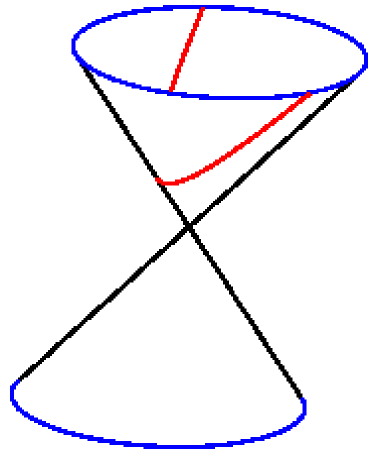
الجبر (كرنيز) لاينيز

Lineare Algebra

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(كرښيز) الجبر ١
بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه ١
ګروپ ١
لاندې ګروپونه ٣
ګڼونډېرۍ يا د اعدادو سټ ٣
پرموتيشونونه ((د توكو يا اعدادو) ځاى بدلون) ٤
د ځاى بدلنون (پرموتيشن) څيوكليكي يا تل ٥
مودولوس ٨

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو ١١
ګالويز– بدن ١٣
په ګروبونو ياډلو كې تورنى ١۴
وكتورفضا يا وكتوري فضا ١۶
د n - ګوني وكتورفضا ١٩
لاندې فضا يا برخه فضا ٢٠
ګرښيز كمبينيشن ٢٢
كرښيزه هيولې يا سپاين يا سمڅ ٢٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتی – یا محدب کمبینیشن ۲۵
حقيقي- ياريينتونی سکالار ضرب ۲۶
سکالار ضرب ۲۷
مایل سیومتریک ۲۸
د کوشي-شوارڅ – نامساوات ۳۰
نورم ۳۱
هوموګينيوالی ۳۱
د سکالار ضرب نورم ۳۲
ماکسيموم – نورم ۳۳
د حقيقي- يا ريل وکتورونو سکالار ضرب ۳۴
د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب ۳۵
د دوه وکتورونو ترمنځ کونج ۳۶
د پيتاګوراس(فيثاغورث) جمله ۳۷
کرښيز نابلواکوالی یا ۳۹
بنسټ Basis ۴۲
بعد یا پراخيدونی Dimension ۴۴
اورتوګونال یا ولاړ بنسټ ۴۶
اورتوګونال پروجکشن ۴۹
د ګرام-شميت تګلار یا قانون ۵۱
کرښيزه څيرونه (فنکشن یا تابع) ۵۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د كربنيزو توابعو كمپوزيشن ۵۷

ماتريكس ۵۸

يو كربنيز فنكشن يا تابع ۶۱

يو كربنيز فنكشن يا تابع ۶۳

Bild او Kern معنا څيره يا شكل او زړي ۶۵

معكوس يا په څټ تابع (څيرونه يا فنكشن ۶۷

د ماتريكسونو وكتورفضا ۶۹

د ستراسن(وبينه: شتراس) الګوريتم ۷۱

كوموتاتور ۷۲

په څټ يا معكوس ماتريكسونه ۷۴

تراسپوني او ادجونګيري ماتريكسونه ۷۶

شپور Spur ۷۸

د يوه ماتريكس رانګ ۷۸

د يوه ماتريكس نورم ۸۰

هوموحنيتي: ۸۱

هوموحنيتي: ۸۳

د ماتريكس د ډكوني جوړښت ۸۴

اورتوګونال او يونيتار ماتريكسونه ۸۴

د هادامارد – ماتريكسونه ۸۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فورير (وينه: فوريې) ماتريکسونه ۸۶

