیدي شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیا ارزښت یې همغه پاتې شي.

د بیلگې په توگه:

۱ - سپینغر خورا خواریکښ دی. یا هغه پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چې هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی.

۳ - دا چې سپینغر پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی.

۴ - سره له دې، چې هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی.

گورو، چې په دې ډول یو له بل توپیریدونکي تړلې یا خنځيري، یا یوځای شوی ویناوې جوړیږي، چې په خپله رښتیا ارزښت کې یو له بل توپیر کیدی نه شي. د دوي توپیر د

دوي يو له بل سره تړلو څرنگوالي له لارې مخ ته پروت دی يا رامنځ ته شوی دی. په لاندې کې به ممکنه «ویناتړنه» (يا نور هم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونيول شي.

پیژند ۲۰۱ :

یوه «ویناتړنه» يا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ وینې (افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې يا ډیرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند يا منطق سټیرینڅیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي.

بیلگې

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي.

ب : سپین يا راځی او يا لوبه نه کیږي.

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفرې او نه دننه رفرې فاول يا ناسمي ولید.

۱ ۰ ۲ ۰ ۴ ویناتړنه يا وینابلواک (- فنکشن يا - تابع)

د ویناتړنو (عملیو) په هکله مو پورته بیلگو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او يا « سره له دې » ونیسي تل یوه یوځای شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځای غواړو «ریښتیا فنکشن يا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو يا وینا اووښتونو (وینا متحولو)) لپاره سومبولونه $p, q, r, \dots$ او يا a, b, p ، وکارول شي يا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانې د یوه یو

ځاينونکي (يوځائيز يا يوگونې) بلواک يا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو بڼه راځي، له تابع څخه.

يادونه: د بلواک يا تابع کلمه وروسته څيرل کيږي، دلته د بلواک يا فنکشن پرځاي وينا تر نه يا عمليه بسيا کوي. دا ځنی ويونه (لغات) ستونځی لري، چی د بڼونځي زده کوونکي يې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی (نفي) Negation

د وينا تر او يا وينا تر نفي (عمليي) «نه والی»: د یوې وينا P نه والی هغه وينا ده، چې هلته او یواځی هلته د ريښتيا ارزښت نارينښتيا لري، چې P ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري.

موږ د وينا P نه والی نفي په P نه سره بڼايو، شميرپوهنيزه نڅښونه يې په لاندې توگه ده: په يوه جدول کې ريښتيا فنکشن يا ريښتيا بلواک کې داسی څرگند وو (دا چې زه کله کله هغه شميرپوهنيز سومبول د نه p لپاره نه شم ليکلی، نو دا به همغسې p نه وليکم.

P نه يا $\neg$	P
F	w
w	f

د یوې وينا P تکرار نه والي يا بيا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې يې گورو، هم خورا څرگنده ده.

p	$p \neg$	$p \neg \neg$
w	f	w
f	w	f

دوه واره نه والی د همغې لومړنۍ وینا رښتیا ارزښت لري

په پیدایښتي ژبه کې نه والی په «نه» یا «نا» خپل رښتینوالی مومي • «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی • دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی «نه والی» دی •

نه والی ته بیلگه : د وینا $A \neg$ نه والی : “ $3 < 7$ ”, وینا نه A ده: دا چی A رښتیا ده، نو $A \neg$ نارښتیا ده •

ترنه (عملیه) یا کنجکشن Conjunction (لاتین: ترنه، دلته د «او (and)» ترنه یا تراو):

وینافورم یا — ښه:

د وینا په څنډ یا - مخامخ یا - برعکس وینا ښه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا — ښی لپاره بیلگی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه یا عقیدې:

۱ — هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لار شه

۳ — شین یو ښه رنگ دی •

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنځنۍ ولیکل شي، یوه وینا ښه منځ ته راځي • یوه د نڅښو لړۍ کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

$3 + x < 5$ د بنسټیزو رشو N کې نه رښتیا ده او نه نارښتیا • دا له دې امله وینا نه ده • که چېرې د واریابلي یا اووښتونې یا متحولې پر ځای • او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي •

که چیرې په ځای یې نور د پیدایښتي گڼونو توکی ځای په ځای شي، نو بیا نارینتیا ویناوې
منځ ته ترې راځي.

دا چې اووښتونې یا متحولې د بنسټیږی یا بنسټ سټ څخه په خوښه توکی اخستلی شي،
نو له دې امله دا اووښتونې د خپلواک یا ازاده اووښتونې (متحولې) په نامه یادېږي.

پیژند :

یوه وینابڼه د نخبو لړۍ ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اووښتونې (متحولې) لري او د

- د دې اووښتونې په ځای د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا

- د دې اووښتونې تړلو څخه د کوانتفیکاتورونو (کوانتورونو) په مرسته یوه وینا

جوړېدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه
یاکنجکشن conjunction دی. له گرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو «
تړونټکی، تړاولغات» ښایي په سم اند کې تړنه یو څرگند (دوه ځایرونکی یا دوه ځاییز یا
نوره هم ښه دوه گونۍ) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځایینونکي (نوره هم ښه : دوه ییز
یا دوه- گونۍ) فنکشن یا تابع (بلواک) تعریفوي یا پیژنی.

د « او » تړنه او نخبه یې $\wedge$

پیژند ۳۰۱ :

$p \wedge q$ دوه ویناوې p او q یانې د « او » یوځایوالی p او q یوځای او یوځای هلته یو

رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې p او q دواړه رښتیا ارزښت رښتیا ولري. که له دې

څخه یوه وینا هم نارښتیا وي، نو بیا د « او » تړنه نارښتیا ده.

د ترني نخبه ددوه ويناو p او q ترمنځ ليکل کيږي $p \wedge q$ او ويل کيږي p او p

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » ترني ته بيلگه :

د دوه رښتینو ویناو د A وینا: $3 < 7$, او د B وینا: 3 یو لومړنی گڼ دی رښتیا وینا $A \wedge B$ ده « 3 له 7 کوچنی او لومړنی گڼ هم دی » .

يادونه: موږ گران لوستونکي به سره یوځای فکر وکړو، چې دا پریمکنونه لومړي او که لومړني گڼونه وېولو . زه فکر کوم، چې لومړي گڼونه لومړنی نه دي . دا ځکه لومړي گڼونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون څخه لومړی گڼونه جوړیږي . موږ به یې زیاتون په پام کې راوړلو، چې : $8 = 5 + 3$

د دوه ویناو دا ترنه یا کنجکشن، چې مختلف رښتیا ارزښتونه ولري یانې د A وینا: 3 , $3 < 7$ (رښتیا او د B وینا: « 3 یو جوړه گڼ دی (نارښتیا)، نو $A \wedge B$ وینا: چې 3 له 7 کوچنی دی او جوړه گڼ دی » (نارښتیا) ده . دا وینا ترنه وینا ارزښت نارښتیا لري .

د دوه ویناو د « او » ترنه د A وینا: $3 > 7$ او د B وینا « 3 یو جوړه گڼ یا جفت عدد دی » یوه نارښتیا وینا ده : 3 یو لومړنی گڼ دی او له 7 لوی دی .

و مو لیدل، چی د «او» ترنه او یا کنجکشن په ورسره بلده (عادي) توگه هلته جوړیږي،
چی دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټی «پتیدځاي» پیدا کړ او دا پتیدنه یې پټه وساتله» • کیدی شي له «مگر» «سره له دي
هم» «په همدې ډول» ترنه وویلېه – یا افاده شي •

پورته ډول، د بیلگې په توگه: په پټټکي کې «که سپین پټ شي او هوسی د هغه د پتیدو
ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه بنایي»، نو داسې وایو «او» یا «هم»

هوسی د سپین د پتیدو ځاي پیدا کړ «او» دا پتیدځاي یې پټ واسته •

(۱) هلمند مور(بډا) شو او هیواد یې پرېښود •

(۲) سره له دې، چی برلین کوچنی ښار دی هلته د منی د المپیک لوبې کيږي

(۳) ۱۵ گڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونی دی

په ټولیزه توگه د «او» ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملې ټولې برخې
رښتیا ارزښت رښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کې ونیول شي • په وینا ترنه کې
کیدي شي زیاتي وینا برخې سره په ترنه «او» وتړل شي لکه «هغه راغی، ویي لیدل او
بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ • ۴ :

د «یا» (or) ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative

الترناتیو یا د «یا» ترنه» دا په «یا» بیرته ورکړ شوي «جمله ترنه» تل ژوروالی

ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه

ترې نه تیریدونکی «یا» موخه ده • دیسجنکشن یا د «یا» ترنی پیژند یا تعریف

یواځنی دی او دا $\vee$ د یا ترنځښه ده.

د دیسجنکشن نڅښه د دوه ویناو p او q ترمنځ ځایول کيږي $p \vee q$ او ویل کيږي p یا q او

په لاندې ډول څرگندیږي •

p	Q	$p \vee q$
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيري، چې ديسجنکشن يا د «يا» ترنه $p \vee q$ يو داسې رېښتيا تابع (بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رېښتيا فنکشن رېښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د «يا» ترني يو غړی د رېښتيا ارزښت رېښتيا ولري يا واخلې. که د ديسجنکشن دواړه غړي نارېښتيا وي نو $p \vee q$ هم نارېښتيا دی. دا د رېښتيا فنکشن کې د ځايوني «يا» څخه بل څه نه دي. يوه د «نه خونديکوني» يا «نه ځايوني» يا «په برکې نه نيوني» د «يا» ويينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مگر په پښتو کې «يا» او يا «...» ليکل کيږي.

بيلگه (د «يا» ترني ته):

د دوه رېښتينو ويناو د «يا» ترنه د A وينا: $3 < 7$ ، او د B وينا: « 3 د 6 پرويشونی دی» يوه رېښتيا وينا $A \vee B$ ده: « 3 له 7 کوچنی دی او د 6 پرويشونی هم دی».

د دوه ويناو ترنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا $3 < 7$ ، رېښتيا او د B وينا: $3 = 7$ ، (نارېښتيا)، نو $A \vee B$ ده، چې $3 < 7$ يا $3 = 7$ دا وينا ترنه د رېښتيا ارزښت رېښتيا w لري.

د دوه نارېښتيا ويناو د « يا » ("Or") ترنه:

د A وينا : $3 > 7$ او د B وينا: ۳ يو جوړه گڼ (جفتت عدد) دی يوه نارېښتيا وينا ده: $A \vee B$

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه گڼ (طاق عدد) دی »

الترناتيو Alternative يا انتيوالنخ Antivalenz ويناوې : دا د « يا » وينا ترنه بايد د « يا ... او يا » سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارېښتيا ده، که چيرې دواړه ويناوې رېښتيا وي *

بيلگه : (دوه الترناټيو ويناو ته ، چې رېښتيا وي)

د وينا $3 < 7$ او « ۳ يو لومړی گڼ دی » د الترناټيو په نامه داسې دی « ۳ يا له ۷ کوچنی دی او يا يو لومړی گڼ دی » نارېښتيا دی *

بيلگې : (نه والي، کنجکشن، ديسجکشن ته)

يادونه: په لاندې w (Wahr) د رېښتيا او f (Falsch) د نارېښتيا لپاره کارول شوي.:

وينا تر او

A	π پي ټولگڼ دی	f
B	π ايراشنل گڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دی	W
D	π پي له درې کوچنی دی	f

<u>A</u>	π ټولګن نه دی	W
<u>C</u>	π کوچنی برابر له صفر	F
$A \vee C$	π ټولګن او له صفر لوي دی	f
$B \wedge C$	π ايراشنل او له صفر لوي دی	W
$A \vee C$	π پي ټولګن يا له صفر لوي دی	W
$A \vee D$	π ټولګن يا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګې دمخه هغه فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم گورم . په دې بیلګه کې الترناټیو یا بدیل شته دی، یانې د « او یا » امکان شته . دا د « او یا » کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي . یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي .

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او څیره دې یې په پام کې راولی . په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د «او» ترنې» رینټینوالی لپاره دوه پرلپسې (لړۍ) شالتونه تړل شوي دي،

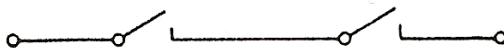


Bild 7.1

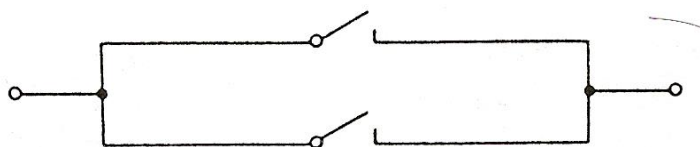


Bild 7.2

کمپلکس رېښتيا بلواک يا - فنکشنونه

دا وروستی بیلگه په گوته کوي، چې داسی یوځای شوې ويناوې جوړیدی شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي *

که دا ساده وينا که چې «په تياتر کې نن لوبه کيږي» په p پس له دې جملې کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (رېښتيا - بلواک يا رېښتيا فنکشن « $p \vee p$ دی * د دې لپاره هم د رېښتيا ارزښت فنکشن ورکول کيږي * د رېښتيا ارزښت لپاره p له دې څخه نه p يا نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نه $p \vee p$ جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د یوې وينا نه والی

$p \vee p$ نه	P نه	p
W	f	w
w	w	f

لاس ته راوړنه يا نتیجه هېکې کونکې نه ده یوه وينا نه $p \vee p$ تل رېښتيا ده، بی له ځانگړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رېښتيا ارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وینې یا افادې، چې د هغې رېښتيا بلواک کټمټ يا $\text{identisch}(\text{identic})$ رېښتيا دی (دا په دې مانا، چې که د وينا او وینتونکې یا واریابې ته هر رېښتيا ارزښت ورکړ شي يانې رېښتيا یا نارېښتيا تل د رېښتيا ارزښت رېښتيا غوره کوي)، وينا سم اندیزه قوانین بلل کيږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وینې یا افادې، چې د هغو رېښتيا ارزښت بلواک کټمټ نارېښتيا دی (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووینتونې په هره وينا ارزښت وينا نارېښتيا ارزښت غوره کوي)

کونټرا-ډيکتوريکي وينا بلل کيږي، ورته ويناوې کونټراډيکشنونه contradiction (د دوه ويناوو مخامخوالی يا – تضاد)

بيلگه :

رېښتيا ارزښت دې د ويښي يا افادې نه $(p \vee q)$ لپاره وشميرل شي په همدې وخت کې دې د نه $p \vee q$ رېښتيا ارزښت هم وشميرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښايو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$p \dots q \dots p \vee q \dots \neg(p \vee q) \dots \neg p \dots \neg q \dots p \wedge q$
$w \dots w \dots w \dots f \dots f \dots f \dots f$
$w \dots f \dots w \dots f \dots f \dots w \dots f$
$f \dots w \dots w \dots f \dots w \dots f \dots f$
$f \dots f \dots f \dots w \dots w \dots w \dots w$

دا چې د مخ ته پراټه جدول څلورم او اوم درځ يو په بل پريوځي يا يو د بل سره برابر دي، نو ويښي يا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرگند ډول همغه رېښتيا بلواک يا ځنګښتونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارېښتيا ده، چې p يا q ،، او ،، نه q او نه p ،، همغه رېښتيا - (او په دې ډول همغه نارېښتيا-) شرايط لري، که د p او q په ځای بلې يوي ليدونکي جملې ځای نيولی وي. دا ډول دوه وينا تر او وينا تر نه (او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عمليو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عمليي ارزښت طبعاً همغه نه پاتيري، لکه د بي نوکانو عمليي.

ايمپليکیشن implication (لاتين: ورراگډول، خورول):

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې «که...» نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایملیکیشن سومبول $\Rightarrow$ چې دا سومبول د دواړو ویناوو A او B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدې ډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس (Prämisse) (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون (Konklusion) لاتین: پای لاس ته راوړنه) وایي. د دوه ویناوو ایملیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي. په بل ډول رښتیا دی.

د دوه ویناوو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرگندیدی شي د لاس ته راوړنې یا ایملیکیشن یا پسي راتلنې، په ځان پسي لرنې سومبول $\Rightarrow$

P	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسې یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناوو A او B ټیک هلته یو نارښتیا یوځای شوي ویناچې په $p \Rightarrow q$ (سره ښایو).

کله چې لومړۍ برخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوټري یا پروګرام ژبه کې داسې ویل کیږي: If....., then.....

کومې ژبنۍ افادې یا وینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

راگر خیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

نارښتیا ده، که د جملې لومړۍ برخه رښتیاوي او دویمه نارښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړۍ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي (که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نارښتیا وي) پرابلمونه نه پېښوي، په دې حالت کې ټوله وینا رښتیا ده، که لومړۍ برخه وینا نارښتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله نارښتیا ونه لیدل شي (که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پریڅپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشنې پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا (بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی (په بل ډول یې: $p \supset q$ لپاره اړین شرط دی)

ورته والی: یو ارزښتوالی (برابر ارزښتوالی) Equivalent

که دوه ویناوې q او p خپله ترڅه په «ټیک هلته، که» په هم دې ډول «هلته او هلته، که» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وايي. د ایکویوالنت سومبول دی: $\approx$ د دواړو ویناوو p او q ترمنځ دا سومبول پروت دی: $p \approx q$ په دې مانا، چې p ټیک هلته که q. ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له q څخه p

د دوه ویناوو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارښتیا وي.

دا شي څرنگوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

$P \Leftrightarrow q$	q	p
W	w	w
F	f	w
F	w	f
W	f	f

سیده او مخامخ یا په خټ دې په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په خټ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی.

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا فنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو ترمنځ سم اندیزه یا منطقي برابرازبسته بلل کیږي، که د ویناو رښتیا ارزښت د تر نوینا ارزښت سره یو په بل وځوري یا یو بل سره برابر شي. دا د یو وینا ارزښت جدول له لارې څرگندیدی شي. ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی. په لاندې جدول کی به وگورو، چی دریم او شپږم درځونه، مټي یا ستنی څنگه یو بل سره ځان نیسی یا گورو، چی سره یوازښته دي.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) (q \Rightarrow p)$
W	w	w	w	w	W
w	f	f	f	w	f
F	w	f	w	f	F
f	f	w	w	w	w

ورته والی اړیکې د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) (q \Rightarrow p)$$

دا ورته والي ويناټرنه موږ ته دا اجازه راکوي، چي يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو. له دې څخه پيچلو ترنو کي لکه د شالت الجبر کي کار اخستل کيږي.

د دې ورته والي ويناټرنې غوره بيلگه ده، دي مورگان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1).....(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

$$(2).....(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريوتيو قانون:

$$(3) [p \wedge (q \vee r)] \sqsubset [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$(4) [p \vee (q \wedge r)] \sqsubset [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

۱ • ۴ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده ټوليز کيدی شي. د بيلگي په توگه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چي دا فورمال وويلي - يا افاده کړای شو: دلته د ويناو پر ځاي د وينا فورم څخه خبري دي، يا غږيږو. دا داسی ژبنی ويني يا افادې دي، چي د شيانو لپاره واريابلې يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادي ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي. بيلگي يی په لاندې ډول دي

لومړی : «پر دوه ويشونی دی»

دويم : «z يو هوار څلورگودی (څلور ضلعي) دی»

دریم : «u له v څخه لوي» دی او داسی نور

تر هر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتيا يا نارښتيا وينا لاس ته راځي. که په دويم کې د z پرځاي «ډيرگودۍ» (کثيرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو يوه رښتيا وينا لاس ته راځي. که په لومړي کې x د 7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو يوه نارښتيا وينا لاس ته راځي. دريم يوه اړيکه (ريليشن) ده، چې هلته د انفراديو د اېښولو ترتيب هم يو رول لري. دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتيا وينا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي. د فورمال سم اند په ژبه د پرديکات په شکل (له دې امله دې د سم اند برخې ته د پري ديکات first-order logic سم اند يا منطق وايي).

بېرته داسې ليکو $P(x), Q(z), R(u,v)$

يوه بله کارونه يا عمليه شته، چې له وينا ښي څخه وينا جوړوي. چې کوانتيفيکيشن Quantifikation بلل کيږي. دا وينا هغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وينا ښي افراد همغه خويونه ولري، چې ټول وينا (Allaussage) ورته وايي. يا چې په پوښتل شوي چاپريال کې داسې افراد شته وي، چې همغه خويونه ولري، دې ډول وينا ته موږ د شتون يا موجوديت وينا يا Existenzaussage وايي. موږ په بېلګه کې يې استعمال لاندې را په ګوته وکړي

څلورم: (پيدايښتی يا طبيعي) ګڼونه يا اعداد شته، چې په دوه ویشل کيږي

پنځم: ټولي څلورۍ (مربع) هوارې ډيرگودۍ يا کثيرالاضلاع دي.

د ټولکوانتور يا ټول وينا لپاره نخښه $\forall$

د شتون- يا موجوديتکوانتور يا شتون وينا لپاره نخښه $\exists$

يادونه: د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څير ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څير ده. په پام کې دې وي، چې د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (وياريا بلې يا مجهولې) ورکول کيږي.

څلورم ۱: $\exists x \in P(x)$

داسې يې لولو، چې يو x په $P(x)$ کې شته

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسې لولو: د ټولو z لپاره، چې په $Q(x)$ کې پروت دی (یا د ټولو 0.0 له 0.0 څخه)

دا سومبول $\exists$ دا مانا لري، چې «کم له کمه یو 0.0 شته» د وینابنۍ او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د «شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتوني ځای په ځایونه شته وي کومه چې وینابنه رښتیا وینا کوي.

بیلګې (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوې)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل: یو داسې رییل گڼ یا عدد x له (په) R (کې) شته، د کوم لپاره چې $x+1=0$ باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلگنډیرۍ یا ریل اعدادو سټ R توکی دی او $\in$ په دې مانا دی، چې توګي له 0.0 دی.

دویم: $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له (په) R څخه (کې) شته د کوم لپاره، چې $x^2+4x=0$ باور لري)

دریم: $\exists x \in R: x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلگڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4=0$ باور لري)

: $(-2, 2)$

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلگڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرې $x^2+1=0$ باور ولري

داسې ويناښي هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ ټولو توکو لپاره رښتيا وينا شي.

بيلگه: ويناښه « x په 2 ویشونی دی» د جوړه گڼونو هریوه لپاره رښتيا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دی، چې «د ټولو x لپاره» د ويناښي او په همدې پورې اړوند د وينا متحولو ډېرۍ يا ست (وينااووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ) ترڅه له دې سومبول سره يوه Universalaussage يونيورزالوينا يا ټولويانا منځ ته راځي. په دې مانا چې د دې متحولو ډېرۍ (اووښتونډيرۍ) هر توکی لپاره د ويناښي څخه يوه رښتيا وينا جوړيږي.

جمله : (Universalaussage) يونيورزال- يا ټوليزي وينا يا ټولويانا لپاره

$$(1) \dots \forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه گڼونو (جفت اعدادو) لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دی)

$$(2) \dots \forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رييل اعدادو x لپاره، کوم چې له يوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتيا ټوليزي وينا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وينا نارښتيا ده، ځکه چې دا د $0 \leq x \leq 1$ لپاره باور نه لري، پس دا وينا د ټولو ريل عددونو لپاره باور نه لري.

۱ ۰ ۵ اړين - يا ضروري- او پوره کيدونکي شرطونه

د ايمپليکيشن سومبول $A \Rightarrow B$ («که A نو B ») «له A څخه B لاس ته راځي» يا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

په شمیرپوهنه کې ځانگړي فرمولونه شته.

الف) « $A \supset B$ » لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « $A \supset B$ » لپاره یو اړین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانې له آخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږي یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه (فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړینه یا ضرور ده، چې آ پوره شي.

بیا: وینا باور لري.

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلگي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ - وینا A : « n پر ۶ ویشونی دی»

وینا B : « n پر ۳ ویشونی دی»

$$A \Rightarrow B$$

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ۶ ویشونی وي.

که n پر ۶ ویشونی وي، نو پر ۳ هم ویشونی دی. دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې n که پر ۳ ویشونی وي، پر ۶ دې هم ویشونی وي. د بیلگي په توګه n پر ۹ ویشونی دی، مګر په ۶ نه دی ویشونی.

۲ - وینا A : « $n > 7$ »

وینا B : وي دې: $n > 6$

$$A \Rightarrow B$$

د دې لپاره دا پوره کيدونکى دى، چې يو رييلگن له ۶ څخه لوي دى. که اړيکې، چې
ن له ۶ لو دى، باور ولري

داسې رييلگنونه هم شته، چې له ۶ څخه لوي دي، مگر له ۷ څخه لوي نه دي. د بيلگې په
توگه ۵، ۶ يا شپږنيم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وينا ب باور لرل غوښتونکى يا اړيکې يا ضرور دى، د دې
لپاره، چې وينا A باور ولري.

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري.

بيلگى د اړيکې (ضروري) شرطونو لپاره:

۱ - د دې لپاره، چې يوگن n پر 6 ووېشل شي، اړين (ضرور) ده، چې دا گن پر 3 وېشونى
وي. يوگن، چې پر 3 نه وي وېشونى، نو پر ۶ هم وېشونى نه دى.

۲ - وينا A : « څلور گودى يوه څلورى يا مربع ده »

وينا B : « څلور گودى څلور ولاړ کونجونه لري » $A \Rightarrow B$

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورگودى يوه مربع (څلورى) ده دا خويونه دي، چې څلور
ولاړ کونجونه ولري، که ټول کونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلورى نه ده که يوه
څلورگودى څلور ولاړ کونجونه ولري اړين نه ده، چې څلورى يا مربع دې وي.

د برابروالي يا برابر ارزښتي (ايکويالنت) سومبول»

$$A \Leftrightarrow B$$

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شمير پوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې
A د B لپاره يو ضروري او پوره کيدونکى شرط دى. « دا وايي، چې A ټيک هلته
باور لري، کله چې B باور ولري

بیلگی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱- وینا A : « گڼ یا عدد n پر ۶ ویشونی دی »

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی »

$$A \Leftrightarrow B$$

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ۶ ویشونکی دی، که دا عدد پر ۳ او ۲ ویشونکې وي.

۲- وینا A : « څلورگودی یا څلورضلي یوه څلورۍ یا مربع ده »

وینا B : « څلورگودی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا

ضلي »

$$A \Leftrightarrow B$$

ددې لپاره، چې څلورگودی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه (ضلي) ولري.

۱ ۰ ۶ د شمیرکلمو یا ویو (لغاتونو) شمیرنیز مفهوم (ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمې ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلې او له مخامخوالی (تضاد) ازاده وي. په عامو خبرو کې کله که کلیمې راځي، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانگړي ماناوې اخستل کېږي، خو په شمیرپوهنه کې داسې نه ده.

د شمیرنې ټاکنې یا پیژندونه (تعریفونه) د ټیک څرگندې پوهنې یوه نه پریښوونکې سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای.

جمله څه شی دی ؟

ټولې رېښتوني ويناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کېږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري .

اکسیوم Axiom څه شی دی؟

بې ثبوت رېښتینې وینا ته اکسیوم وايي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې (فرضيې) او ثابتول (غوښتنه، جوته ونه یا ښوونه) په برکې- یا خوندي لري .

که دا وینا داسې وي، نو پس داسې به هم وي . دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده . دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي .

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دی (پیانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونې نه وي یانې په ټکۍ ویشل بند دي . (Euklid)

: حتمي پېښه د پېښې امکان ۱ درجه لري .

جمله: که درېگودۍ ولاړکونجیز وي، نو (پس) د پیتاگوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: یو لومړی گڼ، چې له دوه لوي وي، باید ناجوره (طاق) وي

: په اخره جمله کې نیونه (فرضیه) ده (که یو پریم عدد له ۲ لوي وي ۰۰۰) او ثبوت یې (هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کېږي پس لومړی گڼ نه شي کیدی، نو دا تل ناجوره یا طاق دی) په ځټوالی یا تضاد کې پیژندل کېږي .
تل داسې نه ده، چې د جملې د رېښتینوالی څخه دې د جملې په ځټوالی یا تضاد هم رېښتیا وي .

لکه:

جمله: که ۶٪ پس ۲٪ هم (رښتیا)

جمله: که ۲٪ پس ۶٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰ تیک هلته ، چه که ۰۰۰۰۰ یوځای راوړي

بیلگه : که چیرې غبرگ اړخیز کې هر دننې کونج ۹۰ درجې وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی.

په څټ : که غبرگ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننې کونجونه ۹۰ درجې لوي دي .
یوځایراوړل :

یو غبرگ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځني او یواځني ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په څټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دننې کونجونه ۹۰ درجې لوي وي .

۱ ۰ ۷ برابر ونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبلگه:

لمسی ، پلار او نیکه په گډه ۱۱۳ کلن دي . پلار د ځوي د عمر یو کال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ۶ کاله نور هم زیات عمر لري .

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر $x-1$ دی او د نیکه عمر $2(x-1)+6$ کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

يو ډول ترمونه رامنځ ته کيږي او ساده کيږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \vee 22x +3 = 113$$

په کيڼ ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا گڼ ۲۲ ځله x بيا ۱۱۰ کيږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده يانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳۴ کلن او نيکه ۷۴ کلن دی.

که ترمونه T° او $T^\wedge$ د برابر وټټونې = باندې يو له بل سره وټټل شي، نولاندې برابر وټټيږي: $T^\circ = T^\wedge$.

که چيرې ترمونه په دې نځښو $\leq, >, <, \geq$ او (نابرابر وټټونې) (=) يو له بل سره وټټل شي يو نابرابر وټټ ته راځي.

برابرونه او نابرابرونه چې ناکلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د وينا فورم يا نوره هم ښه وينا ښه ويل کيږي.

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي. که ناکلي، چې اوبستونې يې هم بولو (د بيلگې په توگه z, x, y) پر ځاي د بنسټيزې گڼونه وليکل شي. په برابر وټټونه کې له پېژند – يا تعريفيزې څخه هغه گڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا ښې يو برابر وټټ يا نابرابر وټټ وينا کړي.

د يو برابر وټټ يا نابرابر وټټ (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پر ځاي کول، چې وينا ښه پېژند – يا تعريفيزې پورې اړوند وي او دا وينا ريښتيني کوي، اوبيديزې يا حلديزې L کې پروت دی يا د برابر وټټ يا نابرابر وټټ په ډکونکو (پوره کوونکو) ډيريو پورې تړلی برابر وټټ ته، چې د ټولو ځاي پر ځاي کولو لپاره ريښتوني وينا ورکوي کټمټ يا (identisch, identic) وينا وايي.

بیلگي :

الف) $5x = 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$$L = \{0,8\} \quad 5.0,8 = 4 \quad \text{نو}$$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره رښتیا وینا ته ځی

$$L = \{ -4, 4 \} \quad \text{یانې } 3.(-4)^2 = 48 \quad \text{څخه لاس ته راځی او په څټ } 3.4 = 48 \quad \text{پس-} \{ -4, 4 \}$$

$$2x > 1 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -1/2 \} \quad \text{الف) ۲ - نابرابرون}$$

$$x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \} \quad \text{ب)$$

$$3 - \text{کتومتوالی : الف) } (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\text{ب) } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیری کې سره برابر وي (یا یو پر بل وځوري،

یانې یو د بل پرځای ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځای پرځای کول برابر» یا ورته بلل کیږي.

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کین لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

براون	نابرابرون	
$T^{\circ}=T^{\wedge} \quad T^{\wedge}=T^{\circ}$ $3x=5y \quad 5y=3x$	$T^{\circ} < T^{\wedge} \quad T^{\wedge} > T^{\circ}$ $2x < 6 \quad 6 > 2x$	(۱) وینافورم کی کیدی شي، چي خواوي سره بدلي شي
$T^{\wedge}=T^{\circ} \Rightarrow$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} = T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Rightarrow$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} < T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	(۲) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیری خوندي وسائل شي یا خاي کړي
$2z = 8 \Rightarrow$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$	$3y < 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	یا تغیر ونه خوري • مخامخ یا کین لور بیلگه کي تفریډډیری تغیر خورلی

پر څټ بیلگه

$$2z=8 \mid \Rightarrow 2z+3-z=8+3-z$$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$ نه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې $3-z$ یو پیدایښتي یا طبیعي گڼ نه دی

$$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T \quad T^{\wedge}=T^{\circ} \Leftrightarrow$$

(۳) د وینافورم دواړه

$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow$	اړخونه کيدی شي چې
$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$	$T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$	له همغه مثبت ترم سره
که $T > 0$ وي	که $T > 0$	خُل او يا په همغه ترم
$4x+2 = 10x-6$	$3y -12 < 30z -90$	وويشل شي
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x -3$	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z -30$	
$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x-30$	$\Leftrightarrow 4y -16 < 40z -120$	
$T^{\wedge}=T^{\circ} \Leftrightarrow$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T$	(۴) د يوه برابرون
$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$	$T^{\wedge} < T^{\circ}$	دواړه خواوې کيدی شي،
$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$	$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$	چې له يوه منفی ترم سره
$T < 0$	$T < 0$	خُل شي يا دواړه خواوې په
$3x = 12$	$-2y < -4$	همغه ترم وويشل شي،
$\Leftrightarrow -9x = -36$	$\Leftrightarrow y > 2$	که په دې فورم کې
$\Leftrightarrow x = 4$	$\Leftrightarrow 10y > 20$	نابرابرونونه وي نو د
		برابرون لورې بدليري، يا نخبه بدليري

يادونه :

په توليزه، چې په کتابونو کې ليکل شوي، ترمونه T يو او T دوه په لاندۀ توگه د ايندکس سره په نخبه کوي: T_1, T_2

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ - په ۱ . ۳ - مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتوالی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ - د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندې ویناتر او منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - $(A \Leftrightarrow B)$ او $(B \Leftrightarrow A)$

ب - $(A \Rightarrow B)$ او $(A \vee B)$

٢ • ډیری پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیری پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځای په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایښتي-یا طبیعي پوهنو کې نیولې وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوسټ کې پیل شوه، ځکه چې بي له ډیریپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بي مفهومه ده او ناشونې • دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیری یا سټ دي او بل څه نه دي •

ډیري پوهنې (سټ تیوري) په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویمه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی •

د ډیرۍ کلمه له عددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس •

په تراوس ورسره بلد ډول هم ست یا ډېری پیژندل کیږي، لکه د بنوونځی نجونی او هلکان، یا په یوه ټولگی کې میزونه او چوکۍ، یا لکه هغه نیزوري، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیری ډیری اچولي یا د هسکې مینې د بنوونځي په لسم ټولگی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو ست یا ډیری.

د ډېری پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیری له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پرديو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او بنوونکو ته یواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډیری څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوگرځي، دا له دې امله هم، چې د ډیري پوهنې (ست تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوگرځي.

ډیری پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیری پوهنه ودانې دي. نن شمیرپوهنه بې له ډیری پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي.

پیژند ۱۰۲

الف : ډیری یا ست د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه (یوځایوالی، مجموعه) ده، چې

پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرۍ یا بنسټ ست څخه ، چې د پیژندلشویو

اصولو یا کرکتریین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور (George Cantor 1845 – 1918) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې

(یوځایټولولو یا مجموعې) ته ډیری وایي او هر شي ته، چې ډیری یې جوړه

کړي یا ډیری ترې جوړه شوې وي، د ډیری – یا ست توکی وایی.

(Set and elements of set ډیری او د ډیری توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی (واحد Einheit, unite) ته په

شمیرپوهنه کې ډیری وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونی دي، دا که څو واړه وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیرو.

ت : څرگند شيان د گډو نښو پر بنسټ، چې تر څیرني لاندې نیول کیږي او د دې نښو له امله یوځای ټولیري یا ټولگه جوړوي، ډیری یا ست تشکيلوي. گډې نښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي.

یادونه: د گرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یا تعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلگه :

گڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلگو په توگه راوړل شي.

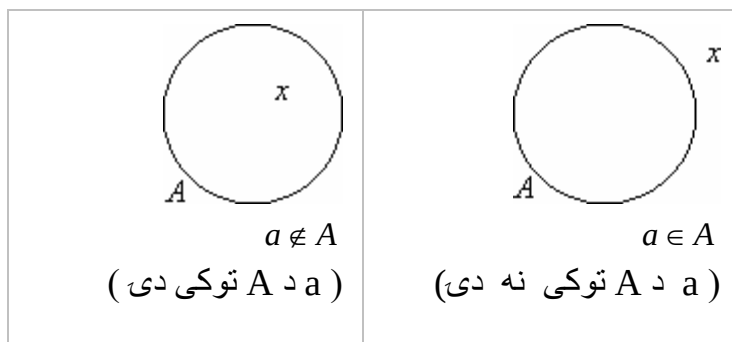
گورو، چې د ډیری یا ست کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیری د ځنو شیانو زیات یوځای کول موخه ده، د ځانگړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیری په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه $A, B, \dots$ او یا $M, N, X, Y, \dots$ د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه $a, b, c, \dots$ او $m, n, x, v, \dots$

د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیری A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$ په پورته کې توکی a د ډیری A توکی دی.

که a د A توکی نه وي، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیری A توکی نه دی.

دا پورته لینکدود له ښی وکین لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسې لری یې ساتلې پاتې شي. زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځې لرم. دا لاندې یې دیاگرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې گرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي



ډیری A دې له a, b, c, d, e, f, g, h توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یی لیکو

$$A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$$

ګورو، چې $\{ \}$ د ډیری یا ست نځېنه ده

یادونه : دا د ډیری کلمه موږ په افغانستان کې ست set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیری د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګي Die Menge وایي . هغه بنسټیزه خبره یې په پېژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وېولو، خو د یو بل څخه کره توپیر کېدونکو شیانو ټولګی ته ۰۰۰ وایو. د ټکو پر ځای ، چې هر څه لیکي، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغه مناسبه نومونه ونه ډیری ده، دا د کوتي کوتي څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته بڼه ښکاريزي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور بڼه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي . زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه بڼه او پوهوږ دی . د ست مانا که په ډکشنري کې وګورئ ، نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم بڼه او مناسب دی. ګورو چې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډیری یا ډیری خلکو وکتل.

بیلگه ۱۰۲

الف) M_1 (لوسټل M ایندکس ۱ دا به په لاندې نخبونه کې روښانه شي پام دي وي، چې $\text{index}(\text{indeces})$ ایندکس پیژند نخبې ته وایي) دي د لومړیو گڼونو ډیر ی (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دي د لاندې برابر وونو یا مساواتو د اوبیونو (حلونو) ډیری وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري: $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلگه ۲۰۲:

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیری M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یا گڼونو ډیری M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}$

ډیری لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرگندیدی شي یا ورکول کیدی شي.

$$M = \{x \mid x \text{ د خویونو } \dots \text{ سره}\}$$

(لوسټل: M د ټولو x ډیری ده له خویونو $\dots$ سره)

بیلگه ۳۰۲

الف) $M = \{x \mid x \text{ د ټولو } x \text{ سټ، چې هلته } x \text{ یو لومړنی عدد یا گڼ دی}\}$

$$b) \quad M = \{x \mid (x+1)(x-2) = 0\}$$

$$c) \dots M = \{x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$$

تشدیری: ډیری، چې کوم توکی ونه لري تشدیری یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: θ یا $\{\} = \emptyset$

دا دې د یوې ډیری یا سټ سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{\} = \emptyset \quad \neq \{0\}$$

بیلگه ۰ ۲ ۴

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرېون یا مساوات $x^2 + x - 3/4 = 0$ حلډیری

$$\{x \mid x^2 + x - 3/4 = 0\} = \{1/2, -3/2\}$$

کوم ټولگن یا تام عدد خوندي نه لري.

ټولگنونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلگنونو برخدیری ده. دریمه برخه دې وکتلشي

بیلگه ۰ ۲ ۵: د ز ۰ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیری په Ju, aug, sep

ok, no, de سره بنایو او لیکو: $A = \{jul, aug, sep, ok, no, de\}$

نو داسي لرو یا نوره هم بڼه داسی لیکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلگه ۰ ۲ ۶: ټول مندیزي، چې نن مازیگر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته ته راغلي.

بیلگه ۰ ۲ ۷: د هغو میرو، غواوو او وزو ډبرئ، چې نن په نخاس کې خرڅي شوي.

بیلگه ۰ ۲ ۸: د ټولو هغو گنونو ډیری (عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

$$30, 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1$$

داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30 \}$

دا ست پای ست ده داسې وایو، چې ډیری یا ست M د ټولو هغو توکو x - لکه پورته - جوړ شوي، چې 30 ویشي او داسې یې لیکو: $M = \{ x \mid 30 \text{ پر ویشونې گن} \}$

د ټولو پیدایښتي یا طبیعي گڼونو ډیری (اعدادو ست) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4,\dots \}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیری (ست) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کيږي: ∞

گورو، چې په شمیر پوهنه کې موږ پر پای گڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو.

۲۰۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د ستونو ترمنځ غوره اړیکې د برابر والی او خونديونې یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځای لرلو) اړیکې دي.

پیژند ۲۰۲ دوه ډیرې یا ستونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابري دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چېرې د ډیرې یا ست M_1 هر توکی د ډیرې یا ست M_2 توکی هم وي او پر څټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي.

برابري ډیرې برابر توکي هم لري

د بیلگی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$

$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$

$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دی

برخډیری (سبسټ subset)

پیژند ۳۰۲ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېری M_2 برخډیری (لاندې ډیری، خوندي ډیری یا سب

سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي

ده، لیکندود یا لیکندول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیری M_1 هر توکی د سټ یا ډېری M_2 توکی هم وي.

کیدۍ شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا

د اصلي برخډیری یا اصلي سب سټ څخه غږیږو.

پیژند ۴۰۲ :

یوه ډیری یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیری ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

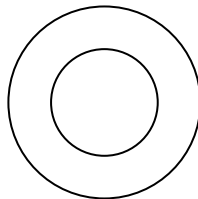
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي.

بیلگې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1, 1\}$, $M_2 = \{-1, 0, 1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوريو (مربعو) ډیری د ټولو څلورگوديو (څلور اضلاعو) اصلی برخدیری ده.

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکودیری بنایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیری یا ست وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وگورو، نو یوه گردی (دایره) M_1 په بله لویه M_2 گردی کې خوندي ده.

تشدیری په هره ډیری کې خوندي ده. هره ډیری په خپل ځان کې د نااصلی برخدیری په څیر خوندي ده.

یا دا پیژند:

$B \subseteq A$ که باور ولري: $x \Rightarrow A \in x \in B$

بیلگه:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{3, 4, 5\}$ $B \subseteq A$



پيژند ۰ ۰ ۲ :

هغه ډیری، چې هيڅ توکی ونه لري تشډیری بلل کيږي او داسې یی لیکو: $M = \theta = \{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیری او تشډیری سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:

$$\{\} = \theta \neq \{0\}$$

د یوې ډیری توان یا توانډیری (توانست)

پيژند ۰ ۰ ۲ :

د یوې ډیری M د ټولو برخډیریو ډیری پوتنډیری یا په توانډیری (-ست) بلل

کيږي او داسې یی لیکو: $P(M)$ په توانډیری توکي لري، چې هر یو یی بیا خپله

ډیری ده •

بیلگه : د $M = \{a, b, c\}$ ډیری دا لاندې په توانډیری لري

$$P(M) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

هره ډیری چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټیک n جگ $2n$ توکی لري یانې : n^{2n}

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی (حل-) کیدی شي (لومړی برخه دې وکتل شي) • دا دنده د گرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یی •

پيژند ۰ ۰ ۲ : د ډیری M زور $|M|$ لاندې د ډیری د توکو تعداد یا گڼون پوهیږو • که دوه

ډیری M او N همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیری وایو او

داسې یی لیکو: $|M| = |N|$

د برابر ونونو یا مساواتو او خوندي ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس (هندارونیزې) اړیکې reflexivity

هغه اړیکې، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتوني ویناوې ورکړ شوي وي
رفلکسیو یا انعکاسي اړیکې بلل کیږي لکه:

$$M = M, M \subseteq M$$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي

$$M \not\subseteq M$$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډیری د خپل ځان اصلي برخدیری یا برخست نه شي کیدی.

ب) سیومتريکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتريک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي
یو له بل سره بدلیدلی شي.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1 \quad \text{لکه}$$

خوندي لرل سیومتريکې اړیکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکې $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناتیکی دي

$$M_1 \neq M_2 \quad \text{دا هلته چې وي:}$$

پ) ترانزیتیويتي Transitivity یا ورون اړیکې

ترانزیتیويتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود وي.

$$L = M \quad \text{او} \quad M = N \quad \text{څخه لاس ته راځي} \quad L = N$$

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخدیری او M_2 د M_3 برخدیری وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخدیری ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتو اړیکې یا خویونه دي

۲۰۲ په ډیری کې کارونې یا عمليي

ټولنډیری (د اتحاد سټ)

پیژند ۲۰۸ :

د دوه ډیریو M_1 او M_2 ټولنډیری (union اتحاد سټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته

وايو ده:

$$M = M_1 \cup M_2$$

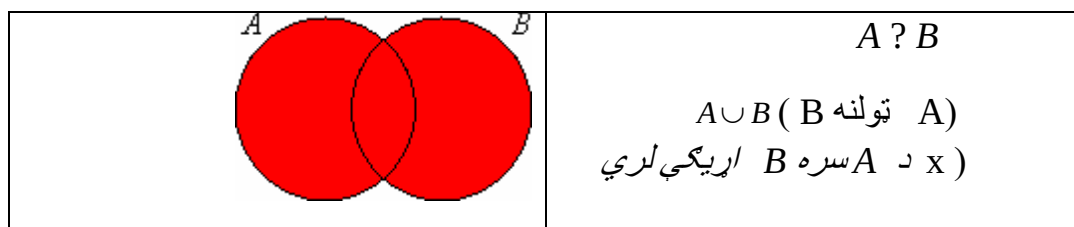
دلته داسې پوهیږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډیری یا سټ ده،

چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري.

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 یا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ -مه برخه

د یا سره پرتله) یانې دا د ټولنډیری توکی د M_1 یا M_2 او یا د دواړو توکي دي.

یا لاندې دیاگرام



بیلگی

الف) M_1 د ځوانانو ډیری وي، چې بکلوریا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډیری وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډیری ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري.

(ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$

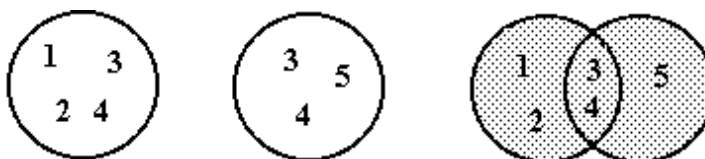
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: A او B دې دوه ډیری وي د دې ډیریو ټولنه داسې لیکو

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{3, 4, 5\} \quad A \cup$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



تل په ټکو ټکي شوي ټکيديری ټولنډيری په ګوته کوي.

پ – څيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيديری په ګوته کوي، چې

الف) ټکیپردي دي • ب) گډ ټکی لري •

پ) اړیکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څیرې په لاندې کې په بیلگو کې راغلي دي •

د ټولنې لپاره کموتاتیو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د

لړۍ پرلپسې دلته (لنډ: لړۍ) د ډیریو په ټولنه کې رول نه لوبوي

یادونه: که ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ۰۰۰ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بیا دا سره جمعه کړو لکه

$$1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+...+....$$

نو دا لړۍ پرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو (پرلپسې برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زیاتو ډیریو ټولنه لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) رول نه لري •

اسوځیاتيو قانون باور لري •

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډیری (د ډیریو غوڅۍ یا —متقاطع سټ) intersection

یادونه: دا کړی شو، چې د ډیرو گډغوڅۍ وبولو (دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده، کوم ناتیکووالی په کې نه شته)

پېژند:

ډیری M د ډیری M_1 او ډیری M_2 غوڅډیری یا د تقاطع سټ ده (لوستل: M_1

غوڅ (پرې) په M_2 (لنډ: غوڅ): $M = M_1 \cap M_2$

که د ډیری M ټول توکي د ډیری M_1 او ډیری M_2 توکي وي،

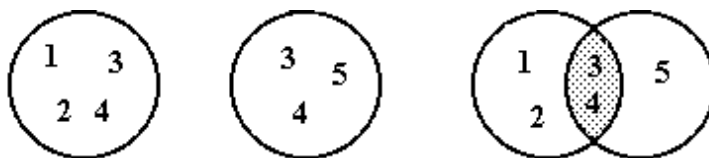
د غوڅډیری $M = M_1 \cap M_2$ هر توکی د ډیری M_1 او ډیری M_2 توکي دي (د ۱-مې بری د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند:

د ډیریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

بیلگه:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\} \Rightarrow A \cap B = \{3, 4\}$$



یادونه: دې پورته ډول دیاگرام ته د ون دیاگرام Venn-Diagram یا د

Euler-Venn-Diagram وایی

بیلگي:

لومړی: یوه ډله زده کوونکي له ننگرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نڅبنه کوو. یوه بله ډله، چې په M_2 یې په نڅبنه کوو د کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي. د دې دواړو ډلو غوڅډیری

$$M = M_1 \cap M_2$$

د پکتیا زده کوونکي دي.

دویم:

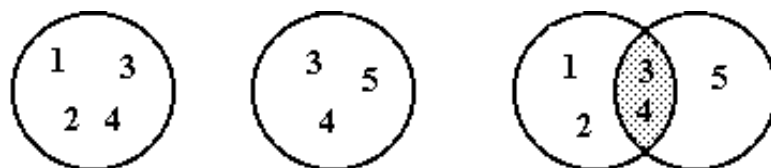
$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$

$$M = M_1 \cap M_2 = \{r, l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې بنایي، چې (الف) گڼون پردي دي



(ب) یو بل سره گډ ټکی لري



پ (اړیکې

$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلگه:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

$$B \subseteq A$$



هغه ټکو باندې ټکي شوي ډیرې اصلي برخې ده

دوه ډیرې، چې غوڅډیرې یې تشدیرې وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې گوته ورته ونيوله پردی بلل کیري

د غوڅډیرې لپاره ، لکه څنگه د ټولنډیرې لپاره کموناتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوخیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

دواړو د ډیرې کارونو یا ډیرې عملیو یانې ټولنډیرې او غوڅډیرې لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیري یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د گڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دیستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3$$

مگر په ټولیزه توگه باور نه لري

$$a_1 + (a_2 \cdot a_3) = (a_1 + a_2) \cdot (a_1 + a_3)$$

پېژند :

کمونډیری یا تفریق سټ M_2 د ډیری M_1 او ډیری M کموالی یا فرق دی او

$$M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\} \quad \text{داسې یې لیکو:}$$

له M څخه د M_1 ډیری کمه شوي

یا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیری M_1 توکي نه وي.

لیکندود یا لیکندول :

$$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

لوستل : د A او B توپیر ډیری یا کمونډیری یا تفریق ډیری له ټولو هغو توکو x جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دی

بیلگې :

لومړی : په یوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارینه وو زده کړو ډیری ده او M_2 د ټولو زده کړو ډیری (د نارینه وو او ښځینه وو) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي.

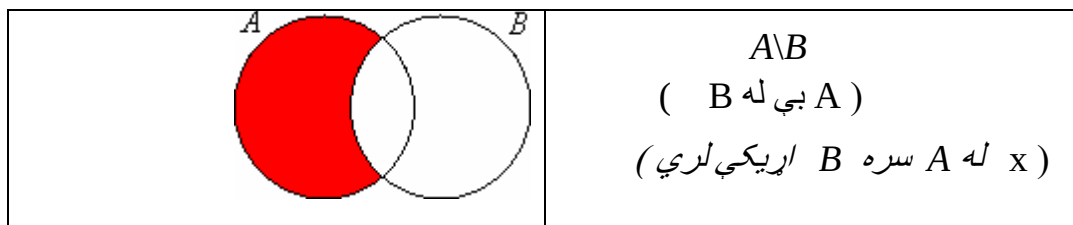
$$M_1 / M_2$$

د هغو زده کړو ډیری ده، چې ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیری ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي.

که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$$M_1 / M_2 = \theta$$

یا دا لاندې :



دویم:

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$

$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنگه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګې را په گوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

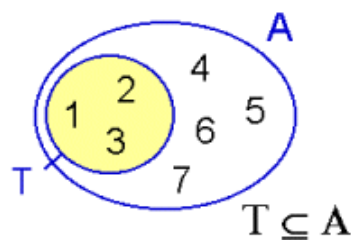
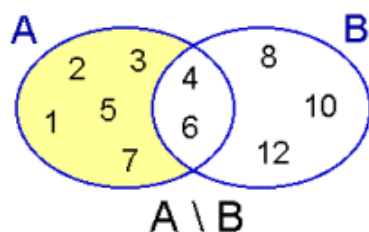
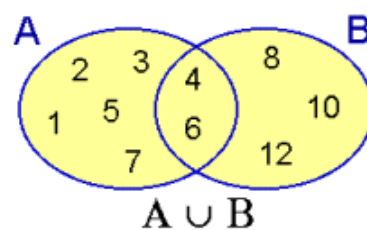
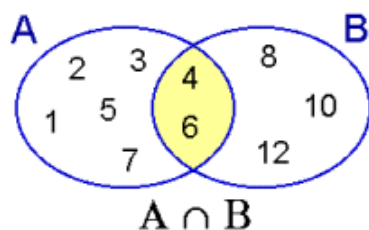
$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

د یوې ډیرۍ یا ست کمپلیمنت یا پوره کونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کې مو څیرلي • دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونې یا عملیې دي •

موږ بنسټیډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نڅېنه کوو •

په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅۍ، - ټولنه او - کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو •



پېژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیری (یا د یوې ډیرې کمپلیمینټ) د یوې ډیرې M پوره

کوونکې ډیرې $\bar{M}$ ټیک هغه توکي لري (د بنسټډیرې U څخه)، کوم چې د M

توکی نه وي.

دوه ځله کمپلیمینټډیرې جوړول خپلې لومړنۍ وینا ته ځي، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنۍ د توپیر او برک کورنۍ اوسېږي. که دا دوه کورنۍ یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرې یا تکمیلډیرې بلل کېږي یانې دا کلی پوره کوي.

۲.۰۴ څیرونه mapping یا اړیکې:

یادونه : پام دي وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو.

په دي برخه کي لومړی د ډیری ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمي کارونه څیرو.

پیژند ۹۰۲ : د دواړو ډیریو M یو او M_2 ډیری ضرب (اثرانضرب) هم ورته وایي، یاني په x سره ځلیري یا ضربیري

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x, y) ډیری ده.

بیلگي

$$M_1 = (a, b), M_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخي ځل په ډیریو کي کموتاتیو نه دی دا په دي مانا، چې

$$M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1 \quad \text{په ټولیزه توگه باور نه لري:}$$

۲ - R دي د ټولو رییلگونو ډیری وي. په هندسي مانا د کرني د ټولو ټکو ډیری. $R \times R$ د ټولو رییلگونو جوړو ډیری ده، په هندسي مانا د هواړي یا سطحي د ټولو ټکو ډیری ده.

پیژند ۱۰۰۲ :

د څیروني F لاندې د دوه ډیریو د ضرب ډیری $M_2 \times M_2$ برخډیری پوهیرو.

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې خبره شي.

داسی هم ویلی شو: د M_1 توکي د M_2 په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا خبره کیږي. که $(x, y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y خبره توکی بلل کیږي.

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندور شو یا تعریفور شو یا پیژندډیری یا تعریفډیری بلل کیږي او د ټولو خبره توکو ډیری د خبروني ډیری، ارزښتور شو یا ارزښتډیری بلل کیږي.

بیلگی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه د M یو توکو خبرونه ونه یا خبره کوونه د M دوه په توکو

خبره توکی اصلي توکه یا خبره کوونکی توکی

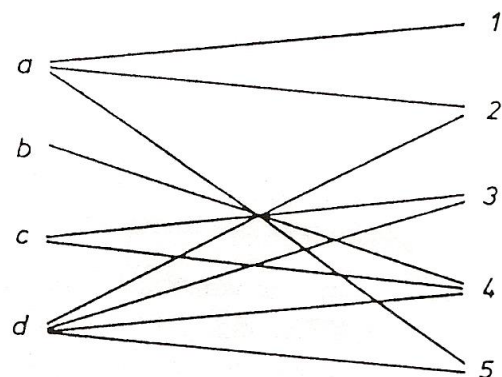
a -----> 1, 2, 5

b -----> 4

c -----> 3, 4

d -----> 2, 3, 4, 5

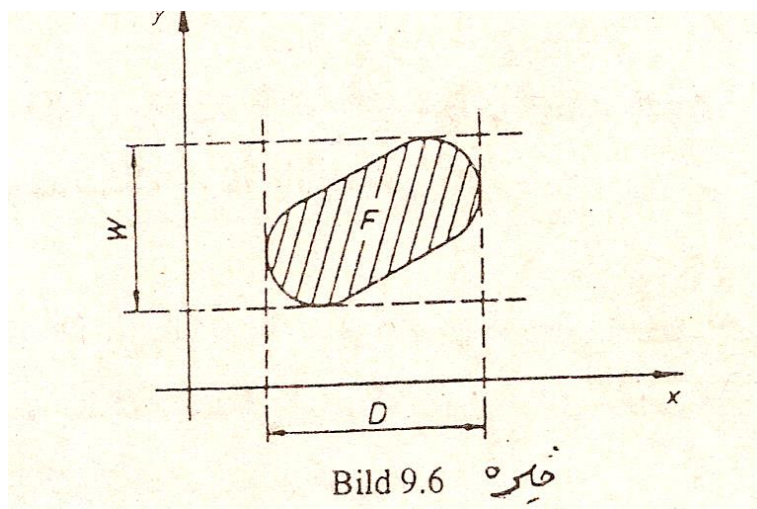
یا دا لاندې:



څیرونه:

$$F = \{ (a,1), (a,2), (a,5), (b,4), (c,3), (c,4), (d,2), (d,3), (d,4), (d,5) \}$$

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیری)



دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي گڼ a د هغه په دوه ځله $b=2a$ باندې څیره کیري . داسې

پیژند شوي یا تعریف شوي څیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي .

$$F = \{ (a,b) \mid a \in \mathbb{N}, b = 2a \}$$

دلته هم N د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیری، پیژندډیری یا تعریف- د ټولو پیدایښتي ګڼونو ډیری ده او ارزښت ډیری د ټولو جوړه ګڼونو ډیری ده.

څلورم: که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیری وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیری وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېړنه ده. د ښوونکو ډیری د ځانګړو ټولګیو په ډیری کې

موږ د څېړه ونې څلور حالتونه توپيروي:

پیژندنه (دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د M_1 ، چې تعریف ډیری D سره برابر دی او M_2 ، چې له څیره ډیری W سره برابر دی، توکي مو مخ ته پراته دي.

له یوې څیړنې F غږیرو د M_1 په M_2 باندې. دلته دې «د» او «په» ته پام وي

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې، نو د یوې څیره ونې F غږیرو له M_1 په M_2 کې (دلته دې

«په» او «په کې» ته پام ور واورول شي)

وي دې: $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیرو د M_1 په M_2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راوړل شي.

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

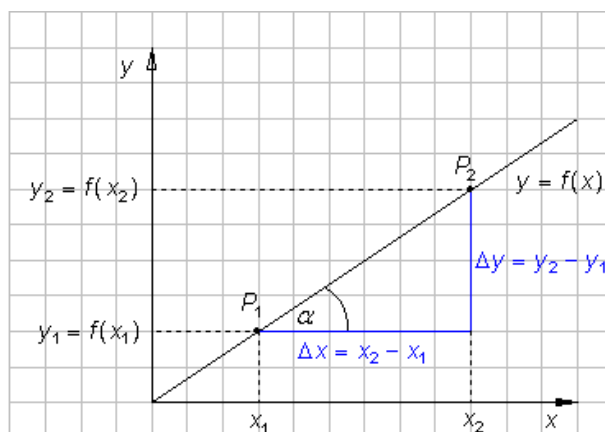
نو د یوې څیره ونې غږیرو له M_1 په M_2 باندې. دلته څلورمه بیلګه د بیلګې په توګه راوړو. د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکي ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي.

یادونه : دا لاندې برخه دې گران لوستونکي وگوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید څیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دج ۰ زج مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلي ده ۰

بیلگه ۰ ۰ ۲ : موږ په هواره یا سطحه کې څرگند شوي کړی د ډیریځل $R \times R$ په څیر د برابرۍ لارې رانیسو (R د رییلگونو ډیری د گڼکرنې ټکي دي) ګڼونه دې وکتل شي)) ۰

الف ($y = 2x$) یوه څیره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$

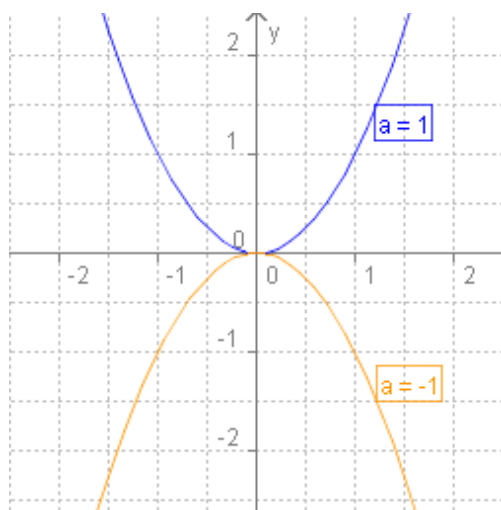


یادونه : په پورته څیره کې برابرۍ $y = ax + b$ دی.

$$y = x^2 \text{ (ب)}$$

یوه څیره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R, W = [0, \infty)$$



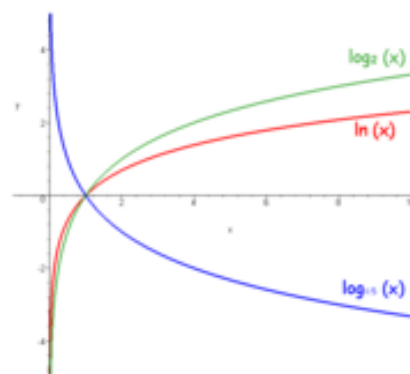
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې $a = 1$, $a = -1$ او $b = 0$, $c = 0$ ایښول شوي دي.

پ ($y = \log x$)

یوه څیره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري ».

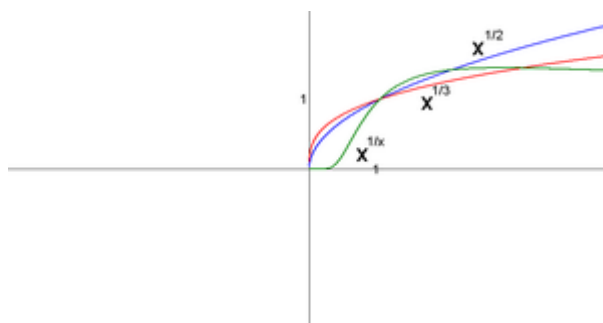
$$D = (0, \infty) \wedge W = R$$



$$y = +\sqrt{x} \quad (\text{ت})$$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$$D = W[0, \infty]$$



یادونه: پورته د دویې، دریمې او په x مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي.

پیژند ۲.

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي، که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

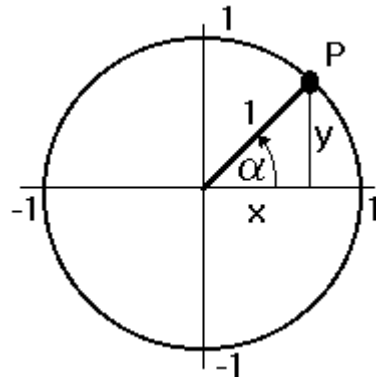
باندي څیره شي، دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یو وار په $y \in W$

تنظیمډیری یا جوړه ډیری کې رامنځ ته کیږي، یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا «بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي.

پام:

دا دې دلته کره په گوته شوې وي، چې زه «یوازنی څیره ونه» بلواک یا فنکشن بولم.



بیلګه ۰ ۲ : په بیلګه ۰ ۲ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی، د دې پر څټ لاندې برابر و (یوونګردی یانې ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې $[-1,1]$ کې $(D=W)$ فنکشن یا بلواک نه دی، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یانې که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لري پرلپسې (لنډلری) بدله شي، نو یوې پرڅټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲: څیره ونې F ته پرڅټ څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y) \in F$ سره ۰

پیژند ۰ ۳: یوه څیره ونه یو یواځنی بلل کیري، که یواځنی F او F^{-1} یوازنی څیرو ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي ۰

یادونه: د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کوونې (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي) او څیره کوونې توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري ۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیر لري ۰

ډیری پوهنه د شمیر پوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي ۰

ما دا برخه غزولي، چې په خپل شوني وخت کې به گرانو لوستونکو ته په ځانله توگه د يوه کتاب په څير هم وړاندې شي.

۲. ۵ تمرینونه

۱ - د لاندې ډېي يا سټ توکي د شمیرني له لارې انځور کړی

الف $\{x \mid x \text{ لومړی عدد او } x < 20\}$ (لوستل: د ټولو عددونو x ډېری يا سټ، چې x لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$

پ- $\{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ او $\{x \mid x > 0\}$ دا په نوکانوکي ټول له کین بني لور ته لولو

ت ($\{x \mid x \text{ ریلیگن او } x^2 + 1 = 0\}$ 'د سټ له پهنې وکړي' لور ته ورسول

۲ - د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډيري M ته وڅیړی !

الف (M د لمړنیو گڼونو ډیری

$$x = 4, y = 5, z = 6$$

ب (M د لاندې مساواتو حل ډیری (اوبیډیری)

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0, y = 2, z = 3$$

پ (M د ریشنل گڼونو ډیری چې په اینتروال $[-3, 3]$ کې پراته دي

$$x = -2, y = \sqrt{2}, z = 1/3$$

ت (M د ریلیگن ډیری چې په اینتروال $[-3, 3]$ کې پراته دي

$$x = -4, y = \sqrt{2}, z = 3$$

۳ - د لاندې ډیریو ترمنځ کومی اسپیکي پرتی دي

الف (M_1 د ټول جفت گڼونو ډیری

او M_2 د ټولو ټولګونو ډیری

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$ ، حلونو (اوبیو-) ډیری

$$M_2 = \{-3, 1\}$$

پ) M_1 د ټولو ګڼو ډیری چې پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2 د ټولو ګڼو ډیری چې په ۳ ویشل کیږي!

او M_3 د ټولو ګڼو ډیری چې په ۱۲ ویشل کیږي!

۴- د ډیری $\{a, u, t, o\}$ ټول برخه یري ورکړی!

۵- د لاندې ډیریو څخه ټولنډیری، غوڅه یري او دواړه ټولنډیری جوړ کړی!

$$M_1 = \{k, a, m, e, l\}, \quad M_2 = \{m, a, u, l, t, i, e, r\} \quad (\text{الف})$$

$$M_1 = \{2, 4, 6, \dots\}, \quad M_2 = \{3, 6, 9, \dots\} \quad (\text{ب})$$

$$M_1 = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}, \quad M_2 = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \quad (\text{پ})$$

۶- د یوه ډیری M او د تشه یري $\emptyset$ ټولنډیری، غوڅه یري او توپیر ډیری جوړ کړی!

۷- د یوه ډیری M او خپل همدې ډیری ټولنډیری، غوڅه یري او توپیر ډیری جوړ کړی!

$$M_1 = \{4, 8, 12\} \quad M_2 = \{3, 6, 8\} \quad (\text{۸- وي دې})$$

$$M_3 = \{0, 2, 4, 6\}, \quad M_4 = \{6, 12, 18\}$$

$$M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4 \quad (\text{جوړه کړی:})$$

۹- جوړه کړی

$$M \setminus \emptyset \quad (\text{پ}) \quad M_1 \cup (M_1 \cap M_2) \quad (\text{الف})$$

$$\emptyset \setminus M \quad (\text{ت}) \quad M_1 \cap (M_1 \cup M_2) \quad (\text{پ})$$

۱۰- وي دې

$$M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$M_1 \cap M_2 = \{1, 3, 5\}$$

$$M_1 \setminus M_2 = \{2, 4\}, M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکي !

۱۱- وي دې

الف ($M_1 \cap M_2 = \emptyset$) ب $M_1 \subset M_2$,

وټاکي: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲- وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینټروال ټکي ډیري:

$$M_1 = [-3, 3], M_2 = [1, 7]$$

وټاکي

الف ($M_1 \cup M_2$) ب $M_1 \cap M_2$) پ $M_1 \setminus M_2$

ت ($M_2 \setminus M_1$) ټ $M_1 \times M_2$

۱۳- وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{a, b\}$

الف (د $M_1 \times M_2$ څل جوړ کړی

ددې لاندې ب (تر ت) برخي تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب (دا لاندې کوم ډول څیړونی دي

$$F_1 = \{(1, a), (1, b)\}$$

$$F_2 = \{(1, a), (3, a)\},$$

$$F_3 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\},$$

$$F_4 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\},$$

$$F_5 = \{(1, a), (2, b)\}$$

په ټولو حلونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ (په څټ څیړونه ورکړی

ت (د څیړونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

۳. دحقيقي اعدادو (-گڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(ترنۍ، کارونۍ يا عمليي)

۳.۱۰ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳.۱.۱.۱ طبيعي اعداد يا -گڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده. له دې امله يې پرمخ وديينه کې هڅې وکړې، چې له ډيرۍ (سېټ) (د ليکنې په دننه کې ډيرۍ پوهنه هم څيرل شوې)) سره داسې لار غوره کړي، چې دا ډيرۍ تشرېح کړای شي او د انسانانو او چاپيريال (طبيعييت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د گڼ يا عدد وې (کلمه يا لغات) راپيداشوې، چې د عدد يا گڼ کليمې پر بنسټ د ريښتینو شيانو څرگند څومره والي (کميت) Quantitative ترلاسه کړي. د طبيعي اعداد و څخه په گڼلو يا که غواړې شميرلو کې گټه اخستل کيږي.