نورم ريښتوني يا - وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ۸۷

ځيوکليکي (تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه ۸۹

ستوښاستيکي ماتريکسونه ۹۰

ديترمينانت د انتيسيومتري کربنيزفورم په حيث ۹۱

2 - ليکيزه ديترمينانت ۹۴

د ساروس شيما يا شکل ۹۵

لوريز حجمونه (ډکي) ۹۶

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې ۹۸

د ځانګړو ماتريکسونو ديترمئناتونه ۱۰۱

د ديترمينانتو بڼه بدلون ۱۰۴

د ديترمينانتو وديزيينه ۱۰۵

د 3 ټکو له لارې د يوې سطحې ۱۰۸

د واندرموند – ديترمينانتونه ۱۱۱

کربنيز مساوات سيستم ۱۱۲

برېښنايي جرياندايره ۱۱۴

د يوه کربنيز مساوات سيستم حلوړوالی ۱۱۵

ديترمينانت او د يوه مساوات سيستم حلوړوالی ۱۱۸

د کرامر قاعده ۱۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځښ لور ځای په ځای کول ۱۲۳

د ګاوس ترانفورمیشن ۱۲۵

د ګاوس د له منځه وړنه ۱۲۶

د ایپنیلون بڼه ۱۲۹

د ایپنلون- بڼه د یوه ل م س (کربنیز مساواتسستم)حل ۱۳۱

رانګ او د ک م س(کربنیز مساواتسیستم) حلوړوالی ۱۳۴

د انډول کربڼه(انډولکربڼه) ۱۳۵

د برابرونې حل یو بل سره یوغږیز........ ۱۳۷

الجبر - کربنیز مساوات سیستم-برابرونې پرابلم ۱۳۸

نورمالمساواتونه ۱۳۸

توموګرافي ۱۴۱

آیګن-ارزښت او آیګو-وکتور ۱۴۳

ورته والي – ترانفورمېشن ۱۴۵

کرکتریستکي پولینوم ۱۴۷

الجبری او هندسي ډېرځلوالی ۱۵۰

د آیګن –ارزښتونو جمعه او ضرب ۱۵۲

د ماتریکسونو رینتونی توابع ۱۵۴

د آیګن – وکتورونو بنسټ ۱۵۵

د ځیوکلیکي ماتریکسونو دیاګونالونه ۱۵۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتريکسونو توان ۱۶۰

د فيبوناچي پرلپسې يا – ترادف ۱۶۲

نورمال ماتريکسونه ۱۶۴

نورمال ماتريکسونه... ۱۶۵

مثبت ديفينيت ماتريکسونه ۱۷۰

ريلا ي – ويش ۱۷۰

مثلث بڼه ۱۷۱

اصلي وکتورونه ۱۷۳

د اصلفضا ځيوکليکي بنسټ ۱۷۵

د جوردان بڼه ۱۷۹

د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼې ۱۸۶

په زيګولار ارزښت ټوټه کونه ۱۸۹

فاسد معکوس ۱۹۱

د توپوګرافيکي کچونداتنونو ټيکاوی يا اصلاح ۱۹۶

د مور-پينروز-شرطونه ۱۹۷

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه ۱۹۸

هندارونه ۱۹۹

ځرخون ۲۰۰

ځرخونمحور او ځرخونکونج ۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو خرخون په ضربیپونو توته کونه ۲۰۵

څرخونماتریکس ۲۰۸

مربعیزه فورم(بڼه) ۲۱۰

کوادریکونه ۲۱۱

د کوادریکونو شډله توته ونه ۲۱۲

اصلي- محور –ترانفورمیشن ۲۱۴

مخروط غوڅی ۲۱۸

د دوه بعدي کوادریکونو د اوکلیدي نورمال بڼه ۲۲۰

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې ۲۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

زه د سریزې په هکله ډېر څه نه لیکم، خو دې ته ګوته نیسم، چې ما د دې سرلیک لاندې دوه لیکنې کړې. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شمیرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتیا ولري، دا به ښه وي، خو اړینه هم نه ده.