۱۰۳. ۱. ۰. الف د طبیعي عددونو (پیدایښتي گڼونو) جوړښت

پیژند (تعریف) ۱ ۰ ۳:

الف) (ټول طبیعي اعداد د پیری په څیر یوه ټولګه جوړوي او د طبیعي اعدادو پیری یا سټ په نامه یادېږي یا یې طبیعي اعداد بولو او په N او همداسې N^0 سره یې په نڅېنه کوو.

د پیر پای طبیعي اعداد شته، ځکه چې په هر طبیعي عدد پسې راتلونکی طبیعي عدد هم شته دی (یعنی په هر څومره لوی طبیعي عدد پسې راتلونکی طبیعي عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کیږي).

ب) د طبیعي گڼونو (اعدادو) اکسیوماتیکي Axiomatic جوړښت

اکسیوم جمله ده، چې اوبیونه (حل) نه غواړي او همداسې منل کیږي. دا چې جمله، اکسیوم څه دي په لومړۍ برخه یانې سم اند (منطق) کې دي وکتل شي.

طبیعي عدد کلمه د جیوسیپی پیانو (Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲۰ ز. کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توګه تعریف کیږي:

۱ – د صفر گڼ یو پیدایښتي گڼ دی

۲ – د هر طبیعي عدد یا گڼ m لپاره یو یواځنی ټاکلی طبیعي عدد n شته، چې سملاسي (تړلی) د m پسې گڼ دی، د کوم لپاره چې لرو: $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته $m^{\wedge}$ د m پسې سملاسي یا تړلی گڼ یا عدد په ګوته کوي.

۳ – هر طبیعي عدد زیات له زیاته په یوه طبیعي عدد پسې سملاسي راتلونکی گڼ دی.

۴ – هيڅ طبيعي عدد نه شته، چي پسي راتلونكي پيدايښي عدد يې صفر وي.

۵ – که طبيعي عددو ډيري M صفر د توکي په څير ولري او که له هر طبيعي عدد m سره د هغه پسي ترلي راتلونكي عدد يا گڼ m هم د M توکي وي، نو M ټول

طبيعي عددونه خوندي لري يا په بل ډول « ټول طبيعي اعداد په کي ځاي دي ».

يادونه: ځني ادبياتو کي، د پيانو سيستم کي، د صفر په ځای ۱ ليکل شوی. په دې حالت کي بيا صفر ته د طبيعي عدد يا گڼ په څير نه کتل کيږي. که بيا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبيعي اعدادو ډيري يا –ست يې د صفر سره بولو.

۱. ۱ ب : د طبيعي اعدادو يا گڼونو انځورونه او سيستمونه:

طبيعي اعداد په نځېنو (دې ته په الماني کي Ziffer وايي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چي دا څيرو، دی) انځورېږي. د دې لپاره چي دا لږ ځای ونيسي، نو د لويو او وړو اعدادو لپاره نځېني له کوچنيو سره يوځای کيښول شوي دي. دا چي څرنگه يوه د عدد يا گڼ نځېنه له بل توپيرېږي، په لاندې ډول يې د زياتون يا جمعي سيستم او ځای سيستم کي ښايو.

په زياتون سيستم کي هر بنسټيز ،، ځای،، يو ،، ځای ارزښت،، لري. د څيږونو زياتون د يو په بل کي د ورزياتشوي بنسټيز څيږ پخپله هغه عدد يا گڼ ورکوي. بيلگه يې په رومي گڼونو کي راوړو. دا له بنسټيزو څيږونو جوړ شوی (ترې لاندې لسيز د اعدادو سيستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څيږونه چي موخه ترې عددونه دي، له پيل راوړم:

رومي عددونه: I V X L C D M

عربي عددونه: 1 5 10 50 100 500 1000

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنگ لیکو چې کم ځای ونيسي لکه د بیلگې په توگه:
CXX په دې معنا چې $C+X+X$

په رومي گڼونو کې، که بنسټیز کوچني گڼنځنۍ لکه I, V, C د لوي گڼنځنۍ و
کين لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی گڼ له لوي گڼ څخه کم شوی.
د بیلگې په توگه: $XC = C - X$.

بیلگې: الف: MDCCLXVIII په دې مانا دی 2768

ب: MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ: CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځای سیستم کې هره بنسټیزه نځبڼه یو «ځای ارزښت نځبڼه ارزښت»
لري.

لکه: g -نیز ځای سیستم (پوزیشن سیستم) (Positionssystem): د طبیعي گڼ n
انځورونه په g -نیز ځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړ شوي سټې په
بنسټ ($g \in \mathbb{N}$) $g \geq 2$ هر طبیعي گڼ n په لاندې ځانگړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې گڼنځنۍ a_i, g, a_i او $i = 0, 1, 2, \dots, k$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي
په کار راځي یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو:

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چې په

لاندې ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې گڼل په لسيز سيستم (گڼځای ارزښت) باندې کيږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرگي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسيز سيستم کې گڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مگر په لرگي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له گڼون يا تعداد څخه پور څرگنديږي.

بل د گڼلو سيستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونيوه، د گڼلو رومي سيستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنگه د مفهوم ډک، زياتونسيستم (جمعی -) څرگنديږي.

بيا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانگړی کړو:
۱ - هره لاندې نڅښه I, X, C کړای شي چې زيات ترزياته ۳ ځله (۳ واری) په يو گڼ کې پرله پسې يا څنگ تر څنگ راشي

۲ - هره، د گڼ نڅښه V, L, M, خورا زياته يو ځل څنگ تر څنگ په يوه گڼ کې راتلی شي.

۳ - که بنسټيز نڅښه I, X او يا -- ددې نڅښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نڅښو V, X, L, C, D يا M CXI تر منځ ځای په ځای شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

- ۴ - په هرگڼ انځور (Zahlendarstellung) کې کیدی شي چې یواځې یو بنسټیز گڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: $1098 = \text{MXCVIII}$ مگر نه IMIC
- ۵ - د یو گڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نڅښی په کار واچول شي.

عربي گڼونه : دا گڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسيز سیستم گڼونه دي، چې عربي گڼونه بلل کېږي. دا د گڼلو لسيز سیستم عربو د هند څخه راوړی، چې په دولسمه پېړۍ کې يې اروپا ته یو وړ. دا اصلي گڼونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي یا له ۰ تر ۹ پورې، چې

ځیفر ورته واي (همغه عربي صفر دی) چې دلته ترې بنسټیز گڼونه پوهیدل کېږي.

لکه چې گوته مو ورته ونيوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چې د یو گڼ ارزښت د گڼ نڅښی زیاتون باندې انځور کېږي. د ځای سیستم سره د گڼونو انځورول ساده دي.

تعریف ۱. ۱ ب : په یو «ځای ارزښت سیستم» کې هغه گڼ لوي دی چې زیات ځایونه ولري، که چېرې د گڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي (مساوي وي) نو هغه گڼ ستر دی چې له کینې لورې یی نڅښه لویه وي.

لسيز - یا لسگونۍ سیستم: لسيز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونۍ یی څرگندېږي. په لسيز سیستم کې د گڼ انځورولو نڅښی، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۱، ۰، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ دي. ۱۰ گڼ د لسيز سیستم بنسټیزه نڅښه ده. دا چې نور گڼونه نه انځورېږي، نو ځای هلته ډک دی چې پرله پسې (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنی له ۰ تر ۹ گڼونو پورې په ځای شوي وي.

په دې ډول د پسی جگ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شوو گڼنځنبو گڼون (تعداد یا شمیر) دی، څمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو گوته ورته ونيوله، د پای (نه لایتناهی) ډیری (set, die Menge) ۹-مه برخه دې وکتل شي) غړو گڼلو لپاره لاندې گڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولو دې گڼونو ته چی د صفر گڼ ورسره مل شي د طبعي گڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}; \quad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

موږ گڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا ^{نورو} حروفو بنایو لکه a, b, c, ... n . دا ریښتوني

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي گڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي گڼونو ډیری N یا N^* توکی دی) (لنډ n د N یا N^* څخه دی) (په دې ځای کی دې دگن او گڼځای (خيفر) توپیر ته پام وي.

موږ دگڼونو ټاکلو لپاره بله یا اشنا د نڅښه ډیری لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

د گڼونو د نڅښو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په گوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي گڼ انځوروي:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 10^0$$

$$a_i \in N.$$

گڼونه په نورو څیږونو ډیری هم انځوریدی شي. د بیلگي په توگه په اینفورماتیک (Informatik) کی، چی د دوال سیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه گڼنځنبي (څیږونه) لیکل کیږي

$$N = \{ 0, 1 \}$$

په لاندې جدول کې د لسیز او دوه ئیز سیستمونو لپرمېني ګڼونه یو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئیز سیستم	لسیز سیستم
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4

په ټولیزه توګه (عمومي توګه) دلته یو ځیفر پر لېسې (د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ یو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0, a_i \in N$$

$$\begin{aligned} 59 &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 && \text{بیلګه ۱.۱ :} \\ &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111011 \end{aligned}$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیری یا ست داسی په نڅېنه کوو:

د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیری $N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

د پیدایښتي ګڼونو ډیری د صفر سره $N^0 = \{ 0, 1, 2, \dots \}$

ه کتابونو کی دا د صفر نخبه په لاندې برخه کی راځي .

٣ . ١ . ٠ ب د طبيعي اعدادو يا گڼونو انځورونه:

طبيعي اعداد په نخبو انځوريزي . دا عددونه يا گڼونه د ځان لپاره يو سيستم لري، چی هغه زيات يې موږ نه څيرو . زموږ لپاره غوره هغه عربي اعداد يا گڼونه دی .

يا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد يو د لسيز ځايستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په گوته کړل . دا کورونه (خونی يا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ٩ ځاي نیوی شي او بيا يې هر ځاي يو ارزښت لري، له دې امله دا « ځاي ارزښت سيستم » دی . لومړي کور ته يویز، دوم ته لسيز، دريم ته سليز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي .

انځورونه يا څيغرونه يې دي : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ دا د بنسټيز گڼونو نخبی دي، نور يې په کورونو يا ځاييستم باندې روښانه کیدی شي .

پيژند ٣ . ١ . ٠ ب :

په يو « ځاي ارزښت سيستم » کې هغه گڼ لوي دی، چی ډير ځايونه ولري . که چيرې د گڼ د ځايونو يا کورونو گڼون (تعداد) سره برابر وي . نو بيا هغه گڼ لوي دی، چی کين لور يې گڼنخبه لويه وي .

٣ . ١ . ٠ پ : طبيعي اعدادو کې د شميرني بنسټيز قوانين

اوس په لاندې ډول د پيدايښت گڼونو، په ټوليزه توگه د رييل گڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو گڼونو لپاره هم باوري (معتبر) بنسټيز د شميرني قوانين وړاندې کوو:

الف : د انډول (نظم) یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب (Anordnung) بنسټیز قوانین:

که $<$ ولرو، نو دې ننوتې کونج کې یا د نخښې خوله کې عدد یا گڼ لوي دی او د وتلې کونج یا لوي کونج $>$ که نخښه یا داسې کونجکې یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی. که ځنونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکې داسې لیکو، یانې که $15 < 23$ ولرو نو ترې څرگندیږي، چې عدده ۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی.

د دوه طبیعي اعدادو a او b ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$$a < b, a = b, a > b$$

۲ - ۲۱ = ۲۱ که د ۲۱ په ځای توری ولیکو هم $a = a$ به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویټي Reflexivity)

۳ - له $a = b$ او $b = a$ (لاس ته راځي) $b = a$ (سیومتري، انډول، ورته واني Symmetry)

د انعکاسي (ایینه ونیز - یا هندارونیز) برابروالی یانې که چیري دا عددونه وراینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابرېږي. که انعکاسي (اینه ونیز) برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو.

۴ - له $a = b$ او $b = c$ (لاس ته راځي) $a = c$ (ترانزیتیو Transitivty)

ترانزیتیو گورو، چې یو له بل اړوند مانا ته نژدی دی، ځکه چې دا ځنونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي.

۵ - له $a < b$ او $b < c$ (لاس ته راځي) یا $a < c$ یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیري دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

به وي، خو له شمیرپوهنې پرته مانا باندې یې هم پوهیدنه ښه او اړینه ده.

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځي او دا کارونه (عملیه) «زیاتون یت جمعه» بولو، ځکه، چې ګڼونه یو په بل زیاتېږي.

پېژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نو عدد ۲۸ ترې لاس ته راځي یا

$$۲۸ = ۱۸ + ۱۰$$

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتېږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونۍ» (ما تر اوسه زیاتوونې بللې، خو فکر کوم، چې زیاتېدونې یې ښه نومونه ونه ده) بولي، $۱۸ + ۱۰$ جمعه او ۲۸ «جمع ارزښت» بلل کېږي. چې په هغه پخوانۍ نوم مو ورته حاصل جمع وایه $+$ زیاتوننڅښه ده او $=$ برابر و نڅښه (مساوات علامه) بولو

دجمعي یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) $a + b$ شته دی

۲ - یواځنوالی: له $a' = a$ او $b' = b$ څخه لاس ته راځي: $a' + b' = a + b$

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتیو - یا بدلون قانون دی: $a + b = b + a$

۴ - associative law اسوخیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
 $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$

۵ - Monotony law مونوتوني - یا همغږیزوالي قانون:

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a + c < b + c$

يادونه: په $a + b = c$ کې a او b زياتېدونې $a + b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه: په زياتون کې لاندې زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپېلې توکي: په N^0 کې يو توکي شته، چې که د هر پېدايښتي توکي سره په زياتون يا جمعه کې ور زيات شي همغه توکي ورکوي، دا توکي صفر دی: $a + 0 = a$

ناپېلې توکي کړي شو نالوريز وېولو، ځکه، چې د کومې لور گڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولي يا د زياتون ارزښت همغه پاتېږي، همداسې نارونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وېولي.

پ: د کمون (تفریق) Subtraction بنسټيز قوانين

پېژند: د پېدايښتي گڼونو a او b لپاره، چې $a > b$ وي، يواځې يو x شته دی، د کوم لپاره، چې باور لري: $a - b = x$

که $x = a - b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي (موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونې يا مفروق (تراوسه مې کمونې بللی) a ترې کمونې يا مفروق منه $a + b$ کمون او x کمون- يا تفریق ارزښت بلل کيږي يا بولو:

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونځې ليکو، چې ساده يې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

په پورته کی موړ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یی ۱۰ ده، نو له دی امله یی داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع. د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی»، ځکه، چی ترې کمیږي (ع. مفروق منه)، ۱۰ «کموونی» یا کمیدونی (ع. مفروق) دا بل لس یی «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه (لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع. حاصل تفريق)، — کمونځېنه او = برابر وونځېنه ده.

ت : د ځل (ضرب) Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي گڼونو a او b لپاره د پیدایښتي گڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلوني (ضریبونه) او $ab = x$ « ځل ارزښت » یا ځل (حاصل ضرب) دی.

وايي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع (که جمعي) لنډه طریقه، چی ۰۰۰۰ وي یا د زیاتون لنډه لار ده. گورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخوړ نه دی او ځل د پښتو بڼه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي.

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده. زمري له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لار، نو زمري به جلال اباد ته د تگ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: $150 \times 8 = 1200$ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي. گورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره بڼه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلونوی اسان وي، به ۰۰۰ وي نه، بلکی اسان دي.

۲ - له $a' = a$ او $b' = b$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (یواځیتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتیو — یا د بدلون قانون

۴ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د گډولو - اسوځياتيو قانون

۵ - لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې - یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

۶ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جگښتوالي یا یو غریزوالي قانون Monotony

ټ - د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند ۲۰۳ :

که د دوه طبیعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانې صفر نه وي یو طبیعي عدد x شته، چې برابر و (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چې ماتګن (کسر) یې هم بولو

۱ - که $a/b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي، نو یواځنی شته دی (یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابر وون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونې یا ویشه وونی دی، ځکه چې په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونې بلل کیږي، ځکه، چې څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم، حاصل تقسیم .

ګورو چې له قاسم یا مقسوم او همداسې د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونې پر - یا پرې ویشونې، ویشه ونې او ویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهور دي، خو په خواشینۍ به وه وایم، چې تراوسه په شمیرپوهنه کې ورسره نابلد یو .

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وويشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسېږي. گورو، چې ۱۲ په یو څه ویشل کېږي، نو ویشونۍ یې بڼه نوم دی. دا ۱۲ په څلور ویشل کېږي پر ۰۰۰ ویشل کېږي، نو له دې امله څلور پر ویشونۍ بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی.

۳. ۱. ۲ ټولگڼونه یا تام اعداد INTEGERS

د دوو طبیعي عددونو a او b کمون یا تفریق ($x = b - a$) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي: $a \leq b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کېږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انگریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته (دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده).

که هغې نخښې ته وگورو، نو هم لاندې ترې څرگندېږي، له بنۍ لور کین لاس ته راځي او په څټ (بر عکس) له کین لور بنۍ لاس ته راځي. یا که ۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځي او په څټ.

ټولگڼونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي، یا منځ ته راوړل شوي. که چیرې سپین د ۱۰۰ افغانۍ پوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانۍ پوروړی پاتېږي، دا په دی ما، چې $۸۰ + ۱۰۰ = ۲۰ - ۰$ گورو، چې $۲۰ -$ یو پیدایښتي گڼ یا طبیعي عدد نه دی. یا $80 - 100 = -20$

په هغه حالت کی، چې کمونۍ (مفروق) له ترې کمونې (مفروق منه) څخه لوی وي، نو لاس ته راوړنه یې طبیعي عدد نه دی. اوس یوه د اعدادو بلې ډیرۍ پیژند ته اړ کیږو، چې هغه د ټولګونو ډیرۍ ده او دا د طبیعي عددونو او د طبیعي عددونو کمې (منفي) او صفر سره یوځای کوو، چې ټولنه جوړوي (په ډیرۍ کې به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګونو ډیرۍ ده او داسې یې لیکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$

$$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونۍ د کمېدونۍ کوچنۍ وي، نو پیدایښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو یا پراخوو، دا په دې مانا، چې د پیدایښتي ګڼونو مخنځېنه په کموننځېنه یا منفي نځېنه باندې سنبالووي (کیدۍ شي زموږ هیوادوال د څټ نځېنۍ په نامه ورسره بلدوي، خو هره نځېنه، چې د ګڼ زیاتۍ یا کمۍ ښايي د ګڼ کین لور ته لیکل کیږي، چې دا ما مخنځېنه لیکلې او بللې

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شمیرقوانین په Z کې هم باور لري

د ټولګونو ډیرۍ

$$\} \quad Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

د مخه مو شمیرقوانین، چې د پیدایښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغه د ټولګونو لپاره هم باور لري

د کمون یا تفریق بنسټقوانین (پسۍ یا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګونو یا تام اعدادو a او b لپاره یو ټولګن $x=b-a$ شته، د کوم لپاره، چې $a+x=b$ برابرېږي باوري دی

د ویش تیوري:

۳ . ۱۰ ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجزیې لپاره خورا ګټور دی باور لري

(الف) یو ګڼ په ۲ (۴ ، ۸ ، ۱۶) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور (له اخره) موخه تری ښی لور دی (دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنسټیزو څیفرنو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (۴ ، ۸ ، ۱۶ ۰۰۰ ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومېږي او بل ډول یی ناجوړه (طاق) بلل کیږي . ګورو ، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

(ب) یو ګڼ په ۵ (۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر (له ښي لور) بنسټیز څیفر (د اخر دوه ، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیز څیفرنو) جوړ ګڼونه په ۵ (۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه ، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایي او موږ یې شاید لومړی وېولو . زه کوښښ کوم ، چې دا پوهوړ ولیکم ، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي .

(پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي .

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنسټیز ه ګڼونځېنو (څیفرنو) زیاتون پوهیږو ، بی له دې ، چې د هغه ځای ارزښت په پام کې ونیول شي .

بیلگه : د ۱۲۶ پروت زیاتون یا پرته جمعه ده : $1+2+6=9$

(ت) یو ګڼ په ۱۱ ویشونی دی که د هغه ګڼ التریري (نځښه بدلونکی) پروت زیاتون . پر ۱۱ ویشونی وي .

الترنيري پروت زياتون، چي پروت کمون هم ورته وايي له بنسټيزو څيږونو ۱، ۳، ۵، زياتون څخه د ۲، ۴، ۶، ۰۰۰، زياتون کمون پوهيږو، بي له دې، چي ځاي ارزښت يې په پام کي ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کور زياتون څخه د جوړه د زياتون کم کړو.

بيلگه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چي: $۱۵ = ۸ + ۷$ او $۴ = ۳ - ۱$ ، چي الترنيري زياتون ياني $۱۱ = ۴ - ۱۵$ يې په ۱۱ ويشوني دي.

ت) يو گڼ پ ه ۳۷ وېشور دی که (د گڼ له اخر څخه جبرشوي) د درېگوني گڼونو زياتون پر ۳۷ وېشوني وي.

بيلگه:

$$37|20216352448 \Leftrightarrow 37|1036 \quad \text{چې ځکه } 37|(448+352+216+20)$$

ث) يو گڼ په ۷ همداسي په ۱۳ وېشور دی، که د هغه (د گڼ له لځ څخه جوړ) درېگوني الترنيري زياتون پر ۷ همداسي پر ۱۳ وېشوني وي.

$$7|37604 \quad \text{ځکه چې } 7|567 \Leftrightarrow 7|(604-37)$$

$$13|9679293889 \quad \text{ځکه، چې } 13|1209 \Leftrightarrow 13|(889-293+709-96)$$

ج) يو گڼ په ۱۰۱ وېشوني دی، که (د گڼ له اخر څخه جرشوی) دوهگوني الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشوني وي.

بيلگه:

$$101|7930630669 \quad \text{ځکه چې } 101|202 \Leftrightarrow 101|(69-06+63-03+79)$$

یادونه : که پیدایښتي ګڼونه a او b ولروا و لرو $a : b$ ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت یې هر ګڼ وي او که پیدایښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو $b|a$ ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ویشي بې له پاتې یانې ګڼ a په ګڼ b وېشو دی.

۳۰۱۰۲ (ت) خورا غټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچګترین مضرب مشترک (نو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي یې په لومړنیو ګڼونو توتې کوو

$$260 = 2.130 = 2.2.65 = 2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468 = 2.234 = 2.2.117 = 2.2.3.39 = 2.2.3.3.13 = 2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیو ګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله وو ېې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان (په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ ېې تیت یا کم وي. یانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پروېشونی

دی او خورا غټ پروېشونی هم دی. یانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دی.

لنډ : ۵۲ د پورته گڼونو خورا غټ گډ پروېشونی دی.

داسې گڼ , خورا غټ گډ پروېشونی, بولو (لنډ ونه یې : غ گ و)

هغه گڼ، چې د دوه یا ډېرو گڼونو گډ پروېشونی او خورا غټ هم وي، نو دې گڼ ته
,,خورا

غټ گډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ گ و) وایو. یا

Greatest commom divisor(g c d)(بزرگترین عامل (مقسم علیه) مشترک)

اوس بیا داسې مخ ته خو:

په پورته کې هغه د دواړو گڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه یو چې په جگ
توان وي

یاني خورا غټ جگگڼ ولري ، هغه د جگ توان رابېلو او بیا پې سره ځله وو، چې
لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته گڼ یاني ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو گڼونو گډ زیاتځله دی (یاني گډ په
دواړو

وېشل کيږي) او دا خورا کوچنی گڼ هم دی. دا په دې مانا، چې له دې گڼ بل کوچنی گڼ
نه

شته، چې د پورته گڼونو دواړو گډ زیاتځله(خو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی گڼ دی. د دواړو گڼونو (یاني گډ) زیاتځله (گډ خو واره) دی

لنډ پې : خورا کوچنی گډ زیاتځله (لنډونه یې: خ گ ځ) یا

Least common multiple(l.c.m.)(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالضعاف
الاقل)

گران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زړیا بیخي پوهوږ او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته څو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي گڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف) ۳۰۳ :

a او b دې ټولگڼونه وي، وایو چې «گن a گن b ویشي» (او یا هم a د b پرویشونې دی او یا هم a د b څو برابره (زیاتځله) دی) که یو ټولگن u شته یا موجود وي او دا باوري کړي $au = b$ ددې لپاره لیکو $a|b$ (وايو، چې گن a گن b ویشي، خو اړین یا ضرور نه ده، چې کلمه گن ورسره وویل شي).

که a د b پرویشونې نه وي، نو د دې لپاره لیکو $a \nmid b$ (دا نڅښه / دې د نه ویشونې لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې: پیدایښتي گڼونه، چې په ۲ ویشل کيږي جوړه (جفت) گڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه (طاق) گڼونه بلل کيږي. د صفر گن د پیدایښتي گڼونو په ډیرۍ کې یو ځانگړی حالت لري.

په لاندې جمله کې به له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمې لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځای کوو، چې په راتلونکي کې ترې کار اخستل کيږي.

جمله ۱۰۳ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولگڼونو a, b, c, d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ویش (دا په نامه «ساده» پرویشونې دي)

(۲) د ۱ پرويشونى ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې $a \mid 0$ او $0 \mid a$ يواځې په هغه حالت کې باور لري، چې $a = 0$ وي

(۴) له $a \mid b$ او $a \mid c$ له

(۵) له $a \mid b$ لاس ته راځي: $ac \mid bc$ که $c \neq 0$ وي، نو د دې په څېت هم باوري

دي. دا په دې مانا چې، که $ac \mid bc$ وي، نو $a \mid b$ هم باور لري. د گڼونو

ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا

کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(۶) له $a \mid b$ او $c \mid d$ څخه لاس ته راځي او په څېت $ac \mid bd$ لنډه ليکنه يې (که ن ج ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له $a \mid b$ او $b \mid a$ لاس ته راځي $a = \pm b$

(۸) له $a \mid b$ او $a \mid c$ څخه لاس ته راځي $a \mid (bx + cy)$ د ټولو ټولگنونو x او y لپار

(۹) ټيک هلته $a \mid b$ کله چې وي $|a| \mid |b|$ ،

(۱۰) که $a \mid b$ او $b = 0$ نه وي نو باوري دي $|b| < a < |b|$ -

حل (اوبې): (۱) له $a1 = (-a)(-1) = a$ لاس ته راځي

(۲) له $a0 = 0$ لرو $a \mid 0$. که وي $a \mid 0$ ، نو يو ټولگن u شته د کوم لپاره چې وي $0u = a$

او له کومې چې لاس ته راځي $a = 0$.

(۳) ساده دى.

(۴) که $a|b$ او $b|c$ ، نو ټولګڼونه u او v د $au = b$, $bv = c$ سره موجود دی. له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a|c$.

(۵) که $a|b$ ، پس یو ټولګڼ u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac|bc$ د $c \neq 0$ لپاره دا اخرختځیر په څټ کېدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخی $ac|bd$.

(۷) د $a|b$ او $b|a$ څخه د ټولګڼونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسیره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$ ، پس $a=0$ یا $u=v=\pm 1$. په لمړي حالت کی د $a|b$ له امله $b=0$ ، پس $a=b$. په دوم حالت کی $a=\pm b$ دی.

(۸) د ټولګڼونو u, v لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a|(bx+cy)$ د ټولو ټولګڼونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a|b$ ، $a|a$ او $b|b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې $a|b$ ، په څټ: که $a|b$ ، $b|a$ باورلری، نو د $a|a$ ، $a|b$ او $b|b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a|b$.

(۱۰) دی $a|b$ ، پس د (۹) هم $a|b$ ، که $b=0$ وي، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د ټولګڼونو a, b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کېږي)، چې لرو $a = bq$.

په ټولیزه توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۲۰۳ (د ویش الگوریتم): a او b دې ټولگڼونه وي، $b \neq 0$ سره، نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو (قدمونو) کې شمیرلکیدونکي ټولگڼونه q او r (چې د a پر b ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول «پاتې بلل کيږي، شته دی، د کومو لپاره

چې باور لري: $a = bq + r \wedge |0| \leq r < b$

هر یو ټولگڼ کم له کمه ساده پرویشونې لري یعنې ± 1 او پخپله د دې ټولگڼ زیاتیز (مثبت) او کمیز (منفي) دې پرویشونو ته «ساده پرویشونې» وایو.

پیژند ۲۰۳ ب :

هر یو ټولگڼ، چې یواځې او یواځي ساده پرویشونې ولري موږ ورته لومړنۍ گڼونه وایو او دا لومړنۍ یا پریم گڼونه Primzahlen په p سره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړۍ گڼ د پیدایښتي گڼونو توکي دی.

هر یو ټولگڼ، چې لومړنۍ گڼ نه وي د لومړنیو گڼونو په ځلونو (ځله وونو) (ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي.

بیلگې :

$$240 = 24 \cdot 10 = 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \quad - 1$$

$$2310 = 2 \cdot 1155 = 2 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \quad - 2$$

$$3750 = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$$

که پورته بیلگو ته په خیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو گڼونو کې گڼ ۲ د دواړو پر ویشونې دی او همدا ډول ۳ هم د دواړو گڼونو پرویشونې دی یانې $2.3 = 6$ برسيره پردې گڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه گڼونه ویشي او شاید په دې گڼونو کې یو خورا غټ گڼ پرویشونې هم وي.

په پورته درېواړو بیلگو کې ۲، ۳، ۵ د ځلونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجوو ګڼونو غ.ګ.پ دی

پیژند ۰۳ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d | a \wedge d | b$$

$$(2) t | a \wedge t | b \Rightarrow t | d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی (غ.ګ.پ) بلل کیږي d لپاره داسې لیکو:

$$d = (a, b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی (لنډ: غ.ګ.پ) بلل کیږي.

که باوري وي: $(a, b) = 1$ نو a او b پروسې پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

یادونه: په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالندوو: خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کې په پوره خوښی نیسم. دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي.

یادونه: که چیرې d او d^* دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

چی $d^* | d$ او $d | d^*$ ، نو $d \geq 0$ ، له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي، چې داسې غ گ و تل شته دی

جمله ۳.۰۳:

په خوښه ټولگنونه a او b لپاره دې غ گ پ d شته وي، نو ټولگنونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل (اوبی): که $a = b = 0$ وي، نو 0 د a او b غ گ و دی، نور ساده دی. د a او b ممکنه بدلون (په پام کې دې وي چې د (a, b) تعریف په a او b کې سیومتریک دی) له امله اجازه لرو چې $b \neq 0$ ونیسو.

موږ اوس رګورسیف (rekursiv) دا په دې مانا چې د مخه غړي څخه وروستی یعنی ورپسې غړی لاس ته راوړلکیري

ټولگنونه $r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \dots$ او $q_1, q_2, \dots$ په لاندې ډول تعریفوو: وي دې، $r_{-1} = a$ ، $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره ټولگنونه q_i, r_i داسې تعینوو چې $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چې له جملې (۳.۱) څخه ممکن کیدی شي. باید یو نه منفي گڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چې لرو $r_n \neq 0$ مگر $r_{n+1} = 0$ ، چې بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي گڼونو لویدونکې یا کمیدونکې پرلپسې لاس ته راځي، کوم چې ناشونی (ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیمما ته لارښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n | r_{n-1}, r_n | r_{n-2}, \dots, r_n | b, r_n | a$$

دا په دې مانا چې r_n د a او b یو غ ګ و دی. t دې د a او b یو بل غ ګ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسې لرو

$$t | r_0, t | r_1, t | r_2, \dots, t | r_{n-1}, t | r_n$$

دا په دې مانا چې $|r|$ د a او b غ ګ و دی.

هر د دې ګڼونو r_i د $(-1 \leq i \leq n)$ سره، په ځانګړي ډول r_n او د دې سره (a, b) یو د a او b لاینې کمېنیشن دی، په لاندې ډول $au + bv$ ، چې u او v ټولګڼونه دي.

$$r_{-1} = a$$

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره $1 \leq i \leq n$ سره، که یو د a او b یو

لاینې کمېنیشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیدا شوي وي، نو له $r_{i-2} =$

$$q_i r_{i-1} + r_i$$

څخه د یوې داسې r_i د ځای په ځای کولو له لارې هم، چې په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه: د غ ګ پ د ښوونې متود، چې پورته او په لاندې بیلګه کې راوړل شي د اویکلید الګوریتم “Euklid Algorithmus”، د یوې ګڼیزې دندې یا کارونې (عملې) شیماتیکي اوبیوني (حل) متود په نامه یادېږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیسیت Explicit (لاتین: څرګند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلګه:

غوښتنه $d = (2124, 1764)$ د اویکلید الګوریتم کارونې له لارې لرو:

$$2124 = 1 \cdot 1764 + 360$$

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وگورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره، چې d له x او y سره په $d = ax + by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) \cdot 1764 + 5 \cdot (2124 - 1764) = 2124 \cdot 5 + 1764 \cdot (-6)$$

د پورته څخه a او b لپاره لاندې مهمه پیژند نڅېنه یا نڅېښونه لاس ته راځي

یادونه: ماته دا لاندې جملې ښه ښکارېږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بهی له اوبیوني

وړاندې کړم، دا جملې په خټه کې د ګڼو نوتیوري دنده ده، چې په ګڼو نوتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کېږي.

جمله ۳۰۹:

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړای شو. په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ویشېږدي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ پر ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې ورو، ګڼونټېري پورې اړه لر او دلته یې نه ښایو.

جمله : ۱۰. ۳

a او b دې ټولګڼونه وي ۰ د a او b هر ګډ پروېشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t, b/t) = (a, b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پروېشونی هلته او هلته غ ګ پ دې چې باور ولري

$$(a/t, b/t) = 1$$

لیما ۳. ۱۰ (جمله ګی) (اویکلید): په خوښه ټولګڼونو a او b او c لپاره باور لري

$$a|bc \text{ او } (a, b) = 1 \text{ لاس ته راځي } a|c$$

تعریف ۳ ت : $a_1, a_2, \dots, a_n$ دې ټولګڼونه وي ($n \geq 1$), او d دې یو نه منفي

ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1, \dots, n$ لپاره

ب : له $a_i | t$ څخه د ټولو $i = 1, \dots, n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$.

نو d د $a_1, \dots, a_n$ غ ګ و بلل کېږي او د d لپاره هم داسی لیکو $(a_1, \dots, a_n)$.

د $a_1, \dots, a_n$ لپاره د داسی غ گ و یواختوب په ۲. ۵ کی کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۱۳. ۴ : د خوښي ټولگنونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره $(n \geq 1)$ غ گ و موجود او d د $a_1, \dots, a_n$ خطي (لایني) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

د متناسبو ټولگنونو $x_1, \dots, x_n$ لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه ټولگنونو $a_1, \dots, a_n$ د $(n \geq 1)$ لپاره. سړی کړی شي چی د $a_1, \dots, a_n$ غ گ و پل په پل د اویکلید الگوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل څخه تیريرو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸-مه برخه کې څیړل شوی دی.

بیلگي:

۱ - کڼونه 240 او 3750 غ گ پ $2.3.5 = 30$ لري

۲ - لرو 408 او 748

$$408 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17, 748 = 2^2 \cdot 11 \cdot 17$$

۳. دحقيقي اعدادو

۱۰۰

پس غ گ پ دی: $17 \cdot 2^{408,748} = 2^{2^{408,748}}$ یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^3 \cdot 17 = 68$$

۳- پ غ گ پ د گونو او غ گ پ $6 = (30.66.114)$ دی، خکه، چې
 $30 = 2.3.5$

$$66 = 2.3.11 \quad \text{او} \quad 114 = 2.3.19 \quad \text{دي}$$

۴- گڼونه 54 او 65 گډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، خکه، چې دي:

$$65 = 5.13 \quad \wedge \quad 54 = 2.3.3.3$$

خورا کوچنی گډ زیاتخلی (کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني گډ زیاتخه (لنډ: ک گ ز) کلیمې په څیرنه پیل کو. دا کلمه و غ گ پ یوه دوه بیزه یا دوه گونی یا غبرگه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټولیز پیژند ورکوو

تعریف ۳. ت: $a_1, \dots, a_n$ دې ($n \geq 2$) ټولگڼونه وي، او v دې یو داسی

نه منفی ټولگڼ وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف - $a_i | v$ د $i = 1, \dots, n$ لپاره

ب - له $a_i | w$ څخه د $i = 1, \dots, n$ لپاره لاس ته راځي $v | w$.

نو v د $a_1, \dots, a_n$ کوچنی گډ زیاتخه (لنډ: ک گ خ) بلل کیږي او داسې یې لیکو

$$v = [a_1, \dots, a_n]$$

پیژند (د دوه گڼونو لپاره)

a او b دې ټولگڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی ټولگڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

$$(۱) \quad v|a \text{ او } v|b$$

$$(۲) \quad \text{له } a|w \text{ او } b|w \text{ څخه لاس ته راځي } v|w$$

نو v د a او b خورا کوچنی گډ زیاتخه (لنډ) ک گ ز او که غواړی خ ک گ ز) بلل کیږي او په لاندې توگه یې لیکو

$$v = [a, b]$$

جمله :

په خوښه ټولگڼونو $a, b, c, \dots, n$ لپاره ک گ ز شته دی او دا یواځنی دی

$$[a, b, c, \dots, n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونو لاس ته راوړو:

$$[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n] \text{ لپاره لرو } (n \geq 3) \quad a_1, \dots, a_n$$

$$\text{او هم } (a_1, a_2) [a_1, a_2] = |a_1 a_2|$$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مگر د جملې په څیر دی): د په خوښه ټولگڼونو a, b, c لپاره باور لري: له $a|c$, $b|c$ او $(a, b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab|c$

د گڼتیري بنسټیزه جمله:

پېژنده :

يو ټولگن $n > 1$ لومړی گن (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشون v بل پرويشونی ونه لري .

لومړي گڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله) : که p یولمړی گن وي او $p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولگڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \leq i \leq n$ سره. حل (اوبی) : حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید $n-1$ امه برخه کتل شوي وي.

د $n=1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیمای دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ایندکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو گڼونو غوره والی د « گڼونتیوري بنسټیزی جملی » څخه لاس ته راځي

جمله (د گڼونتیوري بنسټیزه جمله) :

هر یو پیدایښتي (طبیعی) گن ، د گڼونو تر تیښ پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس . کیدی شي د گڼونو پروتخاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو گڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي .

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه n دې ودې کتل شي) د $n=1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبیعي گڼونو د تش (خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبیعي گڼونو $n > 1$ لپاره ښوول

شوي وي. موږ اوس ټول n پرويشونې $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسی گڼ شته لکه n . که p د دې پرويشونو کوچنی پرويشونی وي، نو p لمړی گڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پرويشونی q لرو دی د $1 < q < p$ سره، او دا چې q د n پرويشونی وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چې $n/p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي گڼونو د ځل په ځير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1 p_2 \dots p_r = p'_1 p'_2 \dots p'_s$ دوه ډوله د لمړيو گڼونو د ځل په ځير ليکنه. له $p_1 | p'_1 \dots p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_i | p'_i$ د يو i د $1 \leq i \leq s$ سره. د نمړې بدلولو له لارې دې وي $p_1 | p'_1$. داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2 \dots p_r = p'_2 \dots p'_s$. له کومو چې د ايدکشن له نيونې لرو $r-1 = s-1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي.

پای.

د بنسټيزې جملې د گټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی گڼ n په ټيک يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي

$$n = \prod_p p^{\nu_p} \quad (\nu_p = 0, \nu_p \geq 0) \text{ يواځي د پای ډيرو } p \text{ لپاره. } (\nu_p = 0 \text{ نول وکتل کېږي})$$

چيرته چې p ټولو طبعي گڼونو کې په جگيدونکې لړۍ پرلپسې کې خفلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو گڼونو چې جگ يې صفر وي تيريدل کيدی شي. لکه: $n = 28, n = 2^2 \cdot 7$ د $n = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7$ لپاره لاس ته راوړنې: $(a, b) = 1$ او $(a, bc) = 1$ ، نو هم $(a, bc) = 1$ ، د په خوښه ټولگڼونو a, b, c لپاره

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی گڼ p موجود وي د p/a او p/bc سره، د لیمما ۲. ۲ له مخې به یې باور لرو د p/b یا p/c داد $(a, b) = (a, c)$ سره تضاد دی. $0 = 1$

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتور تجزیه د ۲. ۴ له مخې ، نو $a|b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \leq \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له ۰ مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتور ټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$(a, b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}$ ، $[a, b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خورا کوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوی په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 59$ او $b = -1764 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ نو لرو $(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ او $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونو باندې غ ګ و او ک ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څوپه لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رېښه نیسي:

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له ۰ مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتوریتونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a, b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}, [a, b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خورا کوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوی په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 59$ او $b = -1764 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ نو $(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ او $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونو باندې غ ګ و او ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رېښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته.

حل (اوبی) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ټیایو (۸-مه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایله پر لمړی ګڼونه $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ له ۱ لوی دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \leq i \leq r$ سره. د $P | N$ او $p | p_1 p_2 \dots p_r$ له امله لاس ته راځي $p | 1$. کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

يادونه : د ميلاد څخه پخوا د « اريتوتنس غلبيل » متود څرگندوو، چي موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي گڼونو معلومول د ^{دې} متود له لارې په لاندې توگه څرگند وو

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
		15	16	17		18	19	20	21	22	23	24		
25	26	27	28	29	30	31		32	33	34	35	36		
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51		52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
	65	66	67		68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	
					92	93	94	95	96	97	98	99	100	

۳. ۱. ۰. ۳ - راشنل گڼونه Rational Nnumbers

(لاتين: عاقلانه يا هوښيار اعداد يا گڼونه)

د افغانستان په دري ادبياتو كې داسې گڼونه او ايراشنلگڼونه كله ناطق د گونگ اوداسي نورو گڼونو په نامه يا ديري، كله يې ماتگڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چي دا همداسي يانې راشنلگڼونه وبلل شي، كه څوك يې هوښيار گڼونه بولي هم خوښه يې او يا مات گڼونه، خو دلته راځيو Ratio n هوښيار په معنا نه بلكه د نسبي په معنا دي.

يادونه : كه / ولرو يانې كه ولرو a/b نو دا په دې مانا، چي a په b ويشل كيږي. كه ولرو $\neq$ نود نابرابرونڅښه ده. دا په دې مانا، چي b له 0 سره برابره نه ده. د دوه گڼونود a او b ویش $x = b/a$ د ټولگڼونو په ډيري كې تل هلته شته دي، چي $a \neq b$ ټولگڼيز څو ځله وي.

د دې لپاره، چې بیا هم ویش $a : b$ (دلته هم b پر a ویشل کیږي) کېدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګڼونو کې پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي» باید د ټولګڼونو ډیری ماتګڼونو (کسر) ډیری ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا ویینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګڼونو په څیر نیسو او په ټولګڼونو یې ور زیاتوو، نو هغه ګڼونه، چې لاس ته راځي موږ ورته راشنلګڼونه وایو. دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې $c \neq 0$ د ټولګڼ او $b|a$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګڼونو ماتګڼو b/a چې $a \neq 0$ او a او b د ټولګڼونو له ډیری وي، د ټولګڼونو پراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش (تقسیم) بنسټیز قانون (دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونو a ، $a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرې او مساوات $ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن، راسپړي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یانې $12 : 1 = 12 / 1 = 12$ یا $\frac{1}{2}$

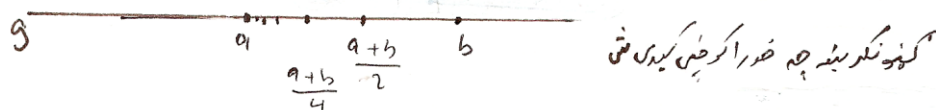
دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کېدی شي

۳. ۱. ۰. ۴ - رييل گڼونه (Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتونې شته يا موجود)

د ريښتلگن په بنسټ هغه ورځنۍ تيوريکي اړتياوي چې د شمير عمليو بې بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبې شوې او همدارنگه عملي اړتياوي چې اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريښتلگن له لارې کيدی شي چې د کرښې اوږدوالی ټيک ورکړ شي يا په همدې مانا: په هرڅومره وړوکی گڼونکرښه انټروال کی هم ناپای زیات گڼونه، چې په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کې هر ټکی د ريښتلگن په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښې هر ټکی د ريښتلگن په مانا نه دی. دا گڼونه چې د «ايريشنلگڼونو» په نامه يادېږي، کيدی شي د يوه پريوديکي (periodische) (د گڼونو کړۍ نه شلېږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بيلگې په توگه د مربع د نيمې (قطر) x اندازه چې د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چې په ريښتلگن وښوول شي. د پيتاگوراس د جملې په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات

$$x = \sqrt{2} \quad \text{پس} \quad x^2 = 1^2 + 1^2 \quad \text{لرو:}$$

د رییلګن کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چی د پوهیدلو لپاره یی «پولی» (lim) ته اړتیا موجود ده چی په ۱۸-مه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

ډیر ایتروالبندیدل چی په هغه یوه ټکی راڅرخي مساوي (ورته) ارزښته (Equivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

رییلګنډیری R چی په ریشنلګنډیری د ایریشنلګنډیری ورزیاتول دي چی له ۱ . ۱ . ۲ تر ۱ . ۲ . ۳ برخی پورې ټول بستزقوانین په کی باور لري. د رییلګن له لارې دکرښی ټول ټکي په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول رییلګنونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چی $x^2 + 1 = 0$ د رییلګن حل یا اوبی نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چی کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵-مه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

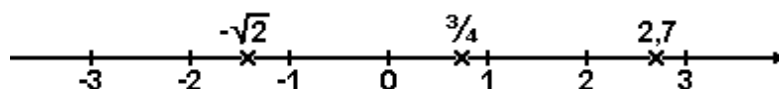
یا دا لاندې په لنډه توګه:

مور ګڼونه یا اعداد لرو، چی هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که مور د ۲ ګڼ ریشنه(جزر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چی هغه په لسمیزه توګه پای ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي. داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو.

تل بیرته راګرځیدنیز (periodical) تل بیرته راګرځیدوني Period, د ګڼونو خنځیر نه شلیږي

ایر اشنل – یا نانسبي عددونه یا گڼونه Irrational numbers

د راشنل او ایر اشنل گڼونو ټولنې ته ریيل گڼونه وایو (دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټیوري کې به ولوستل شي). ۰ مور د گڼونو د بنوولو لپاره لاندې گڼونکړبڼه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیدایښتي، ټول- راشنل، راشنل گڼونه کښل شوي دي یانې ریل گڼونکړبڼه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی (له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د ریيل گڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي. دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په ریيل گڼونو کې څلور بنسټیز شمیر ډولونه په ځانگړي توگه په لاندې ډول د نوکانو افادی (ویینی) سره شمیرنه (نوکان ایښوول) له زیاتون گډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه.

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کې ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانگړي توگه لندول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي گډ ماتلاندې (مخرج المشترك) جوړول. د داسې ماتلاندې (مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي.

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته مور ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو.

۳. ۲. ۱ - جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنسټیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a , \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \dots -c -d \dots) + (e + f + \dots -g -h \dots) = \\ a + b + \dots -c -d \dots + e + f + \dots -g -h \dots$$

دا دا مانا لري، چی که چیرې د نوکانو دباندي زیاتوننڅېنه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کی گڼ خپله مخنڅېنه نه بدلوي. که د نوکانو د باندي کموننڅېنه (منفي نڅېنه) وي، نو د گڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نڅېنی بدلیري. یانی کموننڅېنه زیاتوننڅېنه او زیاتوننڅېنه کموننڅېنه کیږي. بیلگه یې لاندې گورو

$$(a + b + \dots -c -d \dots) - (e + f + \dots -g -h \dots) = a + b + \dots - \\ c -d \dots -e -f \dots +g +h \dots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځای پرځای شي.

دلته باید مطلق ارزښت هم په گوته شي، چی په گڼکرښه د صفر څخه د یوه رییلگڼ واټن په گوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - گڼ یا بي اړیکو گڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې گڼ سره زیاتیزه او کمیزه نڅېنه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون (واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو گڼ ښایج او بس.

$$|a| = a ; \quad a > 0$$

$$|a| = 0 ; a = 0$$

$$|a| = -a ; < 0$$

ياني که a زياتيزه يا مثبت وي، نو a پخپله لیکواو که a کميزه يا منفي وي، نو $-a$ لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

$$۳ \cdot ۲ \cdot ۲ \cdot ۲ \text{ خل (ضرب)}$$

د خل لپاره لاندې د مخخښی قوانین باور لري:

$$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab, (-a)(-b) = +ab, (-a)(+b) = -ab$$

که چیرته ډیر نوکښونه راگرځیدلی وي، نو دا د خل قانون پل په پل پر مخ ځی بیلگه:

$$\begin{aligned} (a+b)(c-d)(e-f-g) &= (ac - ad + bc - bd)(e-f-g) \\ &= (ace - acf - acg - ade + adf + adg + bce - bcf - bcg - bde - bdf + bdg) \end{aligned}$$

د ځانگړي حالت په توگه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

گران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بیلگه ۱. ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2v)(4u - 2v)$$

۳۰۲۰۳ ویش

په پام دي کې ولرو، چې $b:a$ د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري، پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کې نوکېندول د زیاتون، کمون او حل په څیر ساده نه کیږي، په ویش کې د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلگه ۳. ۴ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسي

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

دې لاس ته راوړنې (نتیجې) ته سړی د گډو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکونک څخه وټلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلگه ۳. ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad ab \neq 0$$

د یوه زیاتو یا چمعي وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلي له لارې صورت ونیسي

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \quad a \neq -b.$$

بیلگه ۳. ۶ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \quad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \quad a \neq -b.$$

بیلگه ۳. ۷ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \quad ax \neq by,$$

بیلگه ۳. ۸ :

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

$$a^2 - 2ab + b^2 : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$$

باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځي او په څنټ

$$\frac{(a-b)^2 + b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{a-b} + \frac{b^2}{a-b} = a-b + \frac{b^2}{a-b} \quad \text{په } a \neq b,$$

$$\therefore (16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}v) = 4u - \sqrt{2}v \text{ Rest } v^2 \quad \text{پاتې}$$

$$\frac{16u^2 - v^2}{4u + \sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2 + v^2}{4u + \sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2}{4u + \sqrt{2}v} + \frac{v^2}{4u + \sqrt{2}v}$$

$$= 4u - \sqrt{2}v + \frac{v^2}{4u + \sqrt{2}v}$$

بیلگه ۱۰.۱

$$4u = -\sqrt{2}v \text{ لپاره}$$

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دې انډول (پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0} = P_n(x) : Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجې لوي يا مساوي وي ($n \geq m$).
موږ نيسوچي: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$.

د دواړو ویشو « ټوټه ویشو » (پارخیالویش (Partial division)) دا دی چی دا
د $P_n(x) : Q_m(x)$ ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{Polynom 1} + \frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجې څخه کوچنی ده.

دې هدف ته په لاندي ډول رسیږو.

۱ - سړی یواځی د جگ نظم غږي $a_n x^n : b_m x^m$ ویشي او له دې سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_n(x) : Q_m(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + F(x) \quad *$$

۲ - سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m) x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m) x^{n-m} Q_m(x)$ سره

چیرته چې د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \dots + c_0$ درجه r پیل

پولینوم $P_n(x)$ له درجې n څخه کم له کمه په یو کوچنی وي. د گڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چې $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ - که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ - او ۲ - ټوټه ویش

په $Q_m(x) : P_r(x)$ استعمالیږي، د لاندنۍ نتیجې سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m) x^{r-m} + P_t(x) / Q_r(x)$$

چیرته چې د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د ټوټه ویش دا عملیه آخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته

د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلگه ۲. ۱۱. لمړۍ دې د ټوټه ویش ۱ او ۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ

ډول د لاندې ویش په بیلگه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(x) : Q_1(x) = (6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$$

	$P_3(x) : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1)x^2Q_1(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلگه ۱۲. د ټوټه ویش بیلگه ۱. ۱۱ د $F(x)$ غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو
چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) = (9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 3x + G(x)$$

$$3x \cdot Q_1(x) = (9x^2 - 6x)$$

$$\text{پاتي} = 3x + 1 \quad \text{يا باقي}$$

$$G(x) = (3x + 1) : (3x - 2)$$

له دې لاندې تنجه لاس ته راځي :

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x + 1) : (3x - 2) = 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x - 2$$

$$\text{پاتي} = 3 \quad \text{يا باقي}$$

$$H(x) = 3 : (3x - 2)$$

پس باور لري

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x - 2)$$

ټول ټوټه ویش کیدی شي په لاندې ډول مخ ته یووړ شي .

$$(1) \quad (4) \quad (7) \quad (10)$$

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x - 2)$$

$$(2) \quad \underline{6x^3 - 4x^2}$$

$$(3) \quad \underline{-9x^2 - 3x + 1}$$

$$(5) \quad \underline{9x^2 - 6x}$$

$$(6) \quad \underline{3x + 1}$$

$$(8) \quad \underline{3x - 2}$$

$$(9) \quad \underline{3}$$

دلته (i) د پرلپسې پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳. ۱۳

$$(1) \quad (4) \quad (7) \quad (10)$$

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$$

$$(2) \quad \underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$$

$$(3) \quad \underline{9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}$$

$$(5) \quad \underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$$

$$(6) \quad \underline{3x^2 + x + 1}$$

$$(8) \quad \underline{3x^2 + x - 1}$$

$$(9) \quad \underline{2}$$

۳. ۲. ۰. ۴ ماتشميرنه (کسر شميرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m, n څخه د ريشنلګڼونو انځورونو لپاره تعريف شوې. کيدی شي، چې دا کلمه a/b ته، چې a او b رييل ګڼونه دي، وغزول شي.

بايد په پام ې ور، چې ماتباندي صفر نه شي..

د بيلګي په توګه:

ويش $a/(b-c)$ ټيک هلته مفهوم لري، چې $b \neq c$ وي. ماتګڼ a/b همدا ګڼ بڼايي

لکه $a : b$ او يا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم بايد $b \neq 0$ وي.

په اخر کې بايد په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندي ګڼ هم هر ماتګڼ کيدی شي او هم دواړه. دا بايد دلته هم په پام کې وي، چې هيڅ يو ماتلاندي ګڼ بايد صفر نه وي يانی دلته بی له اولنی ماتباندي نور يو ګڼ هم، چې ماتلاندي پورې اړه لري، نه شي صفر کيدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو.

بيلګي:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b \neq 0 , c \neq 0 ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b \neq 0 , c \neq 0$$

$$(a/b) : (c/d) = (a/b) / (c/d) , b \neq 0 , c \neq 0 , d \neq 0$$

يا په لاندې ډول:

$$\frac{a}{b} : \frac{b}{c}, b \neq 0, c \neq 0, \dots, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

په څو واره ماتګن کې بايد اصلي ماتګرښه څرګنده پيژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناتيکوالۍ مخه نيول شوي وي. په ټوليزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \neq \frac{a}{c}$$

هر يو ماتګن a/b په يوه ګڼ $b \neq 0$ پراخيدی او همداسې لنډيدی شي

ياني ماتلاندې او ماتباندي په يوه ګڼ c ځليدي يا ویشل کيدی شي او دا ګرڼلار په اصلي

ګڼ کې تغير نه راولي

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c}, b \neq 0, c \neq 0$$

د ماتګن لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګن ساده کړي.

د بيلګې په توګه:

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \frac{ax - ab}{y - ac} = \frac{x - b}{y - c}; a \neq 0, y \neq c$$

بايد تل په پام کې ولرو، چې يواځنی فکتور يا څلورنی يا ضريب لنډيدی شي او نه زياتوونی د بيلګې په توګه لاندې ماتګن

$(a+c):b+c = a:b$ چې $b \neq -c$ وي نه شي لاندې دا

باور لري، چې $b \neq 0, c \neq 0 \vee -c \neq a, a \neq b$

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړین دی، چې ډیر ماتګونونه په ګډ ماتېاندې (مخرج
المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغه مات یو په بل زیاتیدي یا یو له بل کمیدي
شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0 \quad \text{لکه:}$$

که چیرې پرځت یا برعکس ماتګونونه a/b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکي سره
زیاتوو او یا کموو، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو. ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه
دی. د بیلګې په توګه لاندې باور ی دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګونونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د
ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36} \quad \text{بیلګه:}$$

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې) ۱۰م ل (وټاکل شي

$$= 2.3.5.6.15.36 = 97200 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

کیدی شي، چې ۱۰م ل ۰ د لومړنيو گڼونو ځل په څیر هم ولیکو:

$$2 = 2$$

$$3 = 3$$

$$5 = 5$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 36 = 2$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$$

پس د گډ ماتلاندې لپاره د لوړگن يا لوړ جگگن يا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي ۰ چې گڼل خورا ساده کوي ۰

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36} =$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چې دا تگلار څنگه د ماتو په ټوليزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلگه يی ښايي:

بیلکہ ۳۰۱۵ پہ لانڈی بیلکہ کی

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2}$$

چي يواڻي ڊلندي لپاره موخه ور ڊي $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلی ماتلاندې لپاره یانی

$$ab(ab)(a^2b).(ab^2) = a^3.b^3$$

نه ٽاڪي، نو له دي امله دي

$$a = a$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

$$ab = a \quad b$$

$$a^2 \cdot b = a^2 \quad b$$

$$ab^2 = a \quad b^2$$

دا ا.م.ل. په لاندې توګه دی

له دی امله لرو:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{ab^2 - a^2bab - b + a}{a^2b^2}$$

بیلګه ۳.۰۱۶ : د وینې یا افادې

$$\frac{2}{a-2} + \frac{2}{a-1} - \frac{1}{a+1} - \frac{a+3}{a^2-1} - \frac{a+6}{a^2-4}, a \neq 0, a \neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

$$a-2 = (a-2)$$

$$a-1 = (a-1)$$

$$a+1 = (a+1)$$

$$a+2 = (a+2)$$

$$a^2-1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^2-4 = (a-2)(a+2)$$

$$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$$

دا پورته لاس ته راوړنه ۰.۱م.ل. - چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوي افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2) + 2(a^2-4) - (a-1)(a^2-4) - (a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$= \frac{(a+3)(a^2-4) + (a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

د دې مات ماتباندې صفر دې په ډول په پورته پیل کې ورکړ شوي افاده یا وینه د صفر پیچلي لیکلو بیلگه ده او بس.

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bcd \neq 0$$

بیلگه ۳۰۱۷ الف)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - a \frac{1}{1 - \frac{b}{a}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{a-b}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{a^2}{a-b}} = 1 - \frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}} \\ &= 1 - \frac{a-b}{a-b-a^2} = \frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2} = \frac{-a^2}{a-b-a^2} = \frac{a^2}{a^2-a+b} \end{aligned}$$

$$a \neq 0, a \neq b, a^2 - a + b \neq 0 \quad \text{د}$$

لپاره ۰ دا په دې مانا، چې

$$a \neq \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4b})$$

بیلگه ۳۰۱۷ ب):

$$\frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}} = \frac{\frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b) + b(a+b)}{(a+b)(a-b)}} = \frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a^2 - b^2)} \cdot \frac{(a^2 - b^2)}{a(a-b) + b(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 + ab - ab + b^2}{a^2 - ab + ab + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1, \forall |a| \neq |b|$$

يادونه: په پورته ليکنه کې د گڼونو موضوع لږ و غزول شوه، خو لږ څه نور هم بايد راغلي وي. دلته اړيک د گڼونو شمير قوانين دي او د گڼونو پيژندل. د گڼونو اړيکې د خونديونې له لارې

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

او په دې گڼونو کې باوري د شمير قوانين، چې هغه زياتون، کمون، حل، ویش دی او د ویش په بنسټ ماتشميرنه. دا بايد په هماغه ساده ډول زده کړای شي.

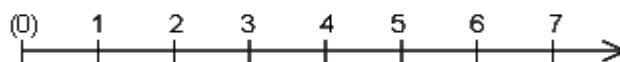
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړيک د گڼونو شميرن قوانين په لاندې توگه رالندوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهيدنه بسيا کوي.

گڼونديري (لنډه ټولگه)

پيدايښتي - يا طبيعي گڼونديري

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

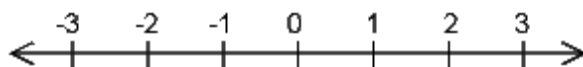
په وړانگه د پيدايښتي گڼونو انځورونه



د ټولګڼونو ډیری

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

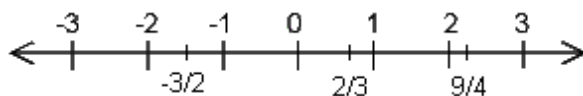
د ټولګڼونو ډیری انځورونه په یوه کرښه



د راشنلګڼونو ډیری

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیګی ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

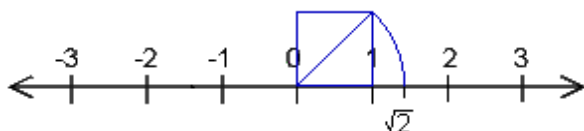
د ماتو سره شمیرنه

د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پراته دي، مګر بیا یې هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځای دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل . لکه چې یو راشنلګڼ نه دی

راشنل او ایراشنلګڼونه رییل ګڼونه جوړوي

د رییل ګڼونو ډیری یا حقیقي اعدادو سټ

د رییلګنونو ډیری د ګڼونکرنی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرنه کې روښانه ده



په رییلګنونو کې بې له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړۍ پورۍ

Addition: زیاتون یا جمعه

زیاتوونۍ + زیاتوونۍ = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوخیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بې اغیزه یا ناپیلۍ توکۍ شتون $a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګڼ یا برعکس عدد $a + (-a) = 0$

Subtraktion: کمون

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ۰ ترې کمه وونۍ – کمه وونۍ = کمون

$$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$$

$$\text{بیلگه: } 7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور (ځله وونی) ځل
 $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$ د زیاتون تکرار، بیلگه

د ضرب یا ځل کموتاتیو قانون $a \cdot b = b \cdot a$

د ضرب یا ځل اسوخیاتیو قانون $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستریبیو تیو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلې توکي شتون (بي اغیزه توکی یې که وېولو هم بده به نه وي)

$$a \cdot 1 = a$$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت $a \cdot (1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دی، چې د ضرب یو ضریب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ویش:

ویشونۍ : پرویشونۍ = ویش (لوستل یې له بني وکین لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده $a : b = c$

$$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b : a$$

$$z.B.: 4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12 : 4 = 3$$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

۳. ۳ تمرینونه

۱ - د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ - په کوم د اعدادو ډبرې یا ست کې د عدد a او عدد b لپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونې یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونې یا مفروق او پروېشونې یا مقسوم علیه تل b وي.

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= 8, & b &= 2 \\ \text{b) } a &= 5, & b &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } a &= 7, & b &= 0 \\ \text{d) } a &= -6, & b &= 1 \end{aligned}$$

۱. ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= \frac{13}{17}, & b &= \frac{169}{289} \\ \text{b) } a &= \frac{11}{21}, & b &= \frac{121}{231} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } a &= \frac{888}{901}, & b &= \frac{896}{911} \\ \text{d) } a &= -\frac{13}{12}, & b &= -\frac{143}{130} \end{aligned}$$

۱. ۳ - د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضرب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= \pi, & b &= 5 \\ \text{b) } a &= \sqrt{2}, & b &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } a &= \frac{2}{3}, & b &= \frac{3}{2} \\ \text{d) } a &= 0, & b &= 1 \end{aligned}$$

۱. ۴ - په دوه بیض سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

$$\text{a) } 28$$

$$\text{b) } 47$$

$$\text{c) } 73$$

$$\text{d) } 112$$

۱. ۵ - لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچونې یا کوټې ونې له لارې په نږدې ۵ ځایونږ ټیک پیدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲. د زیاتیزو او څلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲. ۱ - لاندې نوکان واز کړی

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
 b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
 c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
 d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
 b) $2a[a - (b - 3a)]$
 c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
 d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
 c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
 b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
 c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
 d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ - د بینوم فرولونه

۳. ۱ - د بینوم فرمولونه وکاروی یا استعمال کړی او د شونتیا سره سم یې ساده کړی

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
 b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
 b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

- c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$
- 3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$ c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$
- 3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$ c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$ d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$
- 3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳. ۶ لاندې وینې یا افادې ساده کړی، داسې چې د مربع تکمیلونې له لارې پوره مربع وي جوړې کړی!

- a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}a + 2\sqrt{6}b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴. د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته
۱ تر ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وینې یا افادې په ضریبونو ټوټه کړی او تر شونتیا پورې یې ساده کړی.

- 4.1. a) $a + a^2$ c) $8ab + 20b^2$
b) $-a^2 - a$ d) $ab + ac - ad$
- 4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$ c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
b) $ab - ac - b + c$ d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$
- 4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

$$4.4. \quad \begin{array}{ll} \text{a) } (a^3 - a^2)(2a - 2a^2) & \text{c) } (-5a - 10b)(-3a + 6b) \\ \text{b) } (-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2 & \text{d) } (-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1) \end{array}$$

۴. ۵ - هر ځل د n لوی توان ($n=1,2,3,\dots$) له نوکانو راوباسی!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } n^2 + n + 1 & \text{c) } (1 - 2n)^3 \\ \text{b) } 3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} & \text{d) } \left(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1\right)^2 \end{array}$$

۵ - د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوی.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ارزښتونه له شمیره وباسی، کوم چې $a, b, \dots$ یې نه شي نیولی یا اخستلی.

$$\begin{array}{ll} 5.1. & \begin{array}{ll} \text{a) } (10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a & \text{c) } (28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a) \\ \text{b) } (25ab - 40b^2) : (-5b) & \text{d) } (27a^2b - 63ab^2) : (-9ab) \end{array} \\ 5.2. & \begin{array}{ll} \text{a) } (3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b) & \text{c) } (3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5) \\ \text{b) } (a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b) & \text{d) } (4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b) \end{array} \\ 5.3. & \begin{array}{l} \text{a) } (35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b) \\ \text{b) } (15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b) \\ \text{c) } (21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c) \\ \text{d) } (12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c) \end{array} \\ 5.4. & \begin{array}{l} \text{a) } (a^3 + b^3) : (b + a) \\ \text{b) } (1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab) \\ \text{c) } (144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2) \\ \text{d) } (a^3 - b^3) : (a - b) \end{array} \\ 5.5. & \begin{array}{l} \text{a) } (9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b) \\ \text{b) } (a^2 - 10a - 25) : (a - 5) \\ \text{c) } (a^3 - 2ab + b^3) : (a + b) \\ \text{d) } (24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8) \end{array} \end{array}$$

۱۳۴ ۳ . دحقیقي اعدادو

- 5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
 b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
 c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
 d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا کسر شميرنه

۶ . ۱ - لاندې کسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندي او ماتلاندي د خورا غټ گډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لاري لاند کړی

$$a) \frac{6\ 732}{20\ 196}$$

$$c) \frac{20\ 520}{2\ 280}$$

$$b) \frac{2\ 730}{5\ 005}$$

$$d) \frac{69\ 069}{138\ 138}$$

۶ . ۲ - د لاندې اعداد خورا کوچنی گډ زاتځلی (ذالضعافالقل) پيدا کړی

په لاندې کي und د او په معنا دی

$$a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 \text{ und } 81$$

$$c) 5, 13, 16, 20, 26 \text{ und } 42$$

$$b) 8, 12, 21, 42, 56 \text{ und } 84$$

$$d) 120, 252, 264, 315 \text{ und } 616$$

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابر مخرج کسرونو شميرنه

$$6.3.1. a) \frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$$

$$b) \frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$$

$$c) 10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$$

$$d) 2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$$

$$6.3.2. a) \frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$$

$$c) \frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$$

b) $\frac{a+1}{b} - \frac{a-b}{b} - \frac{b-a}{b}$

d) $\frac{(a-b)^3}{2ab} - \frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶. ۴ - د نا برابر نومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضریبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12} + 1\frac{41}{72} + 2\frac{17}{24} + 9\frac{5}{9}$

c) $\frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39} + 19\frac{4}{13} + 15\frac{5}{6} - 2\frac{19}{72}$

d) $\frac{15}{64} - \frac{77}{96} + \frac{1}{243} - \frac{3-8}{24} + 3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6} - \frac{3a-7b+6c}{4} + \frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18} + \frac{a-2}{6} + \frac{5(2a-1)}{12} - \frac{3(a-1)}{8} - \frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48} + \frac{7a-8b+9c}{24} - \frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac} + \frac{5b-2c}{10bc} - \frac{b^2-c}{4b^2c} + \frac{4b^2-5a}{20ab^2} + \frac{2}{3a} + \frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{a^2+b^2}{2b} - 1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2} - \frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2} - \frac{a}{4b} + \frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2} + \frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab} - \frac{a(4b-5c)}{10bc} + \frac{4a-5b}{10c} + \frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac} + \frac{5b-2c}{10bc} - \frac{b^2-c}{4b^2c} + \frac{4b^2-5a}{20ab^2} + \frac{2}{3a} + \frac{a-b}{5ab}$

۶. ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو (کسرونو) جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶. ۵. ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړ شوي ارزښت ځای په ځای کړئ او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه (کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لري کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}$	د $a=1,2,3$ سره
b) $\frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}$	د $a=3,4,5$ سره
c) $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2$	د $a=2,3,4$ سره
d) $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a-1)^2}$	د $a=2,3,4$ سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{a+1} + \frac{4}{3a+2} - \frac{3}{a+1}$

b) $\frac{a-2}{a-3} - \frac{a-1}{a-2}$

d) $\frac{10}{2a-2} - \frac{6a}{3a^2-6a} - \frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2} - \frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b} - \frac{6ab-4b}{6ab+6b} - \frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2} - \frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2} - \frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2} - \frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab} - \frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2} + \frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab} - \frac{1}{2b} - \frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3} - \frac{3a-4}{a+2} + \frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b} - \frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2} + \frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2+ab} - \frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2} - \frac{2a-b}{36a^2-81b^2} + \frac{3}{12a-18b}$

$$c) \frac{2a+3b}{2ab+b^2} - \frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2} - \frac{5a-b}{4a^2+2ab}$$

$$d) \frac{9a-b}{6a^2-2ab} - \frac{6a+b}{3ab-b^2} + \frac{1}{2b}$$

۶. ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه (یا ځلونه):

$$6.6.1. a) 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$b) b \cdot \frac{1}{a}$$

$$c) \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5}$$

$$d) \frac{0}{b} \cdot \frac{b}{c}$$

$$6.6.2. a) \left(\frac{a}{3b} + \frac{3b}{a} \right) \cdot 3ab$$

$$c) \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \right) \cdot (2a - 3b)$$

$$b) \left(\frac{5a}{6bc} - \frac{6b}{7ac} + \frac{2c}{3ab} \right) \cdot 84abc$$

$$d) \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} \right) \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3} \right)$$

$$6.6.3. a) \frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3} \cdot \frac{7a+5ab}{6b-4a}$$

$$b) \frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2} \cdot \frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$$

$$c) \frac{a^2+1}{(a+1)^2} \cdot \frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$$

$$d) \frac{4ab-3a}{9ab-3b^2} \cdot \frac{18a-6b}{4a^2+10ab} \cdot \frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$$

۶. ۷: د ماتونو وېش:

$$6.7.1. a) \frac{2}{3} : 3$$

$$b) a : \frac{1}{b}$$

$$c) \frac{a}{b} : b$$

$$d) \frac{0}{a} : \frac{1}{b}$$

۶. ۷. ۲: د لاندې وینو یا افادو برعکس یا په څپ ارزښتونه پیدا کړئ.

$$a) \frac{a}{b}$$

$$b) \frac{a+1}{b}$$

$$c) \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$d) \frac{1}{a+b}$$

$$6.7.3. a) \left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a} \right) : \frac{a}{a+2b}$$

$$c) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$$

$$b) \left(1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} \right) : \frac{1-a^2}{a^2}$$

$$d) \left(\frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{a} \right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$6.7.4. \quad a) \quad \frac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}$$

$$b) \quad \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\frac{a^2 + b}{b} - \frac{a + b^2}{a}}$$

$$6.7.5. \quad a) \quad \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}}$$

$$b) \quad \frac{\frac{x^2}{ab} + x \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{ab}}{\frac{x}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$c) \quad \frac{\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}}$$

$$d) \quad \frac{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a} - \frac{a}{a+1}}$$

$$c) \quad \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}$$

$$d) \quad \frac{\frac{1}{16a^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a} + \frac{1}{2b}} + \frac{\frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a} - \frac{1}{2b}}$$

$$6.7.6. \quad a) \quad \frac{a + \frac{1}{1-ab}}{1 - \frac{1}{1-ab}}$$

$$b) \quad \frac{1}{a - \frac{a}{1 - \frac{a}{a-b}}}$$

$$c) \quad 1 - \frac{1}{1 - a \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{a}}}$$

$$d) \quad \frac{\frac{a + \frac{1}{4}b}{a - \frac{1}{4}b} - \frac{a - \frac{1}{4}b}{a + \frac{1}{4}b}}{1 + \frac{b^2}{16a^2 - b^2}}$$

۶. ۸. لاندې ماتونه یا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

$$6.8.1. \quad a) \quad \frac{35ac - 50bc}{7a - 10b}$$

$$b) \quad \frac{a - \sqrt{a \cdot b}}{b - \sqrt{a}}$$

$$c) \quad \frac{34ax + 51bx - 119cx}{2a + 3b - 7c}$$

$$d) \quad \frac{a^2 - ab + ac}{b - a - c}$$

$$6.8.2. \quad a) \frac{ax + bx + ay + by}{a + b}$$

$$b) \frac{ab + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}}{a + \frac{1}{2}}$$

$$6.8.3. \quad a) \frac{25a^2 - 130ab + 169b^2}{25a - 65b}$$

$$b) \frac{2x^2 + 8xy + 8y^2}{(x + 2y)^2}$$

$$6.8.4. \quad a) \frac{a^4 - b^4}{(a + b)^2(a - b)}$$

$$b) \frac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{a^2 + b^2}$$

$$6.8.5. \quad a) \frac{(\frac{1}{9}a^2 + b^2 + \frac{2}{3}ab)(x^3 - 27y^3)}{(2b + \frac{2}{3}a)(x - 3y)}$$

$$b) \frac{(2x^2 - 20x + 50)(2a - 1)(a + \frac{1}{2})}{(1 - 2a)(2a + 1)(25 - x^2)}$$

$$6.8.6. \quad a) \frac{(a + b + 1)(a + b - 1) + (a - b)^2 - 2 \cdot (b^2 + \frac{1}{2})}{a + 1}$$

$$b) \frac{(4a + \frac{1}{4}b - 2\sqrt{ab}) \cdot (2\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b})}{2\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{b}}$$

$$c) \frac{(a + 1)^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b + 1}$$

$$c) \frac{91ab + 7b + 39a^2 + 3a}{13a + 1}$$

$$d) \frac{ax + \frac{x}{b} - \frac{a}{y} - \frac{1}{by}}{\frac{1}{b} + a}$$

$$c) \frac{\frac{1}{4}a^2b^2 + 17ab + 289}{\frac{17}{2}(\frac{1}{17}ab + 2)}$$

$$d) \frac{25a - 20\sqrt{ab} + 4b}{ab(\sqrt{a} - 0,4\sqrt{b})}$$

$$c) \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)}$$

$$d) \frac{(a^2 + b^2)^2(a^2 - b^2)^2 + 2a^4b^4}{a^4 + b^4}$$

$$c) \frac{(80 - 40ab + 5a^2b^2)(4 - ab)}{64 \cdot (\frac{ab}{4} - 1)^3}$$

$$d) \frac{(32a^3b^2x - 18ax^3y^2) \cdot 3by}{(12ab^2y + 9bxy^2) \cdot 2ax}$$

$$d) \frac{(a-1)^2 - (b-1)^2}{a^2 + b^2 + 2ab - 4(a+b-1)}$$

۶ . ۹ . د (-1) سره شمیرنه

الف- ورکړ شوی دې وي $a(b-c)/c$. $a=-1$. a خای په خای کړی او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړی.

ب – ورکړي دې $(5c-3b-a)/(1-a)$ وي په صورت او مخرج (ماتلاندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسی او دا عدد لنډ کړی.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2)/(-a-b)$ د (-1) سره پراخ کړی او ساده یې کړی.

ت- ورکړی دې وي $1 - \frac{25a^2 - 36b^2}{6b - 5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راوباسی او دا وینه یا افاده ساده کړی.

٤ • توان (پوتنځ) او رېښه (جذر) Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا رېښې قوانين ترڅيرنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو. دا مشوره کيږي، چې رېښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جگعدد يې نسبي يا راشنل وي. د دې فورمال ټيک کره د گڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي.

د رېښې پيژند د خلاف يا پر څټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (رېښه ويستونې يعنې هغه گڼ، چې رېښه يې وېستلکيږي يا نيول کيږي، د رېښې نخښې لاندې گڼ او هم د رېښې ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز گڼونه) وي. د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي.

٤ • ١ توان (پوتنځPotenz) په ټولگڼيز يا تام عدد په جګ يل اکسپوننت

پېژند ۱۰۴:

د یوه په خوښه ریل گڼی توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره $-n$ م واره حل

پوهیږو د دې لپاره لیکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ $n = 1, 2, 3, \dots$

اکسپوننټ (جگگڼ، لنډ: جگ) او b د پوتنځ یا توان ارزښت بلل کیږي.

د بیلگي په توګه

$$a = a, a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$(4,1) \quad n = 0 \quad \text{د لپاره کره ټاکل کیږي} \quad a^0 = 1 \quad \text{د} \quad a \neq 0 \quad \text{سره}$$

د پېژند یا تعریف پر بنسټ (اود څه بندیزونو په څلور دیوالی کې، چې لاندې شوي) بنوول کیدی شي، چې د خوښی یا زړه پورې ریښه گڼونو $a, b \in R$ او $m, n \in N^*$ نامنفی ټولگڼونو اکسپوننټ یا جگگڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n; \dots \dots \dots (4,2)$$

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a/b)^n; b \neq 0; \dots \dots \dots (4,3)$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \dots \dots \dots (4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m; \dots \dots \dots (4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}; \dots \dots \dots (4,6)$$

دا پورته د توان اړیکې د ټولګنیز مثبت جګړې یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدی شي، چې ټولګنونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند وړکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n=1,2,3,\dots, a \neq 0, \dots (4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنیز جګړې (اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو رییل بنسټونو یانې د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ی دی. په (4,5) کې بیا بندیز $n \geq m$ اړین نه دی.

د توان قوانین کیدی شي په بڼه بدلونکو افادو یا وینو وکارول- یا استعمال شي.

بیلګه 1.4

$$\left[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}} \right]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بیلګه 2.4

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بیلګه 3.4

$$\begin{aligned} \frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} &= \\ = \frac{a^5(3-a) + a^6-a^5+2a^3-1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} &= \\ = \frac{3a^5-a^6-a^5+2a^3-1-2a^5-a^3}{a^{m+1}} &= \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

پوتنځ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنځ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدي او یو له بل کمیدي شي.

بیلګه ۴. ۴

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه ۵. ۴

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنځېنې کې دې توپیر وشي. پوتنځ له مثبت - یا زیاتونمخنځېنې سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترڅ کې، چې پوتنځ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري.

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, \dots, (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, \dots, (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in \mathbb{Z}, a > 0$$

۴. ۰. ۲ - رېښه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ۴. ۰. ۲

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه رېښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

$$b^n = a \quad \text{باور لري:}$$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, \dots (4, 8)$$

$$a \geq 0, b \geq 0 \dots (4, 9)$$

دلته a رادیکاند Radikand، یا ګڼ، چې ریشه (جذر) یې نیولکیري (مور دا

ریشه نیوونې یا ریشه ویستونې بولو) او n درېښې جګ (اکسپوننت) او b د

رېښې ارزښت یا ریشه ارزښت بلل کیري.

باید پردې ټینګار وشي، چې ریشه یواځې د نامنفی رادیکاند یا ریشه ویستونې (ریشه نیوونې) $a \geq 0$ راوستل کیري یا نیول کیري او پخپله په لاندې توګه یو نامنفی - یا ناکمیز ارزښت لري یانې

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کونې لپاره لاندې یادونې شوي دي:

۱- د جوړه $n = 2, 4, 6, \dots$ لپاره د $a < 0$ سره ریشه b په رییلګونو کې نه شته، کوم ، چې $(4, 8)$ پوره کړي ،

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفی یا ناکمیز یانې زیاتیز ګڼ دی.

۲- د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرې $b^n = a$

په خټه په ریښتوني دوه رییل اوبیوني یا حلونه لري د بیلګې په توګه $b^2 = 4$

ياني $n = 2$ او $a = 4$ اوبيوني

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي. د دې لپاره، چې د راديکاند شميرلو کارونې يواځنې سرته ورسولې شو، بايد د يوي اوبيوني لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳- د ناجوره $n = 1, 3, 5$ او $a \geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز (مثبت) اوبی يا حل لري ياني $b \geq 0$

۴- د ناجوره n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځني يو منفي اوبی يا حل لري. ياني $b < 0$ د بيلگي په توگه دا $b^3 = -8$ يواځي

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت بايد د جوړه $n = 2, 4, 6, \dots$ گڼونو لپاره $a \geq 0, b \geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا رېښه شته نه وي او يا به يواځنې اوبی نه لري، ياني څو اوبی به شته وي

د ناجوره يا طاقو، $n = 1, 3, 5, \dots$ لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو. دلته به يواځي توان يا زيان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د رېښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو. له بلې خوا به رېښې د قوانينو ترتيبول د پوتنځ لپاره، چې پورته ايښول شوي بنديزونه n قوانينو لپاره ستونځمن وي. له دې امله د ناجوره رېښو

اکسپوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره -2 د $b^3 = -8$ او نه $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2 = \sqrt[3]{-8}$ لیکو. په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په گوته شوی وي

$$\sqrt[n]{a^3} = a, \dots (4,10)$$

څلوری ریښه یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - گڼونو a لپاره تعریف شوي. د نامثبت یا نازیاتیزې a لپاره به $(4,10)$ په داسې حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د $(4,10)$ اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه $b \geq 0$ نفي کوي.

په ځانګړي حالتونو کې به د $(4, 10)$ ښول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یانې د $-2 = 2$ سره.

د $(4, 10)$ ټیک داسې لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \dots (4,11)$$

$$= \{ -a, a \leq 0 \} \quad (4,11)$$

د ریښې یا جذر له پیژند $(4, 9)$, $(4, 8)$ سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښې قوانین ولیکل شي د $n = 1, 2, 3, \dots$ او $a, b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \dots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \dots (4,13)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \dots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \dots (4,15)$$

پورته د $(4,15), (4,14), (4,13), (4,12)$ ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامنځ ته کوي. دلته پیژندل کیږي، چې د رینې قوانین د پوتنخ قوانینو ته، چې په $(4,2)$ تر $(4,6)$ پورې ورکړ شوي، د پرتلي وړ دي. په رښتیا چې دا د پوتنخ قوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنخ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژندل ورکړ شي.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \dots\dots\dots (4,16)$$

د لپاره $a \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, 4, \dots$

د بیلګې په توګه $(16, 4)$ په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n \cdot m} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې $(4,16)$ کیدۍ شي منفي $m = -1, -2, -3, \dots$ ته هم پراخه شي، چېرته، چې $(4,17)$ په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0 \dots\dots\dots (4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنخ قوانین $(4, 2)$ تر $(4,6)$ باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې $a > 0, b > 0$ نیونه شوې وي.

د رینې شمیرلو لپاره باید اساساً د $(4,16)$ له مخې ریشنل اکسپوننتونه واورې او له $(4,2)$ تر $(4,6)$ استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنخ او رینې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیونې تل و ازمایلی شو. په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب (مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پای کیدډول وښایو.

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت $a = 0$ لپاره شته دی یا باور لري، د $a \neq 0$ یا $a=0$ لپاره a او یا $-a$ منفي دي دا په دې مانا، چې a یا $-a$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی.

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جگ لري، په لاندې بیلگو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلگو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو گرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي. شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړئ پخپله یې یو ځل وشمیرئ.

بیلگه ۴.۰۶

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلگه ۴.۰۷

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \sqrt{bc}^{-2}}{\sqrt[3]{a^2 b^{-3}}} : \frac{d^2 \sqrt{c}}{\sqrt[5]{da^{-5}}} &= \{a^{(2-\frac{2}{3})} b^{(\frac{1}{2}+3)} c^{-2}\} : \{a^5 c^{-2} d^{(2-\frac{1}{5})}\} = \\ &= a^{(2-\frac{2}{3}-5)} b^{(\frac{1}{2}+3)} c^{(-2-\frac{1}{2})} d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}} b^{\frac{7}{2}} c^{-\frac{5}{2}} d^{-\frac{9}{5}} = \\ &= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}} \cdot \sqrt{c^5} \cdot \sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3 \cdot \sqrt{b} \cdot c^2}{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot d^5 \cdot \sqrt[4]{d^4}} \end{aligned}$$

بیلگه ۴.۰۸

$$\begin{aligned} &8 \cdot \sqrt[3]{343} - 4 \cdot \sqrt[3]{125} + 5 \sqrt[3]{8} - 5 \sqrt[3]{729} \\ &= 8 \cdot \sqrt[3]{7^3} - 4 \sqrt[3]{5^3} + 5 \cdot \sqrt[3]{2^3} - 5 \cdot \sqrt[3]{3^6} = 8 \cdot 7 - 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 9 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه ۹۰۴

$$\begin{aligned}
 & 5\sqrt{63} - 2\sqrt{175} - \sqrt{343} + 3\sqrt{28} \\
 &= 5\sqrt{7 \cdot 3^2} - 2\sqrt{7 \cdot 5^2} - \sqrt{7 \cdot 7^2} + 3\sqrt{7 \cdot 2^2} = \\
 &= 5 \cdot 3\sqrt{7} - 2 \cdot 5\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + 3 \cdot 2\sqrt{7} = \\
 &= 15\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 4\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

بیلگه ۱۰۰۴

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} &= \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - b^2})} = \\
 &= \sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2} = \sqrt{a^2 - a^2 + b^2} = |b|
 \end{aligned}$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخوړ دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلي رینه له منځه یوسو
(د ماتلاندې ریشنل کول) •

که په ماتلاندې کې یوه رینه $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلووني په څیر رامنځ ته شي،
نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړین ده چې $m < n$ ($m, n > 0$) او $m, n \in \mathbb{Z}$ په پام
کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کيږي ($|N^*| = 0, a > 0$)

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{N} = \frac{Z}{N^* \sqrt[n]{a^m}} = \frac{Z \cdot a^{\frac{1-m}{n}}}{N^* a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{1-m}{n}}} = \frac{Z \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{N^* a}, \dots \dots (4,18)$$

بیلگه ۱۱۰.۴

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3} + 1}}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot 3^1} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورۍ- یا مربع ریښې زیاتون یا کمون وي $N = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ نو
ماتلاندې له مات $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ سره غزوو او د بینوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$
چې $a \neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{a - b}, \dots (4,19)$$

بیلگه ۱۲۰.۴

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

بیلگه ۱۳۰.۴

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

۴. ۳. توان (پوتنځ) د حقیقي – یا رییل جگ (اکسپوننت) سره

دلته دا په گوته کوو یا دې دا ویل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7)
دې په خوښه حقیقي اعدادو اکسپوننتونو (جگعددونو) m, n لپاره باور لري، طبعاً بې بندیزه
ټیک د مثبت بنسټ لپاره. یعنې $a, b > 0$ ، برسیره پردې دې باید توان a^α ; $a > 0$ د
ناریښتونې یا ایراسنل عدد α لپاره تعریف شي.

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳، ۱، ۴ برخې سره سم انټروالونو بندولو په بنېت لرو: $\alpha = \{a_n; a'_n\}$. دلته a_n, a'_n هوښیار یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \quad (4,20)$$

هم په انټروالونو بندول دي چې غړي یې (۲، ۴) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انټروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$\begin{aligned} 2^1 &< 2^{\sqrt{2}} < 2^2 \\ 2^{1,4} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\ &\vdots \end{aligned}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

$$10000 \sqrt{2^{14142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{14143}} \quad \text{نو لرو}$$

۴، ۳ ټولګه: د $a > 0, b > 0$ ریيل او $m, n \in N (n \neq 0)$

همدا ډول $m, n \in N (n \neq 0)$ ییلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = \\ &= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړين وو، هغه به بيا په گډه ورزياتوو

۴. ۵. تمرينونه

۱. د توان کلمه، د توان جمع او تفريق يا زياتون او کمون

۱. ۱ - د توان په څير يې وليکئ

$$\text{a) } (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \quad \text{b) } -\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$$

$$\text{c) } -(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b) \quad \text{d) } -(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$$

$$1.2. \quad \text{a) } -3^{-4} \quad \text{b) } (-5)^3 \quad \text{c) } (-2^{-1})^3 \quad \text{d) } -\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$1.3. \quad \begin{aligned} \text{a) } & 12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b \\ \text{b) } & (3a + 2b)x^4 - x^4(2b - 3a) + x^4(3a + 2b) \\ \text{c) } & 4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2 \\ \text{d) } & 18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3 \end{aligned}$$

۲ - د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

$$2.1. \quad \text{a) } \frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$$

$$\text{c) } \frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$$

$$\text{b) } \frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$$

$$\text{d) } \frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x} \cdot x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x} \cdot x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$$

$$2.2. \quad \text{a) } \frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$$

$$\text{c) } \frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$$

$$\text{b) } \frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$$

$$\text{d) } \frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$$

۲. د توان ضرب او جمع (زیاتون) د همغه بنسټ سره:

- 2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$
 b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$
 c) $(a^n + 1b^x - 1 + a^n b^x + a^n - 1b^x + 1) : a^n - 2b^x - 1$
 d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوگاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳. د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جگړې یا جعده سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

- 3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$ c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$
 b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$
- 3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$ c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$
 b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$ d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$
- 3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$ c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$
 b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$ d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$
- 3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$
 b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

$$c) \frac{(ax - ay)^m \cdot (3bx + 3by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}}$$

$$d) \left(\frac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \frac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}} \right) \frac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$$

۴. د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع - یا څلوری ریشه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) $a^2 - b^2$ d) $a^2 + b^2$

۵ - د رېښو جمع او تفریق (زیاتون او کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256} - 4\sqrt{49} - 7\sqrt[3]{27} + 2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50} - \sqrt{98} + 4\sqrt{288} + 14\sqrt{162} - \sqrt{25-9} \cdot \sqrt{2}$

5.2. a) $\frac{x(2r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 8x\sqrt{r^2 - x^2}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2 + x^2} - \frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2 - 2kx + k^2}}$

b) $\frac{r(4r^2 - 3rH)}{\sqrt{4r^2 - 2rH}} - 3r\sqrt{4r^2 - 2rH}$

d) $\frac{h^2 + \left(c - \frac{c}{2}\right)^2 - \left(c + \frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2 + \left(c - \frac{c}{2}\right)^2}} - \frac{h^2 + 2 \cdot \frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x} + \frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

d) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x}{(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \cdot (\sqrt{x^2 + a^2})}$

۶ - د رېښو یا جذرونو ضرب او وېش

- 6.1. a) $\sqrt{3 \cdot 7} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} \cdot \sqrt{5 \cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$
 b) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$
- 6.2. a) $(3 - \sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2 - 12x} \cdot \sqrt{3x^2 - 3}$
 b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a} \cdot \sqrt{ab+b}$
- 6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}}$
 b) $\sqrt{6x^2-6} \cdot \sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ - د توان او ریشه وېستنه (حلونه)

1. a) $\sqrt{0.04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$
2. a) $2^{n-1}\sqrt{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^{12}}$
 b) $\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6 \cdot b^8}}$
3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3 - 8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2 - 2r \cdot \frac{4}{3} \cdot r\right)^3}}$
 b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2} + \frac{a^4}{8}$ d) $\pm \sqrt{\left(\frac{x_0 y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}\right)^2 - \frac{y_1^2 x_0^2}{y_1^2 - y_2^2} - \frac{x_0 y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}}$
4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}}$ c) $\sqrt{a \cdot \sqrt[8]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a}}} : \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}}$
 b) $\sqrt[3]{a^3 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^8 \cdot \sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt{a^3 \cdot \sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7 \cdot \sqrt{a}}}$

۸ - لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رینه نه وي.

- | | | | | |
|------|--|--|---|--|
| 8.1. | a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ | b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ | c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ | d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$ |
| 8.2. | a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ | b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ | c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ | d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$ |
| 8.3. | a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ | b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ | c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ | d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$ |
| 8.4. | a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ | b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ | c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ | d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ |
| 8.5. | a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ | b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ | c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ | d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$ |
| 8.6. | a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ | c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ | | |
| | b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ | d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ | | |

٥٠ لوگاریتم یا لوگاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوگاریتم کلمه ترڅیرني لاندې نيسو او د لوگاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوي، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څیرو ٠

٥٠١ د لوگاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوگاریتم تر څیرني لاندې نيسو، د لوگاریتم د قوانینو اسانتیاوي څیرو، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ٠ د لوگاریتم $c = \log_b a$ پیژندلپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوگاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه c لپاره

$$b^c = a ; a > 0 ; b > 0 ; b \neq 1 \quad (5,1)$$

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخې ٤ سره یواځنی ټاکلی دی. که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو دپورتنيو نښو سره یواځنی ریيل گڼ c شته دی، چې برابر و (4,1) پوره کوي. دې ته د a لوگاریتم وایو د b پر بنسټ:

پیژند ٥٠١:

د ریيل مثبت گڼ a لوگاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ b ولري، هغه ریيل گڼ c پوهیږو، له کوم سره، چې b د هغه په توان یا پوتنځ کړو او گڼ a ترې لاس ته راشي. لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, \dots \dots \dots (5, 2)$$

(5,1) او (٢٠٥) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوگاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د (5,1) ته بیرته ورگرځو. دا به په لاندې بیلگه کې روښانه شي، په کوم کې چې له a, b, c څخه تل دوه گڼونه ورکړ شوي دي

بیلگه ٥٠١

٥٠١ الف: له $2^x = 16$ لرو $x=4$ ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو $x=-2$ ، ځکه چې $\frac{1}{9} = 1/3^2 = 1/9 = 3^{-2}$

٥٠١٠٢ الف: $2 = \log_x 36$ د $x^2 = 36$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x=6$

ب: $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

۱۶۰ ۵ ۰ لوگاریتم یا لوگاریتموس --

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، یو ارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16}\right)$ د $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = 4$

۳ ۰ ۱ ۰ ۴ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره یو ارزښت لري، نو $x = 243$

ب: $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x (-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري.

ب: $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له $(5,1)$ او $(5,2)$ څخه لاس ته راځي

$a = b^{\log a}$, (5,3)

$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1$, (5,4)

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, \dots \dots \dots (5,5)$$

د $\lg a$ لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وايي او $\ln a$ ته پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم وايي (e وروسته څیړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c = \log a \quad (5,6)$$

که سومبول $\log$ څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوبښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي.

۵. ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د $(5,1)$ او $(5,2)$ له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو $(5,3)$ تر $(5,7)$ په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوبښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ $b \neq 0$ ، $b > 0$ او د زیاتیز (مثبت) $x > 0$ ، $y > 0$ لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, \dots \dots \dots (5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \dots \dots \dots (5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, \dots \dots \dots (5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x, n = 1, 2, \dots, \dots \dots (5,10)$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمیرن ښايي

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y, \dots\dots\dots (5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)، (5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log_b x, c_2 = \log_b y, c = \log_b (x + y), \dots\dots\dots (5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \dots\dots\dots (5,13)$$

له (5,13) او د پوتنڅ قانون (2 ، 4) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b^c, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \dots\dots\dots (5,14)$$

او له (5,11) همداسې د (5,7) بنوونه د (5,12) له امله د لوگاریتم د (5,7) تر (5,10)

قوانینو کیدی شي د پېچلي لوگاریتم له افادې څخه د لوگاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو او په څټۍ.

بیلګه ۵. ۲

$$\begin{aligned} & \log \frac{2\sqrt{a+b} a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2} \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \log(a+b) + 3 \log a + 2 \log b - \frac{1}{3} \log c - 2 \log(a+c) \end{aligned}$$

بیلګه ۵. ۳

$$\begin{aligned} & \log(a+b) + 2\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a^2-b^2) \\ &= \log \frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log \frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}] \end{aligned}$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري.

په بیلگه ٥٠ ٢ کې په کین اړخ کې لوگاریتم ځای لري، چې د ټولو a, b, c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې $a+b>0$ (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوگاریتم اوبی یا حل نه لري.

وي دې $c > 0$ (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b \neq 0$ (د دې لپاره، چې لوگاریتم تعریف وي)

وي دې $b \neq 0, a > 0$ (د دې لپاره، لوگاریتم تعریف وي)

د کین اړخ لوگاریتم په ځانګړي ډول د $c = 1, b = -1, a = 2$ لپاره تعریف دی. په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې $\log$ بي ځایه دی. د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b \neq 0$ پر ځای په ټینګه یا کره، $b > 0$ وغوښتل شي.

په بیلگه ٥٥ ٣ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$$a+b>0, \quad a-b>0$$

نو بیا $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) > 0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوگاریتمونه هم تعریف دي. دا اړیکې د ټولو a, b لپاره هم باور لري، د کومو لپاره چې پورته نابرابرون ډک وي. دا کیدی شي $a > b, a > -b$ له امله هم $a > |b|$ ته راغونډ شي.

--

دې

ته دې هم گوته نیولې وي، چې لوگاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوگاریتم یوه په خوښه بل بنسټ d ته د شمیر اوږون د شمیرنې اړول کیدی شي ($b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0$)

$$a = b^{\log_b a} \quad \text{د } (۵,۳) \text{ له مخې باور لري}$$

د دې برابرېون لوگاریتم نیول و بنسټ d ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), \dots \dots \dots (5,15)$$

د

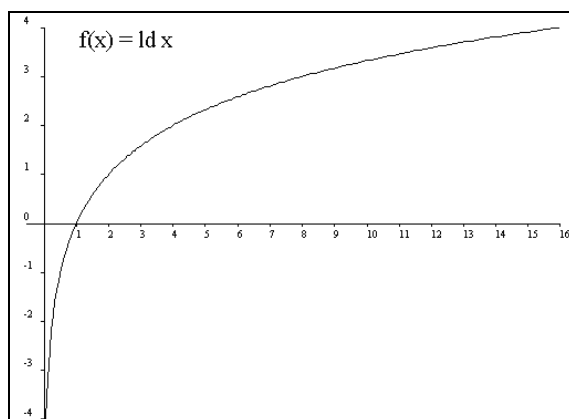
لسیز لوگاریتم اړول په پیدایښتي یا طبیعي لوگاریتم او په څنټ لپاره لیکو $b=10, d=e$ همداسې $b=e, d=10$ او لاس ته راځي:

$$Lga = (\lg e)(\ln a); \dots \dots \dots (16)$$

$$Lna = (\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a; \dots \dots \dots (17)$$

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), \dots \dots \dots (5,16)$$

$$\ln a (\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, \dots \dots \dots (5,17)$$



د لوگاریتم فنکشن یا بلواک او دیاگرام یې

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوگاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوټنځ لوگاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوگاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوگاریتم یو په بل بدلیل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښه وروسته بینارځایونه ۰ او لسمیزسیستم

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,0625
2^{-5}	0,00001	0,03125
2^{-6}	0,000001	0,015625
2^{-7}	0,0000001	0,0078125
2^{-8}	0,00000001	0,00390625
2^{-9}	0,000000001	0,001953125

۵. ۳ تولگه

لوگاریتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په خت بلواک دی

$$x = \log_b n \Leftrightarrow b^x = n$$

د $a, b, x, y, d, > 0$ رییل گڼونو او $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828, \dots$$

$$\log(xy) = \log x + \log y, \log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

$$\log x^\alpha = \alpha \log x, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\log_b a = (\log_d a) \cdot (\log_d b),$$

$$\lg a = (\lg e) \cdot (\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10) \cdot (\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵. ۴ – تمرینونه

۱. د د لوگاریتم تعریف

دلوگاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

- 1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$
 1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$
 1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$
 1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$
 1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$
 1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$
 1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$
 1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

دلوگاریتم

۲. د لوگاریتم قوانینو استعمال

قوانیناستعمال کړئ دو د a, b, c, d, m, n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

- 2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$
 2.2. a) $\ln (\sqrt{e})^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$
 2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$
 2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$
 2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$
 b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[4]{ac^2}}$

$$2.6. \quad a) \frac{1}{3} \log(a+b) + \frac{1}{3} \log(a-b)^{-1}$$

$$b) \lg a + n \lg(a+b) + n \lg(a-b)$$

$$c) \lg a - \frac{1}{2} \lg b + \frac{4}{3} \lg c$$

$$d) \frac{1}{3} \lg(a^2 - b^2) - \frac{1}{2} \lg(a-b) - \frac{1}{2} \lg(a+b)$$

$$2.7. \quad a) \frac{1}{3} \lg a + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \lg(a+b) + \frac{1}{2} \lg(a-b) - \lg a - \lg b \right\}$$

$$b) \frac{1}{2} \lg(a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \{ \lg(a-b) + \lg(a+b) \}$$

$$c) \frac{1}{3} (\lg a + 3 \lg b) - \frac{1}{2} (4 \lg c - 2 \lg d)$$

$$d) \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} + \ln \sqrt{a}$$

۳. د لوگاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

X وشمیری.

$$3.1. \quad a) x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$$

$$c) x = 3 \cdot 10^{-2 \lg 3}$$

$$b) x = 2 \cdot 10^{2 \lg 2}$$

$$d) x = \left(100^{\frac{1}{2} \lg 49} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$3.2. \quad a) x = \sqrt{10^{2 + \lg 9}}$$

$$c) x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2} (\lg 2 + \lg 32)}}$$

$$b) x = \sqrt[3]{10^{4 - \frac{1}{2} \lg 100}}$$

$$d) x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$$

$$3.3. \quad a) x = \ln \frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$$

$$c) x = \left\{ \left(\sqrt[3]{e} \right)^2 \right\}^{\ln 8}$$

$$b) x = \ln \frac{0,23}{2e^2}$$

$$d) x = (\sqrt{e})^{3 \ln 5}$$

٦ . گونومتری (کونجکچ یا مثلثات Gonometry)

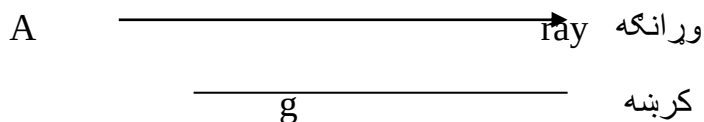
دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چټکتیا ته (گونومتری شمیرنی ته) په گراد- او لینده کچ، دکونجفنگشن په استعمال د ولاړ کونجیز - او عمومي درېگودیود تریگونومتری فرمولونو په استعمال د تریگونومتری افادو په څیره بدلون ته پر مختگ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي . زه به کوبښښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی، کم له کمه په څیره کی گرانو لوستونکو ته، په مناسب ځای کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

٦ . ١ . بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (straight) line

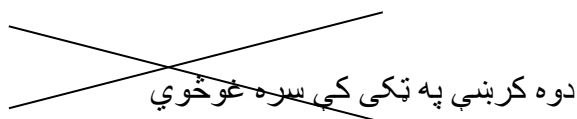
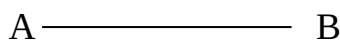
ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی (خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمی په خورا ټیک راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مگر ددوي ترمنځ موجودې اړیکې کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه لیدور وگرځول شي لکه څنگه چې په ۴ . ۱ -
 - امه برخه کی پېښ شوي. دلته کرښي په g بنوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په
 گوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پریښول کيږي يعني نه
 انځور يږي، که دا مو و نارینتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځاي
 په څیر ونيوله شي) څیرې په غور وگورئ



(straight line

بند کرښه يا ټوټه کرښه Line segment



د بيلگي په توگه لاندې ويناوې باور يا صدق لري

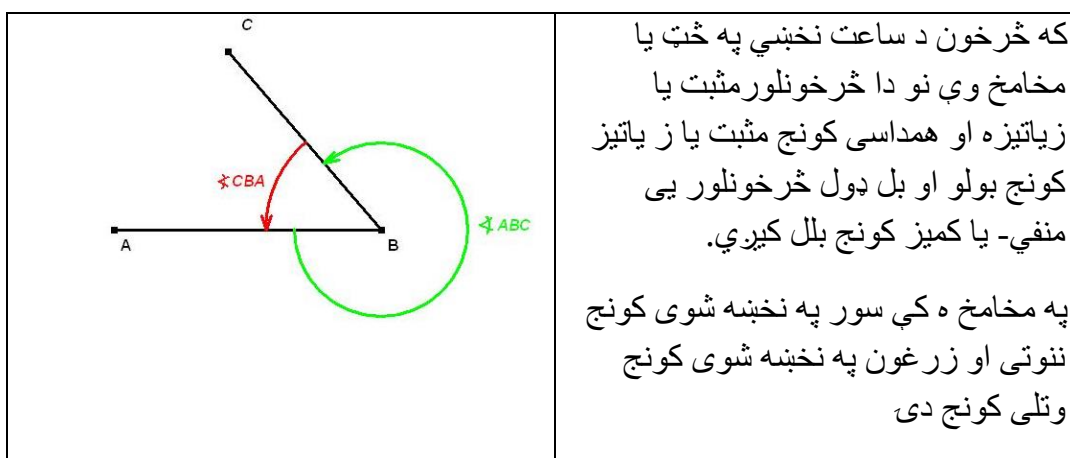
- ددوه ټکو له لارې يوه کرښه ټاکل کيږي (پورته څيره وگورئ)، چې دا کرښه دا
 ټکي خوندي ساتي يا پخپل بر کې لري .

- دوه ناغبرگي او په يوه هواره کې پرتی کرښی یو بل ټيک په يوه ټکي کې سره
 غوڅوي (پورته څيرو کې کتل کيږي)

يوه ورانگه s_1 له يوې لور په يوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او يوه پایکرښه له دوه
 ټکو A او B بنده يا راگیر کرښه ده)

۶. ۱. ۲ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلخاي څخه په S و خپل اخر ځای s_2 (څیره ۴ . ۲ الف) ته یووره شي، نو دا وهل شوې هواره دنننۍ هواره، s_1 او s_2 پښۍ او په همدې ډول S د کونج α (الف) ککره بلل کیږي.

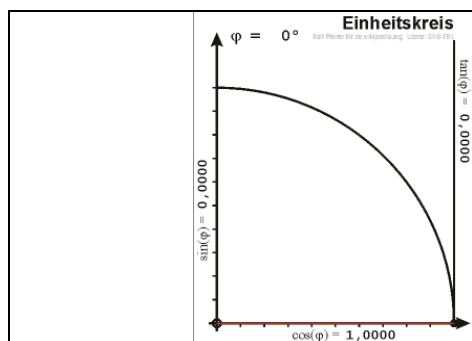


که څرخون د ساعت نڅښې په څېت یا مخامخ وي نو دا څرخونلور مثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا زیاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کی سور په نڅښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نڅښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدۍ شي چی یو کونج x په گراد اندازه شي

$$x = a^\circ \quad (6.1)$$



په داسی حال کی چی ولاړ کونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو (لاندې څیره، که نور پڅیږي و نه کښل شوې). کیدۍ شي چی کونج x (ایکس دلته د الفای په ځای دی، توري پروانه لري، چې کوم وي) په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \quad (6.2)$$

په پورته یونگردي کې گورو، چې هر ډول کوچونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی گردی لینده په وړانگه (شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه گڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو گڼلو لپاره گټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یونگردي ($r = 1$) کې انځور ور دی، چېرته چې دا د اړوند گردیلیندې اوږدوالی بڼایي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یونگردي چاپیری (محیط) په گوته کوي . له دې امله د گراد Gradmass (درجکچ) او (گردی -) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, \dots (4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کوچونه که له 360° درجو زیات هم وي کره کیدی ، که څیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شمیرمه برخه ده یا 4° — مه برخه لیکل شوي وي، نو هغه دې ، نو 4° دې په 6° بدل شي .

د لاندې بیلگو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د «شمیر اوږون اړیکې» یاپه بڼه توگه د شمیر یو په بل بدلون اړیکې وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونۍ یو ډول پراېلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانوي نڅښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کارې، دا به راته گران لوتونکي وبخښي .

بیلگه ۶. ۱ :

کونج “ $a = 47^\circ 12' 36''$ دې په لینده اندازه واپړول شي. مور لمری کونج په دخیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقې او ثانوي دې په ورته لسیز مات افاده شي:

$$12' = 720''$$

$$720'' = 12'$$

۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه

- ۱۷۳

پس په ټولیزه توګه $756'' = 36'' + 720'$ له دې لاس ته راځي

$$1' = (1/3600)^\circ (= <)$$

له دې وروسته په همدې توګه $756 \cdot (1/3600)^\circ = 0,21^\circ$

له دې لاس ته راځي : $a = 47^\circ 12' 36'' = 47,21^\circ$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = \left(\frac{\alpha}{60}\right)^\circ, \beta'' = \left(\frac{\beta}{3600}\right)$$

د (۶ . ۳) پسې باور لري $b = 0.017453.47,21 = 0,826$

دلته څیرې راځي، خو د دې څیرو په ځای به موږ په پورته څیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي.

بیلګه ۶ . ۲ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه (لسیز او سکساګسیمال (لاتین : یوناني: د بابلیانو

په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم (ځای ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخې لرو

$a^\circ = 57,296^\circ. (3,14/7) = 25,701^\circ$ د $0,701^\circ$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

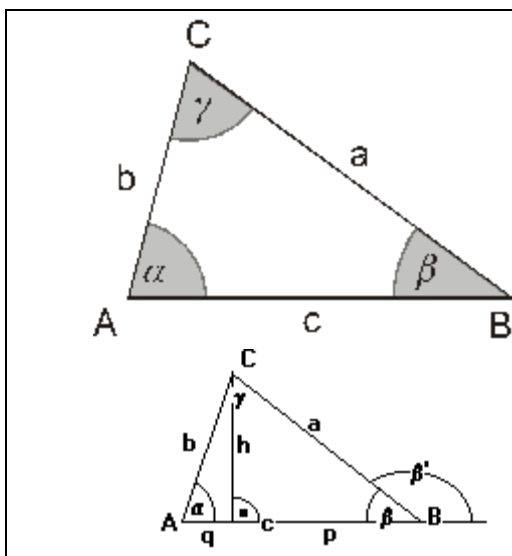
$$0,701^\circ = 0,701.60' = 42,06', \quad 0,06' = 0,06.60 = 3,6''$$

پس داسې دی $\frac{\pi}{7} = 25,701^\circ = 25^\circ 42' 3,6''$

دا پورته داسی لوستل کيږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقيقې او ۶ ، ۳ ثانيې

۳. ۱. ۶ دريگودي

يادونه: موږ دلته بيا د نومونو (نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کيږو. هغه هواره چې له کرښو راگير وي دلته له درې کرښو يا هغه هواره، چې گوډونه ، کونجونه يا گوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي يا ۰۰۰ گوټي او يا ۰۰۰ گوډي بولو. ځمور ژبه او الماني تر يوې ډيرې اندازې په ترکيبي نومونو کې او يا نورو نومونو ډولونو کې يو بل ته ورته دي او په الماني کې هم دې ته ځانگړي نومونه شته. ماته يو کونج چې له دباندې ورته کتل کيږي او د يوې بندې هواره وي گوډ مناسب ښکاريږي. موږ په ورځنۍ يا مروجه ژبه کې وايو ، چې د هغه کلۍ په گوډ کې دا تخنيکي هم درست دی، ځکه چې دا هم دلته مات دی يعنې گوډ دی. که يو کونج له دننه وگورو نو هغی ته موږ تل کونج وييلی. که څوک په يوه گوټه کې ناست وي نو وايي، چه په هغه کونج کې دلته نو بيا گوډ نه وايي. ما د کتاب په اوږدو کې لمری ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسې سم يا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چې د گرانو لوستونکو به ورته پام وي .



په ټوليزه توگه په يوه سطحه يا هواره کې له پرتو کرښو g_1, g_2, g_3 څخه يو مثلث يا دريگودي جوړيږي، چې گوډونه يې A, B, C ، اړخونه يې a, b, c او کونجونه يې α, β, γ دي (د مثلث دننه کونجونه يا زاويې او دباندې گوډونه دي، چې موږ يې په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څيري دې وکتل شي

لاندې جملې باور لري چې بې له بنوونې دلته راوړل کيږي

- په دريگوډي کې د کونجونو زياتون 180° درجې دی يا π دی
- يو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د يوه دريگوډي د دباندنيو کونجونو زياتون 360° يا 2π دی.
- د يوه دريگوډي د اړخونو نيمې په يوه ټکي کې يو بل سره پري کوي، چې دا په همدې وخت کې د دريگوډي « دروندټکی يا دثقل مرکز » دی. اړخنيمې يو بل په تناسب د ۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

د اړخونو ځاننيونه يی ۱ : ۲ ده (په څيره کې وگورئ) د يوه دريگوډي منځولارې

يو بل په يوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپير (گردې) هغه گردۍ يا دايره چې دريگوډی په خپل دننه کې نيسي يا بهتره، د دريگوډي خونديگردي (منځټکی دی) .

د يوه دريگوډی کونجنيمې يو بل په يوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه گردۍ (گردۍ چې د دريگوډي

په دننه کې ده يا گردۍ يا دايره کې خوندي دريگوډی (منځټکی دی) لاندې کې بي څيره شته) د يوه دريگوډي جگۍ يا د ارتفاع کرښې په يوه ټکي کې سره غوڅوي. څيري ټولي لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي: او په دوي پورې لاندې څيري اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري.

Orthocenter Höhenschnittpunkt (H), د جگيو غوڅټکی

circumcenter **Umkreismittelpunkt** (U) د دبانندی- یا په راتاو گردی
منځتکی

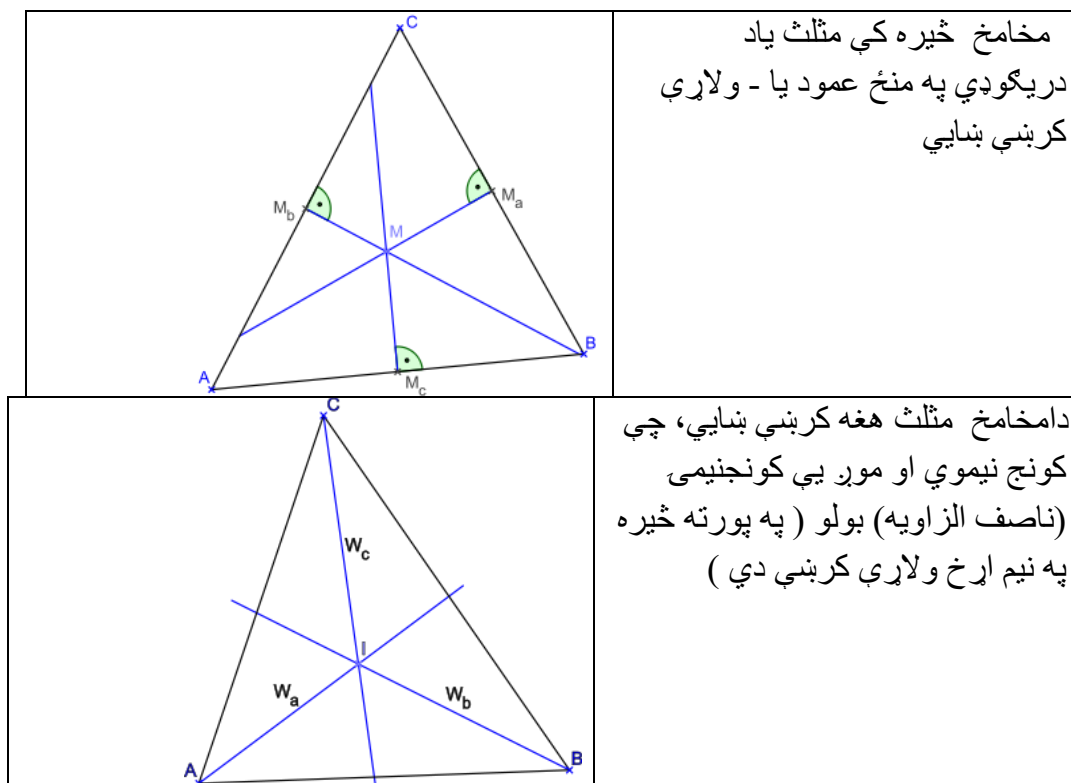
seid symetry **Seitensymmetralen**, د اړخسیومتریو غوڅتکی

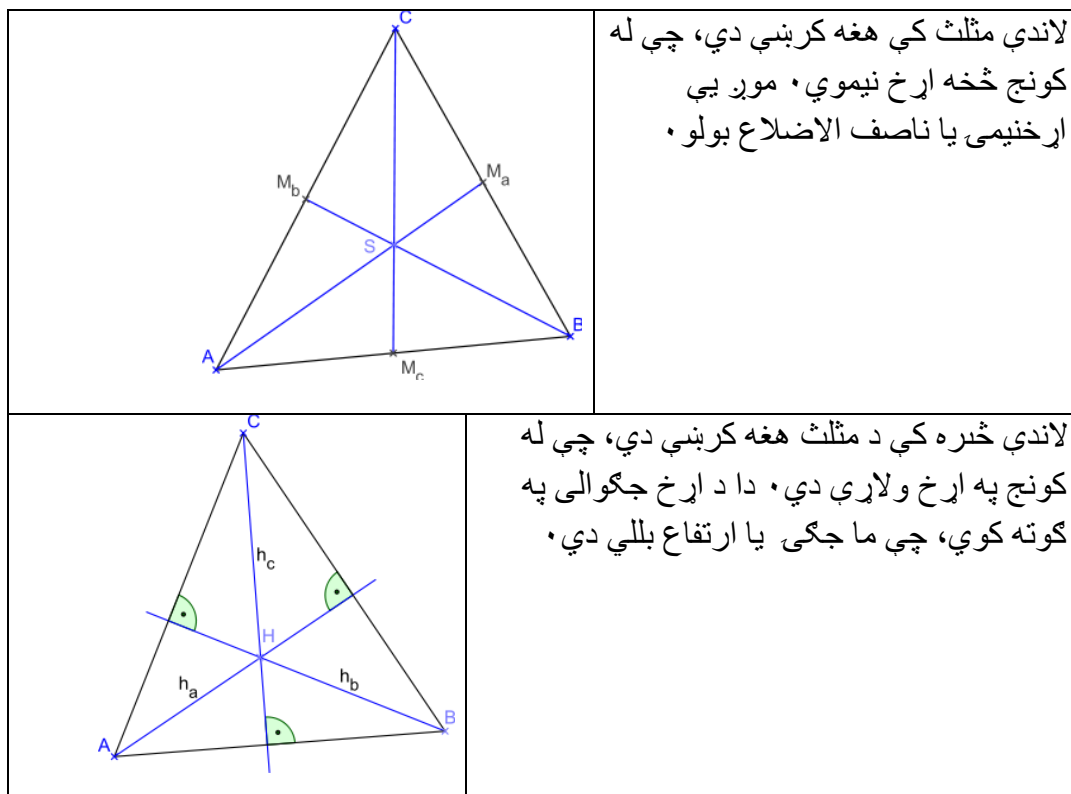
inscribed circle, incircle den **Inkreismittelpunkt** (I) د دننه گردی
منځتکی

Winkelsymmetralen r د کونجسیومتری

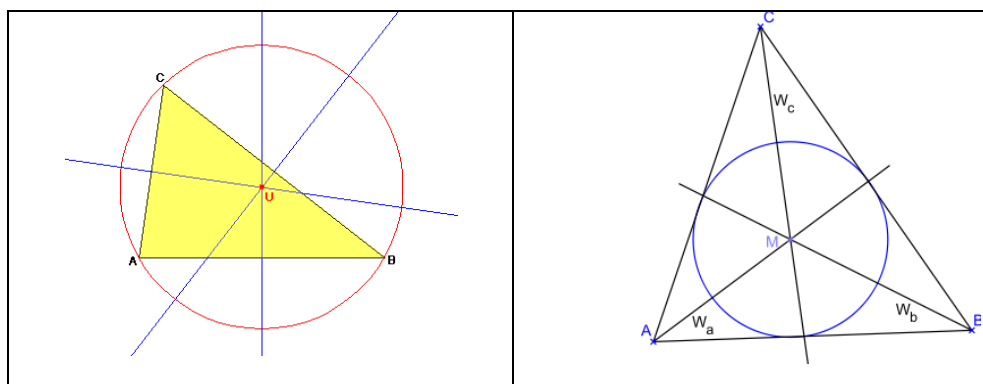
centroid **Schwerpunkt** (S) r د روندتکی

Seitenhalbierenden) median اړخنیمی





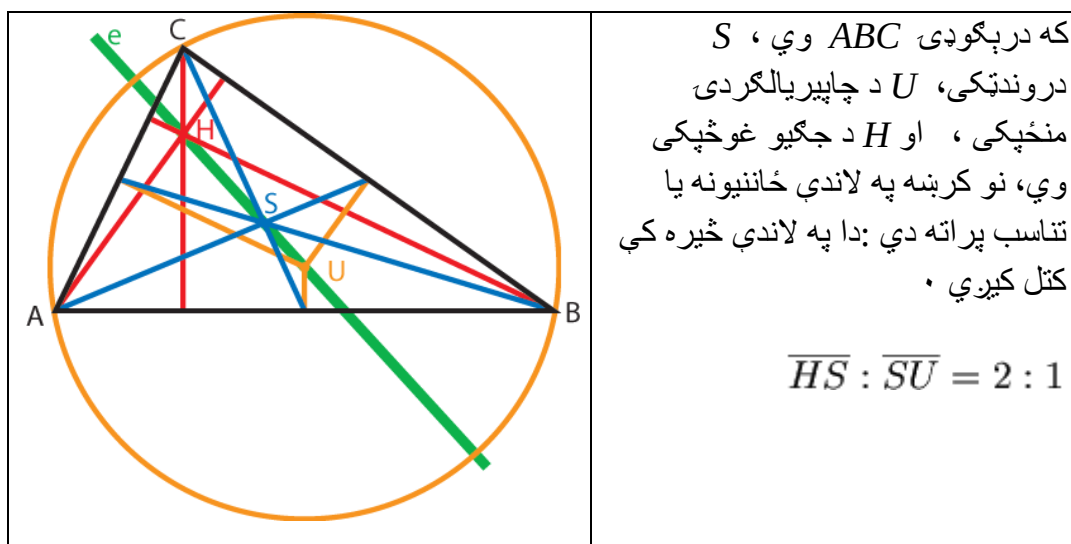
په پورته څیره کې کونجینیمې دي ، چې منځ ټکی یې د خوندي گردۍ یا دننه گردۍ
منځنۍ هم دی



په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅتکی یې د په راتاو گردی یا چاپېرگردی منځتکی دی.

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه تکی کې سره غوڅوي.

که د یوې درېګودۍ د منځولارو په غوڅتکي یوه گردی داسی ووهل شي، چې د گردی کره درېګودۍ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا گردی د درېګودې له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیرېږي. که درېګودۍ تیره کونجیزه وي، نو د گردی منځتکی د درېګودې په دننه کې پروت دی، که درېګودۍ ولاړکونجیزه وي، نو کونج د گردی په هیپوتینوز ی یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګودۍ پڅکونجیزه وي، نو منځتکی له درېګودۍ دباندې پروت دی.



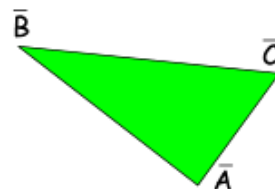
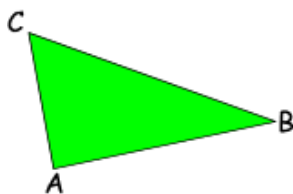
۶ . ۱ . ۴ برابر ارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

دوه درېګودې ABC او $A'B'C'$ یو بل سره کونګرواینڅ یا برابر پټووني دي

یانې برابر زښته دي

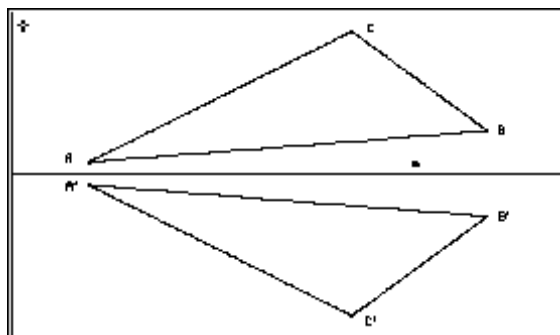
$$ABC \equiv A'B'C'$$

(4.4) که وکبنول شي ياني که هرې لورته يووړل شي (وکبنول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه يا هندارونه يې يو بل پوره پټ کړي يا يو په بل پوره پریوځي (لاندې څیر)



که دریگوډي سره کونگرواینځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په څټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په گوته کوي



جملې: دريگودې ټيک هلته کونگرواينځ دي چي يو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کي SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کي SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کي SSW

۴ - يوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW

د دې جملو په څنډ هم باور لري، دا په دې مانا چي که دريگودې په کونگرواينځ جملو کي ورکړشو اصلي برخو کي سره برابر وي، نو دا کونگرواينځ دي. د کونگرواينځ جملو په بنسټ کيدی شي په ځانگړي توگه دريگوديجورښت سرته ورسول شي، کوم چي د کونگرواينځ جملو کاروني په څير ليدل کيدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit) هلته مخ ته پروت دی، کله چي په همغو يا اړوند درې کونجونو کي يو بل سره برابر وي او د همغو يا اړوند اړخونو تر منځ يی تناسب يا ځاننيونه موجود وي .

دا جملې هلته هم باور لري که د کونگرواينځ له جملو ورته جملو ته ورشو
جمله:

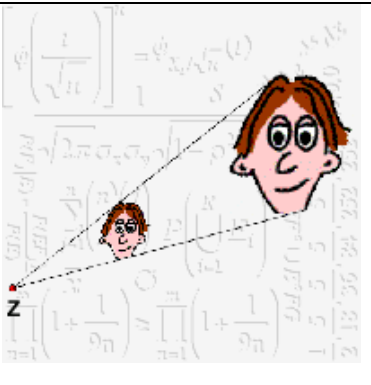
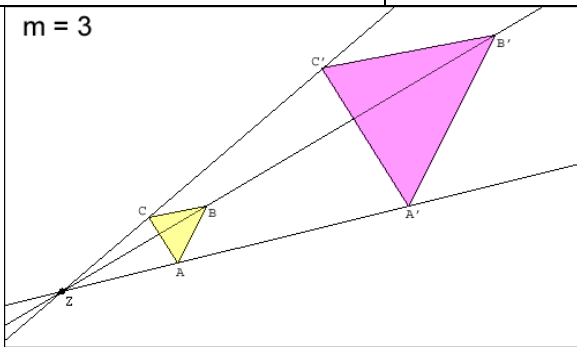
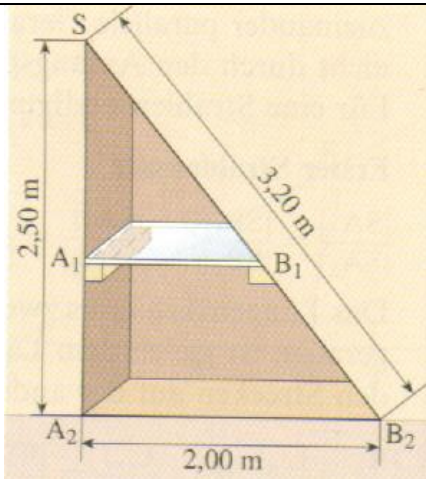
دوه دريگودې ټيک هلته يو بل ته ورته دي که يو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نيونی يا تناسب کي

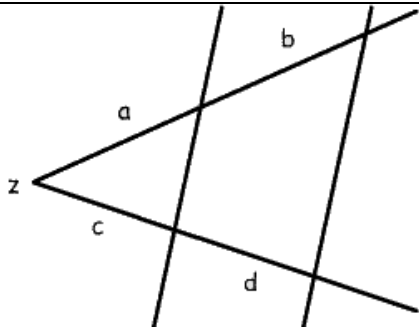
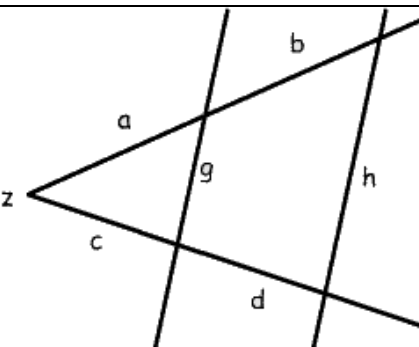
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کي

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب يا ځاننيونه کي

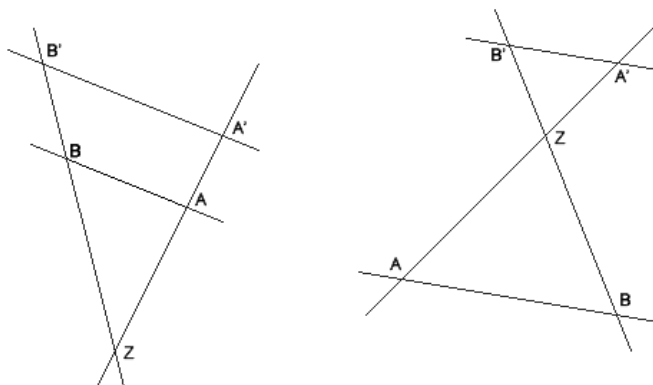
۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کي

	دا مخامخ څیرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبگه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېگونې لاس ته راځي
$m = 3$ 	په لاندې څیره کې کښل شوي درېگونې ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
	د ورته جملو سره خپلواني جملې د وړانگو جملې دي:

په دې پورته څیره کې درېگونې یو بل ته ورته دي .

	د وړانګې لومړۍ جمله: دوه له یوه ټکي وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکې سره لري . $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a}{(a+b)} = \frac{c}{(c+d)}$
	د وړانګې دویمه جمله: که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکې لري، دا ته والي له جملو ده . ټکي چې څنګه دي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو $\frac{g}{h} = \frac{a}{(a+b)} \quad \frac{g}{h} = \frac{c}{(c+d)}$

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي



۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه ۱۸۳ -

$$\begin{aligned}\overline{ZA'} : \overline{ZA} &= \overline{ZB'} : \overline{ZB} \\ \overline{ZA} : \overline{AA'} &= \overline{ZB} : \overline{BB'} \\ \overline{ZA'} : \overline{AA'} &= \overline{ZB'} : \overline{BB'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} : \overline{AB} &= \overline{ZA'} : \overline{ZA} \\ \overline{A'B'} : \overline{AB} &= \overline{ZB'} : \overline{ZB}\end{aligned}$$

(دا لاندې د ليکنې له لارې روښانه شوي څيره دې گران لوستونکي وکارې)

که درې په يوه ټکي کې پريکيدونکي کرښي g_1, g_2 او g_3 د دوه غبرگو (موازي) کرښو g_4 او g_5 لخوا پرې شي، نو د بيلگي په توگه له ۴ . ۱۰ کينل شوي څيرې څخه لاندې اړيکي لاس ته راځي:

$$1. \quad OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2, \quad OA_1 : OA_2 = A_1B_1 : A_2B_2$$

دا په دې مانا چې په وړانگو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب يا ځانښوونې سره پرتې دي:

$$2. \quad A_1A_2 : B_1B_2 = OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2$$

دا په دې مانا چې: په وړانگو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب يا ځانښوونې پرتې دي لکه اړونده، د ککړۍ اندازه شوې برخې چې په وړانگه پرتې دي.

$$3. \quad A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3, \quad A_1A_2 : B_1B_2 = A_2A_3 : B_2B_3$$

دا په دې مانا چې: په غبرگو پرتې کرښي په همغه برخو کې يو له بل سره په مساوي تناسب يا ځانښوونې پرتې دي

د وړانگو جملې هم باور لري، که د دوه غبرگو په څير رامنځ ته شي يا که ککړه د غبرگو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کې دې وړانگې د کرښو په ځاي بدلي يا وليکل شي (

بیلگه ۴. ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریگودی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیرني لاندې نیسو

$$a > c \quad - 1$$

مور کارو $AB = c$ او په ټکي A کونج الف

د c په کچه کارو. په B یو گردیلینده کارو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکي C کې غوڅوي (

څیره دې گران لوسونکی پخپله وکاري، روښانه ده

$$a < c \quad - 2$$

دلته درې امکاناته شته دی (د دې درې امکاناتو څیره وکارئ)

۲. ۱ : د گردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغو ټکو کې پرې کوي،

په کومو کې چی اوبی یواځنی نه دی.

۲. ۲ : گردیلینده د α ازاده پښه لمسوي.

۲. ۳ : گردیلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي

$$a = c \quad (3)$$

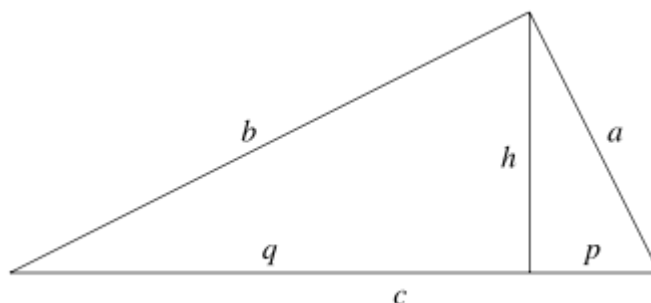
گردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو، په نامه A او C کې پرې

کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$

نیونه په دریم کونگرواینڅ جمله کی ضرور ده

۶. ۱. ۵ . ولارکونجیز دریگودی مثلث قایم الزاویه

د مختلفو دریځوډیو څخه موږ په لاندې برخه کې ولاړ کونجیز دریځوډی ترڅیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریځوډي کې د ولاړ کونج مخامخ اړخ (هوپوتینوزي) Hypotinuze (بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت) Katheten (بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریځوډي ته روځنی یا ورسره بلدي یا مروجی په نڅبنه کونه یا لنډ په نڅبنونه به له څیري ۴ . ۱۳ څخه واخلی



په ولاړکونجیز دریځوډي کې دا لاندې راوړل شوي اړیکې باور لري چی دلته یی بی له اوبی)بنوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړگوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ گوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتونې کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نومونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاگوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریځوډي کې د هیپوتینوزي مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساوي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (6.5)$$

دکاتیتو (د ولاړ خونو يا د مخامخ او په پراته اړخ (ضلع)) جمله:

په ولاړ کونجيز دریځوډي کی د کاتیت مربع هواریز مساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزي او ددي کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

$$a^2 = p \cdot c, b^2 = q \cdot c \quad (6,6)$$

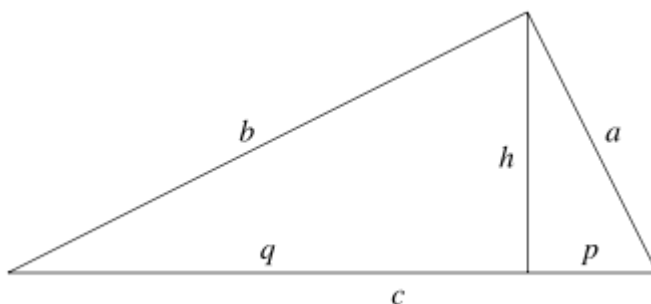
جگجمله :

په ولاړ کونجيز دریځوډي کی د هیپوتیزې په جگي مربع هواریز مساوي ده د هیپوتینوزي

(لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلي ولاړ کونجي هوارې سره

$$h^2 = q \cdot p \quad (6.7)$$

یا په لاندې کی لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددي لپاره دي پورته څېره وکتل شي)

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{پیتاگوراس جمله :}$$

د اویکلید د کاتیتونو (پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

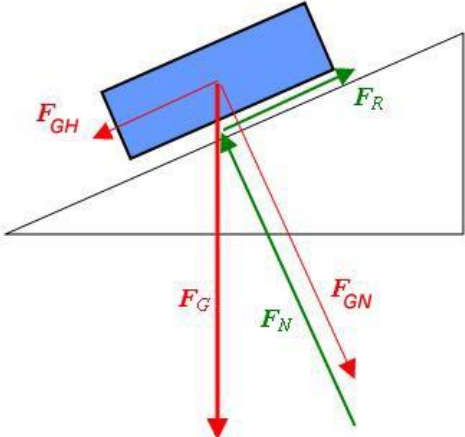
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

$$h^2 = p \cdot q \quad \text{د اویکلید جگجمله}$$

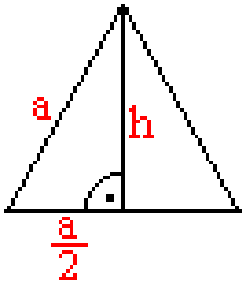
بیلگه ۴ . ۴ : (خپره نه ده کښل شوي، دې ته دې گران لوستونکچ فکر وکړي، دا یوه فزیکي دنده هم ده) خپره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه څرگندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیک له مخې هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي ($KSP =$) چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرگ په یوه کښته کشونکی زور F_H او په مائلي هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه F_N) تجزیه کيږي. د ښوولو ده چی، دریگودي ABC د KSP او F_N او F_H له خوا ټاکلي دریگودي سره ورته دی

	یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې څېرې سره داسې بدلولو: شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ گوډونه: له پورته گوډ A کښته ښی لور ته گوډ C کښته کيږي لور ته گوډ B په گوډ A کونج α، په گوډ B کونج β
---	---

داچی $G||AC$ ځغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چی $\beta = R - \alpha$ ده،
نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګودي په دې برسیره په ولاړکونج کی یو بل
ته ورته دي.

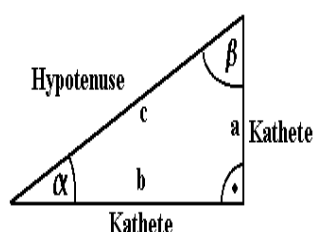
یادونه : داسې بیلګې، چې څیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، گران لوستونکي
کړای شي، چې داسې څیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي. زما زړه نه شي، چې له
لیکلو یې تیر شم.

بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګودي کی دې (لاندې څیره) جګی و شمیرل
شي. د ۶ . ۴ (له مخی لرو) جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په
دې دریګودي کی وکارئ

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$
--	--

۶ . ۲ په ولاړکونجیز دریګودي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی یوه ولاړکونجیز دریګودي کي
جوړیږي (لاندې څیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت $gegkathete$ د
مخامخ اړخ په څیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ $ankathete$
او $hypothenuse$ لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګودي کی لاندې اړخانیوني
منځ ته راځي یا جوړیږي

	$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{katheta}}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{kathetb}}{c}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{opk}}{\text{ank}}$ $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\text{ank}}{\text{opk}}$
---	---

د وړانگو جملو له امله دا اړیکې یا تناسب یواځې د کونج په واک کې دی. که په پام کې ونیول شي چې $\beta = 90^\circ - \alpha$ دی، نولاندې اړیکې لیکلې شو

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \tan(90 - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} = \cot(90 - \alpha) = \tan \alpha$$

له دې لیدل کېږي، چې د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه گنجدولونه پوره دي یا بسيا کوي. ورپسې یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}; \dots \dots \dots (6,10)$$

برسیره پردې د پیناگوراس د جملې په پام کې نیولو سره لرو

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \dots \dots \dots (6,11)$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \dots \dots \dots (6,12)$$

۳. ۰ ۶ په یوونگردي کی د کونج فنکشنونه (-بلواک)

په ۲. ۴ برخه کی $\sin \alpha; \cos \alpha; \tan \alpha; \cot \alpha$ یواځي د لیدیدونکو Konkrete) اړختناسیونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریگوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانگړي توگه د $(0 < \alpha < 90^\circ)$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ لپاره تعریف دي. که α د خپلواک واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin \alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه گوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوچنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی (څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پوري کونجونو لپاره ممکن شي، نو دا مو د یوون گردي باندې مخ نڅی په واك کی کړیو ته لارښودوي . د لته ټولی کړی (د لته به له کړیو څمور مطلب پای کړی وي) ، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانگو s_1 او s_2 پروت وي زیاتون مخنځېنه) مثبت مخنځېنه(لري، ټولی کړی او یایی پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانگو s'_1 او s'_2 پرتی وي کمون مخنځېنه (منفي مخنځېنه) لري . د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۴. ۸ . د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin \alpha = \overline{QP}, \cos \alpha = \overline{OP}, \tan \alpha = \overline{AD}, \cot \alpha = \overline{BE}; \dots \dots \dots (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوارانت Quadrant (لاتین: د کوار دیناتسیستم څلورمه کی پروت دی) لاندې څیره له کین و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکی کارول شي توري ساده ایښوول کیږي . په څیرو کی شني کړی د ساین دي او سري کړی کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نڅېه کیږي، چي د دې لاري تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریگوډي کی تر څیړنی نیول شوي دي . په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د گردیلیندي اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له ۲ څخه لوییدلی هم شي . برسيره پر دي له تعریفونو (۱۳ . ۴) څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود (360°) ۲) periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

راگر حیدونکی، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود (180°) لري .

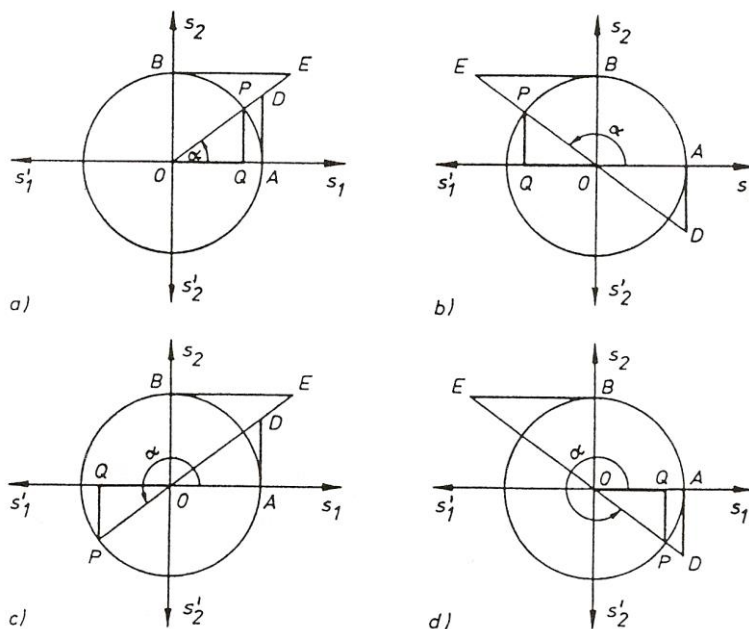


Bild 4.17

پس لرو

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha; \dots\dots\dots (6.14)\end{aligned}$$

په

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + 2\pi) &= \tan(\alpha + 360^\circ) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 2\pi) &= \cot(\alpha + 360^\circ) = \cot \alpha\end{aligned}$$

ټوليزه (عمومي) توگه لرو

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin(\alpha + k.360^\circ) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos(\alpha + k.360^\circ) = \cos \alpha; \dots\dots\dots (6.15) \\ \tan(\alpha + 2k\pi) &= \tan(\alpha + k.360^\circ) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 2k\pi) &= \cot(\alpha + k.360^\circ) = \cot \alpha\end{aligned}$$

د ټولو ټولگنونو $k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ لپاره

يادونه: د کوارانت لپاره څلورمه ليکلی شو خو دا بايد په پام کې وي چي دا په کوارديناتسيستم کې دی

جدول يا تخته ۴ . ۱ د کونج-يازايو توابعو وخنځېنه

څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi; \frac{3}{2}\pi)$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2}; \pi)$	لومړۍ څلورمه $(0; \frac{\pi}{2})$	
-	-	+	+	$\sin x$
+	-	-	+	$\cos x$
-	+	-	+	$\tan x$
-	+	-	+	$\cot x$

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\
 \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha, & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\
 \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, \\
 \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\
 \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha, & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

بیلگه ۴ . ۶ : د جشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446^\circ$ لپاره پیدا کوو. دا چي α په درجي اندازه ورکړ شوي ده، نو اوهمشالتريا سويچ (د لته مطلب د

جېشميری اړوته ده، په غوښتل شوي فنکشن کې (په « DEG » سمور او بيا
لاندې ورکونی کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول يا تخته ۴ . ۱ د کونجفکشنونو مخنځبڼه

دنده مو د لاندې مساوت حل يا اوبی دی

$$\begin{array}{ll} 1. & \sin \alpha = a \\ 2. & \cos \alpha = a \\ 3. & \tan \alpha = a \\ 4. & \cot \alpha = a \end{array}$$

دلته تمرینونه ۱ او ۲ یواځي هلته موخه ور يا هدفمند ي، چې باور ولري $-1 \leq a \leq 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.

يو «بنسټيزوبی يا بنسټيز حل» α د هر تمرین د جېشميرني سره په لاندې ډول يا
همداسی تکموتريب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چې α په درجه اندازه يا لينده
اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سويچېدلون په "DEG" يا "RAD" باندې راولو)

$$\begin{array}{ll} 1. & [a] \quad [F] \quad [\sin] \\ 2. & [a] \quad [F] \quad [\cos] \\ 3 & [a] \quad [F] \quad [\tan] \\ 4. & [a] \quad [1/x] \quad [F] \quad [\tan] \end{array}$$

تکمه F د په څټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.

دلته نو بيا د α هر بنسټيز حل په درجه يا لينده کچ څرگنديږي.

د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنسټيز حلونه لاس ته راځي :

$$1. \alpha_0 = -33,367013^\circ = -0,58236,$$

$$2. \alpha_0 = 123,36701^\circ = 2,1531606,$$

$$3. \alpha_0 = -28,810793^\circ = -0,5028432,$$

$$4. \alpha_0 = -61,189206^\circ = -1,0679531.$$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$$1. \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin (\pi - \alpha),$$

$$2. \cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي یا څنګیز حل یا اوبی،،

$$1. \beta_0 = 180^\circ - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$

$$2. \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د لیددونکي حالت $a = -0,55$ لپاره په دې مانا چي :

$$1. \beta_0 = 213,367013^\circ = 2,1531563,$$

$$2. \beta_0 = -123,36701^\circ = -2,1531606.$$

د α ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

$$1. \text{ und } 2. \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ = \alpha_0 + 2k\pi,$$

$$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360^\circ = \beta_0 + 2k\pi,$$

$$3. \text{ und } 4. \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 180^\circ = \alpha_0 + k\pi.$$

بیلګه ۴ . ۹: لرو $\sin x = 1/2 \sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm \frac{1}{2}} = \pm \sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm \sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه

۱۹۵

بیلگه ۴ . ۱۰ : په بیلگه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N خومره لويي دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي) او مائلې هوارې مایلکونج $B = 28^\circ$ وی؟

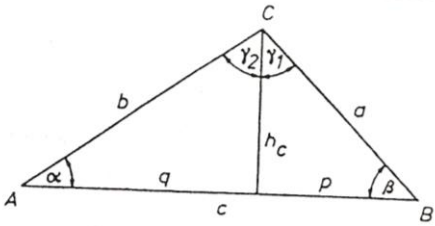
$$\sin \beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin \beta = 700\text{ N} \cdot \sin 28^\circ \\ = 700\text{ N} \cdot 0,4695 = 328,65\text{ N}.$$

$$\cos \beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos \beta = 700\text{ N} \cdot \cos 28^\circ \\ = 700\text{ N} \cdot 0,8829 = 618,03\text{ N}.$$

۴. ۶ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په تولیز یا عمومي دریځوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱. د ساین جمله د څیرې ۴ . ۱۸ له نڅبنوني سره لرو

 Bild 4.18	$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin \beta = \frac{h_c}{a}$ او له دې امله $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$
--	---

په ورته توگه بنوول کیدی شي، چې په عمومي توگه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولارکونجیز درېځوډی کښل کیږي (پورته او لاندې څیرې)

په ورته توگه بنوول کیدی شي، چی په عمومي توگه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریگوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او ډاږه پرې پراته کونجونه WSW ورکړشوي وي

۲. د کوساین جمله

د څیرې ۴. ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$

$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ لرو او همداسې:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

(4.18)

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه دریگوډي يا مثلث کې

- درې اړخونه يا ضلعي يا

- دوه اړخونه (ضلعي) او له هغو رابند کونج يا زاویه

ورر شوي وي.

بیلگه ۴. ۱۱: د دوه قوو (زور F1) او F2 لاس ته راوړل شوي R1 چی په پراته لورد

F1 سره کونج جوړوي، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسيره له

دوي جوړ کونج هم معلوم دی. د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴. ۱۹

۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه ۱۹۷ -

ورکړ شوي، له کومې څخه چې د دوي ترمنځ اړیکې هم معلوميږي. په دې پسی په
 ABC دریګوډي کې، $F_1 = c, F_2 = a$ او $ss = 180^\circ - \alpha$ معلوم دي،

او $R = b$ لټوونکې یا غوښتونکې لويي دي؟

د کوساین جملې (۱۸. ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos ss$$

همداسې یا $\Leftrightarrow$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - ss')$$

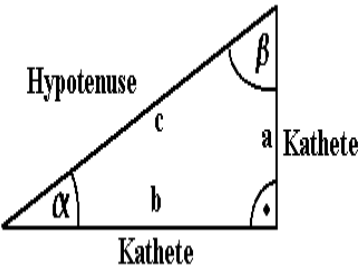
او د ساین له جملې (۱۷. ۶) لاس ته راځي

له کومو چې α ټاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ - په ولاړ کونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو.

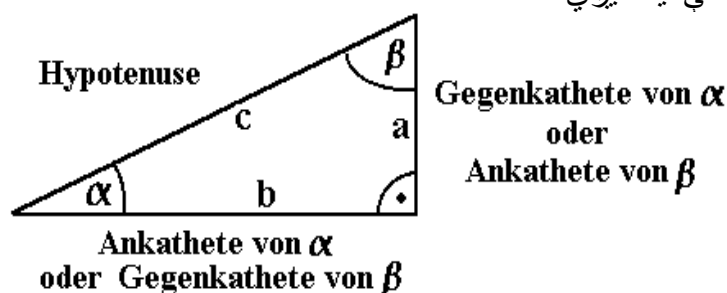
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني - یا مطلوب کوچ ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو.

	مخامخ دریګوډی دې ورکړ شوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو
---	--

لند يا تکرار: پورته او په لاندې بیلگه کې دا اړخونه د غوښتونې کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کېږي.

بیلگه

بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوڅ يا کاتیت د الفا مخامخ اړخ يا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ يا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ يا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکېږي.



د ساین جمله

په تریگونومتري کې ساینجه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکې ښایي. دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي. د درېګوډي درې اړخونه او درې گونجونه، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه: دا پورته فرمول دې (6,14) وي.

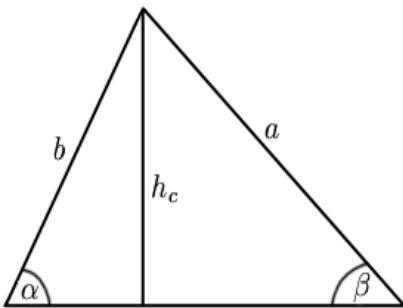
زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کېږي:

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کېږي، نو دې ته دې پام وي، چې په اینټروال $[0^\circ; 180^\circ]$ کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کېږي، دا: دوه گونوالی گونګرواینڅجمله په ګوته کوي.

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه: (دا څیره دې ۶، ۱۸ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x, y وي)

	$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې یې اوبی کوو $h_c = b \cdot \sin \alpha$ د برابر اړینونې له لارې لاس ته راځي $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ که په $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړۍ برخه کې لاس ته $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ راځي
---	---

برابرون له $\frac{c}{\sin \gamma}$ سره په پیدایښتي توګه جګۍ h_a او یا h_b لاس ته راګوي

د کارونې بیلګه: درجګودی ABC لارو او ورکړ شوي:

$$a = 5,4 \text{ cm}, b = 3,8 \text{ cm}, \alpha = 73^\circ$$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کې پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

۲۰۰

۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه

-

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{3,8 \text{ cm} \cdot \sin 73^\circ}{5,4 \text{ cm}} = 0,67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې گوته ورته ونيوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سخته شته ، يانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي.

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته راوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{5,4 \text{ cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5,118 \text{ cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتری کې کوساینجمله په درېګوډي کې د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښايي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

يادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه

۲۰۱

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

که گاما ۹۰ درجې وي، نو د پیتاگوراس جملې له مخې لرو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

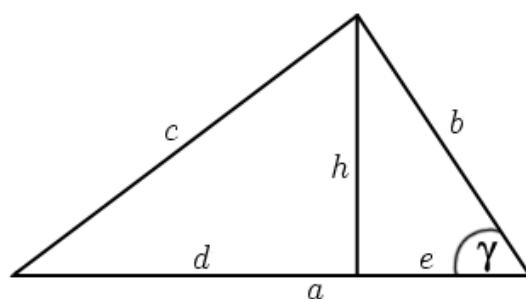
د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریگودي کی

- درې اړخونه (SSS) یا

- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیدا کولی شو

ښوونه :



د دریگودي په کین لور د پیتاگوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیر افاده یا –
وینه پیدا کړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړ اړخونو یا کاتینو اوږدوالی څلوری یا مربع
باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

د بني اړخ لپاره د پیتاگوراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاگوراس جملې له مخې د کین لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیروییښي یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

$$\cos \gamma = \frac{e}{b} \left(\frac{\text{ankathet}}{\text{Hypotenuse}} \right)$$

اوس باور لري

$$e = b \cdot \cos \gamma$$

له دې لاس ته راځي

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګودی ABC ، جې اړخونه یې څرګند دي، ورکړ شوی

$$a = 4,9 \text{ cm} ,$$

$$b = 2,8 \text{ cm}$$

$$c = 3,5 \text{ cm}$$

۶ گونمتری (کونجکچ یا -اندازونه

۲۰۳ -

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4,9 \text{ cm})^2 + (3,5 \text{ cm})^2 - (2,8 \text{ cm})^2}{2 \cdot 4,9 \text{ cm} \cdot 3,5 \text{ cm}} = 0,83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \quad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \quad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

Common formular د فرمولونه

Pythagorean identities د پیتاگوراس کټمټوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

Sum and difference identities زیاتون او کمون کټمټوالی

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کی گټمټوالی

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج گټمټوالی

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

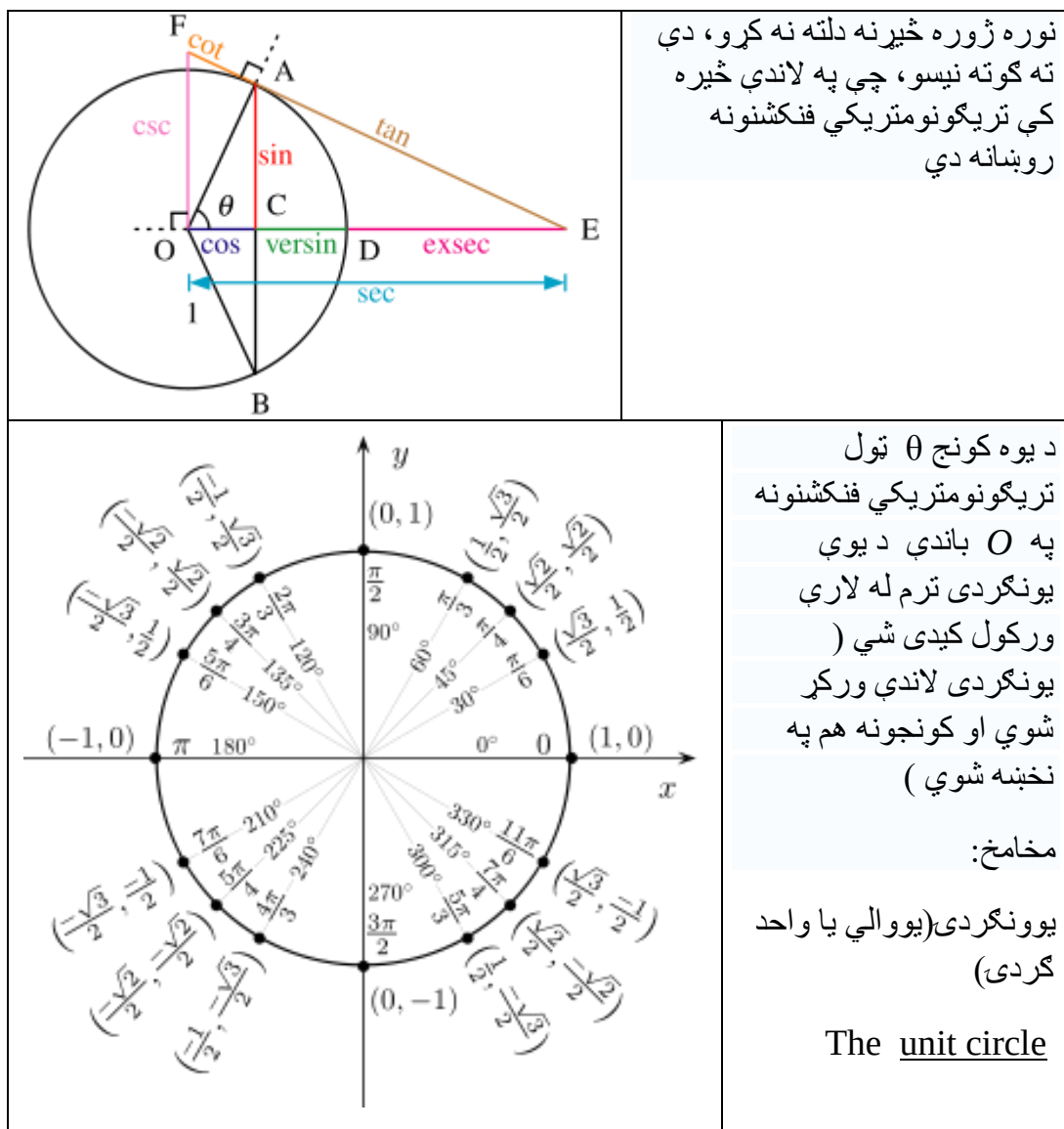
$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه

۲۰۵

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

د تريگونومتری کي کټتوالي لیست List of trigonometric identities



Notation لیکنښه

دا لاندې لیکنښه یا - ډول د ټولو تریگونومتریکی - یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین، تانجنت، کوتانجنت، سیکانټ، کوسیکانټ لپاره باور لري، د لنډونې لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي $\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitions پیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راگرځیدنه، سیومتری او بدلون Periodicity, symmetry, and shifts.

په یوون(یووالي-) گردۍ یا دایره کې ساده لیدل کیږي

Periodicity تل بیرته راگرځیدنه

ساین، کوساین، سیکانټ، کوسیکانټ تل بیرته راگرځیدنه 2π ده (پوره گردۍ) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت، کوتانجنت تل بیرته راگرځیدنه π لري (نیمگردۍ یا نیمدایره) :

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سیومتری

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره سیومتری، لکه لاندې کښل شوي

یا $x \rightarrow -x$, $x \rightarrow \pi/2 - x$ یا $x \rightarrow \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{array}{lll} \sin(-x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \tan(-x) = -\tan(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x), & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\ \cot(-x) = -\cot(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x), & \cot(\pi - x) = -\cot(x) \\ \sec(-x) = \sec(x), & \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x), & \sec(\pi - x) = -\sec(x) \\ \csc(-x) = -\csc(x), & \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x), & \csc(\pi - x) = \csc(x) \end{array}$$

بدلون: د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{array}{ll} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x), & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\ \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x), & \cot(x + \pi) = \cot(x) \\ \sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\csc(x), & \sec(x + \pi) = -\sec(x) \\ \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec(x), & \csc(x + \pi) = -\csc(x) \end{array}$$

د پیتاگوراس کټمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاگوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

د کونج د زیاتون او کمون کټمټوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

د کمون او زیاتونڅښې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

که په کین لور “+” وي، نو په ښې لور “-” راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالی فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کېږدو د پیناګواراس یا موفریې فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله •

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

Half-angle formular نیمکونج فرمول

۶ گونومتری (کونجکچ یا -اندازونه

۲۰۹

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}. \quad (1)$$

که د ریښې لاندې ماتېباندي او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي، نو د پیتاگوراس جملې له مخه لرو:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 + \cos x)}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2}} \\ &= \frac{\sin x}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

په ورته توګه که برابرې له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{(1 - \cos^2 x)}} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{که کیردو}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{نولرو:}$$

Product-to-sum identities د خل و زیاتون ته کتمتوالی

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

Sum-to-product identities د زیاتون-و-خل ته کتمتوالی (برابرون)

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیردو نولرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که x, y او z د کوم درېگودي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

نیمگردی یا نیمدایره $\leq$ if $x + y + z = \pi = \text{half circle}$,

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z \text{ او}$$

$$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4 \sin(x) \sin(y) \sin(z).$$

Trigonometric conversions تریگونومتریکی په ختوالی

هر تریگونومتریکی فنکشن د بل تریگونومتریکی فنکشن سره سیده یا سیخی اړیکې لري. داسې اړیکې د په خټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کېدی شي، لکه: که ϕ او ψ د تریگونومتریکی فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګۍ وکړي، او $\text{arc}\psi$ دې د ψ په خټ وي، داسې چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ نو $\phi(\text{arc}\psi(x))$ کېدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر ووبلی شي یا افاده شي.

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کېدی شي: موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

$\cot$	$\sec$	$\csc$	$\tan$	$\cos$	$\sin$	$\phi \setminus \psi$
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	sin
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	Cos
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	Tan
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	sec
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	cot

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

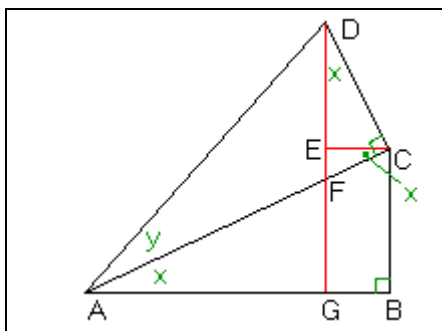
$$\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلايي نسبت φ له امله لرو

$$\cos \left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکی غوښتنه (ثبوت) Geometric proofs



$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

په مخامخ څیره کې کونج x د ولاړکونجیز درېکودي ABC برخه ده، او کونج y د ولاړکودیز درېکودي ACD برخه ده. نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرگ دی

۶ گونمتری (کونجکچ یا -اندازونه

۲۱۳

-

$\text{BAC} = \text{Angle } x$ کونج ACE =

$\text{CDE} = x$ کونج EG = BC.

$$\sin(x + y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

د پورته څیرې څخه کار اخلو: Using the above figure:

$$\cos(x + y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB - GB}{AD}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{AB - EC}{AD} \\
 &= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD} \\
 &= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD} \\
 &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \\
 &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y).
 \end{aligned}$$

د $\sin(x - y)$ او $\cos(x - y)$ فرمولونو بڼوونه

د $\cos(x - y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه ساده بڼوول کيږي، که د $\cos(x + y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه وپيژنو

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

که په فرمول $\sin(x + y)$ کې د y په ځای $-y$ کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x) \cos(-y) + \cos(x) \sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y).$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x + y)$ کې د y په ځای $-y$ ږدو، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x) \cos(-y) - \sin(x) \sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناچره فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y).$$

۶. ۵. تریگونومتریکی یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواک یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرگند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته (د زیاتون) جمع (تیریم)، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو. د همغو فرمولونو لکه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي (کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y; \dots\dots\dots (6, 19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y; \dots\dots\dots (6, 20)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \dots\dots\dots (6, 21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \cdot \tan y}; \dots\dots\dots (6, 22)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; \dots\dots\dots (6, 23)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; \dots\dots\dots (6, 24)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو بنسونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلگه کې وښایو

بیلکه ۶ . ۱۲ :

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

موږ له څیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته څو، او ځای په ځای کوو $\gamma_1 = x$, $\gamma_2 = y$ نولرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 2ab \cos \gamma &= a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2 \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2, \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2 \end{aligned}$$

له $2ab \cos \gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a) \cdot (h/b) - (q/b) \cdot (p/a), \\ \cos \gamma &= \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

څه چې د بنوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسو، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې او تقریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلکه ۴ . ۱۳ - لاندې ویینې یا افادې دې ساده شي

$$a) y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۴ . ۲۳) پسي د مساوات (برابرون) بنی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2 \sin \frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \alpha \cos(-\frac{\pi}{4}) = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4},$$

له کوم چې $y = \sqrt{2} \sin \alpha$ لاس ته راځي

$$b) y = \cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$$

د (۶ . ۲۰) پسي لرو

$$\cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتيجه ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسيږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \text{ ist.}$$

بيلگه ۶ . ۱۴ برابرې يا مساوات $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ او $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ له دې سره

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} &= \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2}} = \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \leq \alpha \leq 2\pi). \end{aligned}$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ - بنسټيزه هندسه يا ځمکچونه

۱. ۱ - لاندې کونجونه دې په لېنده اندازه همداسې په درجه اندازه (د خسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساکیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي گڼل (که غواړئ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

- | | | | |
|--------------------------|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1.1.1.a) 15° | b) 225° | c) 105° | d) $277,5^\circ$ |
| 1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$ | b) $\frac{\pi}{12}$ | c) $2\pi + \frac{\pi}{2}$ | d) $\pi - \frac{\pi}{3}$ |
| 1.1.3.a) $4,24^\circ$ | b) $70,9^\circ$ | c) $31^\circ 17' 20''$ | d) $228,1923^\circ$ |
| 1.1.4.a) 5,19 | b) 0,22 | c) 2,31 | d) 1 |

۲. ۱ - یو درېگودی له $a = 4,5 \text{ cm}$, $b = 12,2 \text{ cm}$ او $c = 11,7 \text{ cm}$ سره ورکړ شوی دی. دا درېگودی جوړ کړئ! د اړخونو نیموونکي وکارئ، د منځ ولاړې، کونج نیموونکي او جگې، همداسې یې گردیځوندي او خونديگړدي گردی (یعنې دباندې او دننه گردی) رسم کړئ.

۱. ۳ - لاندې درېگودی جوړ کړئ

a) $a = 11,7 \text{ cm}$, $b = 9,2 \text{ cm}$, $\gamma = 43,5^\circ$

b) $c = 16,1 \text{ cm}$, $\alpha = 84,6^\circ$, $\beta = 51,9^\circ$

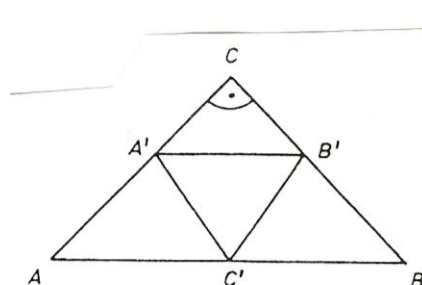


Bild 4.20

څایره

وښايي چې ولی دواړه درېگودي ورته دي!

۱. ۴ - یو مساوي پښیز، ولاړ کونجیز

درېگودي ABC ته یو مساوي

اړخیز درېگودی A'B'C' داسې په دننه

کې ورکړ شوی چې $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ خغلي

او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (خیره ۴. ۲۰ دې

وکتل شي).

ورکړئ $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

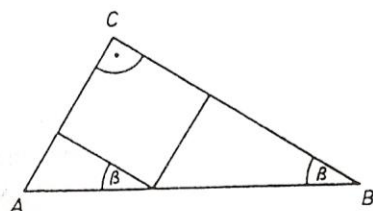


Bild 4.21

۱. ۵ - په یوه ولاړ کونجیز دریځوډي کې د
خیرې ۴. ۲۱ سره سم په لیدور ډول
په دننه کې یوه مربع ورکړ شوی. د مربع
اړخونه وشمیرئ
الف) له کانتو څخه

ب) له هیپوتینوز بهر څخه

۲. د جشمیرنې سره د ارزښتونو ټاکنه

۱. ۲ - له لاندې کونجونیو څخه د لاندې کونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیدا کړئ:

$$a) \alpha = 47,15^\circ, \quad b) \alpha = -390^\circ, \quad c) \alpha = 7,784, \quad d) \alpha = 13,195$$

۲. ۲ - کونج B دې د $\sin B = a$, $\cos B = a$, $\tan B = a$, $\cot B = a$ څخه د

$$a) \quad a = 0,8290, \quad b) \quad a = -0,2907, \quad c) \quad a = -2,145, \quad d) \quad a = 0,8660$$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کې دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!!)

۳. په ولاړ کونجیز دریځوډي کې شمیرنې

۱. ۳ - په ولاړ کونجیز ($\gamma = 90^\circ$) دریځوډي کې معلوم دي

$$a = 5 \text{ cm}, \quad c = 12 \text{ cm} \quad \text{الف)} \quad a = 3 \text{ cm}, \quad b = 4 \text{ cm} \quad \text{ب)}$$

کوم ارزښتونه $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ لري؟

۲. ۳ - ولاړ کونجیز دریځوډي کې ($\gamma = 90^\circ$) نه ورکړ شوي کونجونه او نه ورکړ

شوي اړخونه وشمیرئ، لاندې لویي موږ ته معلومي دي:

$$a) \quad a = 50 \text{ cm}, \quad b) \quad a = 40 \text{ cm}, \quad c) \quad b = 70 \text{ cm}, \quad d) \quad c = 65 \text{ cm}$$

$$b = 78,1 \text{ cm} \quad \alpha = 43^\circ 36' \quad \gamma = 18^\circ 55' \quad B = 59^\circ 29'$$

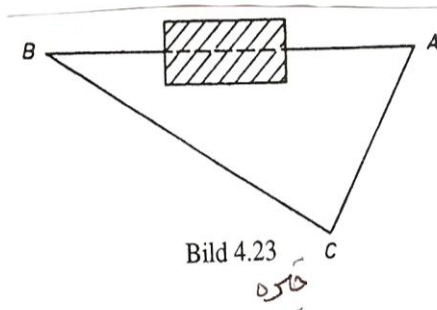
۳. ۳ - وشمیرئ h_c , A او همداسې د ټاکلي مساوي پښیز دریځوډي ورکړ شوي

پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = B$, $a = b$):

$$a) \quad a = 66 \text{ cm}, \quad b) \quad c = 22,4 \text{ cm}, \quad c) \quad a = 38,9 \text{ cm}, \quad d) \quad c = 30,3 \text{ cm}$$

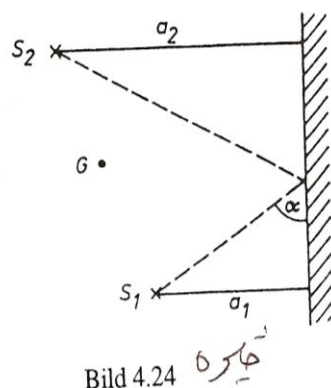
$$c = 130 \text{ cm} \quad \alpha = 47,8^\circ, \quad \gamma = 33,3^\circ, \quad \gamma = 48,2^\circ$$

ب (درې قويې دې زوريا قوت $F_1 = 167,5\text{N}$, $F_2 = 112\text{N}$ او $F_3 = 157\text{N}$ سره ورکړ شوي وي، چې په گډه يو دريگودي جوړوي. د دې دريگودي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟



پ (دوه ټکي A او B چې يوه کور يی مخه پټه کړې وي، يو له بل څومره لرې دي. که $\overline{BC} = 75,25\text{m}$, $\overline{AC} = 51,75\text{m}$ او $\angle BCA = 71^\circ 15' 45''$ وي (څيره ۴، ۲۳)

ت (د دوه يځ هاكي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ يود مخالف ټيم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسی ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په يوه ديوال ولږيږي. (څيره ۴، ۲۳ وگورئ).



د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لريوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له ديوال $a_1 = 2,5\text{m}$ همداسی $a_2 = 6,5\text{m}$ وي او توپ د يوه دې ديوال سره په يوه کونج $\alpha = 42^\circ$ ولږيږي؟

۵. د تريگونومتريکي يا درېگوديزو (مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵. ۱ - بي له جېشميري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشميرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot \alpha = -\sqrt{3}$

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایی:

$$5.2.1. a) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$b) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$c) \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$$

$$d) 1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$5.2.2. a) \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$b) \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$c) \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$d) \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$5.2.3. a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$b) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$c) \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$d) \cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$$

$$5.2.4. a) \cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$$

$$b) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$c) \cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$d) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$5.2.5. a) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$$

$$b) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$c) \sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = 0$$

$$d) \sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$$

٧٠ گډوله گڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې څنگه يوه گڼډيری پر بله گڼډيری ودانه شوې ده. که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \quad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وگورو، نو څرگند ليدل کيږي، چې دا په رييلگڼونډيری کې اوبی يا حل نه لري، نو له دې امله بايد (7, 1) د گڼنو ډيری وغزول شي. له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \dots, (7, 2)$$

د $\sqrt{-1}$ گڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رييل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چيرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, \dots, (7, 3)$$

۷. گډوله گڼونه يا کمپليکس اعداد ۲۲۳ -

ليکونکي: دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \quad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارگن (imaginär) لاتين: فقط خيالي) يوون (واحد) وايو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a, a > 0 \quad (7, 5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i, \dots \dots \dots (7, 6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a} \cdot i$$

دلته د (7,4) له امله باور لري

$$x_1^2 = ai^2 = -a, x_2^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \dots \dots \dots (5, 7)$$

اوس د ايماجينار گن يوون (واحد) ټوليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 = -1, \dots \dots \dots (5, 8)$$

ايماجيناريوون (واحد) $z = i$ يو ځانگړی ايماجينارگن $b=1$ دی

د ټوليزې څلورۍ (عمومي مربع) برابرون (مساوات) اوبی (حل):

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \dots \dots \dots (7, 9)$$

په لاندې ډول د څلورۍ پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=> لاس ته راځي يالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) \quad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \quad (7, 11)$$

او که فورمال پسې وګڼل شي

$$\pm \sqrt{p^2/4 - q} = \quad_{1,2} (x + p/2)$$

نولرو

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \dots \dots \dots (7, 12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رييل «ډبل» اوبی يا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو (7,12) دوه مختلف رييل اوبيونې يا حلونه منځ ته راوړي.

که $p^2 < 4q$ وي، نو رييل اوبی نه شته دی

د ايماجينار ګڼ په مرسته کيدی شي وليکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{\left[q - \frac{p^2}{4}\right](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

۲۲۵ - ۷. گډوله ګڼونه يا کمپلیکس اعداد

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اویونی یا حلونه لاس ته راځي

$$\chi_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلیکس ګڼونه (Komplexe Zahlen) (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a + bi, i^2 = -1; a, b \in R \quad (7,13)$$

د کمپلیکس ګڼونو ډیری په C سره په نڅښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \dots \dots \dots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و (7.13) ته کنجوګیري کمپلیکس ګڼ بلل کیږي. لاند کنجوګیري کمپلیکس ګڼ یا اوبستی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \dots \dots \dots (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = \operatorname{re}(z) \Leftrightarrow b = \operatorname{Im}(z) \quad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنگه ایماجینار برخه

دوه کمپلیکس ګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

-

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ ایښول شوي

ګډوله يا کمپلیکس عدد کیدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم (د ګاوس د اعدادو سطحه). سړی د کمپلیکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې: $i^2 = -1$

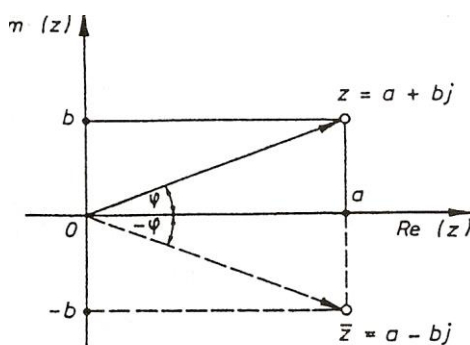


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو يا کوارډیناتسیستم Koordinaten system

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x, y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون (محور) د x - محور ته د هواري یاسطحي ریښلبرخه او ولاړ محور یا د y - محور ته یېایماجینار برخه وایي لکه څنګه، انځور شوي دي. په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته راځي، چې کمپلیکس ګڼ انځوروي. (موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریزې او کارونې یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه: هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنې د دې برخې سره بلدیري، د هغو لپاره دي په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یا کلمې په پام کې نه راځي، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیړو کې کتلی شو، چې د کمپلیکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

لاندې څیرو ته دې پام وي او گورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د $\operatorname{Re}(z)$ او $\operatorname{Im}(z)$ سره په نڅښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \dots (7, 17)$$

بیلګه ۱۰۷ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$

$\Rightarrow$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$

$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د $-z_2$) په زیاتون) کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

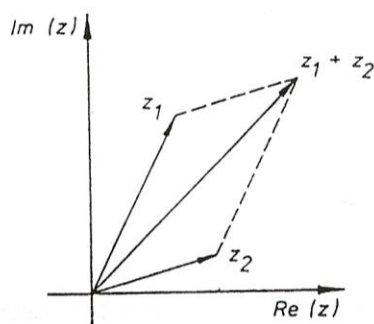


Bild 7.2
څېره ۷.۲

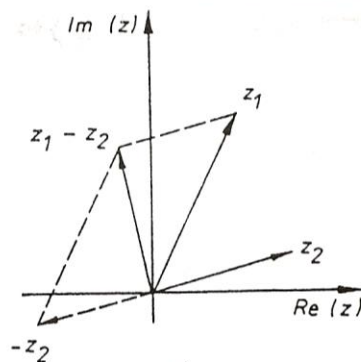
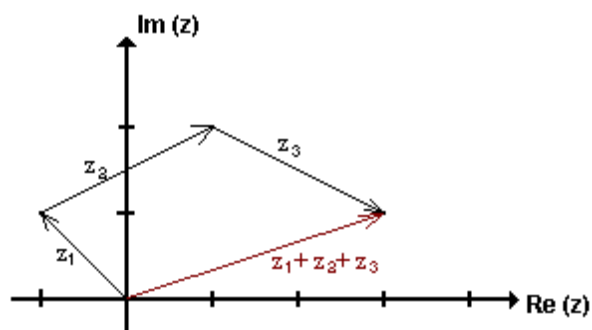
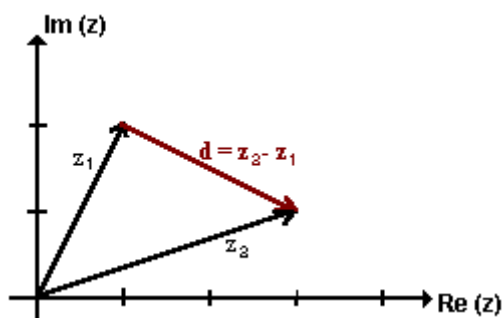


Bild 7.3
څېره ۷.۳

يا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کمپلیکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکيږي.



د کمپلیکس ګڼونو ارزښت

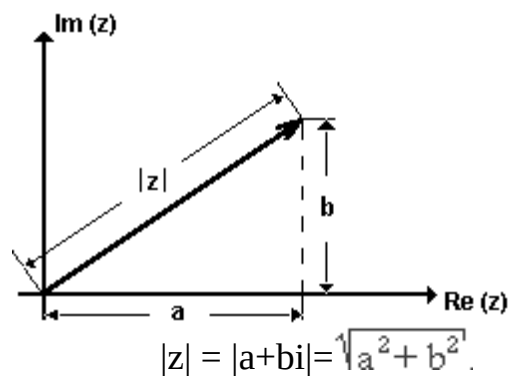
د وکتور z اوږدوالی د کمپلیکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي.

دا د $|z|$ سره ښایو او د پیتاګوراس (فثاګورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي. مخامخ څیره موږ ته د کمپلیکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي



په دري ڳوڊي ڪي د اڙخونو ڄاڻيونه يا تناسب له امله باور لري

$$\|z_1| - |z_2| \| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \dots \dots \dots (7,18)$$

برسيره پر دي باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷. ۲ د ڪمپليڪس ڳڻپونوڄل:

د ورسره بلد نوڪ ايسوولو له لاري لاس ته راڃي

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1) \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

نو بارورل ري

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \quad (7, 20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي، دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي. دا لاندې هم ساده ازمايل کیدی شي

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad , \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (7,21)$$

بیلګه ۲۰۷

$$= (a+bi) (a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2 \quad \text{د } z \cdot \bar{z}$$

او (۱۵، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad \overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2 \quad (7, 22)$$

۳۰۷ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1 + b_1 i) : (a_2 + b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\overline{z_1 z_2}}{z_1 z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \\ (7,23) \quad &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \end{aligned}$$

۲۳۱ - ۷. گډوله گڼونه يا کمپلیکس اعداد

په دې پسې لاس ته راځي

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \quad (7,24)$$

بیلگه ۷. ۳ :

د (۷. ۲۴) د دویمې برخې بڼوونه:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} &= \frac{\overline{Z_1} \cdot Z_2}{\overline{Z_2} \cdot Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)} \end{aligned}$$

بیلگه ۷. ۴ د: او Z_1 لپاره له Z_2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷. ۴. تمرینونه

۱ - مېلق يا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱. ۱ - لاندې په اریتمیتیکی یا شمیرنیزه توگه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلیکس عددونه په گاوس سپحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = 1 - i & \text{b) } z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ \text{c) } z = 2(1 - \sqrt{3}i) & \text{d) } z = -1-i \end{array}$$

۲۳۲ ۷. گڊوله ڳڻونه يا ڪمپليڪس اعداد -

۱. ۲ - د ڳاوس د عددونو سطحه کي د هغو لاندې مخلوط يا ڪمپليڪس عددونو ځای ورکړی، د کومو لپاره چي باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ - جمعه او تفریق (زاتون او کمون)

۲. ۱ - د شمیرني او کارني يا رسم کوني له لاري پيدا کړی

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲. ۲ - د شمیرني او کارني يا رسم کوني له لاري پيدا کړی

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5 + 2i)$

c) $(1 + 2i) - (1 + 2i)$ d) $i - (1 - 2i)$

۳. ضرب (ځل) او وېش:

په لاندې کي a, b, c, d, x, y حقيقي څښتنه دي.

۳. ۲ - وشمیرئ

a) $(2 + \sqrt{3}i) \cdot (3 - 2i)$ b) $(3 + 2\sqrt{2}i) \cdot (3 - 2\sqrt{2}i)$

c) $(1 + \sqrt{5}i) \cdot (1 - \sqrt{5}i) \cdot (13 - 12i)$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{7}i} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$

۳. ۲ - وشمیرئ

a) $(x + yi)(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right)$ d) $(c - \sqrt{d}i)(-c - 2\sqrt{d}i)$

۷. گډوله گڼونه يا کمپليکس اعداد ۲۳۳ -

۳. ۳ - د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورگرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1.a) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$

b) $\frac{1 - 20\sqrt{5}i}{7 - 2\sqrt{5}i}$

c) $\frac{56 + 33i}{12 - 5i}$

d) $\frac{63 + 16i}{4 + 3i}$

3.3.2.a) $\frac{5i}{\sqrt{2} - \sqrt{3}i}$

b) $\frac{3 - 27\sqrt{5}i}{7 - 3\sqrt{5}i}$

c) $\frac{i - \sqrt{3}}{\sqrt{3}i - 2}$

d) $\frac{i}{8 - i}(i + 1)$

3.3.3.a) $\frac{3a + 4bi}{4a - 3bi} + \frac{4a - 3bi}{4a + 3bi}$

b) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}i}{\sqrt{a} - \sqrt{b}i} - \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}i}{\sqrt{b} - \sqrt{a}i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}i}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}i} - \frac{\sqrt{1-a} + \sqrt{1+a}i}{\sqrt{1-a} - \sqrt{1+a}i}$

d) $(5 - i)(6 - i) + \frac{5 - i}{6 - i}$

۴. سره رايوځي شوې پوښتنې

گډوله گڼونه يا اعداد ورگرځي شوي.

$$z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4} \quad \text{او} \quad z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$$

۳ - د لوگاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونو کې x وشمړئ.

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4}.$$

و شمیرئ:

-

-
- 4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$
- 4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- 4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- 4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

۴. ۵ - د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

- a) $x^2 + (1 + i)x - 2(1 - i) = 0$
- b) $x^2 + (3 - 2i)x + 3(1 - i) = 0$
- c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}x + 1 = 0$
- d) $16x^2 + 8(i + 1)x + 2\left(i + \frac{9}{2}\right) = 0$

۸ - د بنوونې (ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا بنوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د گڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي • په جملو کېدې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه ترڅه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده (مخ ته دې وکتل شي) یانې $A \Rightarrow B$ دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی • د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیرو

۸ • ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) بنوونه

په سیده بنوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیا ارزښت یې څرگند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي •

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه بنوونه یا ثبوت) (د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیا ارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ –م جدول) •

بیلگه : سیده اوبیونه یا حل:

$$x \geq 1 \quad : V \quad \text{نیونه}$$

$$6x+3 \geq 3x+6 \quad : B \quad \text{غوبښتنه}$$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده. له ۳ سره
خُل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی: $3x \geq 3$: د ۳ زیاتون له لارې
لرو: $3x + 3 \geq 6$ د $3x$ زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x + 6.$$

بیلگه:

د یوه ناتیګ اوبیوني یا حل کارونه (متود)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b} \quad \text{د بنوونی دی}$$

د بنوونی وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

لاس

$$(a-b)^2 \geq 0$$

ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي. مګر دا د بنوولو وینا یواځې
د شرایطو $a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري. له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې
یا د بنوولو ویناو ته نه شي راتلې (سیده بنوونه) او په ناسداه یا غیرمستقیم ه بنوونه یا
اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څیرنې لاندې ونيول
شي.

۲۰۸ ناسیده بنوونه یا - ثبوت:

په ناسیده بنوونه کې له یوه نفې یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A «ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کېږي، کومه چې نارښتیا ده. وینا یعنې نفې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا بنوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي (د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده. (د ثبوت د رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفې نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده.

بیلګه : ناسیده بنوونه یا ثبوت

نیونه $a, b : V$ دې ریيل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, b \geq 0$

بنوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{a.b}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفې ده

د پورته نابرابرون له څلورۍ یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لوري له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځي

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورۍ وتنې یا مربعوتنې څخه لاس ته راځي:

$$a^2 + b^2 + 2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د $4ab$ کمونې څخه لاس ته راځي

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

د نابرابرون کینه لور د څلورۍ • مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کیدی • دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتیا دی یا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دی •

۲ - غوښتنه B: د ۲ ریښه یا جذر $\sqrt{2}$ ایرشنل دی

اوبیونه یا حل: د غوښتنې نفی ده، چې: د ۲ ریښه $\sqrt{2}$ ریشنل گن دی (د ریشنل گڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل گڼونه q, p د $q \neq 0$ سره

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

شته وي، چې دا باوري شي:

له دې پورته برابرون سره p^2 یو جوړه (جفت) گن دی • نو له دې امله p هم یو جوړه گن دی، ځکه چې یواځې د جوړه گن مربع یا څلورۍ جوړه کیدی شي $p = 2p'$ له مربع یا څلورۍ کولو او پر ځای ایښوولو لاس ته راځي:

$$p^2 = 4p'^2$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

له اخرنۍ برابرون لاس ته راځي، چې q هم يو څلورۍ يا مربع گڼ دى. په دې پسې لرو p او q پر $\sqrt{2}$ ویشونى دى، يانې پرويشپردي نه دى. که پرويشپردي ټول گڼونه p او q له

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولگڼونه نه شي کيدى، چې شته يا موجود وي.

۸ ۰ ۳ د پوره ايندکشن له لارې بنوونه

د پوره ايندکشن ثبوت يا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کيږي، چې د يوه ټاکلي گڼ n_0 (صفر بايد لږ د n د پښې لاندې وليکل شي) څخه د ټولو پيدايښتي گڼونو لپاره باوري کيدى شي. يانې دلته نوينه داده، چې يوه وينا د لپاره که باور ولري، نو دا بيا د ټولو پيدايښت گڼونو لپاره باور ي کيدى شي.

بيلگه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره $2^n \geq 0$ په توان د n له صفر لوي يا له صفر سره برابر دي يعنې باور لري:

بيلگه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\dots 2n+1 = n^2$

د پوره ايندکشن د بنوونې لپاره د « پوره ايندکشن پرينځيپ بنسټ » مخ ته پروت دى:

که يوه وينا $n_0 = n$ يا (په لاندې، که n ، ج، ته پورته شو، نو صفر په پښه کېليکل شوى) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وينا د يوه په خوبڼه پيدايښتي گڼ $n = k$ لپاره اور لرلو څخه د $n = k+1$ لپاره باوريوالى ترې لاس ته راشي، نو دا وينا د ټولو پيدايښتي گڼونو $n \geq n_0$ لپاره ريښتوني ده.

۲۴۰	۸ - د بنوونې (ثبوت) متودونه	-

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن بنوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

بنوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ - د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وبنوول شي. له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ایندکشن نیونه:

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لري او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځای پرځای کیږي یا راوړل کیږي.

۲ ب - د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو. دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځای لیکو

۲ ج - د ایندکشن بنوونه:

بنوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بیلګه ۱:

۱ - د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ۱ ۰ V ته:

$$2^k > k$$

و ۲ ۰ ۲ B ته

۸ - د بنوونې (ثبوت) متودونه ۲۴۱ -

$$2^{k+1} > k+1$$

۲. ۳ له $V \Rightarrow B$: له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$$2 + 2^k > k+1$$

او له دې لاس ته راځي: $2 \cdot 2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ۲ :

$$1 = 1^0 = 1 \text{ د } n = 1 \text{ لپاره باور لري}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2 \text{ ته: } V \text{ ۱. ۲ و}$$

$$B \text{ ۲. ۲ ته:}$$

و ۲. ۳ $V \Rightarrow B$ ته: له نیونې څخه د زیاتوون $2k+1$ زیاتونې او له دې د بنې خوا د یوه بینومثلورۍ (-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1$$

او له دې د بنې خوا انځورونې څخه د بینوم څلورۍ (-مربع) لاس ته راځي :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (2k+1)^2$$

یادونه : د V او B پر ځای کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه

لرو، چې نیونه غوښتنه او بنوونه ده. په هغه ورسره بلد ډول یې بنوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی (اوبی پښتو ده او ښه کړه، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، که نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د تږنې په ډول ورسره مل کړو. ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګې په لار یم.

۸. ۴ تمرینونه

۱ - سیده وښايي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$$

۲ - ناسیده وښايي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل گڼ دی

۳ - د پوره اندکشن له لارې یې وښايئ

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$.

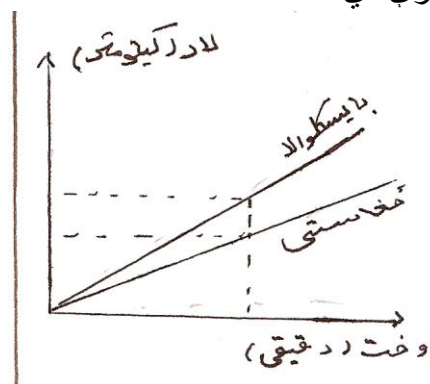
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

۹۰. کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلگه

یو بایسکل خُلوونکی او یو پلې له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په گراف کی کښل شوی دی (که د گراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم، که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په گری کی ۱۵ کیلومتره خُغلي او پلې ۱۰ کیلومتره په گری کی خُغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځای کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کې چې د فنکشن د نامه لاندې یادېږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرېون یا مساوات په نامه وېلو. وخت (په دقیقه (په t ښایو لار) کیلومتر (په s ښایو د لار انځورونې څخه په گراف کې څرگندېږي چې بایسکل ځغلونکي له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعنې 15km/h او پلي ۱۰ کیلو متره یعنې 10km/h غواړود هرڅه لمړی وښایو چې هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلې او بیا دویمې پوښتنې ته ځواب ورکوو. بایسکل ځغلونکي به له دوه ساعته وروسته $2.15\text{km} = 30\text{km}$ ځغلیدلي وي او پلي به $2.10\text{km} = 20\text{km}$ ځغلیدلي وي بایسکل ځغلونکي به له t وخته وروسته $t.15\text{km}$ $15.t\text{km}$ لار وهلې وي. دلته وخت t خپلواک اوږیدونې یا نا پېژندونکي او لار s بلواک اوږیدونې یا ناپېژندونکي یعنې د t په واک کې دی. دا کلیمې به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کې پوره تر څیړنې لاندې ونيول شي. د بایسکل ځغلونکي وهلې لار، چې په r یې ښایو برابرېون داسې لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکي وهلې لار، چې د بایکل ځغلولو وخت دی طبعاً زیاتیز یا مثبت دی ورته پلي چې په ایې ښایو وهلې لار هم ټاکل کېږي، یعنې د l وهلې لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چې دواړه له پیل ټکي له ۱،۵ ساعته یو له بل څومره لرې دي. وهل شوي لار:

$$S_r = 15.1,5 = 22,5\text{km} \quad \text{د بایسکل ځغلونکي}$$

$$S_l = 10.1,5 = 15,0\text{km} \quad \text{د پلي}$$

ددې په تعقیب له ۱،۵ ساعته وروسته دواړه یو له بل ۷،۵ km لرې دي.

۹. ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښیز مساوات فرمول د یوې اوښتونې یا مجهولي x سره داسې دی

$$Ax = a \quad (9.1)$$

دلته a , A حقیقي اعداد دي. د (۱. ۶) برابرېون اوښونه (حل) دا مانا لري چې ټول هغه حقیقي اعداد وښوول شي چې که په پورته (۱. ۹) برابرېون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد وښتیز قانون (۳ - مډه

برخه دي وکتل شي) په بنسټ کیدي شي چی د حقیقي عدد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمی شي. داچی ویش په د

$$A \neq 0; \frac{1}{A} \text{ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي}$$

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; \dots\dots\dots (9, 2)$$

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی. که په څټ یا برعکس $A = 0$ وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیرو

۱ - که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څټوالی تشکیلوي، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا (۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که $a = 0$ وي، نو بیا برابرېون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

$$0.x = 0$$

دا برابرېون بیا د ټولو رییلگڼونو x لپاره پوره (ډک) دی. یا برابرېون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي: (په خوښه bel) $x = (bel)$ پس دا لاندې باور لري:

برابرېون (۱ . ۹) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلي اوبیونه (۹ . ۲) لري د $A = 0$ او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د $A = 0$ او $a = 0$ لپاره هر رییلگڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، دیوې اووښتونې یا مجهولی سره د رییل برابرېونونو د گڼلو ټوله تیوري خوندي ده .

یو لاینیز برابرېون (مساوات) (یو برابرېون، چی د برابرېونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرېونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ .

۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سری په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف

په لور زیاتون (همداسی کمون) له لاري همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راوړي، دا

د ۲ . II بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورم بدلون یا ښه بدلون دی) (د اوبي یا حل

ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلگي په توگه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ وړ زیات کړو او $a_2x + c_1$

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; \dots (9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کین لور او ثابت د برابرې په ښي لور پراته دي. داسې لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرې (۳ . ۹) د برابرې (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا ښه یو مساوات ورکړ شوی وي

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټيک هلته موخه ور یا هدفمند دی چې $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرې د x په لور حل کیدلی شي، که دا په a_2 حل شي او د $a_1 \neq 0$ په حالت کې په a_1 ویشل شي:

$$x = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$$

بیلگه ۹ . ۱ :

برابرې $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چې $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددې لپاره چې د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرې د گڼماتلاندې $a.b$ سره حل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرې ترتیبیږي او راټولېږي، x له نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^2x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 ویشل شي $(a+b)x = 2b$

دا د لاینیز برابرې بنسټیزه ښه (فورم) (۱ . ۹) ده

که $(a+b) \neq 0$ وي، نو $x = 2b / (a+b)$

یوگونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی
 که $(a = -b)$ ، $a + b = 0$ ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
 هغه حالت چی ناپای زیاتي اوبیوني یا حلونه منځ ته راځي (د x په خوښه) ، د نیونی
 یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
 پام:

په دې هکله زیاتي بیلگی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله ووني په مختلفو
 توانونو وي . زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوبستونی یا
 متحولې ولري، همغېسی شمیرل کیږي، لکه په رییل عددونو کې .
 دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي . که چیرې اړیښي وي او یا گرانو
 لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلگی به هم راوړم او
 که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به
 وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل . زه دومره یادونه کوم،
 چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنسټیز کتاب کې زیاتي بیلگی راوړل شوي، خو نه
 پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیري او که نه

بیلگه ۹ . ۲ :

برابرون $1 = \frac{x}{a} - \frac{(a-x)}{2bc} + \frac{(a-x)}{3c}$ یواځي
 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
 ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. $6abc$ (صلي ماتلاندې)
 سره ځل کوو: $6bcx - 3a(a-x) + 2ab(a-x) = 6abc$
 ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرگندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:
 $6bcx - 3a^2 + 3ax + 2a^2b - 2abx = 6abc$
 $(6bc + 3a - 2ab)x = 6abc + 3a^2 - 2a^2b$
 $(6bc + 3a - 2ab)x = a(6bc + 3a - 2ab)$
 دا بیرته د لایني مساوات (۹ . ۱) بنسټیزه ده، او له دې امله صدق کوي:
 د $6bc + 3a - 2ab \neq 0$ لپاره $x = a$ د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
 د $6bc + 3a - 2ab = 0$ لپاره د $0x = 0$ له امله هر رییل کن x اوبیونه
 ده.

نو لرو $x = a$ د $6bc + 3a - 2ab \neq 0$ لپاره د $6bc + 3a - 2ab = 0$ لپاره x په
 خوښه

دلته د څیرل شوو برابرونو، چې په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل
 کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینڅیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

مګر په لاینیز مساوات یا برابر ونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a, b, c لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.

ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګې راوړو:

بیلګه ۹. ۳ :

$$(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$$

برابرون د لومړي ځل لپاره څلورۍ برابرېږن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلورۍ (مربع) غږي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلورۍ غږي له منځه ځي. یو لاینیز مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹. ۴ : برابرون $(2x - a) / (x - b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا

شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$

$x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ

شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a - b$ لري او پرته له دې

($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹. ۵ :

$$(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$$

مساوات یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$

دانو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله

چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی

حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې ($a + b = c$) حل یا اویونه نه لري

بیلګه ۹. ۶ : د لاندې مساوات څیرنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

چی ټیک د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.گ.خ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b \cdot c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

$$\dots\dots\dots = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a^3 \cdot b \cdot c^3 = 64 \cdot 243 \cdot 125 \cdot a^3bc^3$$

دا پورته گڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

که برابرې د ا.م.ل. سره حل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل څلور راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیري

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلورو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلورونو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلي شي .

بیلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټیک د دې نیونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1/a^2$.

اصلی مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیدا کړو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$$

اصلی ماتلاندې (ا م ل)

د اصلی مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو د باندې او نور په نوکانو کې بندېږي)، لاندونو او ځلونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.....2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.....2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$.....x = \frac{a+b}{2ab}$$

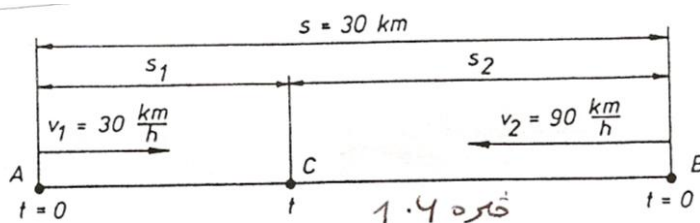
د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی) که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوبه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چې په بنسټیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعنې په مساوات کې ځای ورته نه وي. (په دې حالت کې د x مطلقه ارزښت د $a = b$ د x لپاره د x لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹. ۸ :

دوه ګاډې تمځایونه A او B یو له بل ۳۰ km لري دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کې د دیرش کیلومتره ۳۰ km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

خوزیري. د B څخه یو تیز گاډی د 90 km/h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه گاډي په همغه وخت کې حرکت وکړي، کله به یو بل سره مخامخ شي؟ دلته درې فزیکي لویي یو رول لري: لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او v سره وښودل شي. ددې شي ځانښوونې لپاره څیره څېره وکارو



پوښتنه «چیرته» د دواړو گاډو د یوځایوالي ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار گاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیز گاډي لار s_2) سره وشمیرل شي. پوښتنه «کله» د گاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوږدونې یا مجهولې مخ ته لرو s_1 , s_2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونې سره مناسب لاندې اړیکې باور لري:

$$v_1 = s_1 / t, v_2 = s_2 / t, s_1 + s_2 = s$$

د باوري ارزښتونو مارونې یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30 t, s_2 = 90 t, s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازې یونونه (واحدونه) پرېښوول کيږي. او پرېکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو)!

دا درې مجهولې s_1 , s_2 او t دی ددې برابر وننو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړ شوی وي، مگر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي s_1 , s_2 او t وټاکل شي.

که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري برابر ون څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$ دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځای په ځای کوو او دواړه د t په لور حلوو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

$$x / 30 = (30 - x) / 90 \quad \text{نو لرو:}$$

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x, 4x = 30 \quad x = 7,5$$

نولرو

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, s_2 = 22,5 \text{ km}, t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$$

که ولیکو $s_2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$$s_1 = 30 - x, t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x) / 90$$

$$3(30 - x) = x$$

$$90 = 4x$$

$$x = 22,5$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, s_1 = 7,5 \text{ km}, t = (22,5 / 90)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې یا ناپیژندونې په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق

$$\text{کوي: } s_1 + s_2 = 30x + 90 \quad x = 30$$

$$20x = 30$$

$$x = 30 / 120 = 1/4, t = (1/4)h = 15 \text{ min}$$

$$s_1 = 30t = 30/4 \text{ km} = 7,5 \text{ km}$$

$$s_2 = 90t = 22,5 \text{ km}$$

دواړه گادي له ټکی A څخه د $0,25 \text{ h} = 15 \text{ min}$ حرکت وروسته په 7, 5 km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلگه ۹. ۵ - مساوات $(a/x) + (b/x) - (c/x) = 1$

یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا

نود $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چی $a + b = c$ وي. پس ورکړ شوي

مساوات یواځې د $a + b = c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له

دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلگه ۹. ۶ - د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3 c^2 x - \frac{1}{a^2}}{121500 a b^4 c^3} - \frac{a^2 x - \frac{1}{b^3 c^2}}{2880 a^3 b c} + \frac{a b c x - \frac{1}{a b^2 c}}{5400 (a b c)^2} = 0,$$

چی ټيک د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.م.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b \cdot c$$

$$5400 a^2b^2c^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^2b^2c^2$$

$$\text{اصلي مات لاندې لنډ «ا م ل» } = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a^3b \cdot c^3 = 64 \cdot 243 \cdot 125 \cdot a^3bc^3$$

که مساوات د ا.م.ل. سره حل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2} \right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2} \right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c} \right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل څلورواټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړ کېږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلورو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلورو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹. ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

ټيک د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0, \quad |x| = 1/a^2$

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیدا کړو:

$$\begin{aligned}
 a^4 b^2 x^2 - b^2 &= b^2 (a^4 x^2 - 1) \\
 &= b^2 (a^2 x + 1)(a^2 x - 1) \\
 a^2 b x + b &= b (a^2 x + 1) \\
 a^2 b x - b &= b (a^2 x - 1)
 \end{aligned}$$

$$= b^2 (a^2 x + 1)(a^2 x - 1) = b^2 (a^4 x^2 - 1) \quad (\text{ا م ل})$$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو د باندې او نور په نوکانو کې بندېږي)، لاندونو او څلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
 a^2 (2bx - 1) + b^2 (a^2 x - 1) &= a^2 b^2 x (a^2 x + 1) + b^2 (2ax - 3) - b^2 (a^4 x^2 - 1) \\
 2a^2 bx - a^2 + a^2 b^2 x - b^2 &= a^4 b^2 x^2 + a^2 b^2 x + 2ab^2 x - 3b^2 - a^4 b^2 x^2 + b^2 \\
 2a^2 bx - 2ab^2 x &= a^2 - b^2 \\
 2ab (a - b) x &= (a + b) (a - b) \\
 x &= \frac{a + b}{2ab}
 \end{aligned}$$

د $a = b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

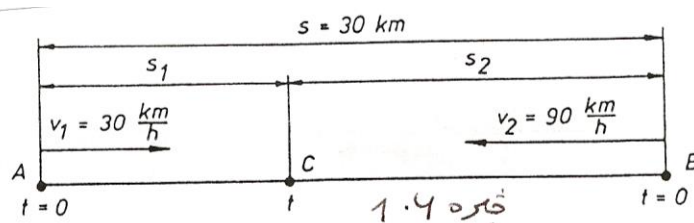
که $a = b$ وي، نو $x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنسټیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي (یعنې په مساوات کې ځای ورته نه وي). په دې حالت کې د x مطلقه ارزښت د کټونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

د x لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي، دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

بیلگه ۶. ۸ : دوه ګاډي تمخایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. د B څخه یو تیز ګاډی D د 90 km/h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کی حرکت وکړي، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویي یو رول لري: لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t , او v سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶. ۱ ورکړ شوې.



پوښتنه «چیرته» د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار ګاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیز ګاډي s_2 لار) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_1 , s_2 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکې باور لري:

$$v_1 = s_1 / t, \quad v_2 = s_2 / t, \quad s_1 + s_2 = s$$

د باور ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30 t, \quad s_2 = 90 t, \quad s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

دا درې مجهولې s_1, s_2 او t دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړ شوی وي، مګر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي s_1, s_2 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د t په لور حلوو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لایني ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x, 4x = 30$$

$$x = 7,5$$

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, s_2 = 22,5 \text{ km}, t = \frac{7,5}{30} h = \frac{1}{4} h = 15 \text{ min.}$$

نو باور لري:

که $s_2 = x$ کیږدو، نو شمیرنه په لاني ډول ځغلي یا لاندي لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x, t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90},$$

$$3(30 - x) = x,$$

$$90 = 4x,$$

$$x = 22,5,$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, s_1 = 7,5 \text{ km}, t = \frac{22,5}{90} h = \frac{1}{4} h = 15 \text{ min.}$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې $x = t$ ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$

$$20x = 30,$$

$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, t = \frac{1}{4} h = 15 \text{ min.}$$

$$s_1 = 30t = \frac{30}{4} \text{ km} = 7,5 \text{ km},$$

$$s_2 = 90t = 22,5 \text{ km.}$$

دواړه گاډي له ټکي A څخه د $0,25h=15min$ خوزښت (حرکت) وروسته په $17,5km$ کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹. ۲. تمرینونه

۱. ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره لاندې مساوات حل کړئ a او b نتیجه یې د ازمایې! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ؛ چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی. دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري. همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونو سره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.
۱. ۱. بی له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2(x - 1) = 0$

b) $(3 - x)(x + 4) - 9 = (3x - 4)(8x - 9) - (5x - 6)^2$

c) $2a(x + 3) = (3 + x)(5 + 2a)$

d) $3a - (7b + 11a) - (3x - 12b - 9c) = (3x - 8a) + 5b - (3c - 6x)$

1.1.2. a) $(a - x)(x + c) = 2c(a - x) - (b - x)(c - x)$

b) $a(x + 1)(ax + b) + b(a + bx)(1 - x) = x^2(a - b)(a + b)$

c) $(x + a)(a - x) - b(b - a) = (x + a)(b - x)$

d) $a^2(x - a) + ab^2 = b^2(x + b) - a^2b$

۱. ۲. کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره.

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{x+1}{15}$ b) $4 - \frac{10-3x}{5} = 3 - \frac{10-7x}{10} + \frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1 - \frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3} + \frac{6x-1}{2} = 5 + 5 \cdot \frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20} - \frac{1}{12}(4x-5) = 1 - \frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2} + x) - \frac{7}{3}(2x - \frac{19}{2}) - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} = 0$

c) $\frac{7x-16}{3} - \frac{4}{5}(x+1) + 6 = \frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4} - \frac{4}{3}(x-4) = 3$

$$1.2.3. \text{ a) } \frac{3x-7}{5} - \frac{7-4x}{7} = \frac{5x-11}{10} - \frac{19-10x}{14}$$

$$\text{ b) } \frac{17+4x}{10} - \frac{7+x}{5} = \frac{7x+13}{25} - \frac{5+x}{20}$$

$$\text{ c) } \frac{2x-11}{15} - \frac{x}{5} + \frac{59}{40} = \frac{8x-59}{30} - \frac{16x-145}{24}$$

$$\text{ d) } \frac{4x+4}{5} - \frac{5x-4}{55} = \frac{2x+9}{4} - \frac{12x-3}{44}$$

$$1.2.4. \text{ a) } \frac{5x+17}{3} - \left(\frac{3x+8}{2} - 3 \right) = \frac{3x+12}{2} - \left(\frac{x+4}{6} + 3 \right)$$

$$\text{ b) } 2 - \left(\frac{3x+8}{4} - \frac{2x+2}{3} \right) = 1 - \left(\frac{7x+20}{8} - \frac{2x-7}{3} \right)$$

$$\text{ c) } \frac{4-x}{2} - \left(\frac{8-x}{3} - \frac{x+2}{4} \right) + \left(\frac{8-x}{6} - \frac{3(2+x)}{8} \right) + x = 1$$

$$\text{ d) } \frac{10-14x}{8x} - \left(\frac{6}{5} + \frac{4}{2x} \right) = \frac{5}{8x} - \left(\frac{12}{5} + \frac{14x+1}{10x} \right)$$

۱. ۳ - کسري - يا ماتمسوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړ شوي وي.

$$1.3.1. \text{ a) } \frac{ax-1}{bcx} + \frac{bx-1}{acx} + \frac{cx-1}{abx} = 0$$

$$\text{ b) } \frac{ax-b}{bcx} + \frac{bx-c}{acx} + \frac{cx-a}{abx} = 0$$

$$\text{ c) } \frac{3(x-b)}{a} - \frac{2(x-a)}{b} - 1 = 0$$

$$\text{ d) } \frac{a-b^2}{x} - \frac{c-b^2}{x} - b = 0$$

$$1.3.2. \text{ a) } \frac{bx-a}{a} + b = bx-1$$

$$\text{ b) } \frac{x-a}{a} - a = \frac{x-b}{b} - b$$

$$\text{ c) } \frac{a+b}{x} - a = ab - \frac{a-b}{x}$$

$$\text{ d) } \frac{ax^2-bx+1}{a} = \frac{bx^2-ax+1}{b}$$

$$1.3.3. \text{ a) } \frac{bx-a^2}{a} + \frac{ax-b^2}{b} = \frac{b-ab}{a} + \frac{a-ab}{b}$$

$$\text{ b) } \frac{20a-x}{5a} + \frac{6b-cx}{2b} = 10 - \frac{9c-ax}{3c}$$

$$\text{ c) } \frac{a^3}{b}(x-1) - \frac{b+c}{b}(1-2x) = b^2(1-x) + \frac{b+c}{b}$$

$$\text{ d) } \frac{x(b-a)}{ab} + \frac{b(c-x)}{ac} = \frac{x+b}{a} - \left(\frac{b}{c} + \frac{x}{b} \right)$$

۱. ۴ - کسري - يا ماتمسوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړ شوي وي.

$$1.4.1. \quad a) \frac{5}{x+2} + \frac{3}{2(x+2)} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(x+2)} \quad b) \frac{12x+5}{16x-15} - \frac{16x+1}{15} = \frac{3-2x}{5} - \frac{2x-1}{3}$$

$$c) \frac{10-2x}{3} + \frac{13+2x}{7} = \frac{14x+26}{2x+21} - \frac{17+8x}{21}$$

$$d) \frac{2x^n + 7x^{n-1}}{9} + \frac{7x^n - 44x^{n-1}}{5x-14} = \frac{4x^n + 27x^{n-1}}{18}$$

$$1.4.2. \quad a) \frac{8x+7}{9x^2-4} = \frac{16}{15x-10}$$

$$b) \frac{24-5x}{6-2x} - 5 = \frac{34-14x}{9-3x}$$

$$c) \frac{x+4}{12x+4} - \frac{x-4}{3x+1} = 5$$

$$d) \frac{10x-11}{12x+18} = \frac{3}{2} - \frac{4x+1}{6x-9}$$

$$e) \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{3x-6} = \frac{1}{6}$$

$$f) \frac{8-x}{5-10x} = 2 - \frac{5}{3-6x}$$

$$g) \frac{12x}{10x+5} + \frac{6x-10}{2x+1} - \frac{2x+25}{12x+6} + \frac{10x-1}{8x+4} = 2$$

$$h) \frac{3x-2}{5x+10} - 10 = \frac{2x+1}{3x+6} + \frac{2(1-4x)}{x+2} \quad i) \frac{6x-1}{4x-6} + \frac{10x-7}{6x-9} = 11 - \frac{14x+1}{8x-12}$$

$$j) \frac{3x}{2x-\frac{1}{2}} - \frac{16x^2}{3(4x-1)} = \frac{4(1-x)}{3} - \frac{4}{12x-3}$$

$$1.4.3. \quad a) \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+4}{x-2} = 2 \frac{x-38}{x^2-4} \quad b) \frac{12}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{x^2}{x^2-16} = 0$$

$$c) \frac{5x^2-120}{10-x} + \frac{3x^2+80x}{10+x} = \frac{2x^3+160}{100-x^2}$$

$$d) \frac{15x+2}{5x-2} + \frac{25x-2}{5x+2} = \frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$$

$$e) \frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16} = \frac{2x-1}{2x-4} + \frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$$

$$f) \frac{7x^2+8}{2(x^2-1)} = \frac{2(x+1)}{x-1} + \frac{3x-4}{2x+2}$$

$$g) \frac{16x^2-6x}{2x+1} - \frac{6x}{1-2x} = \frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$$

$$a) \frac{2x-5}{x-5} + \frac{3x-5}{x-9} = \frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$$

$$b) \frac{2x-9}{x-12} + \frac{x-6}{x-24} = \frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$$

$$c) \frac{11x+6}{x^2-3x-54} = \frac{3x-14}{2x-18} - \frac{3(x+2)}{2x+12}$$

$$d) \frac{7x-15}{3x-6} + \frac{8x-21}{3x-3} + \frac{10x+21}{3x^2-9x+6} = 5$$

$$e) \frac{1}{3x+21} + \frac{1}{3(x-5)} - \frac{x+6}{4(x^2+2x-35)} = 0$$

$$f) \frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5} = \frac{14x-19}{4x-1} - \frac{8x+25}{12x-5}$$

$$g) \frac{8x-3}{6x-4} + \frac{6x-4}{10x-6} = \frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$$

۱. ۴. ۵ -

$$a) \frac{5x-12}{2} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1} - \frac{7x-10}{2x-10} \quad b) \frac{28}{45-7x} = \frac{5}{x-9} - \frac{9}{x-5} ;$$

$$c) \frac{x+6}{x-2} + \frac{3x-8}{x-4} = \frac{6(x+9)}{x+6} \quad d) \frac{x-13}{x+3} + \frac{8x+45}{x+5} = \frac{9x+7}{x+2}$$

۱. ۵ - کسري مساوات، چي په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱. ۵. ۱ -

$$a) \frac{2a+x}{2a-x} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$b) \frac{a-b}{2c-x} = \frac{a+b}{2c+x}$$

$$c) \frac{a}{a-2x} - \frac{b}{b-2x} = 0$$

$$d) \frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}} - \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}} = 0$$

۱. ۵. ۲ -

a) $\frac{a}{x+b} - 1 = 1 + \frac{b}{x+b}$

b) $a - \frac{ax}{x-1} = \frac{1}{a} - \frac{x}{ax-1}$

c) $a+b + \frac{x}{a+b} = a-b + \frac{x}{a-b}$

d) $\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab} + ab = \frac{1}{a+b} + (a+b)x$

f) $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b} x + \frac{b+1}{a} x + \frac{2ab}{a+b} = a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2} = 5 - \frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x} - \frac{b}{x+1} = \frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x} - \frac{2b}{x+2} = \frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x} + \frac{1-x}{a-x} = \frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2} - \frac{a-bx}{ab+b^2} = \frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x} - \frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2} = \frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2} - \frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶، ۱ - کسر مساوات یا ماتر ابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x}$

b) $\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{x}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{x}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + 1}$

c) $\frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \frac{1}{a}}{x + \frac{1}{a}} - \frac{1}{a}$

d) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} = \frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}}$

۷. ۱ . شي تمرينه

۱۷. ۱ - که د يوه گڼ څلور ځله او ۱۴ زياتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱۷. ۲ - که د يوه گڼ څلور ځله او ۴ زياتون ددې گڼ او ۱۴ زياتون سره برابر وي ، نو

هغه گڼ کوم دی؟

۱۷. ۳ - د يوه گڼ څلورمه برخه او پنځه ځله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱. ۷. ۴ - که د یوه گڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه گڼ ویشل شي چی ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا گڼ به کوم وي؟
۱. ۷. ۵ - د یوه گڼ پنځه ځله او د ۳ زیاتو دوه ځله لوي دی لکه د دې گڼ دري ځله او ۱ کمون. دا گڼ کوم دی؟
۱. ۷. ۶ - د یوه گڼ څلورځله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې گڼ دوه ځله او ۸. دا گڼ څه نومیږي؟

۱. ۷. ۷ - د یوه گڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چی ددې گڼ په څلور ځله او ۵ زیاتون ویشل شي، ۱ ور کوي. دا گڼ څه نومیږي؟
۱. ۷. ۸ - د یوه مات ماتباندي په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندي په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا گڼ څه نومیږي.
۱. ۷. ۹ - ۲۵ داسی په دوه گڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چی د مربع توپیر یی ۱۲۵ شي.
۱. ۷. ۱۰ - د دوه گڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یی ۱۸۰ دی. گڼونه څه نومیږي؟
۱. ۷. ۱۱ - دوه گڼونه داسي تناسب کی دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی . که دوم په لمړی ویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یی ۷ دي. دواړه گڼونه کوم دي؟
۱. ۷. ۱۲ - د دوه ځاینیونکي گڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې گڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی گڼ لاس ته راځي، د همغه ځایگڼونو سره مگر په څټ ترتیب سره.
۱. ۷. ۱۳ - یو زدکړی غواړي د یوه گڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کی بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو گڼ د ریښی په څیر

ټاکي، چې مربع یی په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي دی، هغه گڼ کوم دی چې مربع ریښه یی غواړو پیدا کړو؟

۱. ۷. ۱۴ - یو د سپورت ملگرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړۍ ډله ۳۷ دملگرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی $1/4$, $1/5$ په همدې ډول $2/$ غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱. ۷. ۱۵ - یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ $1/9$ ، دومه ورځ $1/6$ او په دریمه ورځ $1/4$ د موجودو لوتوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره

مجلی د خرڅلاو لپاره لروډي؟

۱. ۷. ۱۶ - یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ « ځما پلار چې درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواړه څخه $1/4$ زیات زوړ دی. » زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱. ۷. ۱۷ - د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه خوي. دواړه ۲۷

کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱. ۷. ۱۸ - په یوه معما کی یو زدکوونکی دې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه

کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم، زیاتون یی له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په ۱۱ ویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

۲۲. په اوبو کې یو د لرګي منډه باید خومره لوی وي، چې د لمبیدو استعداد یې ۷۵۰ نیوتونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلوکوالی (د فرمول څخه معلومېږي چې دا څه شی دی) $4 \frac{N}{cm^3}$ وي؟

۷. ۲۳ د سونگموادو ټانک د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره گلوډ د سونگ مواد لري. خومره تیل او خومره بتزین په ټانک کی موجود دي که گلوډونه یی وي؟
 ۷. ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سړک په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکه شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سړک بیا ۲۰ ونی زیاتی کیننول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبللی ته خومره لویي دی؟

۷. ۲۵ د بایسکل ځغلونکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، خومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷. ۲۶ واورومنده کی ، دا وروسته وړونکی د پروسېر کلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷. ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وگوري دو وخت توپیر خومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

۱۰ کومبيناټوريك - د بينوم جمله

کومبيناټوريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو گڼ ، پل ځاي بدلو څومره والښتې او که څو گڼونځپل ځاي بدل کړي دا څنگه ليکل کيږي . د ځای بدلون شميرنه ده
او د هغې ډولونه .
په ۱۰ ۱۰ او ۲۰ برخو کې به د شميرپوهنې مرستندوي مواد د بينوم
جملې (۳.۱۰)
برخه) او کومبيناټوريک (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمي او بينوميالکوايفيڅينټ
(بينوم ځلوني) پيل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتيت factorial, Die Fakultät

پېژند ۱۰ . ۱ :
د $n!$ سومبول (ويل کيږي n « فاکولتيت ») لاندې سړی له ۱ تر n پورې گڼونو ضرب
پوهيږي، يعنی $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعريفو: $1 = 0!$
د فاکولتيت له پېژند څخه څرگنديږي، چې $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

يادونه:

په افغاني ادبياتو کې تر هغې چې ماته معلومات شته د فاکولتيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کې دا د الماني کلیمه يا پښتو ، ځله ووني،، زيات کاره ولی، هيله ده چې تاسو به يې په خپله خوښه وټاکي. په دې کې کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی.

بيلگي :

الف : $n!$ د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0! \cdot 2! \cdot 4! = 1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)(n) \cdot (n+1) \cdot (n+2) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$$

$$= n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2 \cdot n! = 2 \cdot (1 \cdot 2 \dots n),$$

$$(2 \cdot n)! = 1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1) \dots 2n.$$

۱۰ . ۲ د بينوم ځلوني يا ضربيونه

پيژند: ۱۰ . ۲

د سيمبول $\binom{n}{k}$ (وييل کيږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهيدل کيږي چې هر يو k ځله ووني يا ضربيونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{i}$$

برسيره پر دې دا هم په کلکه کره کيدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

$$\binom{n}{1} = n$$

د k گڼ یو پیدایښتي یا طبعي گڼ دی او د ماتلاندې او مات باندې گڼونو گڼون یا تعداد بنایي، په مات لاندې کې د لومړیو k پیدایښت یا طبعي گڼونو فاکتورونه دي. د n گڼ ریيل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور $n - 1$ ، دریم $n - 2$ تر $k - 1$ م

فاکتور $n - k + 1$ پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر (Leonhard Euler) له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳ سویسي گڼپوه، فزیکپوه او استرولوگ) لخوا د لومړي ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرته له یو مقایسه برخه ۱۰. ۳. (که څوک دیوه

بینوم پوټنڅ یا توان شمیري) ۱۰. ۳ برخه، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چی د یوا-

ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځله ووني ویل کیږي.

بیلگی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816, \quad \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چی $1/3$ پیدایښتي یا طبعي گڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونو څو یونه:

$$۱ - د $n, k \in \mathbb{N}$ ، $n < k$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$$$

که n يو طبيعي گڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتېباندي کې يوځله وونی

يا ضيرب دی

$$۲ - د $n, k \in \mathbb{N}$ ، $n > k$ لپاره باور لري$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سړی د $(n-k)!$ سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرول له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځای $n-k$ وليکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی): د کڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلوني د ماتو په څیر وليکل شي، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون گډ فاکتورونه چی په ماتېباندي کې دی په نوکانو کې ونیسي او پاتی ساده کړي :

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) + n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!} = \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}
 \end{aligned}$$

که په پورته ا افاده يا وېينه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په څير وليکل شي، لاندې بېنوميال يا بېنوم ځلوونی (ضريب) تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰. ۳ د بېنوم جمله

د بېنوم لاندې سړی د دوه توکو (گڼونو) زياتون پوهیږي. يعنې: $x+y$ د بېنوم جمله موږ ته ښايي چی څنگه د يو بېنوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پيدايښتي گڼ n یی ایکسپوننت يا جگڼ يا لنډ جگ وي، د زياتون په څير پر مخ بيول کيږي. که د $x+y$ بېنوم پوتنځ د $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ اکسپوننت لپاره شميرو، نو لاندې نتيجه لاس ته راوړو :

پاسکال دريگودی

$$\begin{aligned}
 (x+y)^0 &= \dots\dots\dots 1 \\
 (x+y)^1 &= \dots\dots\dots x+y \\
 (x+y)^2 &= \dots\dots\dots x^2 + 2xy + y^2 \\
 (x+y)^3 &= \dots\dots\dots x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
 (x+y)^4 &= \dots\dots\dots x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
 (x+y)^5 &= \dots\dots\dots x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\
 (x+y)^6 &= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6
 \end{aligned}$$

په دې د زیاتونونو پرمخ‌یولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون (شمیر، تعداد) د بېنوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی. ټول زیاتونې د x او y پوتنځ ځل لري، په داسې ډول چی د x او y پوتنځ زیاتون په n برابرېږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو د x په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

$$n, n-1, \dots, 1, 0$$

د یاکسپوننت په ترتیب $n-1, n, 0, 1, \dots$ دي. د بېنوم پوټنڅ کوايفيخيتونه داسی په نامه پاسکال (Blaise Pascal) ۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه (گيوندریگودی جوړوی .

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & 1 & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

په دې کې هر گڼ د دواړو پورته کيڼ-بڼي پرتوگونونو زیاتون دی، چې بې له کړاو د نورو اکسپوننتو یا په جگو $n = 7, 8, \dots$ لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلر Leonhard Euler د کومبیناتوریک فکرونو کې د کوایفیڅینټونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په $n - m$ (د بینوم جگ یا اکسپوننت) لیکه او $K - m$ ځای، $n = 0, 1, \dots$ کې ولاړ ضریب د فورم څخه دی) له کومه امله چې په 10 . 2 برخه کې د اویلر سومبول په نوم داسې بلل شوي د بینوم ضریب په څیر رامنځ ته شو) که د پاسکال گڼونو دریځوډۍ د اویلر سومبول استعمال په څیرو لیکل شي نو لاس ته راځي.

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \binom{0}{0} \\
 & \dots\dots\dots \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 & \dots\dots\dots \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \\
 & \dots\dots\dots \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 & \dots\dots\dots \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
 & \dots\dots\dots \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\
 & \dots\dots\dots \binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}
 \end{aligned}$$

داويلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کيږي.

يادونه : ما کله a, b او کله بيا x, y لیکلي، دا په يو ډول ليکنه ښکلي ښکاريږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بېنوميالکوايفيځينټ لپاره ښوول شوو خويونو ۲ په بنسټ د پاسکال دريګوډي منځنی محور ته سيومټري پراته کوايفيځينټه سره مساوي دي. داچې هر کو-ايفيځينټ ورباندې پورته کوايفيځينټونو زياتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو) د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله (مقايسه(شي) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بېنوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زياتون پرمختګ د يوه طبيعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

جمله ۱۰ . ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندکشن له لارې:

د ايندوکشن پيل : ($n = 0$)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ايندکشن نيونه : ($n = k$)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه : ($n = k + 1$)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دايندکشن بنوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b)$$

$$= \left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k}b^k \right) (a+b)$$

$$+ \binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کړې پرته) برابر پوټنڅ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونځویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځای) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \dots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوي اړیکې لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د $(a-b)=a+(-b)$ له امله د بینوم له جملې د یوه n -م پوټنڅ دکمون څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (a-b)^n &= \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots \pm \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i \end{aligned}$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰.۴ کومبيناټوريك:

کومبيناټوريك د یوې ډیرې د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخې یوځایولو په څیر راوړل شي، په یوځایولو کې کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راوځایولو کې

کيدی شي د غرو تکرار راشی او يا هم نه. له دي امله د يوځاييولو يا ټولگی درې ډولونه توپيروو (Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، وارييشن، کمبينييشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چی په لاندې برخو کی يو په بل پسې څيرل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرگند شي يا ليدورو بڼول شي

۱۰ ۰ ۴ ۱۱ پرموتيشن Permutare

(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۳. ۱۰ :

n د غرو يو پرموتيشن (ځاي بدلون) بي له تکرار داسی «يوځاي درول» دي، په کوم کی

چي n غري په يوه د زړه پورې ترتيب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غرو مختلفه ترتيبونه

تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده بيلگی:

۱ - د دوه غرو پرموتيشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a, m دی m a a m

۲ - د درې غرو پرموتيشنونه

الف : ۱، ۲، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

۳ - د څلور غړو پرموتيشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتيشنونه له پورته وکښته لور ته ليکسيکايي ترتيب دي، دي ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که گڼونه ۰ په گڼونو کی پيداينستي ده، چې د پښتو ليکسيکايي ترتيب پچه [ام کی نيول شوی ۰ له بني لور کښته بيا بيرته گين لور خوزبت دی ۰

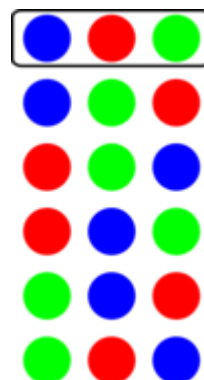
ب : a,m,s,u دي: له کن کښته لور ته بيا بيرته پورته

uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

پ () ا ت ج گ دي: دلته طبعاً له بني وکين لورته ترتيبيري)

اتجگ	تاجگ	جاتگ	گاتج
اتکج	تاگج	جاگت	گاجت
اجتگ	تجاگ	جتاک	گتاج
اجکت	تجگا	جتگا	گتجا
اکتج	تکاج	جکات	گکات
اکجت	تکجا	جکتا	گکتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلگی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چي د ليکسکا لغاتو ترتيب ته «کت مټ» (ورته) دی، چي د غړو پيدايشني لړۍ مخته پرته وي (په تورو، په گڼونو کښي يو په بل پسي). دبيلگي په توگه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو يا تورو (جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه) maus همدا رنگه saum په دې ترتيب کي ۸-ام همدا ډول په ۱۴-ام ځاي کي ولاړ دي. همدا ډول په پ (کي د څلورو تورو ا، ت، ج، گ پرموتيشن ورکړ شوی چي ۸-۱م ځاي کي يي تاگج ولاړ او په ۱۵-م ځاي کي يي جتاگ ولاړ دی.



د پورته درې غونډارو لپاره نظم يا ترتيب $۲ \cdot ۳ \cdot ۶ = ۰$ دی.

که لیکو، چې $1.2.3.4.5.6$ نو ددې پرځای لیکو: $6! = 720$

جمله $۱۰ \cdot ۲$:

د پرموتیشنونو P_n گڼون (شمیر یا تعداد)، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی: $n = P_n!$

اوبونه: د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل: $P_1 = 1! = 1$: $(n = 1)$

د ایندکشن نیونه: $P_k = k!$: $(n = k)$

د ایندکشن غوښتنه: $P_{k+1} = (k+1)!$: $(n = k+1)$

د ایندکشن ښوونه: k غړو ته په $k!$ پرموتیشنونو کې د ځل په ځیر یو $(k+1)$ -ام غړی راځي. دا $(k+1)$ -ام غړی کیدی شي له لومړي تر $(k+1)$ -ام ځای پورې ودریږي، داسې چې د $(k+1)$ -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن $k+1$ پرموتیشنونه د $k+1$ غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k (k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه:

په څومره مختلفو لړیو پرلپسې (دا موضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شي) کې لس زدکوونکي په یوه لیست کې خپل نومونه لیکلي شي؟

اوبی یا حل: $P_{10} = 10! = 3628800$ •

پيژند ۱۰. ۴ :

هر د k غرو ترتيبونه، د کومو څخه چي i -ام غري n_i - ځله رامنځ ته کيږي،
د $i = 1, 2, \dots, k$ لپاره، نو پرموتيشن د تکرار د تکرار سره پرموتيشن (سره نوميري
. د غرو شمير په پرموتيشن کي بيا داسي دی $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

بيلگي :

۱ - د دوه غرو a, b پرموتيشن په کوم کي چي غري a يو ځل او غري b دوه ځله
رامنځ ته کيږي،

$$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$$

په دي ډول دی: $abb \quad bab \quad bba$

۲ - د غرو a, b پرموتيشن، په کوم کي چي a دوه ځله، غري b درې ځله رامنځ ته
کيږي ($k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5$) په لاندې ډول دی

aabbb	ababb	abbab	abbbba
baabb	babab	babba	
bbaab	bbaba	bbbbaa	

جمله ۱۰. ۳ : د k غرو د پرموتيشن گڼون يا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$ ، له کومو چي i -
ام غري n_i - ځله رامنځ ته کيږي ، په لاندې ډول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

حلونه يا اوبيونه: که په پرموتيشن کي $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ (دلته دي گڼونه د
ايندکس کي ومنل شي) غرو يو له بل توپير لرو دی (مختلف وي) ، نو $n!$ پرموتيشنونه

به موجود وی، که i - ام غړی ni - ځله رامنځ ته شي، داچې د ni غړو لپاره $ni!$ پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځای کيږي،

دا په دې مانا چې د $n!$ شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي ($i = 1, \dots, k$)

بیلگې :

۱ - د $k = 2$ مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کې چې لومړی $(n_1 - 1)$ - ځله او دویم $(n_1 - 2)$ - ځله رامنځ ته کيږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

۲ - د $k = 2$ مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کې چې لومړی $(n_1 = 2)$ - ځله او دویم

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \quad \text{ځله رامنځ ته شي، دی} \quad (n_2 = 3)$$

۱۰. ۴. ۲ وارییشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰. ۵:

د n غړو وارییشن (بدلیدنه یا اوښتنه Variation) لاتین (بدلونه اوښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k - ام ټولگي ته (وهرې k ټوټې ته، $n \leq k$) هر له k غړو یوځانکول (یوځای درول، یوځای لیکل) دی، کوم چې د n غړو د لړۍ پرلپسې په نظر کې نیولو سره جوړیږي..

بیلگي:

۱ - د درې غړو a, b, c وارییشن و دویم ټولگي ته دي :

۱۰ کومبيناټوريك - د بينوم جمله ۲۸۱

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d, a, b, c واريېشنونه و ۲ - م ټولگي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d, a, b, c واريېشنونه و ۳ - ۱م ټولگي ته دي

dab	cab	bac	abc
dac	cad	bad	abd
dba	cba	bca	acb
dbc	cbd	bcd	acd
dca	cda	bda	adb
dcb	cdb	bdc	adc

۳ - د پنځه غړو $5, 4, 3, 2, 1$ واريېشنونه و ۲ - ۱م ټولگي ته دي

51	41	31	21	12
52	42	32	23	13
53	43	34	24	14
54	45	35	25	15

د n غړو واريشونونه و n -ام ټولگي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کيږي
جمله ۱۰ ۰ ۴ :

د n غړو و k -ام ټولگي ته د واريشونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبونه : د مکمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځای په
ځای دی یا ځای په ځای کلک ولاړ دی

ایندکشن پیل : ($k = 1$)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټيک (صحيح) دی ، ځکه چې له n غړوکیدي چې له یوه غړی جوړ واريشونونه
جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : ($k = k_0$) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت) : ($k_0 + 1 = k$)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن بنوونه : د k_0 -م درجی هر وارییشن لپاره، په

$n - k_0$

دې وارییشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی

غړو شمیر دی . که په ترتیب یو له دې $n - k_0$ غړو د دې k -م ټولگی واريشونو $V_n^{(k)}$

په اخرکی ځای په ځای شي، نو له دې یو د $k+1$ ټولګي $n - k_0$ واریشونونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشونونو $v_n^{(k)}$ وشي، نو لاندې واریشونونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!} (n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یو د $n - k_0$ غړو ورزیات په یو بل ځای کینوولی وی، نو یو د $k+1$ ټولګي واریشون به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ ($k = 2, n = 4$) باندې لیدور کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګي ته دی :

$$v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

۲ - د څلور غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګی ته دی:

$$v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

د څلور غړو واریشونونو شمیر ودریم ټولګي ته دی:

$$v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

۳ - د پنځه غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګي ته دی:

$$v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریشونونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k -ځله تکرار وي نو واریشونونه د تکرار سره نومیري یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a, b, c واریشونونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

	ca	ba	aa
cb	bb	ab	
cc	ba	ac	
۲ - څلور غړو a , b , c , d د دويم ټولگي واريېشنونه د تکرار سره دي: aa			
	da	ca	ba
db	cb	bb	ab
dc	cc	bc	ac
dd	cd	bd	ad

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولگي واريېشنونه دي (دا لاندې ولاړ ترتيب له کين وېنې لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

311	211	111
312	212	112
313	213	113
321	221	121
322	222	122
323	223	123
331	231	131
332	232	132
333	233	133

جمله ۱۰. ۵ : د n غړو د k -ام ټولگي د واريښنونو شمير $V_{W_n}^{(k)}$

$$V_{W_n}^{(k)} = n^k \quad \text{د تکرار سره دی:} \quad C_6^{(4)} \cdot C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4} \binom{43}{2} = 13545$$

(حل) (اوبی): په k د پوره ايندکشن له لارې:

د ايندکشن پيل ($k = 1$) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحيح دی، ځکه چې له n غړو څخه n واريښتونه، چې هر يوه يوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ايندکشن نيونه ($k_0 = k$) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ايندکشن غوښتنه ($k_0 + 1 = k$) : $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ايندکشن ښوونه : د ($k_0 + 1$) -ام درجی واريښتونه د nk واريښتونو چې $k_0 -$ امه درجه واريښتونو څخه لاس ته راځي، په کوم کې چې له دوي هر يو په ترتيب د n غړو اخر ته يو ور واچوي يا ورزيات (علاوه) کړي (يادونه دي، چې په واريښتونو بې له تکرار شوې ، وکتل شي).

له دې امله د دې شمير $n^{k_0} \cdot n = n^{k+1}$ واريښتونه دی.

بيلگي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولگي ته د واريښتونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولگی ته د واريښتونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$$

۳ - د درې غړو و دريم ټولگي ته ض واريشنونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{\theta_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښې يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمير دی

$$V_{\theta_2}^{(1)} + V_{\theta_2}^{(2)} + V_{\theta_2}^{(3)} + V_{\theta_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبينيټن (Kombination) (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k -ام ټولگي ته ($n > k$) يو کمبينيټن هغه دی چی هر يو له k غړو يوځای دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبينيټن له واريټن منځ ته راځي، که چيری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلگي:

۱ - د درې غړو a, b, c و دوم ټولگي ته کمبينيټن په لاندې ډول دی:

bc ac
ac

۲ - د څلور غړو d, a, b, c و دوم ټولگي ته کمبينيټن په لاندې ډول دی

cd bc ab
bd ac
ad

د دې څلو غړو ودریم ټولگي ته کمبينيټشونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1, 2, 3, 4, 5 و دریم ټولگي ته کمبينيټشونه په لاندې ډول دي (لاندی هم باید له کین لاندې لورته په بنی لور لیکل شوي وی)

345 234 123

235 124

245 125

134

135

145

جمله ۱۰. ۶: د n غړو و k-م ټولگي ته د کمبينيټشونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-م ټولگي ته د اوریشونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبينيټشونه له واریشونو په دې توپیر یري، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتیشونه په یو کمبينيټشن کی یوه ته یوځای کیږي

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \quad \text{له دې امله لرو:}$$

بیلگی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

$$C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816 \quad \text{الف (یو شپږ)}$$

$$C_6^{(4)} \cdot C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4} \binom{43}{2} = 13545 \quad \text{ب : یو څلور}$$

۶ ټیپ عددونه د یوه ۴ عددونو ګروپ څخه بوځای کيږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ ټیک یا صحیح) او دوه عددونه (۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

د n غړو و k -ام ټولگي ته کمبينيټون، په کوم چي يواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبينيټونونه د تکرار سره نومېږي.

بيلگي:

۱ - د درې غړو a, b, c و دويم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي.

aa

bb ab

cc bc ac

۲ - د څلور غړو d, a, b, c و دويم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي

aa

bb ab

cc bc ac

dd cd bd ad

۳- د درې غړو $1, 2, 3$ و دريم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي (لاندې ليکنه بايد له کيڼ لور پيل وي، خو دلته له ښي لور پيل شوی وکيڼ لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

جمله ۱۰. ۷: د n غړو و k - ام ټولگي ته د تکرار سره د کمبېنېشنونو شمېر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له بنوونې (چې په k - پوره ایندکشن له لارې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولگي ته د تکرار سره کمبېنېشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - د څلورو غړو و دویم ټولگي ته د تکرار سره کمبېنېشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولگي ته د تکرار سره کمبېنېشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نڅېبه وي. (نڅېبه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

۱۰. ۴. ۴ د برموتیشن، وارییشن، کمبینیشن ټولګه

دا	د په پا یوې برخې راتولونه م کی نیولو شوو غړو	د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راتولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه
	کمبینیشن	وارییشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k -ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون	د n غړو وارییشن و k -ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون
	$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر و k -ام ټولګي د تکرار سره	د k غړو وارییشن شمیر د تکرار سره
	$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	$V_{W_n}^{(k)} = n^k$
		د k غړو وارییشن شمیر د تکرار سره
		$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

۱۰. ۵ تمرينونه

۱ - لاندې فاکولټي وشميرئ

الف (7! ، ب (3!·5! ، پ) 6! / 4!·10!

۲ - لاندې ویشونه ساده کړئ

a) $(n+1)! / (n-2)!$ b) $(2n)! / n!$ c) $n! / 2n!$

۳ - لاندې افادي وشميرئ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4} \cdot 4!$ h) $\binom{7}{6} \cdot 3!$ i) $\binom{6}{7} \cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ - لاندې زیاتونونه وشميرئ!

a) $\binom{2}{1} + \binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

۵ - لاندې افادي د بينوم د فرمول کارونئ (استعمال) په بنسټ وگنئ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2a+3b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ - لاندې افادي ساده کړئ!

a) $(-1+a)^2 - (1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2$

c) $(ab-1)(-a-ab)+ab$

۷ - د بينوم په يو ځل يي بيل (تجزیه) کړئ!

a) $25a^2 + 10ab + b^2$ b) $49a^2 - 42a + 9$

c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$ d) $2x+2 \cdot 6xy + 3y$

۸ - الف) د غړو ۱، ۲، ۳، ۴ پرموتيشنونه په لكسيكوگرافي نظم وليكي!
 ب) د a, e, f, h, n پرموتيشنونو په څو ځايونو كې « fahne » او « hafen » ولاړ دي؟ دا الماني كليمي دې چې دپښتو اړونه يې « بيرغ » او « بندر » دي.

۹ - الف) په څو ځايترتيب يا تنظيم كيدى شي ، شپږ كسه ځاي ونيسي؟
 ب) څومره پنځه ځيفري گڼونه د پنځه ځيفرونو 0, 1, 2, 3, 4 سره كيدى شي وليكل شي، كه هغه گڼونه چې په صفر پيل كيږي ونه ليكل شي ؟
 پ) د غړو a, b, c, d, f څومره پرموتيشنونه په c ، په de ، په cdef پيل كيږي؟

۱۰ - الف) د غړو a, b, c ټول پرموتيشنونه وليكي، په كومو كې چې a او b هره يوځل، غړى c دوه ځله رامنځ ته كيږي.
 ب) د دې پرموتيشنونو گڼون يا شمير وگڼئ!

۱۱ - څومره تنظيم شوې جوړې د الفبا د ۲۶ (لاتين توري) تورو څخه جوړيدلى شي ؟

۱۲ - د څلورم ټولگي څومره مختلف وارييشنونه د
 الف) بهي له تکرار

ب) له تکرار سره د غړو 0, 2, 4, 6, 8 موجود دي؟

۱۳ - يوه سوري کارت له ۸۰ سوريډرځونو چې هريو لس سوري لري، جوړ دكلا څومره د سوريو يوځايليكلى ممكن دي، كه هر درځ ټيك يو ځل سوري شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ كمبينيشن گڼون و څلورم ټولگي ته او پنځم ټولگي ته څومره لوي دي،

الف) ټي له تکرار

ب) له تکرار سره؟

۱۵ - يادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرين نه دى ليكل شوى

- ۱۶ - څومره مختلفې ازماينې ممکن دي که په يوه توليد کې له هر ۲۰ يوه وازمايل شي؟
- ۱۷ - په موټرو ترافیک نڅېنې په لاندې توگه يوځای شوی : يوه د ځاي نښونه ډله د
نڅېنې الف بې پسې څلور گروپ يا ډله راځي، چې له څيږونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د يوې کره ټاکلې الف بې پيژندنې يا ترافيکي نڅېنې ممکن دي؟
- ۱۸ - د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنگونې له لارې يو له بل توپيريدی شي ، که څلور رنگ نښونې ولرو؟
- ۱۹ - د منډې يوه مېچ په اخرکې شپږ پاټې منډې وهونکې برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟
- ۲۰ - په څومره ډوله
الف) اته مختلفې مرغلرې.
ب) درې سرې، څلور شنې، يوه زرغونه مرغلره
ترتيبيدلی شي؟
- ۲۱ - څومره تلفونونه کيدی شي وټرل شي کې يواځې پنځه ځاييزه نمره موجود وي؟
څومره تلفون ټرل ممکن دي که تلفون نمرې شپږ ځاييزې وي او په 0 پيلکيدنه يی اجازه ونه لري؟
- ۲۲ - د درې شپږ سترگيو (يا -اړخيزو) سره (څيره مکعب دی او مخونه له يوې تر شپږ سترگو باندې په نڅېنه دي، ماته يې د پښتو نوم نه راځي او اللماني يی Würfel دی) څومره مختلفې اچونې ممکن دي، چې ټولې شپږ سترگې مختلفې سترگې گڼون وښايي؟
- څومره مختلفې اچونې له درې شپږ سترگيو سره ممکن دي؟

۱۱ کرښيز-، خطي – يا لاینيز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته گوته نیول شوي وي ، چی څه به تکرار وي، خو هغه لاتین مثل دی، چی « تکرار د زدکړې مور ده .»

لاندې مخ ته پرته اصلي برخه د m برابر ونونو ځوابونو ته چی n اووښتونې یا مجهولې یا ناپېژندونکې لري، وقف ده، چیرته چی m د برابر ونونو گڼون یا تعداد n د ناپېژندونکو یا مجهولو گڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي

په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپېژندونکو یا مجهولو سره د برابر ونونو سیستمونه تر څیرنی لاندې نیول کیږي، چی د بنوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مگر دلته د برابر ونونو سیستمونه د ناکلوخلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چی د حالتونو توپیریدنه یې اړینه ده.

د راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپېژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپېژندونکو ته وغزیري، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د گاوس الگوریتم د کار ډگر ته را اچول کیږي .

په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابر ونونو سیستم ځانگړي ځوابونه په بر کی نیسي ، یادونه : ولې لاینیز برابر ونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

موږ د برابر ونونو له څیرې پوهیږو، چه دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا که غواړی انگریزي یې لاین نومولی. د کرښو او بندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانگی سره یې توپیر وي، نو موږ هم ورته له دې امله لاینیز وایو.

۱۱.۱. لاینیز برابر وون د دوه ناپېژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپېژندونکو سره کیدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \quad (11.1)$$

دلته کیدی شي چی ناپېژندونکی لویي x او y په خوښه ریبیل گڼونه وي چی یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت: x او y واریابلی (اووښتونکی یا لنډ: اووښتوني) دي، برابر وون (۱۱.۱) لاینیز فنکشن (بلاک) برابر وون په گوته کوي چی د هغې څیره په y, x کواوردینات کی ناپای کرښه ده (۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانگړی حالت: $a = 0$ یا $b = 0$ په ځانگړې توگه کرښه انځوروي یا په گوته کوي چی د y - محور او همدا سې د x - محور سره غبرگه ده.

که دا (۱۱.۱) برابر وون د دواړو ناپېژندونکو یا مجوهولو x او y لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ددې مسیئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د (۱۰.۱۱) برابر وون اویونه په څرگند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x, y) ډیری ده، چی (۱۱.۱) برابر وون پوره کوي. که اصلي حالت $a, b \neq 0$ ته پام وکړو نو برابر وون (۱۱.۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)x + c/b \quad (11.2)$$

کیدي شي چی x په خوښه وټاکل شي او y له (۱۱.۲) برابر وون څخه لاس ته راوولو. گورو چی ناپاي ډیرې اوبیوني یا حلونه لاس ته راځي یعني د اوبیوني ډیری یا اوبیدیری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)x + c/b \} \quad (11.3)$$

داسې لوستل کیږي: L د ټولو (x, y) جوړو ډیری ده، داسې چې..... (ورپسې هغه برابر وون)

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱۱.۱) برابر وون اوبی یا حل $y = -(a/b)x + c/b$ ، د خوښی x

طبعاً کیدی شي چي برابر وړ د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نيسو، نو دلته د برابر وړ (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی ، $x = -(b/a)y + c/b$ په خوښه y .

دا چي په لاندې کی موږ د درېو يا ډيرو ناپيژندونکو يا نامعلومو برابر وړونو سره سر او کار لرو، نو موخه وړ بولو که ناپيژندونکي د $x, y, z, \dots$ سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, \dots$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چي په څرگند ډول وښايو:

لاندې برابر وړ د دوه ناپيژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \dots (11, 4)$$

د $a \neq 0$ لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چي $i = 1, 2, 3, \dots$ ناپيژندونکو يا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کيښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, \dots (11, 5)$$

x_2 په خوښه

د

$$a_2 \neq 0$$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; \dots (11, 6)$$

x_1

په خوښه

$$a_1 = a_2 = b = 0 \quad (0.x_1 + 0.x_2 = b = 0) \quad \text{د لپاره ناپای ډیر ځوابونه}$$

د په خوښه

$$x_1, x_2, \dots (11, 7)$$

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$$

په څټوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ: دلته

 ∞^i

دا مانا لري چی د ناپېژندونې یا مجهولی

 x_i لپاره $i = 1, 2, \dots$ په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱. ۱. ۲ - دوه لاینیز برابر ونونه د دوه ناپېژندونکو سره

د دوه برابر ونونو سیستم د دوه ناپېژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I \dots \dots \dots a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$II \dots \dots \dots a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2; \dots \dots \dots (11, 8)$$

دا ټاکلي برابر ونونه کیدی شي چی په اوښتونو یا واریابلو x_1 او x_2 کی د
بلواکبر ابرون یا فنکشن مساوات په څیر و نیول شي او په x_1, x_2 - کو اور دینا تسیستم کی
د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸).
(۱۱) کی د کرښو یوگونی (بهتره: یوگونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی)
اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I
انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱. ۱. ۱. له مخي ټیک یا فقط مساوات I یا
مساوات II حل شي. دلته ناپايي ډیر

 ∞^1

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چی فورمال

 ∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

د صفر سره برابر یی. موږ دلته دا حالت نه څیرو. دا څیرو چی، که دا برابر و اویونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چې کرښه I او کرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابر وونو کې، د دوه ناپېژندونکو یا اووښتونو سره، کیدی شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

- ۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)
- ۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)
- ۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابر و برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابر دی)
- ۴ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابر وونو له مخی چی دوه ناپېژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابر وونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی. په سیستمونو کی چې درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتوني لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چې کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنګه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابر وونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید درې بنسټیز د مساوات سیستم د ځواب کار دودونه (متودونه) تکرار شي:

۱. د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابر وونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي (د بیلګي په توګه د x دوه په لور)، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابر وون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي.

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:

برابر وون یا مساوات د یوې ناپېژندونکې (د بیلګي په توګه x دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابر وون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپېژندونې برابر وون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه د x یو)

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سړی یو ټاکلی څو برابره (کیدۍ شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرې د I برابرې یوه ټاکلې څو برابره سره زیاتوي، داسی چې یوه ناپېژندونۍ بیا مخ ته نه راځي یا له منځه ولاړه شي. د نتیجې سره بیا دا بله ناپېژندونې څیړي. دا د دواړو نامعلومو (ناپېژندونو) لپاره کیدای شي. دا متود د برابرېونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چې د دیتریمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرېونو ځواب لاس ته راوړو. دا متود په درې ځانګړو برابرېونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلور ځلوني (ځله ووني یا ضربونه) باید له صفر توپیر ولري یعنې $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګې په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لروډی:

$$I.....a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;a_{11} \neq 0$$

$$II.....a_{22}x_2 = a_2,a_{22} \neq 0;(11,9)$$

دلته نو

$$a_{21} = 0$$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجې څخه یې چې په I کی کښیښودل شوي وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چې د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرېون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي. دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي:

سیستم ۱

$$I \quad 2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$II \quad x_1 - 2x_2 = -5$$

دا سیستم یواځنی یو ځواب لري II برابرېون د I برابرېون سره اړیکې نه لري

سیستم ۲

$$2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

په اسانۍ ګورو چې دلته II برابرېون په ۲ ځل شوی I برابرېون دی. دواړه برابرېونونه همغه کرښه وېشای او په دې ډول د مساواتو اوبیوني ناپای دی.

سیستم ۳:

$$\text{I} \quad 2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$\text{II} \quad 4x_1 + 6x_2 = 10$$

دلته بي ډيله څرگنده ده چي برابرونه يو د بل تضاد يا يو د بل په څنډ دي. د I برابرون دوه برابره په لاندې ډول دي:

$$4x_1 + 6x_2 = 8$$

په دې توگه ناممکن ده چي II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبيونه نه لري.

بيلگه ۱۱.۱:

سیستم ۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي ايسنولوكارونه يا عمليه

$$I': \dots x_1 = 2 - (3/2)x_2; \dots; II': \dots x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2 - (3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2; \Rightarrow$$

$$x_1 = 2 - (3/2) \cdot 2$$

$$x_1 = -1$$

(ب) د بل په ځاي کيښلولوکارونه (عمليه) : II د x_1 په لور ځواب کيږي او بيا په I کي ځاي په ځاي کيږي .

$$II' : \dots x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \cdot 2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

(پ) د زياتونکارونه: x_1 له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زيات شي.

$$\begin{aligned} I : & \dots\dots\dots 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ (-2)II : & \dots\dots\dots -2x_1 + 4x_2 = 10 \\ I - 2II : & \dots\dots\dots 7x_2 = 14 \\ & \dots\dots\dots x_2 = 2 \end{aligned}$$

۳۰۲ ۱۱ کرښیز-، خطي - يا لاینیز الجبر

کیدۍ شي، ود بیلگي په توگه، له II څخه x_1 وشمیرل شي:
 $x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدۍ شي
 x_2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی
شي.

$$\begin{aligned} 2.I : & \dots\dots\dots 4x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3.II : & \dots\dots\dots 3x_1 - 6x_2 = -15 \\ & \text{-----} \\ 2.I + 3.II : & \dots\dots\dots 7x_1 \dots\dots\dots = -7 \\ & \dots\dots\dots x_1 \dots\dots\dots = -1 \end{aligned}$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته ایښول کیږي، پوهیږو،
چې چیرته ټکی د ځای غزونې او چیرته د ځل لپاره ځای په ځای شوي دي

بیلگه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

$$\begin{aligned} \text{الف (مساوي ایښوولو):} \\ I' : \quad x_1 &= 2 - (3/2).x_2 \\ II': \quad x_1 &= 2 - (3/2)x_2 \\ 2 - (3/2)x_2 &= 2 - (3/2)x_2 \\ 0.x_2 &= 0 \end{aligned}$$

دلته

$$x^2$$

په خوښه. دا په دي مانا چې

$$x^2$$

هر ارزښت نيوى شي . له 'I' څخه ناپاي ډير ځوابونه لاس ته راځي

$$x^2 = 2 - (3/2)x^1 \text{ او } x^2 \text{ په خوښه.}$$

۳۰۳

۱۱ کرښيز-، خطي – يا لاینيز الجبر

(ب) د بل په ځاي ايښوولومتود: , $x^1 = 2 - (3/2)x^2$ 'I'

په II کی ايښول کيږي

$$\text{II}' \quad 4 \cdot (2 - (3/2)x^2) + 6x^2 = 8$$

$$8 - 6x^2 + 6x^2 = 8$$

$$0 \cdot x^2 = 0 \quad x^2$$

په خوښه له 'II' لاس ته راځي

$$x^2 \text{ په خوښه} \quad \text{I}' : x^1 = 2 - 3/2 x^2$$

(پ) د زیاتون متود يا لار يا طريقه:

$$2 \cdot \text{I} \quad 4x^1 + 6x^2 = 8$$

$$\text{II} \quad 4x^1 + 6x^2 = 8$$

$$\text{II} - 2 \cdot \text{I} : 0x^1 + 0x^2 = 0$$

که یواځی دا مساوات په نظر کي ونيول شي ، نو x^1 او x^2 په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چې د x^1 او x^2 ترمنځ په I يا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپېژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:

$$x^1 = 2 - (3/2)x^2$$

$$x^2 \text{ په خوښه}$$

په همدې ډول:

$$x^2 = 4/3 - (2/3)x^1 ,$$

دلته x^1 په خوښه ټاکل کيږي

بیلگه ۱۱ . ۳ :

سیستم ۳ دی په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I' : x_1 = 2 - (3/2)x_2$$

$$II' : x_1 = 5/2 - (3/2)x_2$$

$$2 - (3/2)x_2 = 5/2 - (3/2)x_2$$

$$0.x_2 = 1/2$$

۳۰۴ ۱۱ کرښیز-، خطي – يا لاینیز الجبر

دا یو په څتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل گڼ x_2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب (د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I' : x_1 = 2 - (3/2)x_2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2 - (3/2)x_2) + 6x_2 = 10$$

$$8 - 6x_2 + 6x_2 = 10$$

$$0.x_2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد دی، پس ځواب نه شته.
پ (د زیاتون متود:

$$2 \cdot I \quad 4x + 6x = 8$$

$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$$

په څتوالی یا تضاد دی، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلگو سره غواړو د منځ ته راتللو پښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه گوته لك کړو.

بیلگه ۱۱ ۰ ۴ : په لاندې فورم یا بڼه برابر ونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x/(a+b) + y/(a-b)$$

$$II \quad x/(a-b) + y/(a+b)$$

دا ټيک هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $b = a$ او $b = -a$ وي، یعنی $|a| = |b|$ وي .

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود تړلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوروڼ له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعې متود څخه کار اخلو:

د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2 + y/(a^2 - b^2) = 1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2 - y/(a^2 - b^2) = -1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله ووني یا ضربیږونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نڅښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کې له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرېون د یوې ناپېژندونکې سره مخ ته پروت دی:

۱۱ کرښیز-، خطي - یا لاینیز الجبر

۳۰۵

$$\frac{x}{(a+b)^2} - \frac{x}{(a-b)^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2} x = \frac{a-b - (a+b)}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a^2 - b^2)^2} x = \frac{a-b - a-b}{a^2 - b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2 - b^2} x = -2b$$

$$2abx = b(a^2 - b^2) \dots (*)$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}; ab \neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او II له $1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

$$\frac{x}{a^2-b^2} - \frac{y}{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{y}{(a+b)^2} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2} y = \frac{a-b - (a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} y = \frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2} y = 2b$$

$$2aby = b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y = \frac{a^2-b^2}{2a}; ab \neq 0$$

۱۱ کرښیز، خطي - يا لاینیز الجبر

۳۰۶

دلته مو ځانگړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپېژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمور د څیرنی لپاره بي مفهومه دی.
دا د x, y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی $|ab| = 0$ وي. نو څیرو چی کوم حالت توپیر د $ab = 0$ لپاره منځ ته راځي. دلته مساوات $(*)$ تر څیرنی لاندې نیسو او درې حالت ته توپیروو:

$$1. \quad a = 0, b \neq 0$$

مساوات $(*)$ داسی دي

$$0.x = -2b^3, 0.y = -2b^3$$

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري. تضاد مخ ته پروت دی

$$2. \quad a \neq 0, b = 0$$

برابرون $(*)$ په دې حالت کی داسی دی.

$$0.x = 0; 0.y = 0$$

دلته مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

$$x/a + y/a = 1 \Leftrightarrow x + y = a$$

که y خپلواک وټاکل شي، نو لرو $x = a - y$ دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

په بل حالت کی لرو ، $y = a - x$ دلته x په خوښه دی
 $a=b=0$. 3
 دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلگه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13$$

$$\frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کيږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا
 چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې
 ناپېژندونکی u, v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x, y راپیدا کړو .
 موږ ځای پر ځای کو

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر ۳۰۷

$$u=1/(2x-3y), v=1/(3x-2y)$$

او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \Leftrightarrow 11u+18v=13$$

$$27v-2u=1 \quad -2u+27v=1$$

موږ د زیاتون یا جمعۍ متود کاروو

$$33u+54v=39$$

$$4u-54v=-2$$

$$37u=37$$

$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \Leftrightarrow 2x-3y=1$$

$$1/9=1/(3x-2y) \Leftrightarrow 3x-2y=9$$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $y = 3$, $x = 5$ لاس ته راځي.

۱۱. ۱. ۳ دویمه درجه دیترمینانتی او د کرامر قاعده

که په ټولیز سیستم (11.8) باندې د زیاتون منود استعمال شي، نو د x_2 له منځه وړلو په

لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22} \cdot I - a_{21} \cdot II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دي (۱۱، ۱۰) وي

او د x_1 له منځه وړلو:

$$II' = a_{11} \cdot II - a_{12} \cdot I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

دا پورته برابرون دي (۱۱، ۱۱) وي

که $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = 0$ وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_{12}a_{22} - a_{11}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \dots \dots (11, 12)$$

که د ارزښتونه په (۱۱، ۸) کې ځای په ځای شي نو تصدیقیري، چې (۱۱، ۱۲) په

ریښتینی د (۱۱، ۸) ځواب دی. له (۱۱، ۱۰) تر (۱۱، ۱۲) سری په واقعیت یا

رښتونی کې د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي (لارښودوي).

۳۰۸ ۱۱ کرښیز، خطی - یا لاینیز الجبر

پیژند ۱۱. ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه ریپلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k=1, 2)$ د

د ۲-امه درجه دیترمینانت لاندې، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \dots \dots (11, 13)$$

د اصلي دوه کونجټري یا دیاګونال (قطر) د توکو ځل، ترې کم (منفی) د څنګ یا فرعی

دوه کونجټري (قطر) د توکو ځل (یا) د اصلي دوه کونجټري یا قطر د توکو ځل څخه د

څنګ یا فرعی دوه کونجټري د توکو ځل کمیري یا منفی کیري

یادونه: دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په

دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (۱۱، ۱۳) کې د x_i ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (۱۱، ۸)

سیستم کې. د (۱۱، ۱۳) دیترمینانت له دې امله د (۱۱، ۸) (له ماڅخه دانوکانو کې

دنده ګڼونه کله کله بدلیري، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیر پوهنیزه ناسمي

منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیري.

که په (۱۱، ۱۳) کې لومړی (درز، ستن یا مټه یا ولاړه لیکه یا-کیل) د دیترمینانت

ولاړه لیکه (په ځای) چې د x_i ځله ووني یا ضریبونه دی د (۱۱، ۸) برابرونسیستم

بني اړخ (مطلقه توکي) توکي a_1, a_2 وليکل شي نو (په x_1 اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{21} a_2$$

د پورته برابرې کړنې يا نمرې دې (۱۱، ۱۴) (وي په همدې ډول که د $13 \cdot 11$) دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو د x_2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \dots \dots \dots (11, 15)$$

که له $(10 \cdot 11)$ تر $(12 \cdot 11)$ پورې له $(13 \cdot 11)$ تر $(15 \cdot 11)$ پرتله یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱. ۱ (د کرامر قاعده):

که د ځله وونو يا ضریبونو دیترمینانت لپاره په $(13 \cdot 11)$ کې
۱۱ کرښیز، خطي – يا لاینیز الجبر

۳۰۹

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \dots \dots \dots (11, 16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم $(8 \cdot 11)$ یواځنی ټاکلی ځواب لري

$$x_1 = D_1/D; \quad x_2 = D_2/D \quad (11, 17)$$

په داسې حال کې چې D_1 او D_2 د $(14 \cdot 11)$ او $(15 \cdot 11)$ له مخې شمیرل کېږي.
د $(10 \cdot 11)$ او $(11 \cdot 11)$ له امله لرو

جمله ۱۱. ۲:

که په $(13 \cdot 11)$ کې د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي

$$0 = D \quad (11, 18)$$

او د کم له کمه یوې دیترمینانت D_1 یا D_2 لپاره په $(14, 11)$ یا $(15, 11)$ باوري وي

$$D_1 = 0 \vee D_2 = 0 \quad (11, 19)$$

نو $(8 \cdot 11)$ سیستم ځواب نه لري، ځکه چې برابرې یو د بل سره مخامخ دي (تضاد کې دي)

جمله ۱۱. ۳ :

باوري دي

$$D=D_1=D_2=0 \quad (11.20)$$

نو يو له برابر ونونو I يا II زياتي دي (دواړه برابر ونونه يو بل ته اړ دي يا د بل په واك كې دي) او د ۱۱. ۱. ۱. برخې متود استعماليدلى شي يا كار ترې اخستل كيدى شي.

د بنوونيلگو په څير دې اوس د ۱۱. ۱ تر ۱۱. ۳ پورې بيلگي (۱۱. ۱. ۲ برخه) كارول شوي سيستمونه ۱، ۲ او ۳ گران لستونكي په ديترنمنانتو ځواب كړي، كه چيرې ما دا كار سرت ونه رساوه.

بيلگه ۱۱. ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$$

پس يواځنى ټاكلى ځواب لري. پسى باور لري

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7 \neq 0; D_2 = \begin{vmatrix} 24 \\ 1-5 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14$$

۱۱ کرښیز، خطي – يا لاینیز الجبر ۳۱۰

له دې امله باوري دي

$$x_1 = D_1/D = 7/-7, x_2 = D_2/D = -14/-7 = 2,$$

بيلگه ۱۱. ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 43 \\ 86 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0; D_2 = \begin{vmatrix} 24 \\ 48 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

له دې امله ناپايي ډير ځوابونه موجود دي) بيلگه ۱۱ . ۲ دې وکتل شي.

بيلگه ۱۱ . ۸ : د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 23 \\ 106 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چې ځواب نه شته (د $D_2 = 4 \neq 0$ له شمير لوکيدی شي، چې تير شو)

بيلگه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چې په بيلگه ۱۱ . ۴ کې ورکړ شوی مساوات سيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړو او ددې لپاره لومړی D_1 , D او D_2 شميرو:

۱۱ کرښيز-، خطي - يا لاینيز الجبر

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a^2 - b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2 - b^2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2 - b^2}$$

لومړۍ حالت $ab \neq 0$:

دلته دېترمېنانت $D \neq 0$ او دا د برابر ونسیستم یواځنې ټاکلې ځواب دی

$$x = \frac{D_1}{D} = \left(-\frac{2b}{a^2 - b^2} \right) : \left(-\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2} \right) = \frac{2b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{4ab} = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (\text{د } D_1 = D_2 \text{ له امله})$$

دوم ۱ حالت $a=0, b \neq 0$: دلته $D = 0$ مگر

$$D_1 = D_2 \neq 0$$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

$$D = D_1 = D_2 = 0$$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلگه ۱۱ . ۴ کی ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

۱۱ کرښیز-، خطي- یا لاینیز الجبر ۳۱۲

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

لاندی د برابر ونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلو لارو
 ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$

$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ . ۱۰ . ۴ د گاوس الگوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کې څیرل شوو متودو ټیک په نظر نیولو سره (برابر و لیکلو - په
 ځای - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابر ونسیستم
 (۸ . ۱۱)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېگوډیز جوړ سینسم

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = a_1$$

$$.....a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که $a_{22} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$$x_2 = a_2 / a_{22} \quad (\text{الف})$$

ب (برسيره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$$x_1 = (a_1 / a_{11}) - (a_{12} / a_{11}) x_2 = \\ (a_1 / a_{11}) - (a_{12} / a_{11}) \cdot (a_2 / a_{22})$$

۲ . که $a_{22} = 0$ او $a_2 \neq 0$ وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که $a_{22} = 0$ او $a_2 = 0$ وي، نو ۲- م برابر ون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه

دی)، او سړی بیا ۱. برابر ون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخې متود په مرسته ځوابولی شي.

د (۸ . ۱۱) سیستم د ځواب پر اېلم په دې ډول کميري، چی دا سیستم په دریگوډی بڼه
 یا - څیره وړوي . هغه الگوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د گاوس
 الگوریتم دی. یا (۸ . ۱۱) سیستم دریگوډی څیره لري او یا ټول aik د صفر سره
 برابر نه دي.

په لاندې کې (8 . 11) سیستم په روځنۍ - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کيږي.

x1 x2 RS

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2 \quad a_{21} \quad a_{22} \quad a_2$$

(دلته RS د مساواتو د بڼې خوا (بڼه) یا بڼی لور یا بڼی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون a_{11} / a_{21} - ځله له I برابرون څخه کم شي، نولرو

..... x1 x2 RS

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1$$

$$\text{II}' \quad 0.x_1 + (a_{12} - a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2 = a_1 - a_{11}.a_2/a_{21} \quad 0 \quad a_1 - a_{11}.a_{22}/a_{21} \quad a_1 - a_{11}.a_2/a_{21}$$

که II' لاندې په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

x1 x2 RS

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1$$

$$\text{II}' \quad b_{22}x_2 = b_2 \quad b_{22} \quad b_2$$

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که $b_{22} \neq 0$ وي، نو x_2 له II' او x_1 له I لاس ته راځي.

-که $b_{22} = 0$ ، $b_2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري.

-که $b_{22} = b_2 = 0$ وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چې له I

او ۱۱ . ۱ . ۱ برخې ته ورته را څرگندیږي شي (معلومیدلی شي).

سیستمونه ۱، ۲، ۳ د گاوس په الگوریتم ښوول کيږي

بیلگه ۱۱ . ۱۰ :

۱۱ کرښیز، خطي - یا لاینیز الجبر

۳۱۴

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیک کیری:

.....	x_1	x_2	RS	
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریځوډیڅیره غواړو لاس ته راولو نو I همداسی پریږدو او له II څخه دا یو یو په دوه ځله کموو :

	x_1	x_2	RS	
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي $x_2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x_1 = 2 - (3/2)x_2 = -1$

بیلگه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکی ډول (جدول په شکل) (څیړو. دلته د لمری لیکي دوه ځله د دوهمی لیکي کمیږي

سیستم ۲				سیستم ۳			
x1	x2	RS		x1	x2	RS	
I	2	3	4	I	2	3	4
II	4	6	8	II	4	6	10
II'=II-2.I				II'=II-2.I			
	0	0	0		0	0	2

په سیستم ۲ کی گورو چی لمری برابرېون د دوم برابرېون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرېون (د بیلگي په توگه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیري. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیري " 2 = 0 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

بیلگه ۱۱. ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د گاوس الگوریتم په مرسته وڅیرل شي

اول واریانت

x1 x2 RS

I	2	3	4
II	1	-2	-5

دوم واریانت

x1 x2 RS

I	2	3	4
II	1	-2	-5

$$II' = II - (1/2).I \quad 0 \quad -7/2 \quad -7$$

$$II' = II + (2/3).I \quad 7/3 \quad 0 \quad -7/3$$

$$2. \quad -1 \quad 2. \quad 2$$

دریم واریانت

x1 x2 RS

$$1. \quad 2 \quad 1 \quad -1$$

څلورم واریانت

x1 x2 Rs

$$I \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$II \quad 1 \quad -2 \quad -5$$

$$I \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$II \quad 1 \quad -2 \quad -5$$

$$I' = I + (3/2).II \quad 7/2 \quad 0 \quad -7/2$$

$$I = I - 2.II \quad 0 \quad 7 \quad 114$$

$$2. \quad 2 \quad 2. \quad -1 \quad 1. \quad -1 \quad 1. \quad 2$$

دا دلته د یو گڼ په چوکاټ یا څلورگودیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپېژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوی، دا په یواځني ډول دا مانا لري : واریانت ۱:

(ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

(ب) له II' څخه دې x2 و شمیرل شي

(پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2 = -7 / (-7/2) = 2$$

(ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

(ا) له I څخه دې x2 و شمیرل شي

(ب) له II څخه دې x_1 وشمیرل شي

پ (له II لرو: $x_1 = -1$)

ت (له I څخه لرو: $x_2 = 2$)

واریانت (امکان) ۳

(ا) له II څخه دې x_2 وشمیرل شي

ب (له I څخه دې x_1 وشمیرل شي

پ (له I لرو $x_1 = -1$)

ت (له II لرو $x_2 = 2$)

واریانت (امکان) ۴

(ا) له II دې x_1 وشمیرل شي

ب (له I څخه دې x_2 وشمیرل شي

پ (له I لرو $x_2 = 14/7 = 2$)

ت (له II لرو:

$$x_1 = -5 + 2.2 = -1$$

ټولې څلور واریانتې یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چي په څلورمه واریانت کی په ټولگنونو شمیرنه کیږي، «مخته وونه» یا مخوونه (برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱. ۱. ۵ له دوه وو زیات برابر ونونه د دوه ناپیژندونکو سره

که څوک له دوه زیات برابر ونونه د دوه اوبستونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توگه باید په نخښه شي چي لومړي دوه برابر ونونه x_1, x_2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابر ونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توگه حل نه لري. یواځي په ځانگړی حالت کی دا سیستم ځواب لرو دی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د گاوس الگوریتم له لارې.

بیلگه ۱۱. ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$a) \text{ I } \quad x_1 + 2x_2 = 3 \quad b) \text{ I } \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

$$\text{II } \quad 2x_1 - x_2 = 1 \quad \text{II } \quad 2x_1 - x_2 = 1$$

$$\text{III } \quad 3x_1 + x_2 = 2 \quad \text{III } \quad 3x_1 + x_2 = 4$$

له I او II څخه د څرگندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي.

له (a او b) څخه لرو $x_1 + 2x_2 = 1$ که دا ارزښتونه په III کی ځای په ځای شي نو لرو:

په (a) کی: $4 = 1.1 + 3.1$, په (b) کی: $4 = 1.1 + 3.1$ نو سیستم (a) ځواب نه لري او سیستم (b) یواځني ټاکلی ځواب لري یعنې $x_1 = x_2 = 1$

بیلګه ۱۱. ۱۴:

په بیلګه ۱۱. ۱۳ کی ورکړ شوي مساوت اوس د گاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a) $x_1 \ x_2 \ RS$ b) $x_1 \ x_2 \ RS$

I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III''=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په (a) کی تضاد پیژندلکیري ($III': 0.x_1 + 0.x_2 = -2$) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په (b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت. ($III': 0.x_1 + 0.x_2 = 0$) له II څخه لرو:

$$x_2 = 1 \text{ او له I څخه لاس ته راځی: } x_1 = 3 - 2.1 = 1$$

۱۱. ۲ لاینیز برابر و نسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۲۰ یو برابر و ن د درې ناپیژندونکو سره

موږ یو مساوات د درې ناپیژندونکو سره تر څیرني لاندې نیسو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I. \quad a_{11}=a_{12}=a_{13}=0 \quad (11.22)$$

دلته x_1, x_2 او x_3 یو له بل پوره خپلواک ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر

ځوابونه مخ ته پراته دي (x_1 په خوبښه، x_2 په خوبښه او x_3 په خوبښه)

$$2. \quad a_{11}=a_{12}=a_{13}=0, a_1 \neq 0 \quad (11.23)$$

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = a_1 \mid = 0$$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجورې k, i لپاره دې $|a_{ik}| = 0$ وي. (بي د تولیز وبنديزونو يا عمومیت د محدود والی دې $|a_{11}| = 0$ وي.) کیدی شي چی x_2 او x_3 په خوبه وټاکل شي (ناپايي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي
 $x_1 = (1/a_{11})(a_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$ او x_3 (11,24)

۱۱. ۲. ۲ دوه برابر ونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابر ونسیستمونه د درې اوبنتونو يا ناپيژندونکو سره

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11,25)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \quad (11,25)$$

موږ دا را ویستلي حالتونه، چیرته چی د ټولو i, k لپاره $a_{ik} = 0$ ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کی نه نیسو چی دوم برابر ون د لومړي په څیر وي (ناپايي ډیر ځوابونه. او يا دوه برابر ون د لمړي سره په مخامخوالي يا څټوالي يا تضاد کی وي) ځواب نه وي. دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلگه کی دا اصلي حالت څیرو چی یو ناپيژندونکي يا نامعلوم (د بیلگي په توگه x_3) په خوبه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکي يا اوبنتوني (x_1 او x_2) یواځنی لاس ته راځي، او يا یواځنی ورکول کیدی شي (ناپايي ډیر ځوابونه).

بیلگه ۱۱. ۱۵:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad RS$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad I \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$II \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$II' = II - I \quad 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

له II لاس ته راځي

$$x_2 = 3 - 2x_3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3, \quad x_1 = x_3$$

او له دي لاس ته راځي
 $x_1 = x_3, x_2 = 3 - 2x_3$ په خوښه.

۱۱. ۲. ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابر ونونه یا معادلي یا مساوات د درې ناپېژندونکو سره څیرو

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11, 26)$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \quad (11, 26)$$

$$\text{III} \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3 \quad (11, 26)$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱. ۲. ۱ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱. ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پېژند ۱۱. ۲:

ریيل گڼونو a_{ik} (یو درې درجه منظم د دیترمینانت سیستم

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \dots\dots\dots (11, 27)$$

لاندې سری لاندنی ریيلگن پوهیدلی شي):

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}); \dots\dots\dots (11, 28)$$

له دې سره د دریمي درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجي دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. ۱۱. ۲ تعریف او په ځانگړې توگه (11. 28) فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پېژند ۱۱. ۳: په (11. 27) کې د دیترمینانت D لاندې دیترمینانت A_{ik} لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چې د D دیترمینانت i - می لیکي او k - م درځ یا متي د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي (زه د ماتریکس په دننه

کي دا ليکي او متي يا ستي له منځه نه شم ورلی، خو دا کومي ستونځي نه پيښوي، ځکه،
چي لاس ته راوړنه بي پسي ليکل شوې (

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{22} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کيدی شي چي د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دې فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :

د دريمي درجي ديترمينانت D لاندې، چي په (11 . 27) کي ورکړ شوی دی،
دا لاندې گڼ پوهيدل کيږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زياتون عمليي څخه، چي دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چي دوه ناپيوندونکي
لري، روښانه ده، د (11 . 26) څخه لاس ته راوړل کيږي:

$$Dx_1 = D_1, Dx_2 = D_2, Dx_3 = D_3 \quad (11.29)$$

په داسي حالت کي چي D_i داسي لاس ته راځي چي د ځله وونوديترمينانت (11 . 28)
(کي سري i - م درځ يا ستن يا مټه د (11 . 26) برابر وڼي لور ته ځای په ځای
کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \dots (11, 30)$$

موږ دا نتيجه بي له ښووني ورکوو.

له (۱۱ . ۲۹) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :

که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونوديترمينانتو (۱۱) . ۲۷، په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

$$D \neq 0 \quad (11.31)$$

با وری وی، نو (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم یواخی خواب لری

$$x_3 = D_3/D \quad ; x_2 = D_2/D \quad ; x_1 = D_1/D \quad (11,32)$$

جمله ۱۱. ۵ :

که $D = 0$ مگر $|D_i| = 0$ کم له کمه دیوه $i (i = 1, 2, 3)$ لپاره وی، نو د (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم خواب نه لری (په (۱۱. ۲۹) کی تضاد دی)

جمله ۱۱. ۶ :

که $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ وی، نو په (۱۱. ۲۶) کی کم له کمه یو برابر ون ضرورته زیات دی او دا (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم کیدی شي چي د ۱۱. ۲. ۲ متودونو باندي خواب شي (وړانديز دی چی د گاوس الگوریتم له متود؛ چی په ۱۱. ۲. ۴ برخه کی ورکړ شوي خواب شي).

بیله ۱۱. ۱۶ :

په لاندي سیستم

$$I \quad x_1 - x_3 = -2$$

$$II \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$III \quad 2x_1 - x_2 = 0$$

کی دی

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 11 & -1 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 20 & \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 - 1 \cdot (-1 - 2) = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -20 & -1 \\ 01 & -1 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 00 & \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 01 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 10 & -1 \\ 200 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 00 & \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 20 & \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ 20 & \end{vmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 110 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ -19 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$$x_1 = D_1/D = 2/2 = 1, x_2 = D_2/D = 4/2 = 2, x_3 = D_3/D = 6/2 = 3$$

بیلگه ۱۱. ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$I \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$II \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$III \quad 2x_1 + x_2 = 1$$

کي دی.

دا بیلگه دې گران لوستونکي پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته • دې ته باید گوته ونیسیم ، $D = 0$ او $D_1 = -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري •

۱۱. ۲. ۴ د گاوس الگوریتم

د گاوس الگوریتم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابر ونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپېژندونکي لري او همدارنگه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپېژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د گاوس د الگوریتم موخه په دې کی پرته ده چې (۱۱ . ۱۶) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریگودیفورم را اوړي.

$$I \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.34)$$

$$II \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$III \quad c_{33}x_3 = c_3$$

بنسټیز حالت : که $a_{11} \neq 0, b_{11} \neq 0, c_{11} \neq 0$ وي نو یو په بل پسې سړی کړی شي چې له III x_3 ، او له II x_2 ، وشمیري. مگر په (۱۱ . ۳۴) کی ځانگړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

- که $c_3 = 0, c_{33} = 0$ وي، نو یو په ځټوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c_3 = c_{33} = 0$ وي، نو III له ضرورت زیات دی سړی یواځی I او II څیږي.

- که $c_3 = c_{33} = 0$ او برسیره پر دې $a_{11} \neq 0, b_{11} \neq 0$ وي، نو x_3 په خوښه ټاکل کیدی

شي او x_2 له II او x_1 له I چې x_3 ته اړ وي، شمیرل کیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

- برسیره پر دې که $b_2 \neq 0, b_{22} = b_{23} = 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

- که نور هم ولرو چې $c_3 = c_{33} = 0$ او $b_{22} = b_{23} = b_3 = 0$ وي ، نو II له ضرورت زیات

دی او له $a_{11} \neq 0$ کیدی شي چې x_2 او x_3 په خوښه وټاکل شي، او x_1 له I لاس

ته راځي چي x_2 او x_3 ته اړ (په واک کی یا تابع) وي (ناپايي ډیر ځوابونه ځوابونه).
 که ټول ځلونه او د مساواتو بنی خوا صفر وي ، نو ناپايي ځوابونه موجود دی.
 د گاوس الگوریتموس د درې ناپیژندونکو (11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دی
 لومړی پل (قدم) : نیسو چي په (11 . 2 . 6) کی $a_{11} \neq 0$ دی. دا د نمرې بدلولو په
 بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شوو حالتونو) چي ټول $a_{ik} = 0$ وي).
 دلته I ورکول کيږي، او له II د I دا a_{21}/a_{11} - ځله او له III دا a_{31}/a_{11} - ځله د I
 کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.35)$$

$$\text{II} \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$\text{III} \quad c_{33}x_3 = c_3$$

دویم پل (قدم) : د $b_{22} \neq 0$ نیوني سره په II او III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره
 سم د گاوس الگوریتم استعمالیږي : سړی II بي تغیره پریږدي اوله III دا b_{32}/b_{22} -ځله
 د II کموي، له دې راپیداکیږي

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.37)$$

$$\text{II} \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$\text{III} \quad c_{33}x_3 = c_3$$

د گاوس د شیمې فورمالیټي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x_1	x_2	x_3	RS
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_1
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_2
III	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_3

$$\text{II}' = \text{II} - (a_{21}/a_{11})\text{I} \quad b_{22} \quad b_{23} \quad b_2$$

$$\text{III}' = \text{III} - (a_{31}/a_{11})\text{I} \quad b_{32} \quad b_{33} \quad b_3$$

$$\text{III}'' = \text{III}' - (b_{32}/b_{22})\text{II}' \quad c_{33} \quad c_3$$

$$x_3 = c_3 / c_{33}$$

$$x_2 = (1/b_{22})(b_2 - b_{23}x_3)$$

$$x_1 = (1/a_{11})(a_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

$$\begin{array}{rcccc} & II'=II-I & 0 & -1 & -2 & 0 \\ & III'=III-2.I & 0 & -1 & -2 & 1 \\ \hline & III''=III'-II' & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

دلته دی " $1 = 0$ " تضاد. سیستم نه اوبی کیری یا حل نه لري.

بیلگه ۱۱. ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلگه ۱۱. ۱۷) دا سیستم

$$I \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$II \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$III \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

په لاندې ډول د گاوس په الگوریتم اوبیونه ده

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & RS \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} I & 1 & 1 & 1 & 3 \\ II & 1 & 2 & 3 & 6 \\ III & 2 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & II'=II-I & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & III'=III-2I & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & III'' = III'-II' & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$=x_3 \quad \text{په خوښه}$$

$$x_2 = 3 - 2x_3$$

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3 = x_3$$

۱۱. ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونو په لار بنونی پیل کوو m (برابرون د n ناپیژندونکو سره)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = a_1 \dots \dots \dots (11,37)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = a_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{nm}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = a_m$$

دا په خوښه يا ازاد پریردو چی د برابر ونونو گڼون (تعداد) m د ناپیژندونکو n د گڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرگندو دندو يا وظيف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیږو

۱۱ . ۳ . ۱ - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۵ . ۱۱ :

n ریل گڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجی دیترمینانت

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \dots \dots \dots (11,38)$$

لاندې سری لاندنی ریل گڼ پوهیږي:

$$D = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - a_{14}A_{14} + \dots \pm a_{1n}A_{1n} \dots \dots (11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیري، که په D کی i - مه لیکه او k - م درخ ، مته یا ستن (لیکه او درخ چی aik په کی ولاړ وی) په کرښه لري کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دي ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیښیږي .

په ځانگړي توره د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \dots A_{1n} etc$$

که n برابر ونونه د n ناپېژندونکو سره مخ ته ولرو (په ۱۱ . 37) (کی لرو) $n=m$ د جمع تیورم په مرسته داسې سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, \dots, Dx_n=D_n \quad (11.42)$$

د D_i دیترمینانت داسې لاس ته راځي چې د ځله وونو یا ضریبونو په دیترمینانت (۱۱ . ۳۸)

(کی د- i ام درځ متي یا ستن د برابر ونسیستم د بني لاس سره بدل کړي .

د بیلگې په توګه یو سیستم د ۴ مساواتو او ۴ ناپېژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰

(

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \dots \quad (11.43)$$

له (۱۱ . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله ووني یا ضریب دیترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د

n ناپېژندونکو سره په (۱۱ . ۳۷) د $m = n$ سره) باوري دی

$$D \neq 0 \quad (\text{اصلي حالت}) \quad (11.44)$$

نو دا برابر ونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري (حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \dots, x_n=D_n/D. \quad (11.45)$$

برعکس که $D = 0$ مګر $D_1 \neq 0$ کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .

که $D=D_1=D_2=\dots=D_n=0$ وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د

اوبیوني لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لاندې سیستم دې حل شي

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$\text{III} \quad x_2 - x_4 = 4$$

$$\text{IV} \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2102 \\ 010-1 \\ 1-1-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 102 \\ 10-1 \\ -1-11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 212 \\ 01-1 \\ 1-11 \end{vmatrix} = -3-3 = -6$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0010 \\ 0102 \\ 410-1 \\ -2-1-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 012 \\ 41-1 \\ -2-11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 41 \\ -2-1 \end{vmatrix} = -2-4 = -6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2002 \\ 040-1 \\ 040-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 002 \\ 40-1 \\ -2-11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 202 \\ 04-1 \\ 1-21 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 40 \\ -2-1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 04 \\ 1-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4) + 2 + 2(-4) = -12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1000 \\ 2102 \\ 014-1 \\ 1-1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 102 \\ 14-1 \\ -1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 14 \\ -1-2 \end{vmatrix} = 4-2 + 2(-2+4) = 6$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2100 \\ 0104 \\ 1-1-1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 104 \\ -1-1-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 210 \\ 014 \\ 1-1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 04 \\ -1-2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 14 \\ -1-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 01 \\ 1-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 + 2 \cdot 2 - (-4) = 12;$$

$$x_1 = \frac{-6}{-6} = 1; x_2 = \frac{-12}{-6} = 2; x_3 = \frac{6}{-6} = -1; x_4 = \frac{12}{-6} = -2$$

۱۱. ۳. ۲ د گاوس الگوریتم:

موږ ولیدل چې د گاوس الگوریتم له لارې د مساوتو یو دریکو جشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چې د هغې له مخې څرگندولی شو چې کوم حل (خواب) مخ ته پروت دی.

دا په لاندې بیلگه څرگندوو

بیلگه ۱۱. ۲۲:

که په بیلگه ۱۱. ۲۱ کې ورکړ شوی سیستم د گاوس الگوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیم لاس ته راځي:

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II-2.I	0	1	-2	2	0
4III'=III	0	1	0	-1	4
IV'=IV-I	0	1	-2	1	-2
III''=III'-II'	0	0	2	-3	4
IV''=IV'+II'	0	0	-4	3	-2
IV'''=IV''+2.II''	0	0	0	-3	6
x4 = -2					
x3=1/2(4+3.(-2))= -1					
x2=0+(-1)(-2)= 2.....					
x1 = -(-1) = 1					

بیلگه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسیستم

$$\begin{array}{lcl}
 \text{I} & x1 & +x2 & +x3 & +x4=4 \\
 \text{II} & x1 & -x2 & -x3 & +x4=0 \\
 \text{III} & 3x1 & -x2 & -x3 & +x4=2
 \end{array}$$

حل یا اویبونه ی نه لری، لکه د گاوس له شیما خخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2

II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10

III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2
----------------------	---	---	---	---	----

دلته III " په څتوالی یا تضاد خوندي لري " $-2 = 0$ "
 بیلگه ۱۱. ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابر ونونو او ۴ ناپېژندونکو سره

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ \text{II} & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ \text{III} & 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & = 4 \\ \text{IV} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 10 \\ \text{V} & 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & = 8 \end{array}$$

گورو چې oe_1 (ناپای ډیر) اوبیوني لري

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad RS$

I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8

II' = II-I	0	2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV - I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

$$II'' = II' + 2.IV' \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8$$

$$III' = III' + 4.IV' \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 12 \quad 16$$

$$V'' = V' + 2.IV' \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8$$

$$III''' = III'' - 2.II' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$V''' = V'' - II \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

گورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x_4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

$$\text{له } II'' \quad x_3 = 4 - x_4 \quad \text{له } IV' \quad x_2 = 6 - 2(4 - 3x_4) - 3x_4 = -2 + 3x_4 \quad \text{او له } I$$

$$x = 4 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 - (-2 + 3x_4) - (4 - 3x_4) - x_4 = 2 - x_4$$

$$\text{نو } x_1 = 2 - x_4 \quad \text{په خوښه } x_4 \text{ ټاکو}$$

$$\text{او } x_2 = -2 + 3x_4 \quad \text{، په خوښه } x_4 \text{ ټاکو}$$

$$\text{او } x_3 = 4 - 3x_4 \quad \text{په خوښه } x_4 \text{ ټاکو}$$

یادونه : هغه گڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي *

سړی د گاوس شیمای په دوم بلاک کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړي وی (له منځه وړي وی). دریم بلاک به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د گاوس الگوریتم به له دې سره پای میندلی وی.

۱۱. ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي وړک شي، هوموژین مساواتسیستم بلل کیږي .

د $n = 3$ لپاره دا د مثال په توگه هوموژین سیستم بلل کیږي

$$I \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \dots\dots\dots$$

$$II \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \quad (11. 46)$$

$$III \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \dots\dots\dots$$

یو داسی هوموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0 \quad (11. 47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱. ۳۸) لپاره $D \neq 0$ باور ولري، نو د جملی ۱۱. ۷ شیمای څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یا حل موجود دی او باور لري

جمله ۸.۱۱: یو هوموگین مساواتسیستم یواځ هله سخت حل لري، که $D = 0$ باوري وي بیلکه ۱۱.۲۵:

دا هوموژین برابر ونسیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$\text{III} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ لري. بیلکه ۱۱.۲۶:

دا هوموگین مساواتسیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{III} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبیونه هم لري دا په لاندې ډول د گاوس د الگوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې-یا باقی سیستم په معنا دی.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \text{I} \quad 1$$

$$0 \quad \text{II} \quad 1 \quad -1 \quad 0$$

$$0 \quad \text{III} \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

$$\text{II}' = \text{II} - \text{I} \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0$$

$$\text{III}' = \text{III} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

$$\text{II}'' = \text{II} + \text{III}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

ګورو چې II "تضاد نه لري" x_3 په خوښه ټاکو، او له III لاس ته راځي $x_2 = -x_3$ او له I څخه لاس ته راځي $x_1 = -x_3$ نو $x_1 = -x_3$ په خوښه او $x_2 = -x_3$ نو x_3 په خوښه

تمرینونه

د نامعلومو لپاره - لکه له ښوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ - کرښیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بیا یې وازمایو. دلته دې د زیاتون یا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي او د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱. ۱ - مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

$$\begin{aligned} 1.1.1. \text{ a) } 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 6x_2 &= -30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x_1 &= 3x_2 - 14 \\ x_2 &= 3x_1 - 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 51x - \frac{3}{20y} &= 3 \\ 48x - \frac{1}{10y} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= 3 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.1.2. \text{ a) } 5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) &= 23 \\ 3(x_2 - 2) &= 19 - 5(x_1 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) &= 87 \\ 2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) &= 82 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) &= \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y) \\ 4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} &= \frac{2y - x - 6}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} &= 2x - 3y - 1 \\ 3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} &= 5x - 3y - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.1.3. \text{ a) } \frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} &= \frac{1}{4y - 3} \\ \frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} &= \frac{1}{3y + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{3x - 5} &= \frac{4}{7y - 13} \\ \frac{1}{y - x} &= \frac{8}{3x + y} \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$$

d) $4+y = x$

$$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
 $(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
 $2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$
 $\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2} + \frac{3x_2}{2} = 3$

$$3x_1 + x_2 = 2$$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6} + \frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$$\frac{5-3x_1}{3} - \frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12} - \frac{3x_1-4x_2}{2}$$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2} - \frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$

$$\frac{5}{3x_1-2x_2} + \frac{6}{4x_1+3x_2} = 5,25$$

d) $3(x_1-2) + 4(2x_2 + \frac{3}{2}) = 0$

$$5(x_1+3) - 3(x_2 - \frac{1}{3}) = 16$$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$
 $5x_1 - 2x_2 = 9$
 $7x_1 - 8x_2 = 10$

b) $6x_1 - x_2 = 1$
 $9x_1 + 2x_2 = 5$
 $3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$
 $3x_1 + 5x_2 = 5$
 $3x_1 - 1,8x_2 = -1,8$
 $0,9x_1 + 1,5x_2 = 1,5$

d) $2x_1 - 3x_2 = 10$
 $-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
 $x_1 - 1,5x_2 = 5$
 $0,5x_1 - 0,75x_2 = 2,5$

۱، ۲ - مساواتسیستم د نایاکلو ضربیونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$
 $ax_1 - x_2 = b$

b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$
 $2x_1 - 3x_2 = 5b$

$$\begin{aligned} \text{c) } 10x + 6y &= 4a + b \\ 6x + 10y &= 4a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 14x - 15y &= 24a \\ 10x - 21y &= 24b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.2. \text{ a) } \frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} &= \frac{8ab}{b^2 - 4a^2} \\ \frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} &= \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } -(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$$

$$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y &= a^2 \\ \frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} &= a-c \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} &= b-a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.3. \text{ a) } x + y &= \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \\ x - y &= \frac{4ab}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + y &= \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ 2x + 3y &= \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } ax + by &= 2a \\ a^2x - b^2y &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } ax + by &= a^3 + 2a^2b + b^3 \\ bx + ay &= a^3 + 2ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.4. \text{ a) } ax + by &= 2a \\ x + y &= \frac{a^2+b^2}{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a-b)x + (a+b)y &= a+b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} &= \frac{1}{a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x-a}{y-a} &= \frac{a-b}{a+b} \\ \frac{x}{y} &= \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (a-b)x + y &= \frac{a+b+1}{a+b} \\ x + (a+b)y &= \frac{a-b+1}{a-b} \end{aligned}$$

۱. ۳ - شي شميرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هر عدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلور کمون (تفریق) يې په ۱۰۰ لويږي، په داسې حالې چې ضرب يې په ۳۲۵ زیاتږي.

۱. ۳. ۲ د دوه عددونو جمعه يا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفریق يې ۹۹ دی، وښایې چې عددونه څومره لوی دي؟

۱. ۳. ۳. د هرو دوه گڼونو څخه هر یو یی په ۲ لویوي، نو گڼونه ځانونه نيسي لکه: ۴ : ۳. که له هر یوه ددې دوه گڼونو څخه ۳ کم شي، نو داسی لاس ته راغلی گڼ خان نيسي لکه : ۳ : ۲. دواړه گڼونه کوم دي؟

۱. ۳. ۴. د دوه گڼونو زیاتون ۹۹۹ دی. که لمړی گڼ په ۹ ویشل شي او دوم په ۶، نو د ویشونکو زیاتون ۱۳۸ دی. هر یو ددې دوه گڼونو څومره لوي دي؟

۱. ۳. ۵. د دوه گڼونو زیاتون ۱۰۰۰ دی. که لمړی له ۲ او دوم له ۳ سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یی ۲۲۲۲ دی. هر یو له دې گڼونو څومره لوي دي؟
۱. ۳. ۶. په دوه گڼونو کې یو له بل په ۰,۹۰۹ لوي دی، زیاتون یی ۳,۱۹۱ دی. دواړه گڼونه څه نومېږي یا کوم دي؟

۱. ۳. ۸. د یوه درېکونجې د دوه اړخونو اوږدوالي زیاتون ۸,۴ cm دی. او پریکشن یا پریوستون یی د درېکونجې په دریم اړخ ۴ cm او ۱,۶ cm دی. د درېگونې اړخونه څومره لوي دي؟

۱. ۳. ۹. د یوه لوي ښار ترمنځ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو درېگونې جوړوي. له X څخه چی له Z څخه تیرېږي، Y ته اوږدوالي ۱۲ cm دی، Y له مرکز Z څخه ۲ km زیات لري دی نسبت و X ته، دواړه منځ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرې دي؟
۱. ۳. ۱۰. د یوه فوتبال میدان څخه د څلورکونجې شکله د لرگیو راگرځیدلی دیوال،

چی ۴۲۰ m اوږد دی، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په ۵ m کوچنی کیږي، که بل اړخ په ۱۰ m اوږده شي. له دې سره د سیمگرځی اوږده د هوارې دننه په ۱۰۰ m^۲ زیاتېږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

۱. ۳. ۱۱. د یوه موټر ماشین یخۍ ۸ لیتره اوبه خوندې کوي او دوه وتلارې لري، دا کیدۍ شي خالي شي، که د بیلګې په توګه لمړۍ ۵ دقیقې او دوم ۲ دقیقې واز کړي او یا دوم ۶ دقیقې او لمړۍ ۳ دقیقې واز شي. په هر نل کې څومره اوبه په یوه دقیقه کې وزي؟

۱. ۱۲۳. یو پلار له ځوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کې پلار د ځوي $1/4$ عمر څخه ور زیات ۳ برابره د ځوي عمر لري اوس پلار او ځوي هر یو څومره عمر لري؟

۱. ۳. ۱۳. د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت ۴۰، ۲ الماني مارکه (DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱. ۳. ۱۴. یو د 450 m^3 اوبو اوبه ډکۍ یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکيږي. که لمړۍ نل درې دقیقې او دوم یوه دقیقه واز وي، نو په اوبه ساتي کې 40 m^3 اوبه جریان لږودی شي. مګر که لمړۍ یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقې وازې وي، نو اوبه ساتي ته 60 m^3 اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کې څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چې اوبه ساتي ډک شي؟

۱. ۳. ۱۵. دوه کارګرو ته د کندنې کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځای کار

وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړۍ دوه ورځې او دوم درې ورځې کار وکړي، نو په دې وخت کې یواځې $1/5$ برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځې به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري؟ اښادۍ؟

۱. ۳. ۱۶. د یوې گردۍ په چاپیری چی ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت

راځي. هغوي هر ۲۰ دقیقې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت

وکړي او هر ۴ دقیقې، که هغوي یو د بل په خت لور حرکت وکړي، هر

بدن په یوه ثانيه کی څومره واټن ته کوي یا وهي؟

۱. ۳. ۱۷. په یوه گردۍ چی چاپیری یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور

حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیو کی. دواړو بدنونو سرعت څومره

دی، که د لمړي سرعت څلور وارو لوي لکه د دوم ګی؟

۲

. ۲

۱. کرښيز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ - مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$

$x + z = 15$

$y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$

$x_1 + x_3 = 18$

$x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6,6$

$x_1 - x_3 = 2,6$

$x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$

$3x - 2z = 1$

$20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$

$3x - 4y = 3$

$5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$

$4x + 8y - 14z = 10$

$6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$

$5x - 3y = 37$

$3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$

$x_1 - x_2 + x_3 = 13$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$

$6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j) $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$

$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$

$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{5}x - y = 0$

$\frac{2}{3}x - z = 1$

$-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲. ۲ - مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$

$x_1 + x_3 = 2b$

$x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$

$x_1 + x_3 = 2(a + c)$

$x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$

$ax - by + z = b$

$-ax + by + z = a$

$$\begin{array}{lll}
 \text{d) } ax + y - cz = 2a & \text{e) } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a & \text{f) } -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a} \\
 -ax + y + cz = 2c & \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b & \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\
 ax - y + cz = 2ac & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b} \\
 \\
 \text{g) } x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a & & \text{h) } \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a+b \\
 y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b & & \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b+c \\
 z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c & & \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c+a
 \end{array}$$

۳. په خوښه زیات مساوات د په خوښی زیاتو مجهولو سره

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7 & \text{b) } 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
 \quad \quad \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & \quad \quad \quad x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 1 \\
 0,5x_1 + x_2 + 1,5x_3 - 0,5x_4 = 3 & \quad \quad \quad 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10 \\
 \quad \quad \quad 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 & \quad \quad \quad 6x_1 + 0,5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\
 \\
 \text{c) } x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1 & \text{d) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21 \\
 -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 & \quad \quad \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1 \\
 -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5 & \quad \quad \quad 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0 \\
 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 & \quad \quad \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19 \\
 x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4 & \quad \quad \quad 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24 \\
 \quad \quad \quad & \quad \quad \quad -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3
 \end{array}$$

هوموجین مساوات سیستمونه:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 & \text{b) } -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 & \text{c) } 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0 \\
 \quad \quad \quad -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 & \quad \quad \quad 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 & \quad \quad \quad -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\
 \quad \quad \quad -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 & \quad \quad \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & \quad \quad \quad 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\
 \\
 \text{d) } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 & & \\
 \quad \quad \quad 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 & &
 \end{array}$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A \cdot x = a \quad (12.1)$$

سره یوازښته (اکویالنت) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او

عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \quad (12.2)$$

دلته $F(x)$ په x کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي ویینه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د x ارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي ریيل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلگی په توگه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه ریيل ځوابونه لري

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره بي مساوات باوري کیږي . ددې په څټ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ ریيل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)،

بلکه لاندې ایماگینار ځوابونه لري : $x_1 = i, x_2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y = F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۱

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپېژندونی بولم (ښه نومه ونه يې اووښتوني ده) په څټ يا برعکس (2 . 12) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپېژندونکی يا اووښتونی دی.

د (2 . 12) برابر ون يا مساوات اووښوني يا حل ته د برابر ون د $F(x)$ صفرځای يا د مساوات $F(x)=0$ جذر يا ريښه هم وايي. هغه برابر ون يا مساوات چې په (۲ . ۱۲) فورم نه دی ورکړ شوی کیدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلگي په توگه د دې برابر ون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$f(x)=g(x) \text{ او } \frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

$$F(x)=f(x)-a.g(x)=0 \text{ او } F(x)=f(x)-g(x)=0$$

د نالاینيزو برابر ونونو لپاره د لاینيزو برابر ونونو په څير راغونډه (اختتاميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوک نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخې چې د صفرځاي معلومیدی شي. بايد په نومريکو (numerischen Methoden) متودونو يا ورپسې گڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاینيز برابر ونونه په دوه ټولگيو ویشل کيږي: الجبري او تراسخندنت چې په دې او راتلونکې څپرکي يا لکه چې ما استعمال کړې برخه کې يې څيرو، چې اووښوني يې روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح يا روښانه، افاده شوی، اکسپليڅټ) دي.

له ۲ . ۱۲ څخه تر ۴ . ۱۲ پورې الجبري برابر ونونه څيرل کيږي چې په لاندې نورمال فورم يا - ښه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \dots\dots\dots(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کې يو نالاینيز بلواک يا - فنکشن $F(x)$ د يوه n - م درجې پولینوم په څير مخ ته پروت دی. موږ په (۲ . ۱۲) کې د ضریبونو (ځله ونو) لپاره يواځې رييل گڼونه پريږدو (په دې مانا چې ځلونه يواځې رييل وي، يواځې رييل گڼونو ته اجازه ورکړو).

دا په (۱۲ . ۳) کی کین اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \dots\dots\dots(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لاري منځ ته راځي . ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 \dots\dots\dots(12,5)$$

کیدي شي په $bn \neq 0$ ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم وړول شي .

که دا نه لاینیز فنکشن یا ۰ بلواک $F(x)$ په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اووښتونی x او ځلونو باندې ټول د شمیر کارونی یا عملی او بالاخره د ویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameter) په شمیرپوهنه کی ثابت (همغه) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځور وړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \dots + c_1x + c_0} \dots\dots\dots(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; \dots\dots\dots(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیري د نالاینیز بلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیر عملیو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) یا پوتنڅ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سری د الجري فنکشنونو څخه غږیږ یعنی داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم وړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۳

د $G(x)$ افادې يا وېبني له منځه وړل کيدی شي، که چيرې څوک دا برابر ون په يوه خوا راوړي او بيا د برابر ونونو دواړه خواوې د n په توان کړي يا د n پوتنځ يا مت ته جگ کړي. دا په ۱۲. ۴ برخه کې په څرگندو يا معلومو بيلگوڅيرل کيږي. په نومولو تگلارو د الجبري مساواتو څيرنه د (۱۲. ۳) فورم برابر ونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابر ون هم بلل کيږي. ټول نالاینيز برابر ونونه چی الجبري برابر ون نه دي، ترانسځيندنت برابر ون بلل کيږي. د ترانسځيندنت رابرونونو درې ټيپونه، په نامه، اکسپوننشل برابر ونونه، لوگاريتمي برابر ونونه، او گونومتريکي برابر ونونه دي چي په برخه ۱۳ کې به تر څيرني لاندې ونيول شي.

۱۲. ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(مت، جگ) د ۲

۱۲. ۲. ۱ په جگ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینيزو الجبري برابر ونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مت (په جگ ۲ هم ويل کيږي) برابر ونونه دي چی څلوری يا مربع برابر ونونه بلل کيږي. د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \dots\dots\dots(12,8)$$

په b_2 يي ویش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکيوالنت equivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_2; a_0 \neq b_0 / b_2); \dots\dots\dots(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې يا مربعتکمیل څخه په گټه د بينوم په فورم ودي کتل شي: ۱. ۲. ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_1 / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a_1^2}{4}; \dots\dots\dots(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲. ۹) برابر ون په لاندې فورم داسی واپړول شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x + a_1/2)^2 + a_0 - a_1^2/4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \quad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
دا صدق کوي

$$x + \frac{a_1}{2} = \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots (12,13)$$

یا

$$x + \frac{a_1}{2} = -\sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots (12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲)
(۱۲) برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي
چی a د ۲ اصلي برخې په بینا تل نا کمیز یا نامنفي گڼ پوهیدل کيږي، چی څلوری یا
مربع یی a ده). له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه رییل ځوابونه
لاس ته راځي،

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; x_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots (12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots (12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توگه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو
څخه پوهیدل کيږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2

په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4) - a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = 4a_0; \dots\dots\dots (12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې ټیک یو رییل اوبی لرو:

$$x_{1,2} = x_1 = x_2 = -(a_1/2) \pm 0 = -a_1/2; \dots\dots\dots (12,18)$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۴۵

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کيږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸) څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2 / 4) - a_0 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_0 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 < 4a_0; \dots\dots\dots / (12, 19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) ریيل حل نه لري. که په کمپلس گڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخې څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x + a_1 / 2 = \sqrt{a_0 - (a_1^2 / 4)i} \wedge x + a_1 / 2 = -\sqrt{a_0 - (a_1^2 / 4)i}$$

او په دې ډول د کونجوگيرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = -a_1 / 2 \pm \sqrt{a_0 - (a_1^2 / 4)i}; \dots\dots\dots (12, 20)$$

له دې څخه هم چي په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرگنديږي چي د x_1 او x_2 ارزښتونه پیل برابرون يا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرگندونی ته پام وي

$$\pm \sqrt{a_0 - (a_1^2 / 4)i} = \pm \sqrt{(a_1^2 / 4)i - a_0}; \dots\dots\dots (12, 21)$$

نو لاندې جمله بی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جگ د ۲) برابرونونو د اوبیوني

فرمول (د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$x_{1,2} = -a_1 / 2 \pm \sqrt{a_0 - (a_1^2 / 4)i}$$

تيك دوه ځوابونه لري

$$a_1^2 > 4a_0 \quad \text{د}$$

په حالت کی دوه مختلف ریيل حلونه دی، د $a_1^2 = 4a_0$ په حالت کی یو ریيل دوه

برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2 < 4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوگيرت - کنجوگيریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وييتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

جمله ۱۲. ۲ (د وييتا (Vieta) جمله) :

که x_1 او x_2 د څلورۍ - يا مربع برابر ونونو (۱۲. ۹) همداسې د

(۱۲. ۸) اوبيوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1 \cdot x_2; \dots\dots\dots (12, 22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); \dots\dots\dots (12, 23)$$

حل : (۱۲. ۲۳) فرمول په دريو اړو حالتونو کې سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] = a_i$$

د (۱۲. ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال څخه په (۱۲. ۱۲) حالت کې باور لري :

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] \cdot \left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right]^2 \\ &= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0 \end{aligned}$$

په (۱۲. ۱۷) حالت کې لاس ته راځي:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0 \right] \left[-\frac{a_1}{2} - 0 \right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲. ۱۹) حالت کې باوري دي:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}i} \right] \cdot \left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}i} \right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}i} \right]^2 i^2 \\ &= \frac{a_1^2}{4} - \left[a_0 - \frac{a_1^2}{4} \right] \cdot (-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0 \end{aligned}$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونه ۳۴۷

د ویتا جملې په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصدیقيږي

جمله ۱۲. ۳ :

يو ۲ درجيز پولینوم کیدی شي چی په دوه لایني فاکتورونو يا ضریبونو يا ځله وونو بیل يا توته يا تجزیه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); \dots\dots\dots (12, 24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2); \dots\dots\dots (12, 25)$$

چیرته چې x_1 او x_2 د څلورۍ برابرونو يا مربع مساواتو (۱۲. ۹) په همدې ډول د (۱۲. ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه: له (۱۲. ۲۲)، (۱۲. ۲۳) څخه د (۱۲. ۹) همداسی د (۱۲. ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0) \end{aligned}$$

د جملې ۱۲. ۳ څخه دې ته راهڅول کیږو چی د (۱۲. ۱۷) حالت کی د دوه برابره رییل اوبیو څخه خبرې وکړو (وغریزو). د $x_1 = x_2$ له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; \dots\dots\dots (12, 26)$$

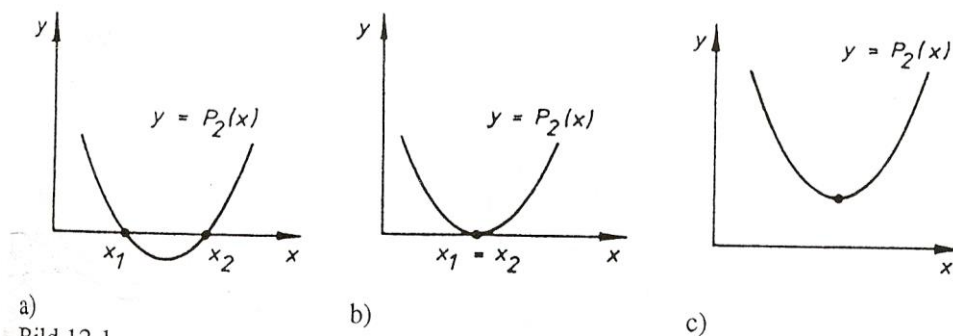
دا دري حالتونه (۱۲. ۱۲)، (۱۲. ۱۷) او (۱۲. ۱۹) کیدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

څیړو يا شکلونو (گراف) په مرسته د کتلو شي.

گراف په بنسټیزه توگه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرڅومره کوچنی شي (که x د کمیز ناپای په جگ يا توان شي) او همدارنگه x هرڅومره لوی شي (که x د ∞ ناپای) په جگ شي y لویيږي (ستريږي يا غټيږي)، ځکه چی x^2 نسبت و x ته په توان يا قوي جگيږي له ټولو ټولو (y د ناپای لور ته ځي). د دې ډول ټولو کره پیژند يا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کیدی شي.

په (۱۲ . ۱۲) حالت کې د x - محور په ډاږو رېښو ځایونو x_1 او x_2 کې غوڅیږي؛
په (۱۲ . ۱۷) حالت کې په $x_1 = x_2$ ځای کې یې لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت
کې ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه ورسیري (پرتله څیره . ۱۲ . ۱)



له جملې ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷) ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کې لرو

$$a_1^2 - 4a_0 = 1 + 24 = 25 > 0 \quad \text{او} \quad a_1 = -1, a_0 = -6$$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملې ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنې یا تعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۴۹

له جملې ۱۲. ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

بیلگه ۱۲. ۲:

له مساواتو $x^2 - 4x + 4 = 0$ لرو $a_1 = -4, a_0 = 4$ او د $a_1^2 - 4a_0 = 16 - 4 \cdot 4 = 0$

له امله (۱۲. ۱۷) حالت مخ ته لرو. دوه نيز رييل حل په لاندې ډول له جملې ۱۲. ۱

څخه لاس ته راځي $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$ نو لرو $x_1 = x_2 = 2$

جمله ۱۲. ۳:

په لاندې ډول باوري کيږي

$$a_0 = 4 = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_1 = -4 = -(x_1 + x_2) = -(2 + 2) = -4$$

د جملې ۱۲. ۳ له مخې لرو $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

بیلگه ۱۲. ۳:

له مساواتو $x^2 - 4x + 13 = 0$ څخه لرو, $a_1 = -4, a_0 = 13$ او د $a_1^2 - 4a_0 = 16 - 52 = -36$

له امله حالت (۱۲, ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوگيرت (کنجوگيري) کمپلکس جوړه اوبيونو يا حلونو له جملې ۱۲. ۱ څخه په لاندې بڼه يا فورم لاس ته راوړلو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + 3i; x_2 = 2 - 3i$$

د جملې ۱۲. ۲ سره سم باور لري

$$a_0 = -4 = -(x_1 + x_2) = -(2 + 3i + 2 - 3i) = -4$$

$$a_1 = 13 = x_1 \cdot x_2 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$$

۳۵۰

۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه

او د جملې ۱۲. ۳ له مخې داسې دی

$$x^2 - 4x + 13 = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$$

د مربع مساوات (۱۲. ۸) همداسې (۱۲. ۹) اوبې په ښکاره ډول ساده کيږي، که یو
خلی a_0 او یا a_1 وړک شي:

$$x(x + a_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -a_1$$

د $a_0 = 0$ لپاره لرو

د $a_1 = 0$ لپاره لرو

$$x^2 + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -a_0; x_{1,2} = \pm \sqrt{-a_0}$$

۱۲. ۲. ۲. خلوري (مربع-) برابر ون چی په نورمالینه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲. ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه
چی جمله ۱۲. ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه وړول شي.

بليگه ۱۲. ۴:

$$2x - (x+2)^2 = (x-2)^2 - 4(x+1)$$

$$2x - x^2 - 4x - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4x - 4$$

$$-x^2 - 2x - 4 = x^2 - 8x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 - 2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 - 8/4} = 3/2 \pm \sqrt{1/4} = 3/2 \pm 1/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 1$$

که مجهول یا ناپېژندلی یا اوریدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش
ناممکن یا ناشونوالی په پام کې ونیول شي.

بليگه ۱۲. ۵:

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۵۱

$$(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1 \text{ برابرون}$$

$$2x^2+2x-4 \mid =0 \quad \text{تيك هلته مانا لري، چي وي}$$

لومړۍ ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا آزمائش کيږي، چي ايا د ماتلاندي شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_2 = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x_1=-2$ لپاره په ماتلاندي کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x_2 = -2$ لپاره په ماتلاندي کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

له دې امله $x_1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانگړي برابرونونه ،

چي په څلورۍ يا مربع برابرونونو بيرته بدليږي شي

د n - مې درجې مساواتو (۱۲ . ۳) يو څو ځانگړي حالتونه کيږي چي د څلورۍ

برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي . دا ځانگړی حالت

موجود دی يا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0 \quad (12, 27)$$

د n-مې درجې برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \dots \dots \dots (12, 28)$$

$\Leftrightarrow$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \dots \dots \dots (12, 30)$$

يادونه : په پورته کي له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابر ون (۱۲ ، ۲۹) دی
د دې برابر ونونو دوهم برابر ون يو څلورۍ - يا مربع برابر ون دی، چي د جملي ۱۲
۱. په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابر ون دا اوبی يا حل لري $x = 0$ چي دا ($n-2$) - ځله رامنځ ته
کيري $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$

بيلگه ۱۲ . ۶:

$$\text{برابر ون } x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3) \text{ د } x^6 + 2x^5 - 3x^4$$

$$\text{او } x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

لاندې اوبيوني لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0; \dots\dots\dots(12, 32)$$

يو بل ځانگړی حالت مخ ته لرو، که د برابر ون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه گڼ يا جفت
- وي

$$n = 2k \quad (12.33)$$

او فقط (ټيک) ځله ووني يا کوايفيڅينټونه a_0 او a_k له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; \dots\dots\dots(12, 34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; \dots\dots\dots(12, 35)$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونه ۳۵۳

او له دې سره د y لپاره څلورۍ برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \quad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \dots\dots\dots (12, 37)$$

د (۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \dots\dots\dots (12, 38)$$

ټولې اوبيونې وڅيړلې شي، چې د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره (بيکوادرات برابرون) (د څلورۍ څلورۍ يا د مربع مربع) يا د رييلو y_1 او y_2 لپاره د تراوسه څرگندو میتودو سره تل کيدونکی دی. نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټوليزه توگه ستونځې لري.

بيلگه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچيوشن يعنې بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورۍ برابرون $y^2 + 5y - 36 = 0$ باندې بدل شي. د جملې ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونه ، چې د بیرته بدلون (-سوبستیچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4, x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

$$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3i, x_4 = -3i$$

۱۲. ۲. ۴ د برابرونسيستمونه چي بيرته په څلوري برابرونونو بدليدلي شي

يوه د نالاینيزو مساواتسيستمونو لړۍ کيدی شي چي په څلوري برابرون يا مربع مساواتو بيرته وارول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلگي راوړو.

بيلگه ۱۲. ۸:

$$x + y = 1 \quad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \quad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کيږي، $y = 1 - x$ ، او دا حل په دوم برابرون کې ايښوول کيږي:

$$x^2 + (1 - x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 3, x_2 = -2$$

د $(12, 40)$ له مخي په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y_1 = -2, y_2 = 3$$

نو دا نه لاینيز برابرون لاندې اوبيوني لري

$$x_1 = 3, y_1 = -2 \quad \text{او} \quad x_2 = -2, y_2 = 3$$

بيلگه ۱۲. ۹:

د لاندې مساواتو سيستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۵۵

چی یواځې د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وړیا هدفمند دی، دوم برابرېون په xy ځلولو (ضربولو) سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y + x = xy \quad (12,42)$$

لومړی برابرېون د y په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \quad (12, 43)$$

او په (۱۲. ۴۲) کې ایښول کيږی یا ځای په ځای کيږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$ax^2 - ax + 1 = 0 \quad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کې (۱۲. ۴۴) برابرېون مخامخوالی لري یا په څتوالی لري یا تضاد لاس ته راځي « $0 = 1$ » نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د (۱۲. ۴۴) څخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$$

او د جملې ۱۲. ۱ له امله لرو

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \dots\dots\dots (12.45)$$

لپاره مو (۱۲. ۱۲) حالت مخ ته پروت دی. دوه برخې حالتونه باید په پام کې ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲، ۴۵) څخه لرو، $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له

(۱۲، ۴۵) څخه لرو. $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \dots\dots\dots (12.47)$$

په دې پورې د (۱۲، ۴۶) له مخې دواړه y - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \dots\dots\dots (12.48)$$

باید وازماییل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x_1, x_2, y_1, y_2 (تول) نابرابر په صفر دي . تل $x_1 > 1/2$ دی. که $x_2 = 0$ وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی که $y_1 = 0$ یا $y_2 = 0$ وی، نو لاندې به باور لرو دی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم لرو. $y_1 \neq 0; y_2 \neq 0$. په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷)، (۱۲ ، ۴۸) سره سم، دوه

مختلف ریيل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي

$$x_2, y_2 \text{ او } x_1, y_1$$

د

(۱۲ ، ۴۹) $1/4 - 1/a = 0 \Leftrightarrow a = 4$ لپاره (۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲ ، ۴۴) ډبل ریيل حل لري

$$x_1 = x_2 = 1/2 \quad (12, 50)$$

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل گڼ او بی پورې هم اړه لري.

$$y_1 = y_2 = 1 - 4 \cdot (1/2) = -1$$

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ ، ۱۹) یو ریل، ډبل گڼلی حل موجود دی

$$x_1 = x_2 = 1/2, y_1 = y_2 = -1 \quad (12, 51)$$

د

(۱۲ ، ۵۲) $1/4 - 1/a < 0 \Leftrightarrow 1/a > 1/4$ لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د $a > 0$ لپاره (۱۲ ، ۵۲) د $a < 4$ کټمټ (ورته) دی، او د $a < 0$ لپاره $a > 4$ سره کټمټ دی (له دې امله په ځټوالی یا تضاد).

نو د (۱۲ ، ۵۲) باور لري، د

$$0 < a < 4 \quad (12, 53)$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۵۷

لپاره . په دې حالت کې (۱۲ ، ۴۴) کونجوگيري کمپلکس اوبيوني لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; \dots\dots\dots (12.54)$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخې په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}i; \dots\dots\dots (12,55)$$

له دې ارزښتونو هېڅ هم صفر کېدی نه شي . پس په یوځای شوي یا راټوله توگه لرو:
برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$ په همدې ډول $a > 4$ لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره ریل ډبل گنلي اوبی (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوگيري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲. ۳ دریمه درجه مساوات يا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې n - (ام) درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره خپرو. د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y = P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (12, 57)$$

لاندې بنسټیز خویونه لري: که x ډیر لوی شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \rightarrow \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی د x^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیره جگړي او بیا همداسې و x ته هم . که a_1 او a_2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو $-x$ ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز $-x$ - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

$$x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow -\infty$$

لپاره . د دې ډول «پولو ارزښت یا لیمس» لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په پراخه توگه څیړل کيږي . د یو- x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چی د هغه

لپاره $y < 0$ وي اود $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (ارزښت) چې خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چې $y > 0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو ریيل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلگو کی سری کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته آزمائيلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \quad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$$X = 0, 1, -1, 2$$

$$Y = 12, 6, 12, 0$$

په دې توګه یو ریيل صفر ځای پیدا شو

$$x = 1 = 2 \quad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، د کومی له لارې چې

بیا د مت(توان) لوړولو ته اړتیا نه پیدا کيږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا

کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \quad (12, 60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 + (11/2)x^2 + 6x - 9/2 = 0 \quad (12, 61)$$

د صفر ځای پیدا کولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰) مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي

(ترتیب شي وشمیرل شي) ، ځکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0, 1, 1/2$$

$$Y = -9, 16, 0$$

نو

$$x = 1/2 \quad (12, 62)$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۵۹

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) يو رييل صفرځای دی

بیلگه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \quad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

$$X = 0, 1, -1, 2, -2, 3$$

$$Y = -27, -8, -64, -1, -25, 0$$

له لارې لاندې رييل صفرځای لاس ته راځي

$$x = 3 \quad (12, 64)$$

بیلگه ۱۲ . ۱۳ الف:

د برابرون

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \quad (12, 65)$$

لپاره د جدول

$$X = 0, 1$$

$$Y = -3, 0$$

سره لاندې صفرځای لاس ته راځي

$$x = 1 \quad (12, 66)$$

په ټوليزه توگه کيدی شي په کلکه څرگند شي ، چې د دريم درجی برابرونسيستم
(۱۲ . ۵۶) لپاره تل يو رييل اوبی یا حل x_1 شته دی. دا يو واقعيت دی چې بي له
ښوونۍ يی ليکو، چې دا پولینوم (۱۲ ، ۵۷) بي له پاتې په لاینيز فاکتور
($x - x_1$) ويشل کيدی شي او يو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:
$$(x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - x_1) = x^2 + b_1x + b_0$$

له دې امله داسی دی

جمله ۱۲. ۴ :

هر دريمه درجه برابر ون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه يو رييل اوبی x_1 لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0); \dots\dots\dots (12, 67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x_2 او x_3 لاس ته راځي که څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات $x^2 + b_1x + b_0 = 0$ اوبی شي، او د جمله ۱۲ . ۱۱ او ۱۲ . ۳ سره کيدی شي چی لاندې جمله فرمولبندي کړی شو

جمله ۱۲. ۵ :

هر دريمه درجه برابر ون دري اوبيوني يا اوبي x_1, x_2, x_3 لري او دا باور لري

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad (12, 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - دري رييل مختلف حلونه x_1, x_2 او x_3 شته دی (موجود دي)

۲ - يو رييل حل x_1 او ددې سره مختلف يو ډبل رييل حل $x_2 = x_3$ شته دی .

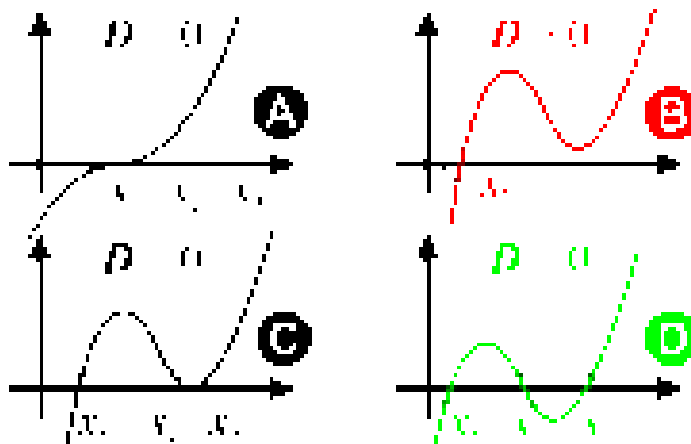
۳ - يو رييل درېگونى حل شته دی

$$x_1 = x_2 = x_3$$

۴ - يو رييل حل x_1 او يوه جوړه کونجوگيرت کملکس اوبيوني يا

اوبي $x_2 = x_3$ شته دی

دا لاندې څيره د ټولو راشنل فنکشنونو (۱۲ . ۵۷) تيپيکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه

۳۶۱

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمې درجي پولینومو لپاره د ویتا جمله تصدیق کړي چی د جملې ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x_1, x_2 او x_3 د دریمې درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اویوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a_0 = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (12,69)$$

$$a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad (12,70)$$

$$a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3) \quad (12,71)$$

جملې ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلگو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړو x_2 او x_3 اویوني ولټول شي.

بیلگه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی $x_1 = 2$ حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . ۲۲ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه-) ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6$$

$$\underline{x^3 + 2x^2}$$

$$\dots\dots - x^2 - 4x + 12$$

$$\dots\dots \underline{-x^2 + 2x} \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots - 6x + 12$$

$$\dots\dots\dots - 6x + 12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm 5/2,$$

$$x_2 = 3, x_3 = -2$$

۳۶۲

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

دلته د جملې ۱۲ . ۵ لومړۍ حالت لرو، د لاندې مختلفو رييلو ځوابونو سره

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -2,$$

او داسې دی:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

بيلگه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخې اوبی

$$x_1 = 1/2$$

لري او داسې دی:

$$(2x^3 + 11x^2 + 12x - 9):(x - 1/2) = 2x^2 + 12x + 18$$

$$2x^2 + 12x + 18 = 0 \quad \text{او له}$$

په همدې ډول يا (□) له $x^2 + 6x + 9 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د يوه رييل حل او يو بل له دې حل

مختلف ډبل رييل حل سره، يعنې لرو ، $x_1 = 1/2, x_2 = x_3 = -3$ او داسې دی

$$x^3 + (1/2)x^2 + 6x - 9/2 = (x - 1/2)(x + 3)^2$$

بيلگه ۱۲ . ۱۲ ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د (۱۲ . ۶۴) له مخې $x_1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3 - 9x^2 + 27x - 27):(x - 3) = x^2 - 6x + 9$$

له $x^2 - 6x + 9 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$$

نو دلته مو د جملې ۱۲ . ۵ د دريم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی يعنې

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسې دی

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۶۳

بیلگه ۱۲. ۱۳ ب: (۱۲. ۶۵) برابرون د (۱۲. ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب

$x_1 = 1$ لري، او داسی دی

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13):(x-1) = x^2 - 4x + 13$$

له $x^2 - 4x + 13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲. ۵ څلورم حالت د یوه رییل حل او یوه جوړه کونیوگیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + 3i, x_3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = (x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-1)(x^2 - 4x + 13)$$

۱۲. ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲. ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرگند شو چی ځنگه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دي سره n -می درجي برابرونو بدلیدي شي. دا دي دلته د بیلگو په څیر پاتي وي. یواځي رییل اوبیوني به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲. ۱۴:

د ریښی برابرون

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16; \dots\dots\dots (12, 72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واپړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2; \dots\dots\dots (12, 73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲. ۷۳) برابرون په (۱۲. ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرگندیږي چی دا د x -ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7 + 3\sqrt{5+4} = 7 + 3 \cdot 3 = 16$$

بیلگه ۱۲. ۱۵:

$$\text{د ریښی برابرېون یا مساوات} \\ \sqrt{2x+19}+5=0; \dots\dots\dots (12, 74)$$

کیدۍ شي په ساده بڼه وړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3; \dots\dots\dots (12, 75)$$

د ازماينې لپاره، که (۱۲. ۷۵) د پیل په برابرېون (۱۲. ۷۴) کی خوندي شي، نو دا

برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10 \neq 0$$

له دې امله ارزښت $x=3$ د برابرېون (۱۲. ۷۴) ځواب نه دی. په دې لاس ته راورنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرېون ځواب نه لري. داسې کیدۍ هم نه شي، ځکه چې تل $x+19 > 0$ دی.

دا ساده بیلگې موږ ته را ښايي چې باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چې ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسې ډول چې شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیردي چې ایا مساوات پوره کوي که نه. دا عمل یواځې د ازمايلو لپاره نه دی چې گوندي تیک یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دی.

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرېون:

$$f(x) = g(x) \quad (12, 76)$$

په یوې نوي بڼه وړول شي

$$F(x) = G(x) \quad (12, 77)$$

چې د برابرېون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي، یا تری کم شي، یاداوره خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چې په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوې د ریښی لاندې راشي او پایه توان پورته شي نود پیل برابرېون (۱۲، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرېون (۱۲). ۷۷ ځواب هم دی، مګر نه په څټ (برعکس، مخامخ). کیدۍ شي چې وړول شوی برابرېون (۱۲. ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرېون (۱۲، ۷۶) ته. دا به په لاندې بیلگه کې روښانه شي.

۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه

۳۶۵

بیلگه ۱۲. ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

$$x - x - 1 = 2x - 1 \quad (12, 78)$$

څلورۍ یا مربع ته د جگولو له لارې دا بڼه غوره کوي

$$x + (x - 1) - 2\sqrt{x(x - 1)} = 2x - 1$$

$$x + (x - 1) - 2x(x - 1) = 2x - 1,$$

$$\sqrt{x(x - 1)} = 0 \quad \text{نو}$$

په بیا څلورۍ یا مربع کولو سره سړی یو مربع مساوات لاس ته راوړي

$$x(x - 1) = 0 \quad (12, 79)$$

چی لاندې اوبی یا ځواب لري :

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \quad (12, 80)$$

داد (۱۲. ۷۹) اوبیونې دي، مگر باید و ازمایل شي چی ایا داد (۱۲. ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د $x = 0$ لپاره په (۱۲. ۷۸) کی دوه ریښې نه دي تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو $x = 0$ د (۱۲. ۷۸) اوبیونه نه ده .

د $x = 1$ لپاره لاس ته راځي $1 = 0 - 1$

له دې امله $x = 1$ د پیل بیلگی (۱۲. ۷۸) یوگونی ځواب یا اوبی دی .

بیلگه ۱۲. ۱۷:

د ریښې برابرون

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 3} - \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 7x + 3} = 0, \dots\dots\dots (12, 81)$$

کیدۍ شي چی په ورته ډول لکه (۱۲. ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 3} = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x^2 - 7x + 3} \Rightarrow$$

$$x(x - 3) = (x^2 - 4x + 3) + (2x^2 - 7x + 3) + 2\sqrt{(x^2 - 4x + 3)(2x^2 - 7x + 3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2 - 4x + 3)(2x^2 - 7x + 3)} = 2x^2 - 8x + 6$$

$$(x^2 - 4x + 3)(2x^2 - 7x + 3) = (x^2 - 4x + 3)^2; \dots\dots\dots (12, 82)$$

دا برابرون يا مساوات پوره دی، که $x^2 - 4x + 3 = 0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, \dots (12, 83)$$

د ټولنورو x لپاره $|x^2 - 4x + 3| = 0$ دی، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وويشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x_3 = 0, x_4 = x_1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمايل کيږي، چي کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پيل برابرون ډکوي. (باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پيل برابرون يا مساوات (۱۲ . ۸۱) اوبی يا حل دی . د

$$x_3 = 0 \text{ او } x_2 = 1,$$

لپاره ريښي پيژند نه لري يا تعريف نه دی، نو له دې امله د پيل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ - تمرينونه

۱ - مربع مساوات

۱، ۱ - مربع مساوات ډاکلو ضربيونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$

b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$

d) $5x^2 = 125x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$

b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$

d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

- 1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$
 c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$
- 1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$
 c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$
 d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$
- 1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$
 c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱. ۲ - مربع مساوات د ناتاکلو ضریبونو سره

- 1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$
 c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$
- 1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$
 c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$
- 1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$
 b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$
 c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$
 d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$
- 1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$
 c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$
 d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$
- 1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$
 c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱. ۳ - مساوات سیستم، کوم مو مربع مساوتو ته لارښودوي يا بيايي

- 1.3.1. a) $3x + 2y = 3$ b) $10x + y = 10$
 $xy = 3$ $5x(15x + y) = 75$
- c) $3x + 7y = 21$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$
 $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ $2x - y = 2$

1.3.2. a) $x + y = a$

$xy = b$

b) $xy = a$

$\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$

$bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱. ۴ - د n -مې درجې ځانگړي مساوات، چې په مربع مساوات بېرته اړول کیدی شي
۱. ۴ - ۱ - بې مربع مساوات د ټاکلو يا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱. ۴ - ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو يا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a - b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a + b} = x^2 + 4$

۱. ۴ - ۳ - د n -مې درجې مساوات د $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$

b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$

d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱. ۵ - لاندې مساوات هم د x او هم د a پسي حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}x - a = 0$

b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$

d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱. ۶ - شي شوالونه

۱. ۶ شي سوالونه

۱. ۶ الف دوه گڼونه ځان داسې نيسي لکه ۱ : ۳ . ددې گڼونو د مربع زیاتون

۱۵۶۰ دی. دا گڼونه څه نومېږي؟

(ب) د درې یو په بل پسې گڼونو د لوي گڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیو گڼونو د مربعو زیاتونونه. دا گڼونه څه نومېږي یا کوم دي؟
 (پ) د کوم مثبت گڼ لږ څله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟
 (ت) مات $1/4$ په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشی.

۶. ۲. الف) په یوه برابر برقجریان کې مقاومت په دیرش اوم 30Ω لویږي، په کوم کې چې د برققوه په همغه د 220 V (ولته) شپانونگ په پنځه امپیر ($1,65 \text{ A}$) کوچنی شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟
 (ب) دوه سیخونه چې مقاومت یې 60Ω یو له بل توپیر لري، یوه د غبرگ چالانولو عمومي مقاومت $22,5 \Omega$ لري. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶. ۳. الف) یوه د بایسکل ځغلوونکی لار چې $22,5$ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په درنیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي، چې له موټر په منځني سرعت چې $26,25 \text{ km/h}$ نسبت و بایسکل ځغلوونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلوونکي سرعت او د وهلو وخت څومره وي؟
 (ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5 km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکل سپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو، نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته گرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟
 (پ) دوه ډېډبي ځغاستي یو بل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور، په ډېډبیو ځغلي. د لمړي سرعت 5 متره په ثانیه کې، دوم څلور متره په ثانیه کې دوي له 3 ثانیو وروسته یو 35 متره لږوالی یو له بل لري، دوي یو

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لږوالی لرو، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د گادي يو لاین د موټر څغاسته سرک لمړۍ برخې سره غبرگ غزیدلی. د یوه موټر څغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي گادي واټن ۲۲۵ متره لري دی. کله دوه ماشینونه په همغه جگوالي دي، که موټر څغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د 10m/s^2 کی لري، په داسی حال کی چی د گادی سرعت ثابت او 72 km/h دی؟

ت) په منځنی سرعت $v_m = 18\text{km/h}$ په ۶ بجو له لایپخیر څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لایپخیر په لور راتلونکی بایسکل څغاستی سره مخامخ کیږي. ورستی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپخیر ته. د دیساو او لایپخیر ترمنځ لږوالی یا واټن څومره دی؟

۴. ۶. ۱ الف) په ولاړ کونجیز دریځوډي کې، کاتیتې ځانونه داسې یوبل سره نیسي لکه ۳:۴، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړ کونجیز دریځوډي اړخونه څومره لوي دي، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې ۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي؟

پ) د یوه سمکونجیز (ولاړ کونجیز) دریځوډي کاتیتې څومره لويي دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي، د دریځوډي هوار دنده ۲۱۶ مربع سانتي متره وي؟

ت) د یوه ولاړ څوډي نیمې (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ څوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتی متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لند کړي، نو مربع او سمکونجیز دواړه د هواړې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتی متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا دواړه اړخه)

ب) د یوې گردۍ وړانګه ۱۶ سانتی متره اوږده ده. په گردۍ کې دننه‌ځای مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا دواړه اړخه)

ج) د یوې گردۍ نیمې باید څومره لوي، که په دننه‌منځشوي مربع اړخ ۱ سانتی متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې گردۍ نیمې (قطر) ۳ سانتی متره لوي شي، نو د گردۍ هواره دوه برابره کیږي. د گردۍ سرچینې نیمې څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډې نیمې څومره دی، که د هغه د دایرې لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشکې یې ۵.۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ - د درېمې او څلورمې درجې مساوات

$$2.1 \quad a) \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$b) \quad x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$$

$$c) \quad 3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$$

$$d) \quad x^3 + x - 2 = 0$$

12.5 Übungsaufgaben

1

$$2.2. \quad a) \quad 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0 \quad b) \quad x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$c) \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0 \quad d) \quad 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

۳. رېښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اویونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکایي لپاره ازماښت وکړئ!

۳. ۱ - رېښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

$$3.1.1. \quad a) \quad \sqrt{x} = 3$$

$$b) \quad \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$$

$$c) \quad \frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$$

$$d) \quad \sqrt[3]{x} = 5$$

$$3.1.2. \quad a) \quad (3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$$

$$b) (5\sqrt{x} - 2)^2 + (12\sqrt{x} - 9)^2 = (13\sqrt{x} - 9)^2$$

$$c) \frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15} = \frac{4}{5}$$

$$d) \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3} = 7$$

$$3.1.3. a) \frac{\sqrt{x}-3}{7} - \frac{\sqrt{x}-25}{5} = 7 - \frac{2+\sqrt{x}}{4} \quad b) \frac{16-\sqrt{x}}{2} - \frac{10-\sqrt{x}}{3} = \sqrt{x}$$

$$c) \sqrt{x} + \sqrt{2x} = 1$$

$$d) 2\sqrt{x} - \sqrt{2x} = 2 + \sqrt{2}$$

$$3.1.4. a) 10 - \sqrt{x-2} = 3$$

$$b) \sqrt{3x-5} + 4 = 5$$

$$c) \sqrt[3]{7x-6} + 6 = 10$$

$$d) 4\sqrt[3]{5x-8} = 3\sqrt[3]{9x+1}$$

$$3.1.5. a) 9\sqrt{5x+1} = 20 + 4\sqrt{5x+1}$$

$$b) \sqrt{7x+2} = \frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$$

$$c) 3\sqrt{4x-3} - \frac{10x}{\sqrt{4x-3}} = \frac{1}{\sqrt{4x-3}}$$

$$d) \frac{9x}{\sqrt{10x-9}} - \sqrt{10x-9} = \frac{2}{\sqrt{10x-9}}$$

$$3.1.6. a) \sqrt{9x^2-10x-55} = 3x-5$$

$$b) x+1 = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

$$c) 17 - 4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}} = 1$$

$$d) 24 - 7 \cdot \sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}} = 3$$

$$3.1.7. a) \sqrt{52-3\sqrt{5x+6}} = 2\sqrt{10}$$

$$b) \sqrt{x+1} - \sqrt{2x+3} = 1$$

$$c) \sqrt{37-7\sqrt{5x+4}} = 4$$

$$d) \sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}} = 2$$

$$3.1.8. a) \sqrt{9x-17} - 3\sqrt{x-4} = 1$$

$$b) 2\sqrt{9x+4} - 3\sqrt{4x-11} = 1$$

$$c) \sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x-27}$$

$$d) \sqrt{9x+10} - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+9}$$

$$3.1.9. a) \sqrt{x+4} - \sqrt{x-8} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x+13} = 0$$

$$b) \sqrt{x+9} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x} + \sqrt{x-7}$$

$$c) \sqrt[3]{9x+10} - \sqrt{3x+4} = 0$$

$$d) |\sqrt{3x+7}| + |\sqrt{4-x}| = 3$$

$$3.1.10. a) \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{2x}{9}$$

$$b) \sqrt[3]{76+x} + \sqrt[3]{76-x} = 8$$

$$c) (\sqrt[3]{x}-1)^2 + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$$

$$d) \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0$$

۳. ۲ - ريښه مساوات د نامعلومو ضربيونو سره

- 3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$
 c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$
- 3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$
 c) $\sqrt[4]{a^4+x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6-x} = b$
- 3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$
 b) $(a - \sqrt{x})(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})(d + \sqrt{x})$
 c) $\frac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \frac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\frac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \frac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$
- 3.2.4. a) $\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left| \frac{(x+a)^2}{a(x-a)} \right|$
 c) $\frac{a+b\sqrt{x}}{a+b} = \frac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$ d) $\frac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b} = \frac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$
- 3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$
 c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x+a^2} - \sqrt{x} = b$
- 3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \frac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x-3a-4b} = \frac{2b}{\sqrt{x+a}}$
 c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$
 d) $\sqrt{3a-2b+2x} - 2\sqrt{3a-2b-2x} = \frac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$
- 3.2.7. a) $\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{b}$ b) $\frac{\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1} - \sqrt{3-x^2}} = \frac{a}{b}$
 c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

۳، ۳ - مساوات سيستمونه، چي ريښه مساوات خوندي لري

$$3.3.1 \quad a) \quad \begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 8 \\ \sqrt{xy} &= 15 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} x + y &= 58 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 10 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+2} &= 5 \\ x + y &= 16 \end{aligned}$$

$$d) \quad \begin{aligned} \sqrt{5-3x+x^2} + \sqrt{5-3y+y^2} &= 6 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

$$3.3.2 \quad a) \quad \begin{aligned} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{a}{b} \\ xy &= (a^2 - b^2)^2 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} &= \frac{a}{b} \\ x^3 - c^3 &= c^3 - y^3 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} x\sqrt{x+y} &= a \\ y\sqrt{x+y} &= b \end{aligned}$$

$$d) \quad \begin{aligned} x\sqrt[3]{x^2+y^2} &= a \\ y\sqrt[3]{x^2+y^2} &= b \end{aligned}$$

۱۳ ترانسځندنټ برابر ونونه يا - مساوات

لکه څنگه چې په ۱۲. برخه کې دې ته ګوته نيول شوې وه، چې دلته يواځې هغه ترانسځندنټ مساوات څيرل کيږي، کوم چې بيرته په الجبري مساواتو اړول کيدی شي. دا بيرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنگه په ريښه مساواتو کې، په خوښه په بل شکل اړول کيږي او په داسې ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو (فورم بدلون يا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کيدی شي چې اړولی فرمول زياتې اوبيونې يا حلونه نسبت د پيل برابر ون ته ولري. له دې امله بايد د اړول شوي برابر ون ټولې اوبيونې په پيل برابر ون کې ځاي په ځاي يا کيښوول شي او وکتل شي چې کوم له دې د پيل مساوات حلونه هم دي

لکه څنگه په ريښه يي برابر ونونو يا مساواتو کې، دلته هم يواځې رييل اوبيونې پلټل کيږي.

۱۳. ۱ لوگاريتمي مساوات

د لوگاريتمي مساواتو او اکسپوننشل يا په جگ مساواتو د حل (اوبي) پيدا کولو لپاره اړين يا ضرور (ضروري يا اړين شرايط) دی، چې د يو عدد (ګڼ) a لوگاريتم، د b په بنسټ، معلوم کړو يا وڅيرو.

$$x = \log_b a; a > 0, b > 0, b \neq 1 \dots \dots \dots (13,1)$$

د بنسټ $b = 10$ لپاره ($\lg a$) او د بنسټ $b = e$ لپاره ($\ln a$) کيدی شي (۱۳. ۱)

سیده د جبشمیری له لاری پیداشي. په څټ یا برعکس د $e|b|=10$ لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \dots \dots \dots (13,2)$$

د لوگاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$\log_b x = c \dots \dots \dots (13,3)$$

دا برابرون د (۱ . ۷) ، (۲ . ۷) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \dots \dots \dots (13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیری سره شمیرل کیدی شي.

$$\text{بیلگه ۱۳ . } \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284 \dots$$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بنی اویونه په لاندې تولید شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c \dots \dots \dots (13,5)$$

دلته $f(x)$ یوه الجبري ویینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c \dots \dots \dots (13,6)$$

تولي د (۱۳ . ۶) اویوني د (۱۳ . ۵) اویوني هم دي

بیلگه ۱۳ . ۲ : لوگاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتو سره کټمټ دي

$$x^2 + x + 6 = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \text{ (همداسی)}$$

او لاندې اویوني لري

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳. ۵) ډول (تیب) برابر ون هم مخ ته لرو، که د هغه کیني لور (ارخ) ته یو د لوگاریتم ریشنل لاینیز کمیشن الجبري وینه یا افاده موجوده وي

$$r_1 \cdot \log_b g_1(x) + r_2 \cdot \log_b g_2(x) + r_3 \cdot \log_b g_3(x) + \dots = c \dots (13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوگاریتم قوانینو (۷.۷)، (۹.۷) کارونې یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابر ونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1} \cdot \{g_2(x)\}^{r_2} \dots (13,8)$$

بیلګه ۱۳. ۳:

لومړۍ له $2 = \log_3(x-1) + \frac{1}{2} \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3(x-1)$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log \left[(x-1) \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

اوله دې څخه رینه برابر ون $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلورۍ یا مربع کولو څخه $x(x-1) = 81$ یعنې $x^2 - x - 81 = 0$ د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیک دا $x_1 = 9,515$ پیل برابر ون پوره کوي

. د $x = x_2 < 0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳. ۴:

له $\log_b(2x+3) = \log_b(x-1) - 1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b \left[\frac{(2x+3)}{(x-1)} \right] = 1$$

$$\text{او نور پسي } \frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b \text{ پس}$$

$$2x+3=bx-b$$

$$b+3=x(b-2)$$

$$x=(b+3)/(b-1)$$

پيل وینه يا افاده د $x > 1$ لپاره موخه وره يا هدفمنده ده، يعنې که $(b+3)/(b-2) > 1$ وي.

$$b+3 > b-2 \text{ يعني } b-2 > 0 \text{ څخه لاس ته راځ}$$

له دې لرو $3 > -2$ دا د ټولو b لپاره پوره دی

$$b \leq 2 \text{ لپاره د } b+3 < b-2 \text{ څخه } 3 \leq 2 \text{ لاس ته راځي اودا د هېڅ } b$$

لپاره باور نه لري .

له دې امله که د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوگاریتمي تیپ برابر ون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته وارول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \quad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینه يا افادې دي. د بدلون کاروایي يا عملیه اجرا کوو

$$y = \log_b f(x) \dots \dots \dots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابر ون اوبی کوو

$$F(y) = 0 \quad (13.11)$$

ددې اوبیونه $y_1, y_2, \dots$ په $(13/10)$ کی ږدو، نو د هر y_i لپاره د تیپ $(13/5)$

لوگاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x) = b^{y_i} \quad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابر ون پوره کوي، نو ټول ددې برابر ونونو اوبیوني يا ځوابونه باید په پیل برابر ون $(13/9)$ کی کیننول شي يا ځای په ځای شي،

بيلگه ۱۳. ۵: برابر ون $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$ د سبستځيوشن (بدلون) $y = \lg x$ سره په څلورۍ برابر ون $y^2 - y - 2 = 0$ بدليږي .
 د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
 له $\lg x = 2$ او $\lg x = -1$ لاس ته راځي
 $x_1 = 10^2 = 100$ او $x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$
 دواړه ځوابونه د پيل برابر ون ځوابونه دي.
 بيلگه ۱۳. ۶:

له برابر ون $(6 / (\lg x + 1)) + (8 / (\lg x - 1)) = 3$
 د، $x > 0$ مگر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چي د اصلي ماتلاندې $(\lg x + 1)(\lg x - 1)$ سره
 ځل شي، لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} 6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) &= 3(\lg^2 x - 1) \\ 6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 &= 3\lg^2 x - 3 \\ 0 &= 3\lg^2 x - 14\lg x - 5 \end{aligned}$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورۍ بني يا مربع فورم ته بيايي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0, \quad y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; \quad y_1 = \log x_1 = 5; \quad y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; \quad x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پيل مساوات پوره کوي.

۳۸۰ ترانسخندنت برابرونونه یا - مساوات

که په یوه برابرون کی لوگاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ وړول شي

بیلگه ۱۳ . ۷ :

$$\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(x-1) - 1 = 0, \log_2(x-1) = \frac{2}{3}, x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3} \log_2 4 + \frac{1}{3} \log_4 4 - 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل - یا په جگ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون (مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \dots \dots \dots (13, 14)$$

کیدی شي چی د لوگاریتم نیولو سره سملاسي حل شي (ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \quad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳، ۱۴) ډول (رقم) تیوپ) برابرونو باندې اړول کیدی شي.

بیلگه ۱۳ . ۸ :

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1 - 2^2) + 3^x(3^2 - 3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1,7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري ويښي يا افادي ($f(x)$) اکسپوننټونه يا جگگڼونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a \neq 1, b>0 \quad (13.16)$$

په دې ډول د لوگاريتمولو له لارې يو الجبري برابر ون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \dots\dots\dots (13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دي.

$$2^{x^2+x-4} = 4 \quad \text{بیلگه ۱۳ . ۹ : مساوات}$$

مولاندي څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات ته بيايي (لارښودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2, x_2 = -3$ ځوابونو سره ، کوم چې د پيل برابر ون او بيا وني يا ځوابونه هم دي .

بیلگه ۱۳ . ۱۰ :

په برابر ون $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ کې د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت

دي. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3, x_2 = -4$$

$$16^{(3^x)} = 4^{(6^x)} \quad \text{بیلگه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات}$$

کې کيدی شي چې ناپېژندونکي د اکسپوننټ يا په جگ څخه د دوه واره لوگاريتمولو

له لارې لاس ته راشي (راحل شي) :

۳۸۲ ۱۳ ترانسخندنت برابرونه یا - مساوات

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Rightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Rightarrow x \cdot \lg 0,5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2 \lg 2}{4 \lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0,5 = \lg 0,5 \quad \text{یا} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلگه ۱۲ . ۱۳ : $7^x \sqrt[2]{22} - 15^x \sqrt[2]{25} = 0$

یو د تیپ یا پوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{7^x \sqrt[2]{22}}{7^x \sqrt[2]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[2]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

اوله دې اړخ

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0,1677.$$

که د مساوات په کین اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننټونو سره، کیدی شي چې د لوگاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشي.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} \cdot a_2^{f_2(x)} \dots}{b_1^{g_1(x)} \cdot b_2^{g_2(x)} \dots} = c; \dots (13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x) \lg a_1 + f_2(x) \lg a_2 + \dots - g_1(x) \lg b_1 - g_2(x) \lg b_2 - \dots = \lg c \quad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چې د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري ویینه یا افاده F د الجبري اکسپوننټ $f(x)$ سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0; \dots (13,20)$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \quad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \quad (13.22)$$

د ټولو اوبيونو $y_1, y_2, y_3; \dots$ لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3, \dots \quad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i; i=1,2,3, \dots \quad (13.24)$$

اوبی شي

بيلگه ۱۳. ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کيدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوریبرابرون یا مربع مساوات $y^2 + y - 2 = 0$ بیرته وارول شي. لاس ته راځي

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 \cdot \lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2 \cdot \lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

بيلگه ۱۳. ۱۴:

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} \dots \dots \dots (13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \dots \dots \dots (13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y} - \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-1}; \dots\dots\dots (13, 27)$$

له دې څخه د مربع کولو له لارې لاس ته راځي:

$$y + y - 1 - 2\sqrt{y(y-1)} = 2y - 1 \Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)} = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0$$

$$y_1 = 0; y_2 = 1$$

تيك $y_2 = 1$ (۱۳، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1} = 1; \dots\dots\dots (13, 28)$$

حل اوبی . د لوگاریتمولو څخه تعقیبیري:

$$x^2 - 1 = \ln 1 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

دواړه ارزښتونه پیلبرارون پوره کوي.

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخه ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړۍ حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوگاریتم یوځای رامنځ ته کیږي.

بیلگه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x - \ln x + 1)} = 8$ څخه د بیلگي په توګه د بنسټ ۲ لوگاریتمولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلورۍ برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$ لاس ته راځي، د ځوابونو

$$y_1 = -1, y_2 = 2$$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$$\ln x = -1, \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e, x_2 = e^2$$

۱۳ . ۳ گونومتريکي- یا کونجکچ برابرون

د گونومتري ساده برابر ون لاندې څيره لري

$$\sin x = a, \cos x = a \quad (13.29)$$

$$\tan x = a, \cot x = a, \quad (13.30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابر ونونه (۱۳. ۲۹) ځوابونه لري، که $-1 \leq a \leq 1$ باور ولري، نور ارزښتونه $\sin x$ او $\cos x$ نه شي غوره کولی (پرته برخه ۶. ۳) د جشميرني سره د تکمو يا گوتکونو په پرلپسې د (۱۳. ۲۹) همداسې (۱۳. ۳۰) يو ځواب لاس ته راځي د (۱۳، ۲۹) لپاره

$$\cos \quad \sin \quad a \quad F \quad a \quad F$$

د (۱۳، ۳۰) لپاره

$$\tan \quad \tan \quad a \quad 1/x \quad a \quad F$$

دا چې $\tan x$ او $\cot x$ پريودي همداسې 180° لري او په يوه اينتروال کې چې اوږدوالی همداسې 180° لري د (۱۳. ۳۰) ټيک يو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳. ۱: که x_0 د (۱۳. ۳۰) يو ځواب وي چې د بيلگي په توگه د جشميرني په مرسته لاس ته راځي، نو د (۱۳. ۳۰) د لاندې بنی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13, 31)$$

په همدې ډول دي دلته هم د هندسې برخه په پام کې وي. چې د هغو له مخې په (۱۳، ۳۱) کې د بيلگي په توگه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^\circ + k.180^\circ$$

د کونجونو فنکشنونه $\sin x$ او $\cos x$ پريودي (تل بېرته راگېږدنه يا دوران)

$$2\pi = 360^\circ$$

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د
جېشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د $\sin x = a$ په حالت کی $x = -x_0$
هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د $\cos x = a$ په حالت کی یو بل اوبی
یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳. ۲: که x_0 د (۱۳، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه
په جېشمیروني لاس ته راځي، نو د $\sin x = a$ ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13, 32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180^\circ - x_0 + k.360^\circ; \dots (13, 33)$$

او د $\cos x = a$ ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13, 34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360^\circ; \dots (13, 35)$$

بیلګه ۱۳. ۱۶: د مساوات $\sin x = 0,23910$ لپاره د جېشمیرني سره لاندې حلونه
لاس ته راځي: (په درجه کچ یا گراد اندازه) $x_0 = 13,833427^\circ$
(په لینده کچ) $0,24143 = 0,017453. 3,833427$
د (۱۳. ۳۲) (،) ۱۳، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیوني راکړ شوي دي
 $x_k = 13,833427 + k.360^\circ = 0,24143 + k.6,28318$ ،
 $\bar{x}_k = 166,16657^\circ + k.360^\circ = 2,9001 + k.6,28318$.

بیلګه ۱۳. ۱۷: د برابرون $\cos x = -0,682000$ اوبیونه د جېشمیروني سره مومو

$$x_0 = 133,00013^\circ = 133^\circ = 2,32125.$$

د (۱۳، ۳۴) او (۱۳. ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133^\circ + k.360^\circ = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133^\circ + k.360^\circ = -2,34125 + k.6,28318$$

۳۸۷ ۱۳ ترانسځښندنټ برابر ونونه يا - مساوات

بيلگه ۱۳ . ۱۸:

د برابر ون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جېشميرني پيداكوو

$$x_0 = -59,999988^\circ = -60^\circ = -1,04718$$

له دې امله د (۱۳ . ۳۱) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = -60^\circ + k.180^\circ = -1,04718^\circ + k.3,14159$$

بيلگه ۱۳ . ۱۹:

د برابر ون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبيونې يا حلونه د جېشميرني سره داسې

$$x_0 = 11,666677^\circ = 11,67^\circ = 0,203675$$

لاس ته راځي. په دې توگه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$$x_k = 11,67^\circ + k.180^\circ = 0,203675 + k.3,14159$$

بيلگه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبيونه ل نه لري .

د گونومتري مساواتو نور ټيپونه يا ډولونه، كوم چې تراوسه په څرگندومتودو يا لارو ځوابور دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a, \quad \cos f(x) = a \quad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a, \quad \cot f(x) = a \quad (13.37)$$

دلته كيدى شي چې $f(x)$ الجبري او يا ترانسځيندنه افاده وي كه بدل (سوبستيتوتي) شي

$$y = f(x) \quad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a, \quad \cos y = a \quad (13.39)$$

$$\tan y = a, \quad \cot y = a \quad (13.40)$$

دا كيدى شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبى كړاى شي. ددې اوبيونې يا حلونه دې

$$y_1, y_2, y_3, \dots \text{ وي.}$$

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = y_i, i = 1, 2, 3, \dots$ ټولې اوبيونې يا حلونه لاس ته

راځي ددې لپاره دې بيلگه وركړ شي.

بيلگه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120^\circ)/3=1/2$

د سبستيجيوشن يا بدلون $y=(x-120^\circ)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبونې (حل) سره

$$y_k = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\bar{y}_k = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

ټول د $(x-120^\circ)/3 = y_k$, $(x-120^\circ)3 = y_k$ اوبونې (حلونو) په توگه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90^\circ + 3k \cdot 360^\circ + 120^\circ = 210^\circ + 3k \cdot 360^\circ$$

$$\bar{x}_k = 3\bar{y}_k + 120^\circ = 450^\circ + 3k \cdot 360^\circ + 120^\circ = 570^\circ + 3k \cdot 360^\circ$$

د گونومتري فنکشنونو يو بل ټيپ يا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x, \tan 2x, \cot 2x,$$

$$\sin 3x, \cos 3x, \tan 3x, \cot 3x, \dots) \quad (13.42)$$

دلته که د بيلگي په توگه بدل شي

$$y = \sin x \quad (13.43)$$

د ۴ . ۵ برخي تريگونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm \sqrt{1 - y^2}}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm \sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \pm 2y \sqrt{1 - y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{usw.} \end{array} \right)$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳) ، په y ، يو برابرون بدليږي:

$$F(y) = 0 \quad (13, 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې $y_1, y_2, y_3, \dots$ وي. نو بيا د (۴۳ . ۱۳) سره مناسب لرو

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳. ۴۲) کي بنول شي، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳. ۴۲) کیدی د x په ځای یوه افاده $g(x)$ هم ولیکلی شي.

$$f(\sin(x), \cos(x), \dots) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سری بدلوي

$$y = \sin(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلگي ورکول کيږي

بیلگه ۱۳. ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۱۳. ۴۲)، (۱۳. ۴۴) سره ځان په ریښه بېر ابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي، چی د $y_2=1$ لپاره برابرون (۱۳. ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳. ۴۹) تل پوره دي. د دې په څنډ یا خلاف y_1 فقط د (۱۳. ۵۰) حل دی، که د

ریښی له مخه زیاتیز یا مثبت نڅېنه وي. دا حالت یواځي هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x > 0$.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳. ۵۱) سره برابرون (۱۳. ۴۶) حل یا اوبی شي او

حل یا اوبونه یی په (۱۳. ۴۹) کی کینول شي:

$$\sin x = y_1 = 0, x_k = k\pi; k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1, x_k = \pi/2 + 2k; k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.53)$$

۳۹۰ ۱۳ ترانسخندنت برابرونونه یا - مساوات

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي:
د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$
د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$
د پیل مساوات د زیاتخه حلونه یواځې جفت ګڼونه دي ($x\pi = 2k\pi$) که (۱۳ . ۵۳)
په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي
 $\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$
له دې وروسته ټول x_k پیل برابرون پوره کوي .

نود (۴۹ . ۱۳) ټولې اوبیوني په لاندې بڼه لاس ته راځي
 $x_k = 2k, x_k = \pi/2 + 2k; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ (۱۳ . ۵۴)

بیلګه ۱۳ . ۲۳: د برابرون (13.55) $\cos x + \cos 2x = 0$
سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واورو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳،۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.
(13.58) $2y^2 + y - 1 = 0$

$$y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}, \quad \text{د دې حل سره:} \quad (13.59)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -1.$$

په (۵۶ . ۱۳) کې اینوولو له لارې لاس ته راځي
 $\cos x = y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_k = 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$

$$\bar{x}_k = 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \bar{x}_k = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \left\{ \begin{matrix} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{matrix} \right\} + k \cdot 360^\circ = \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{matrix} \right\} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ، ښتني سره یې ازمايل يا ازماښت اړیندی.

۱ - لوگاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$

b) $4 - 3 \lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1,314$

d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$

b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3} \ln x^6 = \frac{1}{2} \ln 81$

d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$

c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3 \lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$

b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$

d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$

b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$

d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5 \lg(1-x) = 6$

1.8. a) $2 \lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$

b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15x + 7 = 0$

d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

- 1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25 \lg x}$
 c) $x^{\log_5 (5x) - 4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$
- 1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$
 c) $\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg (3-x)}$ d) $x (\lg 5 - 1) = \lg (2^x + 1) - \lg 6$
- 1.11. a) $\log_2 [2 + \log_3 (x + 3)] = 0$ b) $\log_5 [\log_2 (\log_4 x)] = 0$
 c) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$ d) $\frac{\lg x}{\lg (x + 1)} = -1$

۲ - اکسپوننشل مساوات

- 2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5} (a^x)^{x-6}$
 c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $x^{-2} \sqrt{a^{11-x}} = 9^{-x} \sqrt{a^{x+3}}$
- 2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$
 c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$
- 2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$
 c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$
- 2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24 \frac{1}{10}$ b) $2^x \sqrt{3^{3x+2}} = 3^x \sqrt{2^{2x+3}}$
 c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$
- 2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$
 c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{x-1} \sqrt{3^{10x+5}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$
 e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$
 g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4\sqrt{x+1} = 64 \cdot 2\sqrt{x+1}$

- 2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^x = 2^{x+3} - 3^{x+2}$
 c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$
 e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$
 g) $3^{x+1} - 2 = 9^x$
 h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$
 i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$
 k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x$
- 2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5,08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$
 c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0,5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$
 e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12^{2x\sqrt{3}} - x\sqrt{3} = 27$
 g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$
 i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$
- 2.8. a) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^x + 1}{2^x - 4^x} = 6$
 c) $4 + \frac{2}{3^x - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$
 e) $x^x = x$

۳ - گونومتريکي - يا کونجکچيز مساوات

- 3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$
- 3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0,309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0,342$
 c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0,809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0,471$

- 3.3. a) $5 \sin^2 x - 10 \cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3} \sin x \cos x + \frac{2}{3} \sin^2 x = 1$
 c) $\cos^2 x + 2 \cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$
 e) $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$
 g) $\sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$
 i) $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$
 k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2} \sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$
- 3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$
 c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3 \cos x = 1$
 e) $\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2 \sin \frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$
 g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$
 h) $2 \sin x \cos 2x - 1 + 2 \cos 2x - \sin x = 0$
 i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2 \cot x = 0$
 k) $3 \cos 2x - 20 \sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2 \cos x + 1 = 0$
- 3.5. a) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 1$
 c) $\tan x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$
 e) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2 \sin^2 2x = 2 \sin^2 x$
 g) $5 \cos 2x + 16 \sin x + 14 \sin^2 x + 7 = 0$
 h) $3 \cos 2x - 6 \cos x + 4 \sin^2 x = -3$
 i) $2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$ j) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 0$
 k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$
- 3.6. a) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 8x - 0,5$
 c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$
 e) $2 \cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6 \sin x \cos x = \cos 4x$
 g) $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1$ h) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$

i) $\sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} = \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{x}{2}$

j) $\cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{9x}{2} \cos \frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2 \sin^3 x - 3 \sin x \cos x = 0$

b) $4 \sin^3 x - 8 \sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0$

d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 0$

b) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 1$

d) $\sqrt{2 \sin 2x} + 2 \sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

f) $2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2} \right)$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$

h) $\cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 0$

j) $1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$

l) $\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو او مطلقه ارزښتونو سره شميرنه

۱۴. ۱: نابرابرون (نامساوات)

۱۴. ۱. ۱ بنسټيزې کليمې او شميرقوانين

يو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه $T1$ او $T2$ د يوې اړيکښې $<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې يو د بل سره تړلي وي.

په لاندې کې به نابرابرونه تر څيرنې لاندې ونيول شي، چې يوه يا دوه ريښې واريابلی يا اوبستونې ولري. يو نابرابرون د دوه واريابلو (اوبستونو) سره د وينا منطقي په بنسټ يو د وينا شکل ښايي، د هغو سره چې واريابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چې ترمونه $T1$ او $T2$ څرگند دي. يو اوبی يا حل هر هغه ارزښت دی، په همدې توگه هغه ارزښت جوړه ده، چې واريابل يا اوبستونې يی غوره کولی شي او په ترم کې د هغې ځای په ځای کېدو سره نابرابرون يوه ريښتونی وينا وي. د ټولو اوبيونو يا ځوابونو ټولگه په حلپېرې L کې سره راټولېږي.

په لاندې برخه کې به ډير د وينا منطقي (وينا سم انديز) سومبولونه چې په برخه ۱. ۰ ۲ (او د ډيري عمليو سومبولونه) چې په برخه ۲. ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهميت يا غوره والي سره دې سړی بيا هم ځان اشنا کړي. د نابرابرونو سره شميرنه کې دې لاندې قاعدې په پام کې ونيول شي (مقايسه برخه ۳)، دلته دې a, b, c او d درييل گڼونه وي. لاندې باور لري

$$a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c, \quad (14,1)$$

$$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c \quad (14,2)$$

$$a:b < b:c \quad (14,2)$$

$$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c \quad (14,3)$$

$$a:c > b:c \quad (14,3)$$

$$a < b \wedge c = 0 \Rightarrow a.c = b.c \quad (14,4)$$

د برابر ونونو شمیرنۍ سره اندول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانگړې تر پام لاندې وي. د منفي يا کميز گڼ سره ځل يا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخبه راگرځي يا را په څټ کيږي يا که غواړۍ برعکس کيږي. د بيلگي په توگه $4 > 3$ مگر که داوړه خواوې د ۱ - سره ځل شي نو لاس ته راځي $3 < 4$ -

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړيکنخبو سره باور لري دا په دې مانا چې $a \leq b$ دا چی په څرگند ډول د دوه گڼونو ځل او ویش هلته زیاتيز (مثبت) دی چی دواړه گڼونه همغه مخنخبه ولري او کميز (منفي) که چیری مخنخبی یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b > 0 \Leftrightarrow \quad (14,5)$$

$$\Leftrightarrow a.b > 0 \quad (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0), \quad (14,5)$$

$$a.b < 0 \Leftrightarrow \quad (14,6)$$

$$\Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0). \quad (14,6)$$

د برابر ونونو شریکولو کی، په ځانگړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \neq 0$ يعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي. د بيلگي په توگه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge a \geq 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \quad (14,7)$$

$$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0) \quad (14,8)$$

۱۴. ۱ الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بيلگي په توگه د یوه فنکشن یا بلواک تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۱۴. ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلگڼونو R برخه ډیر) ده .

يو اينتروال له دې امله، بي له تشوالي يا تشي، د ګڼکړبڼی يوه ټاکلی برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابنديږي. که د غاړې ټکي په اينتروال کې دننه وي يا خوندي وي نو د بند

اينتروال څخه غږيږو او که اينتروال پورې اړه ونه لري، واز اينتروال دی، او په همدې ډول نيمبند او نيم واز اينتروالونه. د اوبديږی په ورکولو سره په ګڼکړبڼی باندې، لاندې د اينتروال انځورونه په کار اچول کيږي.

لاندې ۱۱ د اينتروال مختلف ټيپونه دي يا نې، چې a او b له R دي او $a < b$ ده.

$$1. (a, b) = \{x \mid a < x < b\} \text{ واز اينتروال، اخر تخري په اينتروال اړه نه لير}$$

$$2. [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \text{ بند اينتروال، اخر توري په اينتروال نوري اړه لري}$$

$$3. [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\} \text{ بڼی واز اينتروال}$$

$$4. (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\} \text{ کين واز اينتروال}$$

$$5. (a, \infty) = \{x \mid x > a\} \text{ بڼي لورته ناپاي او کين لور ته واز اينتروال}$$

$$6. [a, \infty) = \{x \mid x \geq a\} \text{ بڼي لور ته ناپای او کين لور ته بند اينتروال}$$

$$7. (-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \text{ بڼي لور ته واز او کين ورته ناپاي اينتروال}$$

$$8. (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \text{ بڼي لور ته بند او کين لورت ناپاي اينتروال}$$

$$9. (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \text{ ناپای اينتروال، ټول رييلګڼونه}$$

$$10. \{a\} \text{ د دې يوه توري ډيری}$$

$$11. \emptyset \text{ تشډيری}$$

لاندې اينتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي يانې په دې مانا، چې د ناپای ډيری

هم په اينتروال پورې اړه لري، يانې ناپای ډيری ټولنه ورسره جوړوي.

$$1. [-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \cup \{-\infty\}$$

$$2. [-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \cup \{-\infty\}$$

$$3. [a, \infty] = \{x \mid x \geq a\} \cup \{\infty\}$$

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \cup \{\infty\}$$

$$[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^+ .4$$

Alternative notation پورته ته الترناټيو يا بديلي ليکنښه

په نړيواله توگه يو بل ډول ليکنښه په لاندې ډول ورکولکيري

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

يادونه : داپورته د اينټروال ډولونه د نړيوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل
گرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{بند اينټروال : } \dots\dots\dots$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\} \quad \text{نیم واز اينټروال : } \dots\dots\dots$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\} \quad \text{نیم واز اينټروال : } \dots\dots\dots$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \quad \text{وازيټروال : } \dots\dots\dots$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \quad \text{بڼی بند ناپای اينټروال : } \dots\dots\dots$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\} \quad \text{کڼ بند ناپای اينټروال : } \dots\dots\dots$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \quad \text{بڼی واز ناپای اينټروال : } \dots\dots\dots$$

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\} \quad \text{کڼ واز ناپای اينټروال : } \dots\dots\dots$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \text{ د کڼکړښی ټکی دی}\} \quad \text{ناپای اينټروال : } \dots\dots\dots$$

بيلگه ۱۴ . الف:

په بنسټيزه ډيری R کی د لاندې برابرون پيژندډيری غوښتنه منځ ته راچوو.

$$x - 2 = 1 + 7 - x$$

۴۰۰

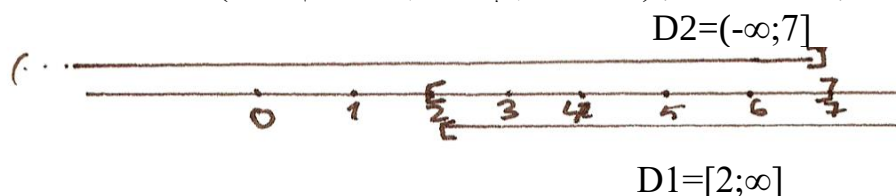
۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونونو
-----حل : د دې ترم $T_1(x) = x - 2$ پېژندډيری ده:

$$D_1 = [2, \infty)$$

په همدې توگه د ترم $T_2(x) = 1 + 7 - x$ پېژندډيری ی ده: $D_2 = (-\infty, 7]$
د برابرېون د پېژندډيری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2, \infty) \cap (-\infty, 7] = [2, 7]$$

لاندې څيره وگوري (متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)



۱۴. ۲۱. نابرابرون د يوې مجهولې سره

د شمير قاعدې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کيږي چې يوه اوښتونې يا مجهوله ولري، او اوبيوني يی په ټوليزه توگه د اينټروالونو له لارې انځوريزي.
(۱۴. ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زياتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرېونونو کې.

بيلگه ۱۴. ۱:

لرو $5x - 6 < 4 + 9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزياتوو، نو لرو $-4x < 10$
دواړه خواوې په ۴ - ويشو.

د (۱۴. ۳) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$ د اوبيوني ډير يا اوبيډيری: $L = (-5/2, \infty)$

که په يوه غوښتونکی ځل يا ویش کې ځله وونی، همداسي پرويشونی يو واريابل يا اووښتونی ترم وي، نو بايد د (۱۴. ۲) تر (۱۴. ۴) سره سم ددې ترم د مخخښي په واک والي کې د حالت توپيرونه (ښه يي: توپيره ونه) تر پام لاندې ونيول شي.

د یوگونو اوبیډیریو پیدا کول په هکله، په هر ډول چې وي، باید په پام کې ولرل شي، چې یواځې هغه د نابرابرون شمیرل شوي دي x - ارزښتونه اوبیوني دي، چې ټول یې سملاسي (په همدې وخت کې) هغه نیول شوي (فرض شوي) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډیری یا برخلږی کیدی شي چې د غوڅږی په څیر له هماغه هرپورتنې نمایندې برخساحو یا ورشو (یا نوره هم ښه: برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونې) او د نابرابرون ږیری شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅږی جوړښت، کیدی شي چې د یوگونو ږیریو د گرافیکي انځورونو په څیر په گڼورانگه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیری د برخ اوبیډیری یوه د یوگونو حالتونو ټولنډیری ده.

بیلگه ۱۴. ۲:

$$(3x-5)(x-2) < 4(x-2)$$

که په $(x-2)$ باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کې لرلو سره سم

$$x > 2 \text{ لپاره } (x-2) > 0$$

$$x = 2 \text{ لپاره } (x-2) = 0$$

$$x < 2 \text{ لپاره } (x-2) < 0$$

نابرابرن دي په درې برخه ساحو کې یو له بل بیل وڅیرل شي. لومړی حالت:

$$x > 2 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته ښه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځې هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون، چې په لومړي حالت کې راوړل شوي اوبیوني دي، یواځې هغه x د

$$x \in (2, \infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیږی لرو:

$$L_1 = (2, \infty) \cap (-\infty, 3] = (2, 3]$$

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لټه په ($x - 2$) باندې ویشل کیدی نه شي.د $x = 2$ ارزښت لیکلو رښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

$$L_2 = \{2\}$$

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د $x - 2 < 0$ له امله د ($۱۴ . ۳$) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون

لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چی په دریم حالت کی راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \emptyset$$

د برخه اوبیدیریو ټولنی څخه ټول اوبیدیر (لاس ته راځي):

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 3] \cup \{2\} \cup \emptyset = [2, 3]$$

نو ټولې اوبیوني هغه x دي د کومو لپاره چي لرو: $2 < x < 3$

په لاندې بیلگو کي نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلگه ۱۴ . ۳ :

$$(3x-1)/(2x+4) < 2$$

د شرایطو $|2x+4| \neq 0$ له مخی، دا په دې مانا چی $|x| \neq 2$ د مات لاندې سره ځله ونی له امله

$$(2x+4) > 0 \quad \text{د } x > -2 \text{ لپاره}$$

$$(2x+4) < 0 \quad \text{د } x < -2 \text{ لپاره}$$

سره سم یواځي دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

۴۰۳ ۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو د

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$

$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$

$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

څيره ۱۴ ۱ الف: دا څېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بيا دا اوبيډيری روښانه شو.

دوم حالت:

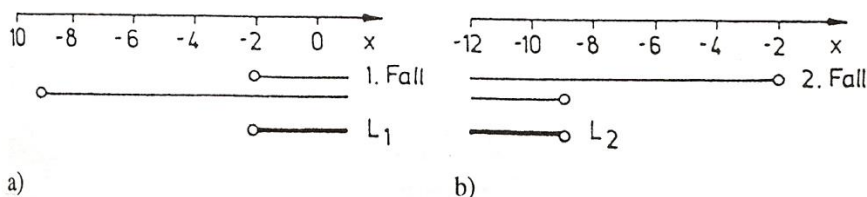
$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2)$$

$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$

$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -2)$$

پورته اخر د نابرابرون يا نامساوات حل يا اوبی دی.



a)

b)

Bild 14 1

څيره ۱۴ ب: دلته هم گڼونو کړنې شته، چې په هغې کې دا اوبيډيری روښانه کړل شوي دي، که څيره مې ونه کاروله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي.

د مخنځې راورلو په بنسټ د نابرابرن يوه ځانګړي بڼه يا فورم، چې په (۵.۱۴) تر (۸.۱۴) اړيکو کې استعمال شوي، اوبيونه ګټوره وښايي.

نابرابرونه

دلته هم څو بيلګې راورل کيږي، چې نابرابرونه په کې اوبی شوي دي.

دا برخه د نړيوالجال څخه راكښته شوي، له دې امله يې ليكښه د مخكنې ليكښې سره توپير لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0$$

$$x^2 - 5 < 0$$

$$|2x - 5| \leq x + 10$$

دلته اوبیوني اینتروالونه دي. بنول کيږي، چې اوبیډیری څنگه پیدا کيږي او د دې لپاره اړین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه گڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز گڼ سره حل شي یا په کمیز گڼ ویشل شي، نو مخنځېنه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښچ یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرې بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نځېنه غوره کوي او یا دواړه
- مونږ (1.9:1) اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلست یا اوبیډیری

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

۴۰۵ ۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونونو

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوښکړۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

مورن (1.9:2) اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|$ د روانه تشریح لپاره يا شننې لپاره
يو د حالت توپير رامنځ ته کوو :

په حالت کې $x \geq 0$ او $|x| = x$, $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}$. مانا لري

په حالت کې $x < 0$ او $|x| = -x$, $|x| < \sqrt{5}$ د $-x < \sqrt{5}$ په مانا يا
ورته $x > -\sqrt{5}$. نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوښکړۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

موږ 1.9:3 اوبی کوو دیوه حالت تو[پرسره

$$\iff x \leq 15, \quad 2x - 5 \leq x + 10$$

$$\iff 2x \geq 5 \iff x \geq \frac{5}{2} \quad 2x - 5 \geq 0$$

(i) که وي $2x - 5 \geq 0$; نو دی $|2x - 5| = 2x - 5$, او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) نو دی $2x - 5 < 0$. $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$-2x + 5 \leq x + 10 \iff -3x \leq 5 \iff x \geq -\frac{5}{3},$$

$$2x - 5 < 0 \iff 2x < 5 \iff x < \frac{5}{2}.$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبيونډيری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, 15\right] = \left(-\frac{5}{3}, 15\right].$$

په لاندې کې يو څو تمرينونه ورکړ شوي، که گران مينه وال يې غواړي تمرين کړي.

لاندې نابرابرونه اوبی کړی

$$\frac{3}{x+5} < 2, \quad (i)$$

$$\sqrt{x^2 + x + 2} > x, \quad (ii)$$

$$|x+5| > |x-2| \quad (iii)$$

بیلگه ۱۴. ۴:

$$1/(3-x) > 2/(x+6), \quad x \neq -6; \quad x \neq 3$$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د ځل له امله بايد بيا هم د هغه مخنځېنه په پام کې ونيول شي. شرايط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت دی، کیدی شي د (۱۴. ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6) > 0 \Leftrightarrow (3-x) > 0 \wedge x+6 > 0 \vee (3-x) < 0 \wedge x+6 < 0 \\ \Leftrightarrow (x < 3 \wedge x > -6) \vee (x > 3 \wedge x < -6) \Leftrightarrow -6 < x < 3$$

نو (۱۴. ۶) شووني کوي يا ممکنه وي، چی هغه ورشو (ساحه يا ډیری يا نه هم بنهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز يا نفي دی:

$$(3-x)(x+6) < 0 \Leftrightarrow (3-x) > 0 \wedge x+6 < 0 \vee (3-x) < 0 \wedge x+6 > 0 \\ \Leftrightarrow (x < 3 \wedge x < -6) \vee (x > 3 \wedge x > -6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x > 3$$

له دې امله د (۱۴. ۲) او (۱۴. ۳) په پام کې لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي: لمری حالت:

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6, 3)$$

د زیاتنیز ځله ووني يا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نڅېنه ساتلی پاتیري:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \infty),$$

$$L_2 = (-6, 3) \cap [0, \infty) = [0, 3) \dots (\text{mape}(\text{zirah})14.2a)$$

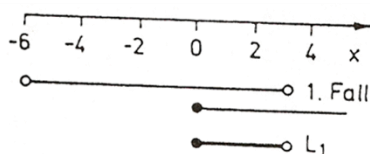
$$x < -6 \vee x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (3, \infty) \quad \text{دوم حالت :}$$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نڅېنه باندې راگرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس) تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

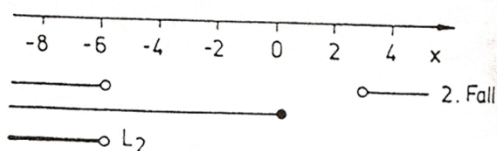
$$L_2 = [(-\infty, -6) \cup (3, \infty)] \cap (-\infty, 0) = (-\infty, -6) \dots (\text{mape}(\text{zirah})14.2b)$$

$$: L = L_1 \cup L_2 = [0, 3) \cup (-\infty, -6) = (-\infty, -6) \cup [0, 3)$$



a)

Bild 14.2 څیره



b)

د څلورۍ برابرون يا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلورۍ ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

$$\text{بیلگه ۱۴. ۵ : } -x^2+9x<0$$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره د x^2 د مخ (کین لور) کمیز - یا منفي ځلو، وونوباندې ویشل کیري:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چې دا نامساوات د ځل په څیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنڅېني په ځاي د مساواتنڅېني ځاي په ځاي کولو وروسته منځ ته راځي.

$$x^2 - (9/2)x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x < 4 \wedge x < \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < \frac{1}{2}$$

له دې سره د (۱۴. ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

$$L = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (4; \infty) = R \setminus \{\frac{1}{2}; 4\}$$

په دې برسیره دې په یاد وي چی داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کړي کښلو له مخی هم حل کیدی شي، په ځانگړي ډول هلته، چی اړوند مربع شکل ریيل حل نه لري، بالاخره پېپای کې د وېش د مخنښي راوړلو یوه بیلگه ښایو.

$$\frac{x+5}{3x-2} \leq 0, x \neq \frac{2}{3} \quad \text{بیلگه ۱۴. ۶.}$$

حل (۱۴، ۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x \geq -5 \wedge x < \frac{2}{3}) \vee (x \leq -5 \wedge x > \frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5 \leq x < \frac{2}{3}.$$

$$L = [-5, \frac{2}{3}).$$

د سیستم حل ډېری یا حل ست:

۱۴. ۱. ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپېژندونکې

یا مجهولې یا اوبنتوني سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیدیری L د یوگونو نابرابرونو اوبیدیریو غوڅدیری ده. گټور یا موخه ور به وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کې په نمره کړی شي، ددې لپاره چی دا یوگوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلگه ۱۴. ۷

$$5 - 2x \geq 3 - x$$

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$I. 5 - 2x \geq 3 - x \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow L_I = (-\infty, 2]$$

$$II. x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow (+1)(x - 6) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 6 \Rightarrow L_{II} = (-1, 6)$$

$$\Rightarrow L = L_I \cap L_{II} = (-\infty, 2] \cap (-1, 6) = (-1, 2]$$

د سیستم اوبیدیری: L دی

بیلگه ۱۴. ۸

$$-2 < \frac{4x-10}{x-1} < 3, x \neq 1$$

د داسې نابرابرونو ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2 < \frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1} < 3$$

د همغه فاکتور ($x-1$) سره د ځل اړین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونو لپاره غبرګ د لیدوړ بنی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یوور شي):
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

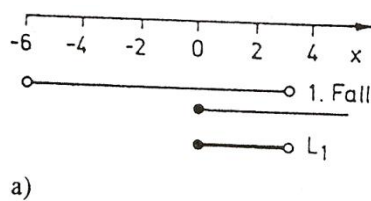
.....I.....II

1. Fall ⁽¹⁾	$-2x+2 < 4x-10$	$4x-10 < 3x-3$
$x \in (1, \infty)$	$\Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2, \infty).$	$\Leftrightarrow x < 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7).$
	$L_{I_1} = (1, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$	$L_{II_1} = (1, \infty) \cap (-\infty, 7) = (1, 7)$
2. Fall ⁽²⁾	$-2x+2 > 4x-10$	$4x-10 > 3x-3$
$x \in (-\infty, 1)$	$\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2).$	$\Leftrightarrow x > 7 \Leftrightarrow x \in (7, \infty).$
	$L_{I_2} = (-\infty, 1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, 1)$	$L_{II_2} = (-\infty, 1) \cap (7, \infty) = \emptyset$
	$L_I = L_{I_1} \cup L_{I_2}$	$L_{II} = L_{II_1} \cup L_{II_2}$
	$= (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$	$= (1, 7)$

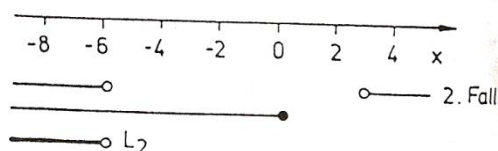
د LI او LII غوڅیږی جوړول بیرته کیدی شي چې د یوگونو او بیدیر یوګنورانګه باندې د لیدنې شي) (خیره ۱۴. ۳

د سیستم او بیدیری:

$$L = L_I \cap L_{II} = (2, 7)$$



a)



b)

۱۴. ۱. ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو يا مجهولو (ناپېژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - يا نابرابرونسيستمونو اوښديري د يوه اوښديري $R^2 = R \times R$ برخديري ده، چي د هوارې په څير د ليدني كيدي شي. له دې امله گرافيكي ښوونه د ټكو ډيري په څير په يوه كواوردينات سيستم كي مساعد دي. په دې برخه كي به موږ يواځي د لاندې ډول لايينز نابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \quad (\geq 0, < 0, \leq 0) \quad (14.9)$$

واريايلو يا اوښتونو x, y او ثابتو ځله وونو (ضريونو)

$$a, b, c \in R$$

سره د شرايطو $a=0 \vee b=0$ سره سم تر څيرني لاندې ونيسو.

كه ددې اړيكو نخښه د برابرېون سره بدله كړو نو د يوې كړښي برابرېون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، كومه چي د پروتولاړ - يا كواوردينات سيستم په دوه نيمو هوارو يا ستحو وېشي. د نابرابرونسيستم (۱۴. ۹)، چي ټيك په يوه له دې دوه هوارو كي باور لري، په راټلونكي بېلگه ۱۴. ۹ كي ښوول كيږي. د اوښديري په هواره كي د كړښونو يا كړښو كړښو كولو (د ډيرو كړښو كښلو) له لاري په نخښه كيدي شي. كه په نابرابرون كي برابرېون نه وي پريښوول شوي يعني برابرېون په كي نه وي ځاي شوي، نو راټولونكي كړښه د اوښديري پوري اړه نه لري او كيدي شي يواځي ټوټه ټوټه كړښي (پري لايين يا غوڅكړښو) په څير په نخښه شي، لكه څنگه چي د ډيري گرافيكي ښوونه ورځني يا بلده يا معمول ده. كه برابرېون ورپوري اړه ولري، نو كړښه د اوښديري پوري اړه لرونكي برخي په څير په نخښه كيږي.

بېلگه ۱۴. ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

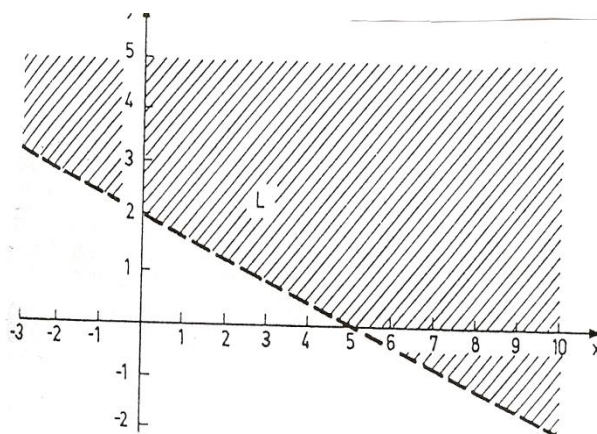
كه نابرابرون د y په لور اوبي شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، كوم چي په يوه كره نيولي x په روښانه توگه د لويو y - ارزښتونو لپاره پوره دي نسبت ورته برابرېون ته. له دې امله دهوارې چي د كړښي $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نيمی هوارې ټول ټكي اوښديري L جوړوي ش كه څيره ون كښل شوه، نو پل په پل داکار گران د شمير پوهني مينه وال كولي شوي (۱۴. ۴)

دا په بېلگه ۱۴. ۹ كي تشرېح تگلار په نابرابرون (۱۴. ۹) كي د مخه نيسي چي $b=0$ دي. په ټوليزه توگه يا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دي، چي د كواوردينات سيستم

يوه په خوښه ټاکلي ټکي ځای په ځای کولو کې ، چې په کرښه $ax+bx+c=0$ نه وي پروت .

ازمایو چې ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کې باور لري او یا نه. که ممکن وي نو د شمیرنې د ساده والي له امله ځانګړی ټکی $(0,0)$ ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کې ددې ټکي بدلون وروسته نارېښتیا وینا $10 < 0$ لاس ته راګوي او په دې ډول د اوبیدیرۍ پیداشوی ځای (ښه به پروتځای وي خو د لنډونې له امله ځای بسیا کوي) تصدیقوي. دلته یوه څیره کښل کيږي دلته د اوبښتونو پرځای ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو . په کواور دینات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبیدیرۍ ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښې هغه دکرښونو لور ته اوبیدیرۍ ده .

د یوه نابرابرونسیستم چې دوه مجهولې ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کيږي او بالاخره یې د یوګونو اوبیدیریو غوڅدیرۍ نیول کيږي یا جوړيږي.



ځیره
Bild 14.4

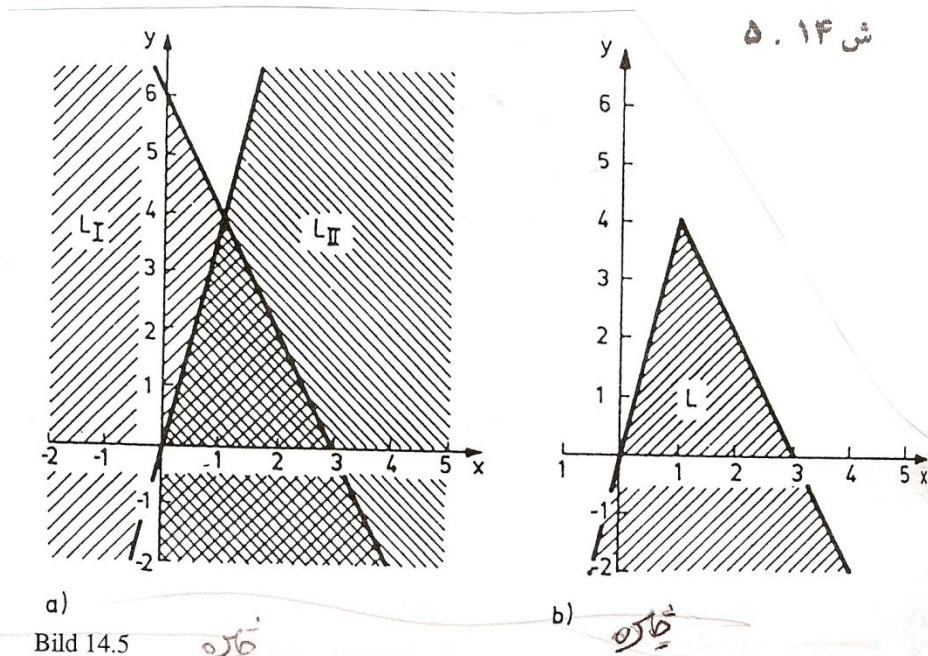
بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I. $2x+y<6$

II. $4x-y>0$

$(0,0)$ نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیدیرۍ LI کې پروت دی. دا چې په نابرابرون II کې د $(0,0)$ سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه $(1,0)$ کښنول شي، کوم چې د په څټوالي یا تضاد په لور ځي، او له

دې امله اوښديري LII کي نه دي پروت. (؟؟؟ش ۱۴. ۵ الف). ش ۱۴. ۵ ب دسيستم حلديري L بنيابي چي له دوه نيمکربنو بنديري يا له دوه نيم کرښو محدوديري. د وړانديزارزښت لري چي د تمرينونو په خپلواک کار کولو کي د غوښتونکو اوښديريو L د يوگونو نيمهوارو غوښديري حتي تر غاري پوري رنگينه يا کرښي کرښي راوکښل شي، چي په دې ډول يي يو کواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وکړي. ش ۱۴. ۵



بيلگه ۱۴. ۱۱:

I. $x-3y-6 < 0$

II. $-x+y+1 < 0$

III. $x-6 < 0$

دا اوښديري په ش ۱۴. ۶ کي انځور ۱۲ کرښي د پورته نابرابرونسيستم له مخه د هر نابرابرون لپاره کرښه کښل کيږي، په يوه کواوردينات سيستم کي او بيا د هوارې هغه برخه، چي دريواره کرو کي رابنده منهواره وي، هغه يي اوبی دی.

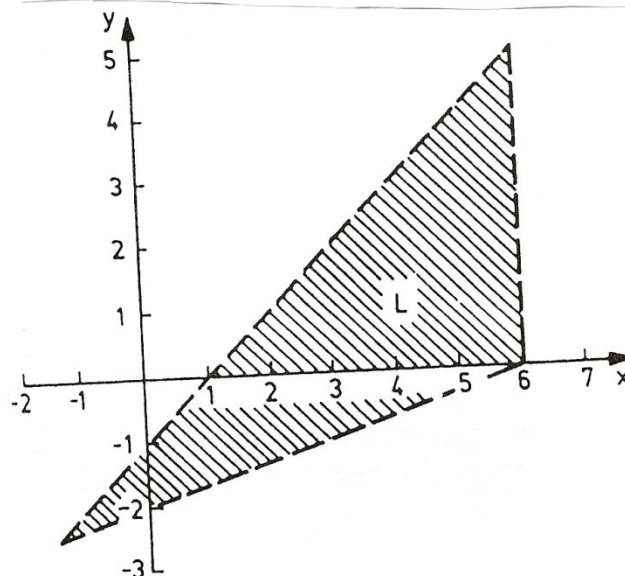


Bild 14.6

څېره

۱۴. ۲ برابرې او نابرابرې د مطلق ارزښتونو سره

۱۴. ۱۲ د مطلق ارزښتونو سره شمېرنه

که په یوه برابرې او نابرابرې کې د ترمونو د مطلق ارزښتونه د مجهولې په څېر رېښې واریږي یا اووېښتونی وي، نو د مجهول په لور له اېښتو د مخه باید یو د مطلق ارزښت خپلواک فورم پیدا شي. دا چې له برخې ۳ څخه څرګنده ده چې د یوه رېښې ګڼ مطلق ارزښت د

مخنځنۍ په واک په توپیري ډول جوړېږي نو د یوه ترم لیکل به له مطلق ارزښت، په پریښت کې دوه حالتونه توپیرېږي:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \quad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \quad (14,10)$$

که مطلقه ارزښت د صفر لوي يا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چې د مطلقه ارزښت لري پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخبو په ځای نوکان لیکل کيږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځليږي. هغه ټکي چې په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کيږي چې ځانونه په قاعده کې په اینټروال وښايي، کوم چې دیسیونکت (پردي) برخه ډیرې د اوبستونو چاپیریالونه دي، د کوم لپاره چې $T(x)$ ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابل چاپیریال ورکړي، کوم چې د کنټرول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځای کې دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چې د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a او b ریيل گڼونه وي ، نو لاندې باور لري کيږي .

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b| \quad \text{د } b \neq 0 \text{ لپاره}$$

۱۴ . ۲ . ۲ برابرې د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چې د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کې وازمایل شي چې ایا دا اوبیوني په نیول شوي یا فرض شوي اینټروال کې پراته دی او که یواځې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کيږي . یوگوني اوبیوني اوبیدیري L کې رایوځای کيږي. د مقایسې یا اندول یا پرتلی لپاره د برابرېونو هغه کرافیکي اوبیوني شونې یا ممکن دی، په کوم کې چې هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملي راورل کيږي یا رانیول کيږي او په x, y - پروت ولاړ - یا کواوردینات سیستم

کې انځورېږي .

د دواړو فنکشنونو غوڅکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کې د برابرېونو اوبیوني دي.

بیلگه ۱۴ . ۱۲ :

$$|x+1|=(x/2)+2$$

باور لري:

$$(x+1) \geq 0 \quad \text{د } x > -1 \text{ لپاره}$$

$$(x+1) < 0 \quad \text{د } x < -1 \text{ لپاره}$$

$$(14, 11) \quad \text{د } x \geq -1 \text{ لپاره } |x+1| = x+1$$

$$(14, 11) \quad \text{د } x < -1 \text{ لپاره } |x+1| = -x-1$$

لومړۍ حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

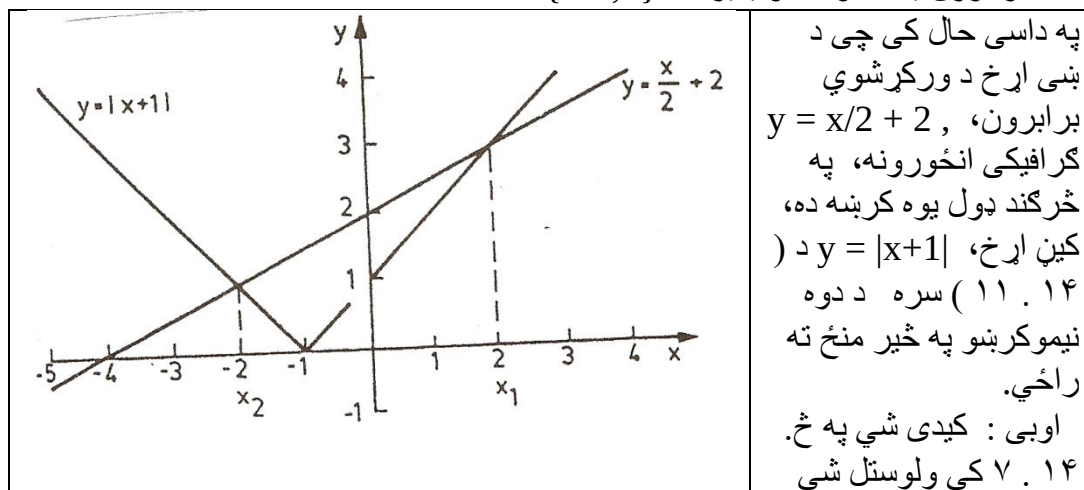
$$|x+1| = x/2 + 2 \Leftrightarrow x+1 = x/2 + 2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2 + 2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2 + 2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

$$L = \{-2, 2\} \quad \text{د برابرېون یا مساوات او بیدیرۍ}$$



که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شونې یا مساعد ده چې لومړۍ د هغه گټور انګه په هغه ځای کې ویشل شي، چېرته چې د ترمونو مخنځینه د مطلقه ارزښت په دننه کې تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسې لاس ته راغلو برخه اینټروالونو کې د لیدلو وړ یوځای راټول کړي.

بیلګه ۱۴. ۱۳:

$$|1-x|-|2x+3|=1$$

د (۱۴. ۱۰) پسې لرو:

$$x < 1 \quad \text{لپاره} \quad |1-x|=1-x$$

$$x > 1 \quad \text{لپاره} \quad =-1+x$$

او) لاندې او پورته هم لومړۍ له کین وېنې لورته لوستل کيږي

$$x > -3/2 \quad \text{لپاره} \quad |2x+3|=2x+3$$

$$x < -3/2 \quad \text{لپاره} \quad =-1x-3$$

یوځای راټول یا د گډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر نظر

$$x < -3/2 \quad -3/2 < x < 1 \quad x > 1$$

$$|-1+x| \quad 1-x \quad 1-x \quad -1+x$$

$$|2x+3| \quad 2x+3 \quad -2x-3 \quad |2x+3|$$

له دې امله د برابرې اوبې کۍ درې حالتونه توپيږو. بر سره پر دې باید کمیزه – یا منفي نڅېنه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کۍ ونيول شي: لمړۍ حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1-x-(-2x-3)=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3 \in (-\infty, -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

د حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1-x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -3x-2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty, -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1+x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -x-4=1 \Leftrightarrow x=-5 \notin (1, \infty)$$

په وروستۍ حالت کۍ شمیرل شوی ارزښت د نیونۍ سره په څې یا تضادکۍ دی، چې $x_3 = -5$

یوځای ښکارندېوله اوبې دی) دا په دې مانا چې یوځای د اوبې په څیر یا - غوندې ښکارېږي).

$$L = \{-3, -1\}$$

د ښکارندېوله اوبې منځ ته راتگ کیدی شي، چې د گراف اوبې – یا حللارې له لارې څرگند

شي. د کين اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواک يا ازاد ښودل کیدی شي چې ټوټه ټوټه د مخه تیر شوي شمیرنو په توگونو حالتونو کې لاس ته راځي. له دې امله تعقیبېږي:

$$x > -3/2 \text{ لپاره } = x+4$$

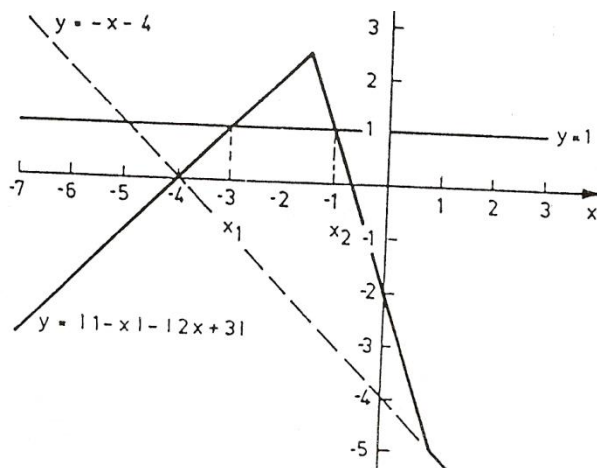
$$-2/3 < x < 1 \text{ لپاره } |1-x| - |2x+3| = -3x-2$$

$$x > 1 \text{ لپاره } = -x-4$$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن $y = 1$ دی. د مخه شمیرل شوو اوبيونو پرتلي له پرتلي مقایسې څیره شته، خو زما په ستونځو گرانل وستونکی اوس بلد دي ۱۴. ۸ ښايي، چې دواړه کږي رښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2 < x < 1$ لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مگر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کې د اړوند کږښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتلی راکوي، د کږښي $y = 1$ د حل په څیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی څیره (شاید داڅیره هم څیره نه شي، که کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ، نو نور به هم گټور به وي) ۱۴. ۸

دلته هغه څیره باید ریشی او یا راغلی وي، یا راغلی وی.



که د مطلقه ارزښت نخښی په یوه څلوري - يا مربع ترم کې له منځه وړل کيږي، نو کیدی شي چې د مخنځښي غوښتل شوي څیړنې چې په برخه ۱۴. ۱. ۲۰ کې تر څیړني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود گټه ترې واخستل شي. بیلگه ۱۴. ۵ دې مقایسه شي)

بیلگه ۱۴. ۱۴:

$$|x^2 - 6x + 5| = 3$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 5 \text{ د}$$

$$x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \text{ او}$$

سره لاس ته راځي

$$|x^2 - 6x + 5| = x^2 - 6x + 5 \text{ لپاره } x < 1 \vee x > 5 \text{ (14,12)}$$

$$|x^2 - 6x + 5| = -x^2 + 6x - 5 \text{ لپاره } 1 < x < 5 \text{ د (14,12)}$$

لومړۍ حالت: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

$$x^2 - 6x + 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0,$$

$$L \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{7} = 5,65 \in [5, \infty), x_2 = 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-\infty, 1]$$

دوم حالت: $x \in (1, 5)$

$$-x^2 + 6x - 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0,$$

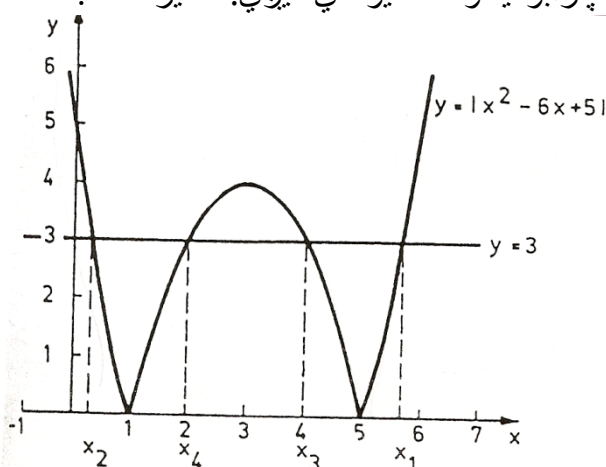
$$L \Rightarrow x_3 = 4 \in (1, 5), x_4 = 2 \in (1, 5)$$

پام: که چیرې حل یا اوبی مونه وو لیکلی او L مو لیکلی وو، نو دا د اوبی په مانا دی
المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي.

$$L = \{3 - \sqrt{7}; 2; 4; 3; 3 + \sqrt{7}\}$$

خیره ۱۴. ۹ د گراف له لاری اوبی بنایي. کین لور $y = |x^2 - 6x + 5|$

د (۱۴. ۱۲) له امله د پارابولیندو څخه یوځای کیږي. خیره ۱۴. ۹



خیره ۱۴. ۹

په ټوليزه توګه د يوه برابرون اوبې کي ، په کوم کي چي n مختلف ارزښتو ييني يا - افادې يعنې $|T_i(x)|$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه يو له بل توپير کيږي. دا د هغه کيدونکو کيدنو يا ممکن امکاناتو ګڼون يا تعداد دی ، کوم چي موجود دی ، چي د ترم $T_i(x)$ د تيب يا بني وي چي يا

$T_i(x) > 0$ او يا $T_i(x) < 0$ راکوي، يعنی د دوه توکو د واريښتن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښي د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰) قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټوليزه يا عمومي توګه دي اوبيوني $x_1, x_2, x_3, \dots$ ولرودی شي. يواځي دا بايد وازمايل شي ، چي ايا دا اوبي x_i پيلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټوليزې تګلار پسې موږ په بيلګي ۱۴ . ۱۳ کي د

$$T_1(x) = 1 - x, T_2(x) = 2x + 1$$

سره، په لاندې $4 = 2^2$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1. T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: (1 - x) - (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

$$2. T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: (1 - x) + (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_2 = -3.$$

$$3. T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1 - x) - (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_3 = -5.$$

$$4. T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1 - x) + (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{3}.$$

پيلبرابرون د $x_1 = 1, x_2 = -3$ لپاره پوره دي مګر د x_3 او x_4 لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرون ونو کي مطلقه ارزښتونه منځ ته راشي، نو داسي دي لکه په برخه ۱۴ . ۲ . ۲ کي د حالتونو توپير سره ونيسي يعنې د کارپيل په وکړي، کوم چي بي له مطلقه ارزښتنڅخه د انځوروني لپاره ضرر يا غوښتونکي دي. د واريابلو يا اووښتونکو اړونده برخه چاپيريال په دننه بيا مختلف نابرابرون ۱۴ . ۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بيرته د حالت توپير اړين دی

$$|7 - 3x| > 2 \quad \text{بيلګه ۱۴ . ۱۵} :$$

لومړۍ حالت:

$$7 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7 - 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3] = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7 - 3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7 + 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

 $\Rightarrow$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کېږي:

$$|x-5| < |x+1| \quad \text{بیلگه ۱۴. ۱۶:}$$

د یوگونو ترمونو انځورونه بې له ارزښتڅښنې:

$$|x-5| = x-5 \quad \text{د } x > 5 \text{ لپاره}$$

$$|x-5| = -x+5 \quad \text{د } x < 5 \text{ لپاره}$$

او

$$|x+1| = x+1 \quad \text{د } x \geq -1 \text{ لپاره}$$

$$|x+1| = -x-1 \quad \text{د } x \leq -1 \text{ لپاره}$$

په یوه لید وړ توگه په لاندې توگه راټولیکي رایوځاي کېږي یا راغونډیږي:

$$X > -1 \quad -1 \leq x < 5 \quad x \geq 5$$

$$|x-5| = \begin{matrix} -x+5 & -x+5 & x-5 \end{matrix}$$

$$|x+1| = \begin{matrix} -x-1 & x+1 & x+1 \end{matrix}$$

لومړۍ حالت: $x \in (-\infty, -1)$

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow -x+5 < -x-1 \Leftrightarrow 0 < -6$$

د هر $x < -1$ نابرابرون یوې نارښتیا وینا ته لارښودوي، چې په دې حالت کې کوم اوبڼه

$$L1 = \emptyset \quad \text{وي، دا په دې مانا چې:}$$

دوم حالات $x \in [-1, 5]$:

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow -x+5 < -x-1 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty]$$

$$L_2 = [-1, 5) \cap (2, 5) = (2, 5)$$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow x-5 < x+1 \Leftrightarrow 0 < 6$$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چي: $L_3 = [5, \infty)$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 5) \cup ([5, \infty)) = (2, \infty)$$

بیلگه ۱۴. ۱۷: $|x^2-4x-21| < 24$

$$x^2-4x-21 \geq 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x \geq 7 \quad \text{د}$$

$$x^2-4x-21 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 7 \quad \text{او}$$

څخه لاس ته راځي:

$$|x^2-4x-21| = x^2-4x-21 \quad \text{د لپاره } x < -3 \vee x \geq 7$$

$$= -x^2+4x+21 \quad \text{د لپاره } -3 < x < 7$$

لومړۍ حالت: $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

$$|x^2-4x-21| < 24 \Leftrightarrow x^2-4x-21 < 24 \Leftrightarrow x^2-4x-45 < 0$$

$$\Leftrightarrow -5 < x < 9 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-5, 9)$$

$$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)) \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$$

دویم حالت: $x \in (-3, 7)$

$$|x^2-4x-21| < 24 \Leftrightarrow -x^2+4x+21 < 24 \Leftrightarrow x^2-4x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$$

$$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1) \cup (3, \infty)) = (-3, 1) \cup (3, 7)$$

اوبیدیری:

$$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$$

دا بیلگي د دې درس لپاره بسيا کوي، دا بيا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې گرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کيږي او کړی شو، چي په گډه هره موضوع و غزوو.

په لاندې کې به په يوه بېلگه کې داسې نامساوات وڅيړو، په کومه کې چې مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کې منځ ته راشي.

بېلگه ۱۴. ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1, x \neq 1$

د (۱۰، ۱۴) له مخې د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴، ۲) او (۱۴، ۳) له مخې په هر وخت کې د همغه ترم منځښته بايد په پام کې ونيول شي. باور لري يا صدق کوي:

$$|1+2x| = 1+2x \quad \text{لپاره } x \geq -1/2$$

$$|1+2x| = -1-2x \quad \text{لپاره } x < -1/2$$

او

$$x < 1 \quad \text{لپاره } (1-x) > 0$$

$$x > 1 \quad \text{لپاره } (1-x) < 0$$

دلته هم په همغه دوه تيريدونکو ځايونو کې گڼورانگه سره بيله يا ټوټه کيږي، داسې چې په راتلونکو گڼلو کې يا ځانيزه توگه درې حالتونه يو له بل توپير لري.

$$x > 1 \quad -1 \leq x < 1 \quad x < -1/2$$

$$|1+2x| \quad -1-2x > \quad 1+2x \quad 1+2x$$

$$=1-x \quad >0 \quad >0 \quad <0$$

لومړۍ حالت: $x \in (-\infty, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [-2, \infty)$$

$$L_1 = (-\infty, -1/2) \cap [-2, \infty) = [-2, -1/2)$$

دويم حالت: $x \in [-1/2, 1)$

$$1+2x < 1-x \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

$$L_2 = [-1/2, 1) \cap (-\infty, 0) = [-1/2, 0)$$

درېم حالت:

$$x \in (1, oe)$$

$$1 + 2x \geq 1 - x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, oe)$$

$$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$$

د حلونو سټ (اوبیدیری):

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2; 0] \cup (1, oe)$$

د دوه ناپېژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیری پیدا کولو لپاره هم باید لمری ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوبستونکو x او y سره، د یوه لایني ترم ارزښت سره، باور لري:

$$(14, 13) \text{ د } ax + by + c \geq 0 \text{ لپاره } = ax + by + c$$

$$(14, 13) \text{ د } ax + by + c < 0 \text{ لپاره } |ax + by + c| = -(ax + by + c)$$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \vee b \neq 0$

دواړه بني لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوي بني (۱۴ . ۹) نابرابرون

هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوي، یو له بل بیلی یا جدا، د x, y -هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلگه ۱۴ . ۱۹:

$$|x - y + 1| > x - 2x - 4$$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

$$-x - y + 1 \geq 0 \text{ لپاره } |x - y + 1| = -x - y + 1$$

$$-x - y + 1 < 0 \text{ لپاره } = x + y - 1$$

لومړی حالت: $-x - y + 1 > 0$

$$|x - y + 1| > x - 2y - 4 \Leftrightarrow -x - y + 1 > x - 2y - 4 \Leftrightarrow -2x + y + 5 > 0$$

$$L1 = \{(x, y) | -x - y + 1 \geq 0, -2x + y + 5 > 0\}$$

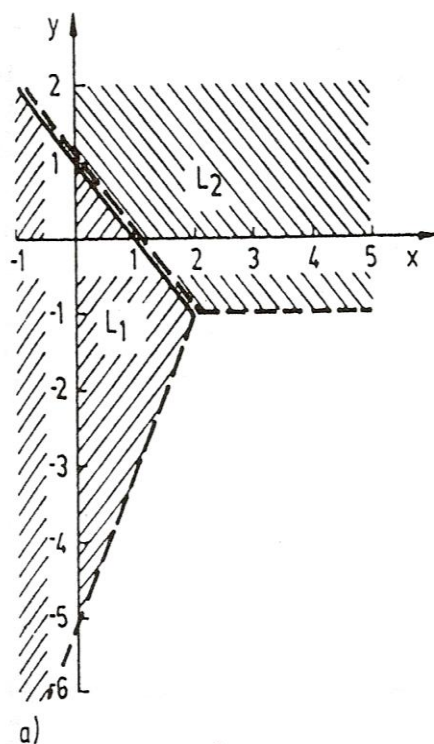
دوم حالت: $x - y + 1 < 0$

$$|x - y + 1| > x - 2y - 4 \Leftrightarrow x + y - 1 > x - 2y - 4 \Leftrightarrow 3y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < -1$$

$$L2 = \{(x,y) | -x-y+1 < 0, y > -1\}$$

له دې سره $L1$ او $L2$ د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونو غوڅیږئ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیدیرۍ بیرته د ورګر شوو نابرابرونو برخ اوبیدیر یو ټولنډیرۍ ده (څیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه) .

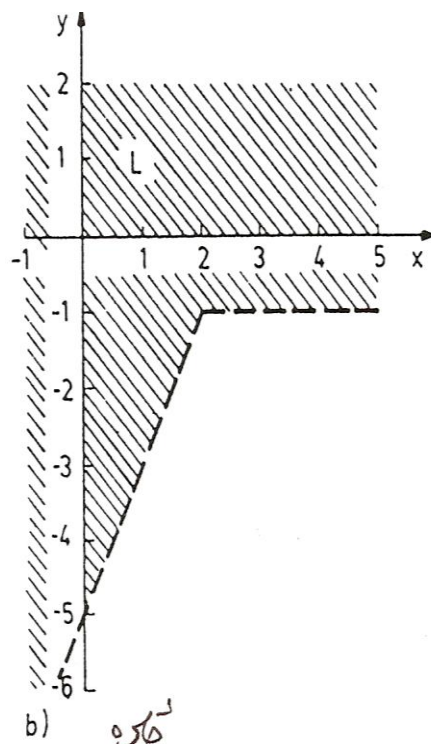
که په یوه نابرابرون کې دوه ارزښت افادې یا – وینې د (۱۴ . ۱۳) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت تریام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.



a)

Bild 14.10

ټاکړه



b)

ټاکړه

تمرینونه

لاندې نامساواتو حلېږئ پيدا کړئ

1. a) $8x - 3 < 2x + 9$ b) $5 - 7x \leq 3x - 10$
c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$ d) $3(3x - 2) \geq 4(3 - 2x)$
e) $\frac{8x-5}{5} \leq \frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$
g) $\frac{8}{9} + 6x \geq 2(\frac{5}{6} + 3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$
2. a) $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$ f) $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$
b) $(8x - 9)(3x + 2) \geq (2 + 7x)(2 + 3x)$ h) $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$
c) $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$
d) $(5 + 2x)(7 - 5x) \leq (10 + 4x)(2 - 3x)$
e) $x^2 - x - 6 \leq 2x + 4$
3. a) $\frac{3}{2x-4} \leq 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x} \geq 4$
c) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$ d) $\frac{5x+3}{x} < -2$
e) $\frac{4x+1}{3x-2} > 5$ f) $\frac{9-3x}{x-3} > -3$
g) $\frac{4x+6}{2x+3} < 3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1} \geq 12 - \frac{2(4x-5)}{x-1}$
4. a) $\frac{3}{4x-4} \leq \frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x} > \frac{1}{5x+4}$
c) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1} \leq \frac{2x+3}{x+2}$
e) $\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{3x+1}{x-2} > 4$ f) $\frac{x-3}{1-6x} - \frac{2x+1}{4x+3} \geq -\frac{2}{3}$
g) $\frac{2x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{3x-3} \geq 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x} - \frac{2-6x}{1-3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$
5. a) $(2x - 3)(3x - 2) < 0$ b) $(x + 3)(7 - x) \leq 0$
c) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ d) $x^2 - 8x + 7 \leq 0$
e) $x^2 + 4x + 5 < 0$ f) $x^2 - 6x + 10 > 0$

- g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$
6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \leq 0$
- c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \geq 0$
- e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$
- g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \leq 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$
7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$
- c) $\frac{2x+3}{3x-4} \leq 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \geq 0$
- e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$
- g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \geq 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \leq 0$
8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$
- c) $8(x-2) \geq \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساوات سیستمونو حل دېرې وټاکي

9. a) $2 + x \geq 2x - 7$
 $5(x - 3) \geq 2(x - 3)$ b) $x + 6 < 14 - 3x$
 $6 + 7x \geq 3x + 5$
- c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$ d) $x + \frac{1}{3} \leq 2x - \frac{7}{6}$
 $5(x - \frac{3}{2}) \leq 2x - 3$
10. a) $x^2 - 3x < 0$
 $2(x + 2) < 4x - 1$ b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
 $2(x + 2) > x + 3$
- c) $x^2 - 9 < 0$
 $x + 2 > 2(x - 1)$ d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
 $4(x - 1) < 2(x + 1)$
11. a) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$
 $x^2 + 6x - 16 < 0$ b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
 $x^2 - 3x - 4 > 0$
- c) $x^2 - 5x > 0$
 $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
 $x^2 + 8x + 15 < 0$

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$
c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$
13. a) $3 - x < 2 - 4x$ b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
 $x + 3 < \frac{1}{2}(x + 1)$ $4(x - 1) < 13 - \frac{1}{4}x$
 $\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$ $2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساوات سیستمونو حلېدې په کار تیزې کړاوردینات –
یا پروتولار سیستم کې گرافیکي انځور کړی.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$
c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$
e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$
g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$
15. a) $2x + 3y > -6$ b) $3x - y > 3$
 $x - y < 2$ $x + y > 4$
c) $x > 1$ d) $x - 4y - 6 \leq 0$
 $x + 2y < 4$ $2x + y - 3 \leq 0$
 $y + 3 > x$ $y - 5 \leq 0$
16. a) $-2 < x + y < 2$ b) $x > 2$
 $-2 < x - y < 2$ $-3 < y < 2 + x$
 $x + y < 5$
c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حلېدې د شمیرلو او همداسې گرافیکي لارې پیدا کړی.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$
c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$
e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$
g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$
18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

c) $|2x - x^2| = 8$

d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$

f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$

h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1$

b) $\left| \frac{2x-4}{x+3} \right| = 2$

د لاندې نامساواتو حلډبرې پيدا کړئ

20. a) $|x - 2| < 3$

b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$

d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$

f) $|3x + 3| \geq \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$

h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$

b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$

d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$

f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$

h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left| \frac{x+3}{1-x} \right| > 3$

b) $\left| \frac{1-4x}{2-x} \right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$

d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left| \frac{3}{4} + \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$

f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډبرې په يوه په يوه کواورډيناتسيستم کې انځور کړئ او انځور يې وکارئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$

b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$

d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$

f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$

h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

۱۵ فنکشنونه (بلواک یا تابع)

۱۵. ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخې په پیل کې دې کلیمې ته د لوستونکو پام راوگرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنې څیړونې، چې په هندسه کې خورا ډیره کارول کېږي یا استعمالېږي، کله د تابع (بلواک) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځمور په دې کار کې بلل شوې چې موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواک وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کې به وگور چې خپلواکۍ او بلواکۍ ناپیوندونکې ځمور د څیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵. ۱:

د یوې ریښې واریابلی ریښه فنکشن (لنډ: فنکشن) د ریښو گڼونو ډیری باندې، د یوې ډیرې $D \subseteq R$ یوه یواځنې څیړونه ده. D د پیژند ډیری نومېږي. د ټولو ارزښتونو ډیرې چې y یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژند ډیرې یا تعریف ډیرې په دننه کې وځغلي، د ارزښت ډیرې W بلل کېږي. دې وي قانونمندی f له مخې هر $x \in M$ یواځنې یوه $y \in W$ باندې تنظیمېږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواک واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کېږي یا نومېږي او y بلواک واریابل یا اووښتونی بلل کېږي

د فنکشن مختلف انځورېولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن «کلیمه انځورونه» یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیک څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیک صرف نظر کوونکی، مگر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلگه ۱۵. ۱: هر رییل گڼ د همغه رییلگڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلگه ۱۵. ۲: هر یو منفي گڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت گڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو گڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو، زیاتون، کمون، ځل، ویش، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵.۴).

بیلگی ۱۵. ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R, W=R$

بیلگی ۱۵. ۲ ته: $y=|x|$ د $x < 0$ لپاره

دلته $y=x^2$ د $x > 0$ لپاره $D=R, W=[0, \infty)$

پام دې وي چی په داسی حالت کي له کین و ښي لور ته یا گډوډلوسټل کیری یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چیرې x له ۰ کوچنی وي. داسی لیکنو ته دی گران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو). تحلیلي (شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت (واضح) روښانه و څرگند) $explicit$ نومیري، که د فنکشن برابر و، لکه په بیلگو ۱۵، ۱ او ۱۵. ۲ چی په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y=f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیځیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی $implicit$) بلل کیږي یا نومیري. د بیلگی په توگه به $2y-x-1=0$ $D=R, W=R$ فنکشن د بیلگي ۱۵. ۱ یو ایمپلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شننیزه بڼه (ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیځیت شننیزه یا سپرنیزه بڼه (تحلیلي فورم) وړول شي. د بیلگی په توگه: که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دی.

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونې ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لارې لارښودلږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحې څخه)
 $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$
 په یو ارزښتجوړې x, y تنظیمږي.

بیلګه ۱۵. ۱ ته: $x=2t, y=t+1; -\infty < t < \infty$ به یوه پارامتری انځورونه وی او $x=t, y=t/2+1$ به یوه بله پارامتری انځورونه وي. زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کېږي
 بیلګې ۱۵. ۱ ته:

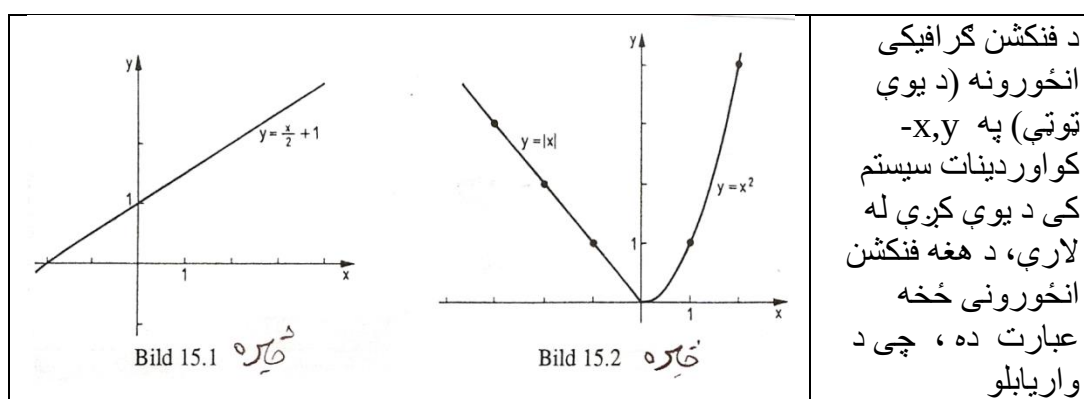
X -2 -1 0 1 2

Y 2 0,5 1 1,5 2

بیلګې ۱۵ ، ۲ ته:

X.... -3 2 -1 0 1 2 3 ...

Y.... 3 2 1 0 1 4 9 ...



یا اووښتونو جوړې د x, y - هواره یا سطحه کې یواځني او بواځني ټکي باندې تنظیمږي. څیره ۱۵. ۱ او ۱۵. ۲ (بیلګې ۱۵. ۲ ته بیلګې ۱۵. ۱ ته

۱۵. ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پېژند ۱۵. ۲: $y = f(x)$

په اینتروال $[a, b]$ کې هلته او هلته یا ټیک هلته مونوتون جگیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
 $x \in [a, b] \wedge y \in [a, b]$ لپاره $x_1 < x_2$ سره باور ولري:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

که د برابر ورننځېسه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیرو.

وېیلگی ۱۵. ۱ ته: $y = (1/2)x + 1$ په $D = R$ کې کلک مونوتون دی

و بیلگی ۱۵. ۲ ته: $y = |x|$ د $x < 0$ لپاره

او $y = x^2$ د $x > 0$ لپاره

په اینتروال $(0, \infty)$ کې مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی

او په اینتروال $(0, \infty)$ کې مونوتون جگیدونکی دی

پېژند یا تعریف ۱۵. ۳:

په یوه اینتروال $[-a, a]$ کې یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت)
(یا سیومتریک symetrisch, نا جوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریک antisymetrisch)
بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریک و y - محور ته ځغلي (دلته هم
څیره شته، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵. ۳، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا
مرکزي سیومتریک ځغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ ش ۱۵. ۴)

بیلگه ۱۵. ۳:

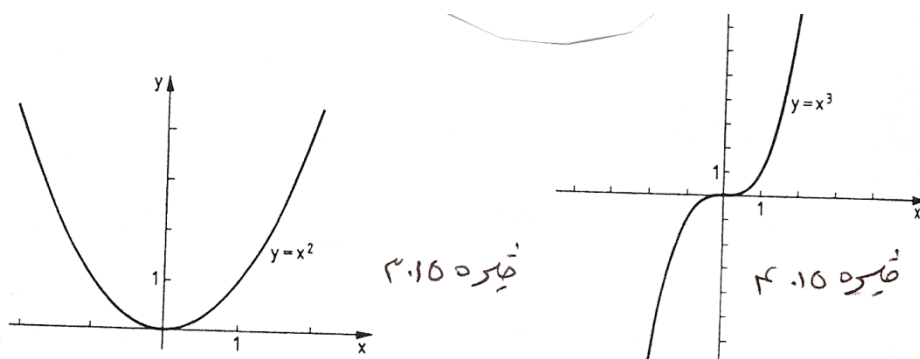
فنکشن $y = x^2, D = R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$

بیلگه ۱۵. ۴

فنکشن $y = x^3, D = R$
یو نا جوړه یا طاق فنکشن دی:

$$(-x^3) = -x^3$$



د بیلګې ۱۵. ۱ او ۱۵. ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

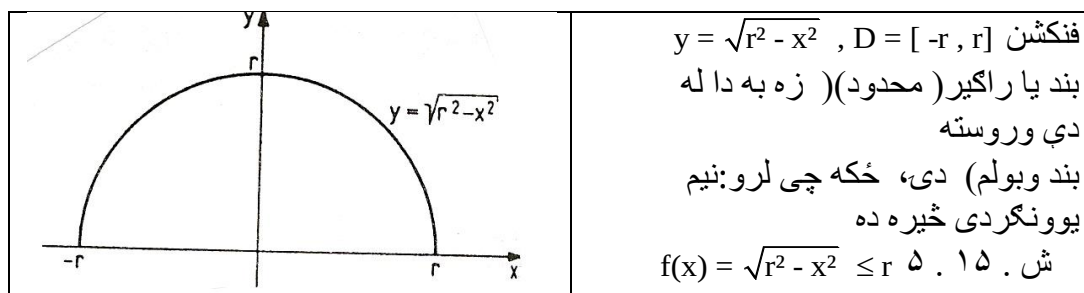
پیژند ۱۵. ۴:

$y = f(x)$ ټیګ هلته په D (پیژندډیری ده) بند یا رابند (محدود) بلل کیږي که

یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلګه ۱۵. ۵:



پیژند ۱۵. ۵:

$y = f(x)$ پریودیکی (دوراني یا بیرته-یا تل بیرته راگرځیدونکی periodical بلل

کیږي د دوران یا راگرځیدونکی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راگرځیدونکو (پریودیکی) فنکشنونو تیوپیکی بیلګې تریگونومتريکي

فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵. ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

تول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفر ځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داخلونه د $-x$ محور سره د فنکشن کږې د غوڅتکو x - ارزښتونه دي.

بیلگی ۱۵ . ۱ ته:

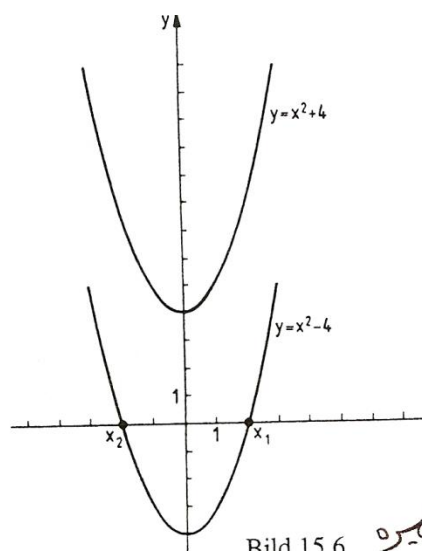
د فنکشن $y = 1/2 x + 1$ صفر ځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

بیلگه ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفر ځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفر ځایونه نه لري. (بیا هم څیره ۱۵ . ۶)



څیره

Bild 15.6

پېژند ۱۵ . ۷:

$$x \in D, y \in W \quad y = f(x),$$

یو یواځنی «یا یواځنی او یواځنی بلل کیري، که هر یو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واک کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: $(y = f(x))$ یو یواځنی یا یواځنی او یواځنی فنکشن په څټکیدونکی دی، دا په دی مانا چي دا یو فنکشن $(x = g(y))$ تعریفوي، یعنی په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی (نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توگه لرو $y = g(x)$ دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروج څیره ده، چی x خپلواک او y پلواک، دلته د x په واک کی واریابل یا مجهولی یا ناپیزندونکی دي د $y = f(x)$ په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن $y = x$ د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ (-ورته) identic دی. د په څټ یا

$$\text{برعکس فنکشن} \quad y = f^{-1}(x)$$

کرافیکی څیره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ (هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډی: هندارونه) ده.

بیلگي ۱۵، ۱ ته:

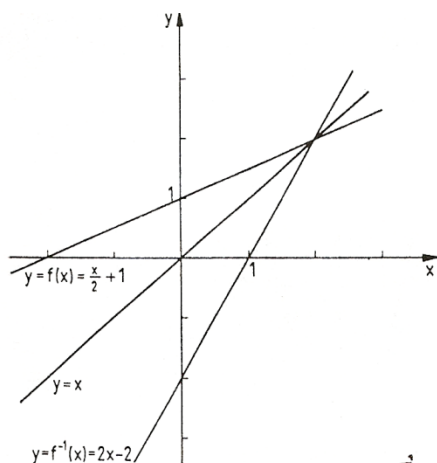


Bild 15.7a

څیره

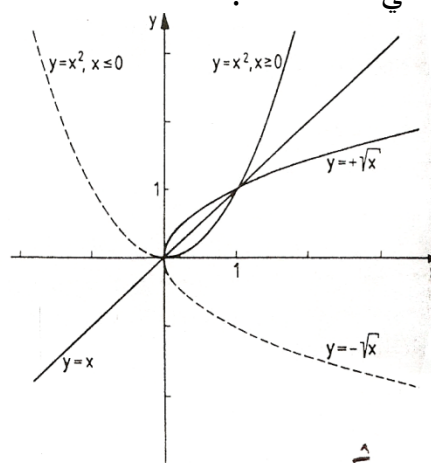


Bild 15.7b

څیره

د فنکشن $y = f(x) = x/2 + 1$ چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

$$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$$

سری $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x = 2y - 2$ او بالاخره x او y سره بدلوي. (څیره. ۱۵ الف)

بیلګي ۱۵. ۳ ته: فنکشن

$$x \in D \quad y = x^2,$$

څیره ش ۱۵. ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.

هر $y \in W$ $[0, \infty]$ پورې دوه $x \in D = [-\infty, \infty]$ اړه لري، یعنی $x = +y$ او $x = -y$ مګر $y = x^2$ کلک مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلک مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y = x^2, x \geq 0$ ته چپه. یا په څټ فنکشن $y = x - x$ دی. (څیره ۱۵. ب)

په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵. ۱:

که $y = f(x)$ کلک مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) وي، نو په څټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلک مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵. ۳. بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوټنڅ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتری فنکشنونه او ځیکلومتری فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلو ځانګړې ډوله خویونو له مخې وڅیړل شي. په برخه ۱۵. ۴ کې به د فنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا ترلي فنکشنونه) وڅیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړې ډوله یا کرکترېستيکي خویونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د ډیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰. ۴)

پیژند ۱۵. ۸:

فنکشن

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{N}; a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره تعريف دی او n - مه درجه ټولریشن فنکشن نومېږي. دې ډول فنکشنونه ته پولینوم فنکشنونه (یا لنډ: پولینوم) هم ویل کېږي.

یو ساده ټولریشن - ۱ - مه درجه ($n = 1$) یا لاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \quad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵.۱) کې پارامترونو a_1 او a_0 په مانا دي. د لاینی فنکشنونو

څیره (گراف) یوه کرښه ده چې په $y = n$ کې y - محور غوڅوي

$$m = \tan \alpha \quad (x = 0)$$

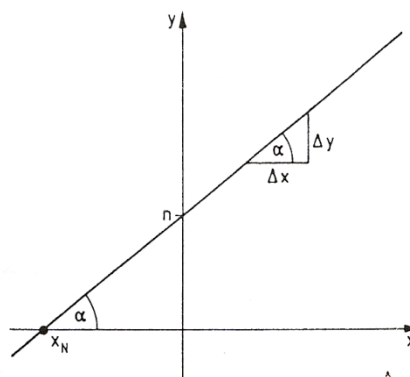


Bild 15.8

څیره

لري (څېره پورته ۱۵.۸) جگوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{متناسب دی:}$$

کرښه جگېږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي او که $m = 0$ وي،

د x - محور سره غبرگه ځغلي. کرښه، که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیک یو صفرځای (y

$$= 0 \quad \text{لري: } x_N = -n/m$$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرې، چې له دوه ټکو (x_1, y_1) او (x_2, y_2)

تیرېږي، پیدا کړو چې یو په بل نیغي نه وي ولاړې، نو د هغو جگوالی m او د هغو

پرېتکی

یا نوره بڼه غږختکی n په y - محور د برابر ونسیستم

$$y_1 = x_1m + n, y_2 = x_2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توگه لاس ته راوړو

$$(y-y_1)/(x-x_1)=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$$

په بل پل(قدم) کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته

کوو لکه په (۱۵ . ۱) کی $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \quad (15.3)$$

د مربع فنکشنونو څیره (گراف) پارابول دی چی د هغی سیومتري محور و y - محور ته غبرگ ځغلي. کوایفیخینت (ځله وونی یا ځلیدونکی) (a,b,c) د پارابول د ککړي ځای او بڼه(فورم) ټاکي.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانگړي حالتونه تر څیرني لاندې نیسو.

$$1. \quad y = x^2 (a=1, b=0, c=0) \quad (15.4)$$

نورمال پارابول، د ککړي کواوردینات: $x_s = 0, y_s = 0$

(۱۵ . ۹)

$$2. \quad y = x^2 + px + q \quad (a=1, b=p, c=q) \quad (15.5)$$

او $x^2 + px$ ته د څلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y = x^2 + px \quad (p/2)^2 + q - (p/2)^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په $p/2$ - او د y - لور په

$q - p^2/4$ راکښل (رابښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول دی ، دا په دې مانا چی

په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$$x_s = -p/2, y_s = q - p^2/4$$

بیلگه ۱۵ . ۷:

$$y = x^2 + 6x + 10, x_s = -6/2 = -3, y_s = 10 - 6^2/4 = 1$$

(۱۵ . ۹)

$$3. y = ax^2 \quad (a \neq 0, b=0, c=0)$$

د ککړې (سر یا راس) کواوردینات . $x_s = 0, y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a| < 1$ لپاره پرسیدلی، د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لور ته واز دی (خلاص دی)

بیلگه ۱۵ . ۸:

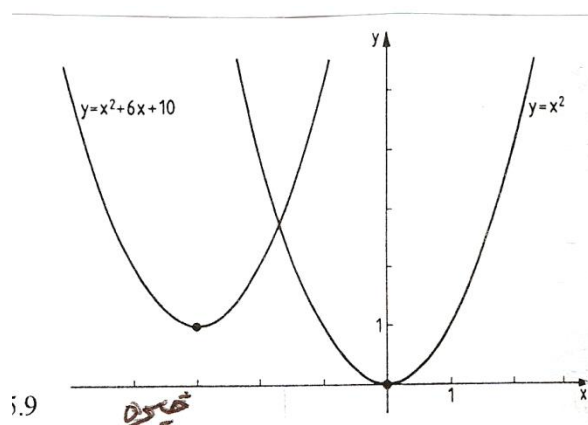
$$y = 2x^2, y = (1/2)x^2, y = -2x^2$$

(خ . ۱۵ . ۱۰)

$$4. y = ax^2 + bx + c = a[x^2 + (b/a)x + c/a]$$

د ککړې (راس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللی یو)

$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a) - (b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$$



بیلگه ۱۵ . ۹:

$$y = -(1/2)x^2 + x + 4, (a = -1/2, b = 1, c = 4)$$

د ککړې کواوردینات:

$$x_s = -1/(2 \cdot (-1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4 \cdot (-1/2)) = 9/2$$

دا چې $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

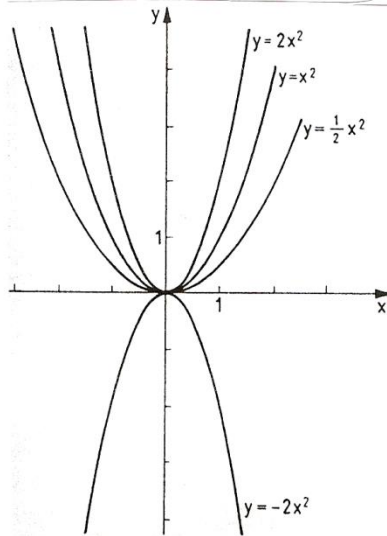


Bild 15.10

جوره

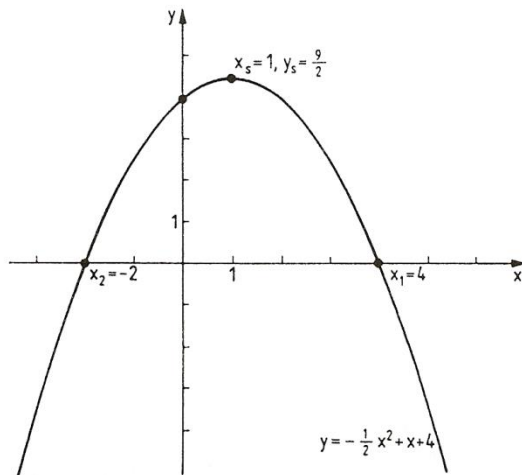


Bild 15.11

قاره

د فنکشن $y = ax^2 + bx + c$ د صفر ځایونه د برابرې $ax^2 + bx + c = 0$ اوبیوني دي. و بیلګې ۱۵. ۹ ته (خ. ۱۵. ۱) :

صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2 + x + 4 = 0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي .

و بیلګې ۱۵. ۷ (خیره ۱۵. ۹) ته :

د $x^2 + 6x + 10 = 0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرې ریبیل صفر ځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه (ډبل) صفر ځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګې په توګه د ټولریشنل فنکشنونو بیلګې له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو

چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدور فورم دی، د هورنر شیمې (بڼه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د (۱۵. ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0$$

هغه ورکړ شوي خپلواک x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې ښی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

a_3 له x_1 سره ځل کيږي، دې سره a_2 زیاتوي، زیاتون یی له x_1 سره ځل، او a_1 ور زیاتوو، زیاتون د x_1 سره ځل او a_0 ور زیاتوو. دا د عملیو پرلپسې په لاندې ډول د لاندې شیمې (د هورنر شیمې) له لارې په لیدور ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

	a_2	a_1	a_0		ځلونه یا ضربونه
	$a_3 x_1$	$(a_3 x_1 + a_2) x_1$	$[(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1] x_1$		منځنۍ ځلونه
	a_3	$a_3 x_1 + a_2$	$(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1$	$[(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1] x_1 + a_0$	منځنۍ زیاتون
				$= f(x_1)$	

ددې شیمې پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلگه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y = x^3 - 3x^2 - 14x - 5$ لپاره د فنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شمیرل کيږي.

یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته (ژباړی).
اوبیونه () :

	<u>1</u>	<u>-2</u>	<u>-14</u>	<u>-5</u>	
$x_1 = -2$	1	-2	8	12	
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$	
$x_2 = 5$	1	5	15	5	
	1	3	1	$0 = f(5)$	

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفر ځایونه)

که چیرې ددریمې درجې ریشنلفنکشن یو صفرځای ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لایني فاکتور بیل کړو (پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلگي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x-5) = x^2 + 3x + 1$: $(x^3 - 2x - 14x - 5)$ له دې امله لرو:

$$y = x^3 - 2x^2 - 5 = (x^2 + 3x + 1)(x - 5)$$

د ویش پولینومونو ځلوني، یعنی ۱ د (x^2) سره، ۳ د (x) سره او ۱ د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځای شمیرلو سره په همغه وخت یا دمگری کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0] : (x - x_1) = a_3x^2 + (a_3x_1 + a_2)x + [(a_2x_1 + a_1)x_1 + a_1]$$

او $f(x_1) = 0$ چی د $(x - x_1)$ سره د ځلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلورۍ - یا مربع برابرني د اوبیوني له لارې لاس ته راځي

$$x^2 + 3x + 1 = 0; x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -(3 \pm \sqrt{5}) / 2$$

په دې ډول د دریمې درجي فنکشن د درې لایني فنکشنونو د ځلوني په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y = x^3 - 2x^2 - 14x - 5 = (x - 5) \left[x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right] \left[x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right]$$

د جملې ۱۲ . ۵ وینا په عمومي توگه د ټولو n -م درجو ریشنلفنکشنونولپاره لاندېجمله باوري کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدی شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، ریيل او یا جوړه کونجوگیری کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, \dots, x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

ددې لپاره چې د دریمې او جگو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریسټیکې یا د خوینو ټکې یې د ديفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو (برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د ديفرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکې ډول د فنکشن د پولې کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیک تعریف شي. دا د بیلگې په توگه دا مانا لري چې $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$ سره $f(x)$ تل ارزښت g ته نږدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right] = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n$$

دا چې

$$x^n \rightarrow oe$$

د $x \rightarrow \pm oe$ لپاره که n جوړه (جفت) وي او $x \rightarrow \pm oe$ لپاره که n نا جوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty \text{ نو لرو او } a_n \text{ زیاتیز یا مثبت وي،}$$

(کېره له oe - څخه د oe په لور ځي).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty \text{ نو لرو:}$$

کېره د oe - څخه د oe - په لور ځي).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \text{ نو لرو:}$$

کېره له oe - څخه د oe په لور ځي)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty \text{ نو لرو:}$$

کېره له oe څخه د oe - په لور ځي)

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}; \dots (15, 7)$$

$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنفنکشن بلل کیري او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیري، که $n < m$ وي او نااصلي مات دی که $n \geq m$. نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنفنکشن او یوه ریشنونۍ ماتۍ برخۍ د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلگه ۱۵ . ۱۲ :

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی ($n=4, m=3$) په ماتلاندې

فنکشن باندې د ماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د $2x^2 + x - 6$ پاتې (باقي) سره. پس لرو:

$$y = 2x - 3 + (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x_0$ لپاره یو صفرځای لري، که $x = x_0$ وي نو باور لري:

$$P_n(x_0) = 0 \text{ مگر } Q_m(x) \neq 0$$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځای (Lücke) لري، که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x) = 0$

د $x = x_p$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_p) \neq 0$ مگر $Q_m(x_p) = 0$

بیلگه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن $y = (2x^2 + x - 6)/(x^3 - 4x)$ د ماتباندي- او ماتلاندي فنکشنونو ټوتي کولو وروسته په لاندي فورم د لایني فاکتورونوپه توگه لیکل کيږي.

$$y = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{x(x + 2)(x - 2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مگر مات لاندي صفر نه دی (صفرخای) مات لاندي- او مات باندي فنکشنونه د $x = x_L = -2$ لپاره صفر دي (تشخای)
د $x = x_{p1} = 0$ او $x = x_{p2} = 0$ لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب خاي ته نژدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چي د قطبخای (ټيک ناپای خای بللکيږي) x_p کی کړه داسيمپتوتي کرښي $x = x_P$ ته نژدې کيږي . د يوه تشخای x_L په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادي $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دي امله د $x = x_L$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن $(n < m)$ د x په جگ پوتنخ یعنی x^m د ماتباندي او ماتلاندي د ویش څخه لاس ته راځي:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \dots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچي د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنخونه د ناپای په لور ځي ، نو د اصل مات فنکشن څيره د $x \rightarrow \pm 0e$ لپاره د x - محور ته نژدې کيږي. فنکشنونه

چي اصل مات نه وي نو د $x \rightarrow \pm 0e$ لپاره داسی ځانونه نيسي، چي اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څيره د $x \rightarrow \pm 0e$ سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نژدې کوي.

الف: () $y = x / (x^2 + 1)$ د $x_0 = 0$ په ځای کې صفر ځای لري. تشځای او پول
یا قطب نه لري. ریيل اوبیونه نه لري (او $\pm \infty \rightarrow x$ لپاره د $-x$ محور ($y = 0$)
د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: () $y = (x^2 + 2x - 3) / (x + 2) = x - 3 / (x + 2)$ صفر ځایونه ($x^2 + 2x - 3 = 0$) په $x_1 = -3$
او $x_2 = 1$ کې لري. تشځای نه لري او په $x_3 = -2$ کې قطب لري دا په دې مانا چې $x =$
2- اسیمپتوتی دی، او د $\pm \infty \rightarrow x$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتی کیږي (دا اسیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کې هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانگړي ټول - یا مات ریشنل فنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \dots \dots \dots (15, 8_a)$$

یو ځانگړی پوټنخ فنکشن دی (د پوټنخ پیژند ۶ ۰ ۱)

(15.8) د زیاتیز زیاتیز یا مثبت ټولگن n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولگن
 n لپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولگن n لپاره ټولی کړي د تعریف ډیری (-) $D =$
 oe, oe د ارزښت ډیری ($W = (0, oe)$ او گډ ټکی ($1, 1$)، ($0, 0$)، ($1, 1$) لري. (څیره
۱۴ الف ۱۵) د نا جوړه گن د n لپاره ($D = (-oe, oe)$ او $W = (-oe, oe)$ دي او ($-1, -1$)، ($0, 0$)، ($1, 1$) گډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴
(ب) .

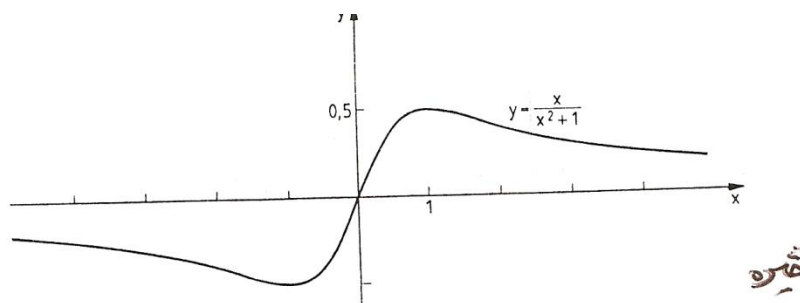


Bild 15.12

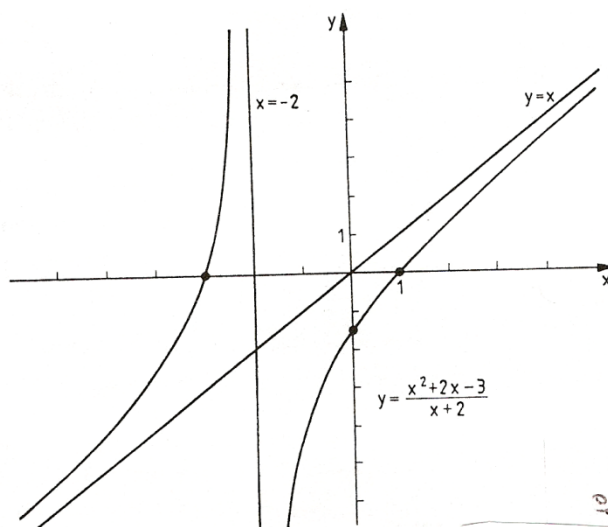
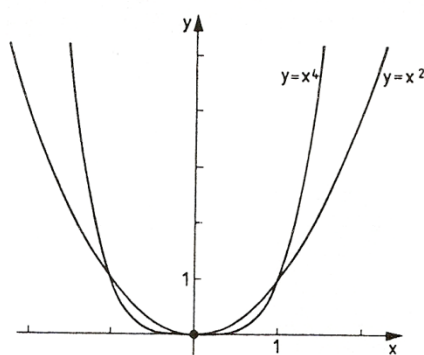

 Bild 15.13


Bild 15.14a

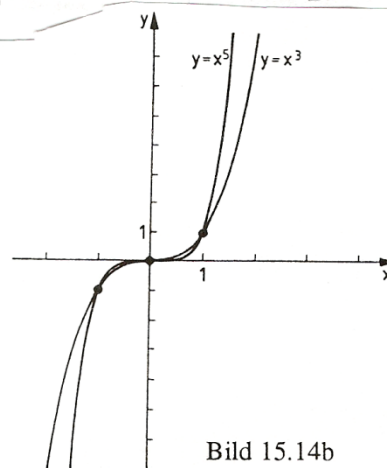


Bild 15.14b



(۱۵، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي گڼ n لپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه گڼون یا تعداد (کمیز) n لپاره ټولی کړي د پیژند ډیری

$D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ د ارزښت ډیری $W = (0, \infty)$ لري او گډټکی $(1, 1), (-1, 1)$.؟؟ څیره ش. ۱۵/۱۵ الف).

د ناجوړه گڼون (کمیز n) لپاره $D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ او $W = (-\infty, \infty)$ او $(-1, -1)$ او $(1, 1)$ گډ ټکی دی (څیره «۱۵. ۱۵ ب). دوه څیری دي

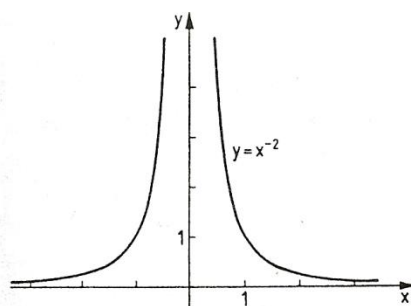


Bild 15.15a

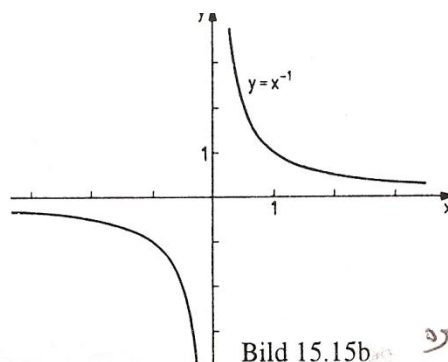


Bild 15.15b

د پوتنخ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کې ونیول شي. (پرتله بیلګه (بیلګه ۱۵. ۳) د فنکشن) لوستل له کین ویني لور ته

$$y = x^n; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

چپه- یا پر څټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty) \dots \dots \dots (15.8_b)$$

او ریښه فنکشن نومیري (پیژند ۶. ۲ دې وکتل شي) پوتنخ فنکشن کیدی شي و ریشل ایکسپوننت ته پراخه شي (دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنخ فنکشنونه د ریشل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^a, a \in \mathbb{Q}, x > 0 \quad (15.8_c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵. ۸ ب) دې د پوتنخ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنخ فنکشن (۱۵. ۸ ټ) پر څټ بیرته پوتنخ فنکشن دی. ټولیز پوتنخ فنکشن پیژند د ریښل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی (د ریښلګونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۱۰. ۳ کی)

پیژند ۱۵. ۱۰ : فنکشن

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 \quad (15.8_d)$$

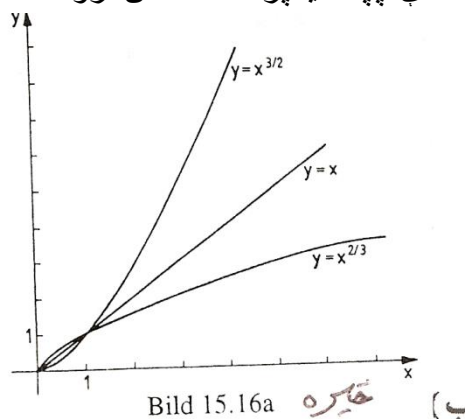
پوتنخ فنکشن نومیري

بیلگه ۱۵. ۱۵ : فنکشن

$$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$$

$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$$

لاندې چپه - یا پر خټ فنکشن لرو



(خیره ۱۵. ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

(خیره ۱۵. ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$$

یادونه : په پیژند ۴. ۲ کی مو وویل چی یواخی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرخت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په

پام کی وي. د بیلگي په توگه فنکشن

$y = x^3$ په ټول تعریفیږي کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په خټ کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندیری $D = [0, \infty)$ کی پر خټ فنکشن

دی، په داسی حال کی، چی $y = x^3$ پرخت فنکشن د $D = (-\infty, 0]$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی (ش. ۱۵. ۱۷).

پیژند ۱۵. ۱۱ : فنکشن

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1 \dots \dots \dots (15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جگ (لند «جگ» بلواک بلل کيږي.
(د ایکسپوننت یا «جگ» کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

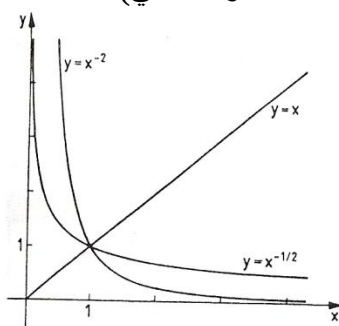


Bild 15.16b

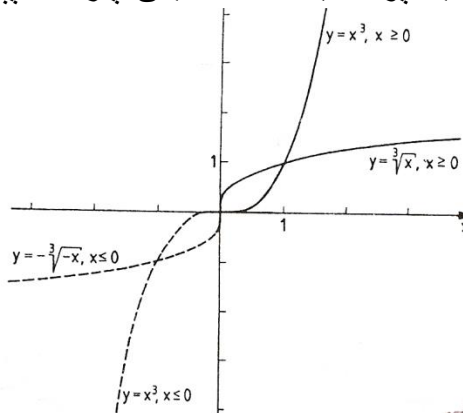


Bild 15.17

پورته دوه څيړې دې پام کې ونيول شي

فنکشن (۹ . ۱۵) لاندې پېژندډيږي $D=(-oe,oe)$ او ارزښتډيږي $W=(o,oe)$ لري. د $a^0=1$ له امله ټکي $(0,1)$ د ټولو کږو گډ ټکي دی

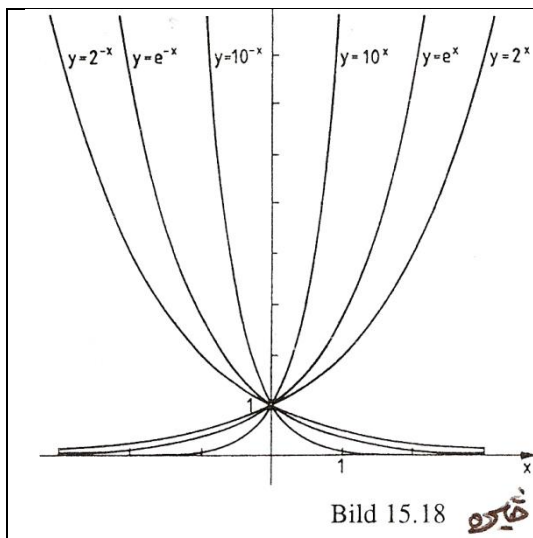


Bild 15.18

د $a > 0$ لپاره (۹ . ۱۵)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجکيدونکی
دی اود $x \rightarrow oe$ سره د x - محور ته
اسيمپوتیک ورنزدې کيږي. د $0 < a < 1$
لپاره (۹ . ۱۵) په کلکه مونوتون لويږي
او ځان د oe سره د x - محور ته
اسيمپوتیک نږدې کوي .

د اکسپوننشلفنکشنونو يو څو بيللگي
($a=2; e; 10; 1/2; 1/e; 1/10$)
په څيره ۱۵ . ۱۸ کې انځور شوي

پېژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څې فنکشن دی

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 \quad (15.10)$$

او لوگاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوگاریتم کلیمې لپاره پیژند ۵ . ۱ وگورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندډیرۍ
 $D = (0, \infty)$ او د ارزښتډیرۍ $W = (-\infty, \infty)$ لري.

د $y = \log_a x$ کړې د گرو $y = a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y = x$ ټکی $(1, 0)$ د ټولو کړو
 گډ ټکی دی (څیره شته دی)

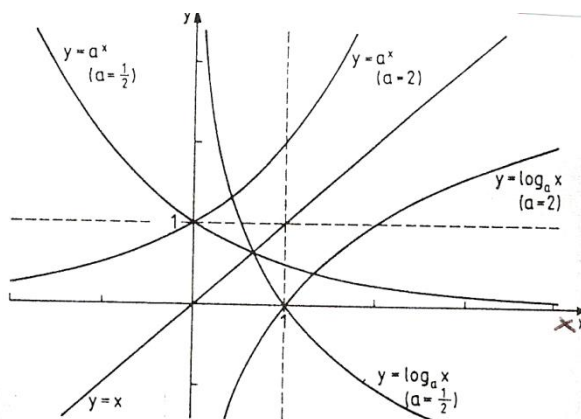


Bild 15.19 څیره

د $a > 1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کله مونتونجگیدونکی اود $x > 0$ لپاره اسیومپتوتیک د کمیز y -
 محور ته نږدې کیږي. د $0 < a < 1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کله مونتون لویدونکی دی او د
 $x > 0$ لپاره اسیومپتوتیک د زیاتیز y - محور ته نږدې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y = a^x$

او په څې یی یعنې $y = \log_a x$

د $a = 2$ او $a = 1/2$ لپاره انځور یږي .

په ځانگړې توگه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x$, $y = \log_e x = \ln x$

پیژند ۱۵ . ۱۳:

د تریگونومتری فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې (پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نڅبنه کيږي یا راورل کيږي.

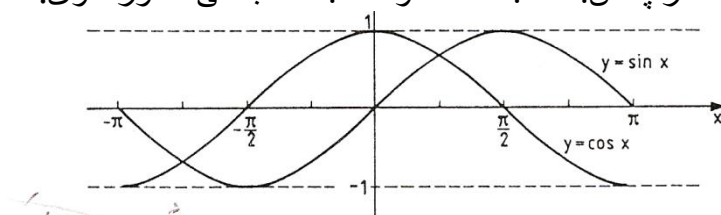
$$y = \sin x; D = \mathbb{R}, W = [1, 1] \dots (15, 11_a)$$

$$y = \cos x; D = \mathbb{R}, W = [-1, 1] \dots (15, 11_b)$$

$$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots (15, 11_c)$$

$$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots (15, 11_d)$$

د دې کړوتگلار په ش. ۱۵. ۲۰ الف او ۱۵. ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ ناچوره فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا - بلواک دی.

تریگونومتریکی فنکشنونه پریودیکی فنکشنونه دي (مقایسه ۱۵ . ۵) فنکشنونه $y = \sin x$, $y = \cos x$ پریودی 2π لري، دا په دې مانا چي لرو:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \cos(x + 2k\pi) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$$

لاندې فنکشنونه پریودی π لري

$$y = \tan x, y = \cot x \text{ دا په دې مانا چي}$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x, \cot(x + k\pi) = \cot x, k \in \mathbb{Z}$$

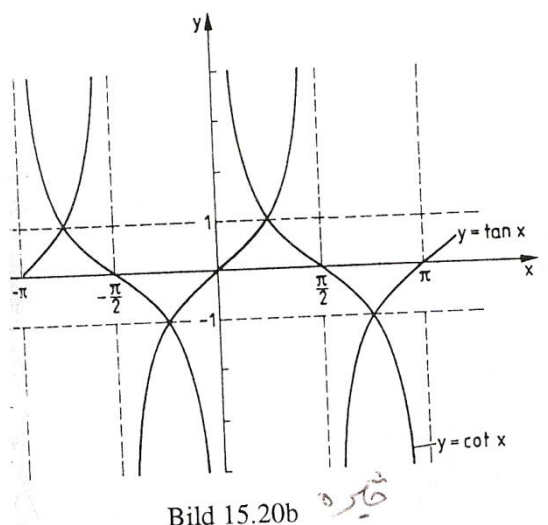
د تریگونومتریکی فنکشنونو صفر ځایونه دي $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$y = \cos x, y = \cot x \text{ د } y = \sin x \text{ لپاره او } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, y = \tan x \text{ د}$$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه (ناپاڅایونه) لري يعني $y = \tan x$

$$\text{په } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ او } y = \cot x \text{ په } x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ کی.}$$

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه



فنکشن $y = \sin x$ په ایتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کې مونوتون جگیدونکی دی او په انټروال

$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ کې مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودی کې تکرارېږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ لپاره $y = \sin x$ جگیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi + 2k\pi \leq x \leq 0 + 2k\pi$ لپاره $y = \cos x$ پورته کیدونکی دی.

د $0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لپاره $y = \tan x$ جگیدونکی دی

د $0 + k\pi < x < \pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ لپاره $y = \cot x$ جگیدونکی دی،

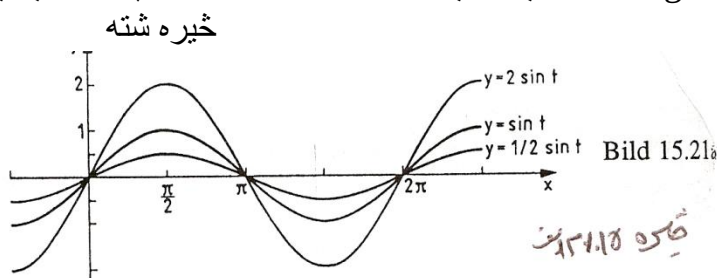
په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کې د قطب ځایونه د مونوتوني اینټروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینټروالونه دي. د ساین فنکشنونه د بیلګې په توګه د وخت په پریوډیکي انځور کې خپل استعمال مومي (Schwingung) (شوینګونګ: رپیدنه). په عمومي ډول دلته خپلواک واریابل په t نڅېنه کېږي. فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵.۱۱) د پيژند (۱۵.۱۵) له مخی ترلی يا ځنځيري فنکشن دی. مور ترڅيږني لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواک واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواک (Argument) د کړبخيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن $y = \sin t$ د $y = a \cdot \sin t$ فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که $(|a| > 1)$ او يا پرسول دي که $(|a| < 1)$ وي $y = a \cdot \sin x$ فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت $y = \sin t$ دی، چيرته چی برسیره پردې د $a < 0$ لپاره په t - محور يوه اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څيره ش. ۱۵.۲۱ الف). $(a = 2, a = 1/2)$ په فنکشن کی a امپليتودي (جگوالی) نوميري او د شوينگنگ $Schwingung$ رپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.

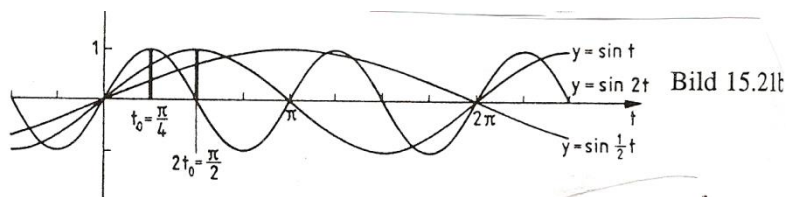


۲ - په فنکشن $y = \sin \omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې يو وختي غزول که $|\omega| < 1$ يا پرسول که $|\omega| > 1$ وي تاثير اچوي. چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې يو په $-y$ محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواک $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin \omega t$ يوه فنکشن ارزښت، $y = \sin t$ خپلواک ω - ځله، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش. ۱۵.۲۱ ب).

گردی فرکونڅ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودي تاثير اچوي او $y = \omega t$

پريودي $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.



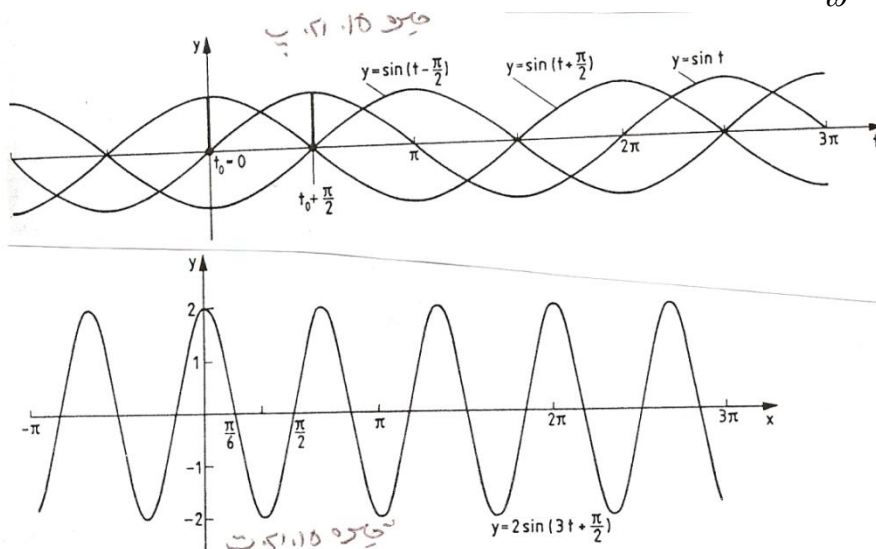
۳- زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t + \varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنې تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi > 0$ او یا له بني لور $\varphi < 0$ اچوي. د یوه ټاکلي خپلواک $t = t_0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t + \varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y = \sin t$ لپاره $\varphi = 0$ د $t = t_0 + \varphi$ لپاره، غوره کوي. (خیره، ۱۵. ۲۱ پ)

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$$

په فنکشن

$$y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi) = a \cdot \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازي نومیري یو د راکښلو تاثیر په کړه $y = a \cdot \sin \omega t$ په اندازه اچوي. د $\frac{\varphi}{\omega}$



په پورته شکل ۱۵. ۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 \cdot \sin(3t + \frac{\pi}{2})$ انځور دی. هغه

امپلیتود $a = 2$ لري، پریودی یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې

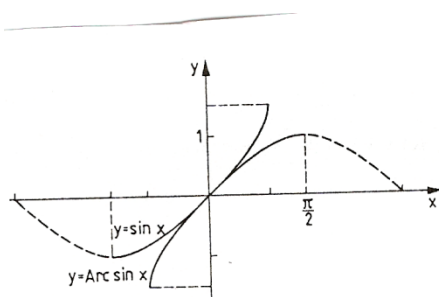
د $\sin t$ و کین لورته راکنبل شوی دی.

څېره ۱۵. ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

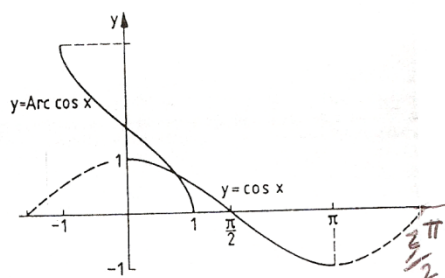
د تریگونومتري فنکشنونو (یواځني) په معکوسوالي یا په ځنوالي کې موږ په ځانگړو یو غږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند. ۱۵. ۱۴:

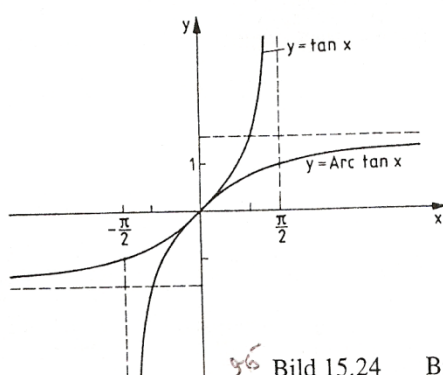
(پام: څیرې له تشریح د مخه راغلي، بله لار نه وه)



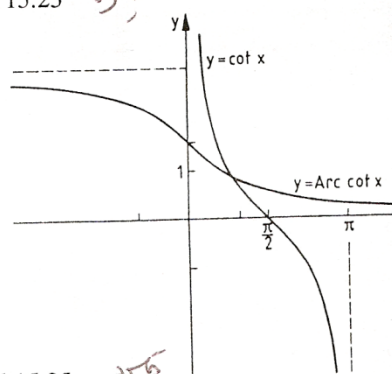
۲۴۰۲۵ **فکره** Bild 15.22



فکره Bild 15.23



فکره Bild 15.24



فکره Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

$$1. y = \sin x, \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad W = [-1, 1] \quad (15.12a)$$

$$2. y = \cos x, \quad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1] \quad (15.12b)$$

$$3. y = \tan x, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \mathbf{R} \quad (15.12c)$$

$$4. y = \cot x, \quad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R} \quad (15.12d)$$

پرځت يا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتريکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1. y = \text{Arc sin } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (15.13a)$$

$$2. y = \text{Arc cos } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi] \quad (15.13b)$$

$$3. y = \text{Arc tan } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (15.13c)$$

$$4. y = \text{Arc cot } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi) \quad (15.13d)$$

د تريگونومتري فنکشنونو برخې په مونوټوني ايتروالونو (۱۵. ۱۲ الف (تر) ۱۵. ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵. ۱۳ الف (تر) ۱۵. ۱۳ ت (په څيرو ۱۵. ۲۲ تر ۱۵. ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵. ۴ ځنځيري (تړلي) فنکشنونه

پېژند ۱۵. ۱۵:

د $D \in x$ لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $W \in z$ لپاره يو فنکشن $y = f(z)$ ورکړ شوی، نو

$$y = f(g(x)) \quad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي.

يادونه: يو تړلی فنکشن کيدی شي چی زیاتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلگي

$$z = f(x)$$

$$D \in x, z \in D, \quad W \in z, \quad w \in W, \quad w = h(z) \quad \text{لپاره } W^* \in W$$

$$\text{او } y = f(w) \quad \text{لپاره } W^* \in W$$

$$\text{نو } y = f[h(g(x))] \quad \text{هم د } x \text{ يو تړلی فنکشن دی}$$

بيلگه ۱۵. ۱۶:

الف: د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننې - او $y = \sin z$ د باندنې فنکشن دی.
 په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننې - او $y = z^2$ د باندنې
 فنکشن دی

پ : د

, $y = \cos w$ $w = \sqrt{z}$, $z = 2x + 4$,
 سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن $y = \text{Arctan} 1/(x-1)$ کې $z = x-1$ دننې، $w = 1/z$ منځنۍ او
 $y = \text{Arctan} w$ د باندنې فنکشن دی .

يادونه : د يوه ورکړ شوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت
 شميرنی

له « دننه » پيل کيږي .

بيلگي ۱۵ . ۱۶ ته :

(ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z = x^2 = 0,5^2 = 0,25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0,25 = 0,24740$$

او

$$z = \sin x = \sin 0,5 = 0,47942; y = \sin^2 x = z^2 = 0,47942^2 = 0,22984$$

(پ) د $x = 2$ لپاره دی $z = x-1 = 2-1 = 1$; $w = 1/z = 1/1 = 1$

$$y = \text{Arctan} w = \text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

($y = f(x)$ تحليلي) (شننيزه) وينا بلل کيږي، که $f(x)$ له رييل گڼونو او بستيزو
 فنکشنونو څخه د زياتون، کمون، ځل، ویش، له لارو ترلی يا ناترلي (ځنځيري يا نا
 ځنځيري) جوړيږي

د بيلگي په توگه دې په پام کې وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنڅ بنسټ او
 همدول راديکاند منفي نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چی د لوگاريتم نومروس بايد

مثبت وي او $\text{Arc sin } f(x)$ همدابل $\text{Arc cosf}(x)$ ټيک د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژندلري يا تعريف دي

بيلگه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفډيري پيدا کړی شي.

$$y = \sqrt{x^2 - 3} \quad \text{الف}$$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چي دا مان لري:

$$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \quad (x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3})$$

$$D = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$$

ب) $y = \lg(x+2) + 1/(3+2x-x^2)$ له لمري زياتوني کي بايد $\text{Numerator} > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چي: $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ ،

$$D_1 = (-2, \infty)$$

په دوم زياتوني کي بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي ($0 \neq$) وي . د مات لاندې صفرخايونه

$$\text{له } 3 - 2x - x^2 = 0 \quad \text{څخه لاس ته راځي او دي. } x_1 = 2, x_2 = -1.$$

$$\text{نو } D_2 = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\} \quad \text{دي}$$

د فنکشن تعريفډيري بايد دا اول زياتوني او همداسي د دوم زياتوني تعريفډيري وي يعني د

$$D_1 \text{ او } D_2$$

$$D = D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2, -1\}$$

پ) $y = \text{Arc sin } (x-1)/5$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفډيري په

پام کي نيولو سره بايد باور ولري-

$$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D = [-4, 6]$$

$$\text{ت } (y = 1/\sqrt{x^2 - 4})$$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفر سره نامساوي، دا په دې مانا چي

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{نو } D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

۱۵. ۵ تمرینونه

۱ - د ایمپلیسیت توابعو ایکسپلیسیت انځورونه ورکړی

الف - $6x - 10y = 15$ ب - $x + y/3 = 5$

پ - $2x^2 - 3y + 3 = 0$ ت - $x^2 - 4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونې ورکړ شوي

a) $x = 2t$ $y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t}$ $y = 2t + 1$

c) $x = 1/t$ $y = 2(t-3)$ d) $x = (1/2)t - 1$ $y = t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوټوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوټونر اینټروالونه په تعریف لیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لږته کړی.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ - پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دوو کوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2/2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ - د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

$$\text{a) } y = -2x + 3 \quad \text{b) } y = (x-1)(x+2) \quad \text{c) } y = x^2 - x - 2$$

$$\text{d) } y = 2x^2 - 12x + 18 \quad \text{e) } y = x^2 + 1 \quad \text{f) } y = x^3$$

۶ - لاندې فنکشنونو ته په څې فنکشنونو ته پیدا کړی

$$\text{a) } y = -2x + 3 \quad \text{b) } y = x^2 + 1, \quad D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

$$\text{c) } y = (x+1)^2, D = [-1, \infty), W = [0, \infty), \quad \text{d) } y = x^3 / 2, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

۷ - لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

$$\text{a) } y = 0,4x - 1,6 \quad \text{b) } y = -x + 1 \quad \text{c) } y = (1/5)(3x + 1,5)$$

$$\text{d) } y = 2 \quad \text{e) } 3x - 3y - 7 = 0 \quad \text{f) } 4y + x = -1$$

کړنې دې وکېنل شي، جگوالې کونج ∞ دې پیدا شي. او صفرخایونه x_N وگنئ!

۸ - کومه کړنه له لاندې نهکو تیریري

$$\text{a) } (2,3) \quad (5,5) \quad \text{b) } (1,1) \text{ د } (3,7) \quad \text{c) } (-1,0) \text{ د } (-2,-3) ?$$

۹ - لاندې مربع بلواک یا فنکشنونه ورکړ شوي

$$\text{a) } y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{b) } y = x^2 - 8x + 16 \quad \text{c) } y = x^2 - 6x + 10$$

$$\text{d) } y = (x-5x)(x-1) \quad \text{e) } 2x^2 - 10x + 12 \quad \text{f) } y = 3x^2 + 6x$$

$$\text{g) } y = -\frac{x^2}{2} + x + 4 \quad \text{h) } y = x^2 / 4 + x + 2 \quad \text{i) } y = 5x^2 + 45$$

د ککړې کواوردینات دې پیدا شي، صفرخایونه دې وگنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ - د لاندې ټولریشنل فنکشنونه دې دورکړ شوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د

استعمال له لارې وگنل شي. فنکشنونه د k د خلفورم باندې انځور شي

$$\text{a) } y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$\text{b) } y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; \quad x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$$

$$\text{c) } y = f(x) = x^3 + 2x + 2x; \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$$

$$\text{d) } y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 + 32x + 40; \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 5$$

$$\text{e) } y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6; \quad x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

$$a) y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$b) y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$c) y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

$$d) y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$$

$$e) y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$$

صفرخايونه دي وگڼل شي، پول. تشخايونه او د ± 8 $x \rightarrow$ لپاره خان نيونه!

۱۲ - لاندې فنکشنونو ته په خپ فنکشنونه جوړ کړی

$$a) y = 2^{x-1}, D = \mathbb{R}, W = (0, \infty) \quad b) y = 2^x - 1, D = \mathbb{R}, W = (-1, \infty)$$

$$c) y = \log_3 x, D = (0, \infty), W = \mathbb{R} \quad d) y = \ln(x-1), D = (1, \infty), W = \mathbb{R}$$

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوټوني ايتروالونه ورکړی او برخه په خپ فنکشنونه:

$$a) y = (x-1)^2 \quad b) y = x^2 - 1 \quad c) y = (x+1)^2 + 1$$

$$d) y = x^2 - 4x + 5 \quad e) y = 4x^2 \quad f) y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w), w = h(z), z = g(x)$$

بيل (تجزيه) کړی (د تعريف او ارزښت د پريوړ کولو څخه کيدی شي تيرشو)

$$a) y = e^{(x+1)^2}$$

$$b) y = (e^{x+1})^2$$

$$c) y = \lg \sqrt{2x-3}$$

$$d) y = \sqrt{\lg(2x-3)}$$

$$e) y = \tan \sqrt{x-3}$$

$$f) y = \sqrt{\tan(x-3)}$$

$$g) y = \sqrt{\tan x - 3}$$

$$h) y = \tan \sqrt{x} - 3$$

$$i) y = \text{Arc sin } x^2 +$$

$$j) y = [\text{Arc cos}(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$k) y = \ln \sin \frac{x}{3}$$

$$l) y = \sin \ln(x + \frac{1}{3})$$

$$m) y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$$

$$n) y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$o) y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$$

$$p) y = \text{Arc cote}^{2x+1}$$

۱۵- ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندي او دتنه فنکشنونو

$$y = f(v), v = h(w), w = g(z), z = k(x)$$

بیل کړی (د تعریف- او ارزښت پیري باندي تیرونه کیدی شي)

$$a) y = \left[\text{Arc cot}(e^x + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad b) y = e^{\text{Arc cot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}} \quad c) y = \sin \left[\cos \frac{x-4}{3} \right]^2$$

$$d) y = \sqrt{5 - \tan \sqrt{x}} \quad e) y = \cos [\ln(x^2 - 1) + 1] \quad f) y = \log_3 [\sqrt{2^x + 1}]$$

$$g) y = e^{\tan \sqrt{7x-1}} \quad h) y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$$

۱۶- د لاندې شننیزو یا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریف پیري پیدا کړی.

$$a) y = \sqrt{x-3} \quad b) y = \sqrt{3-x^2} \quad c) y = \sqrt{x^2-9}$$

$$d) y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \quad e) y = \frac{1}{x^2+x-6} \quad f) y = \ln(2x+5)$$

$$g) y = \text{Arc cos}(2x-4) \quad h) y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \quad i) y = \ln x + \frac{1}{x-1}$$

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوي لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شمير: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا

ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوي دي:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکني چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزي ۲
- ۸ - کرينيز الجبر
- ۹ - د شميرپوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرسنيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بڼوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

کتاب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې گډې ودې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بسوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اومم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اویونې سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميري شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شينواریو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنۍ ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فیروزي تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

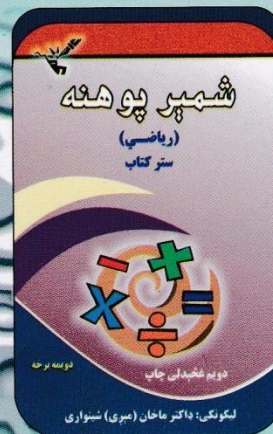
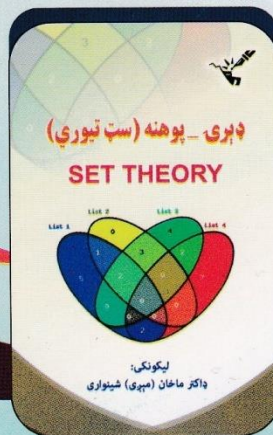
ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لري د میرمن ښاپیری سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیري. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.



ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودي ټولنه - جرمني

VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library