دا لیکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به یې ځیره کونه (لنډ : څیره ونه) وي. په فنکشن کې یو څه په یو بل څه یا خپل ځان څیره کیږي. چې لومړی یې څیره کوونکی او دویم یې څیره ده یعنې دوه مجهولې یا واریابلې دي، چې یوه په بله څیره کیږي. لومړی خپلواک دئ او دویم یې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، یعنې دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به یې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې ګران شمیرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې لیکنه کې څیرونه راځي، نو هغه یې زموږ په ناسمه توګه همغه تابع ده. دا مو مو پوهیږم، چې له پامه نه لویږي.

ما په یو ځل ډېر ةتابونه وژباړل او ولیکل، چې لیکنیز تاتیکاوي به ولري. د هغې به راته بخښنه وکړی. دا څه چې تاسو ته وړاندې کیږي، پوره :تور دي او دې ته دې ریاته پامرنه وشي.

دا زما ټولې لیکنې به تر یوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړی، چې غوټې پسې وهئ په لاس درځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مننه: د ټولنې او په ځانګړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکتر يحی وردګ څخه زياته مننه، نه داچې زما کتابونه يې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې يې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه يې خپلو يوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې برياوو په هيله دې زمونږ دعا ورسره مل وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(کرښيز يا خطي) الجبر

بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه

Grups and fields

ګروپ

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لاندې يوه ډېرى G پوهيږو، په هغې چې يو دوه ييزه کارونه يا عمليه $\diamond$ داسي پيژندل ولري يا تعريف شوي.

$$\diamond : G \times G \longmapsto G\,,$$

دا په دي مانا، چې هره جوړه (a,b) د $a,b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ يو توکى باندې تنظيم دی. برسيره پردې لاندې خويونه بايد باور ولري:

Assoziativität: اسوښياتيو والی يا اسوښياتيو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a,b,c \in G$$

neutrale Element ناپيلي توکی: يو يواځنی ټاکلی ناپيلی توکی $e \in G$ شته دا په دي مانا ، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \qquad \forall a \in G$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Inverses Element مخامخ یا په ضد توکی یا برعکس توکی: هر توکي $a \in G$ ته یو یواځنی ټاکلی مخامخ یا یه څټ یا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$ سره

ګروپ کموتاتیو یا د ابل (ابل Abelد شمیرپوه نوم دی) ګروپ بلل کيږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتیو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \qquad \forall a, b \in G\,.$$

له اړوندتوب څخه لیدل کيږي، چې کومه کارونه کارول کيږي، نو زیات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط G لیکل کيږي.

په باندي(بیجکتیو) رییل فنکشنونه یا توابع(بلواک) bijective real Functions

د $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ د $\circ$ یو په بل پسي کاروني له مخې یو ګروپ جوړوي.

ساده ازمایل کیدی شي، چې یو په بل پسي اینونه اسوشیاتیو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)\,.$$

ناپیلی توګه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e: \quad x \rightarrow x$$

بالاخره هر په باندي بلواک لپاره یو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1}: \quad f(x) \rightarrow x\,.$$

یو په بل پسي ترنه کموتاتیو نه ده : د بیلګې په توګه لاندې لرو :

$$f: \; x \rightarrow 2x\,, \quad g: \; x \rightarrow x+1$$

$$f \circ g \neq g \circ f\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x))\,.$$

لاندې ګروپونه

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لپاره $(U,\diamond)$ لاندې ګروپ بلل کيږي، که U د G برخه‌يزې وي او $(U,\diamond)$ پخپله يو کروپ جوړ کړي

ددې لپاره ، چې و ازمايو ، چې ايا U و ترڼې $\diamond$ ته يو ګروپ جوړوي ، که نه، نو ازمايو ، چې U و نښلوني $\diamond$ ته او د په ځټ جوړښت ته بنده ده. ياني باور لري:

$a,b\in U \;\Rightarrow\; a\diamond b\in U$ او $a\in U \;\Rightarrow\; a^{-1}\in U$

ګڼوندېزی يا د اعدادو سټ the set of numbers

$$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

Z و جمعې(زياتون) ته يوکموتاتيو ګروپ دی، خوندي لرني يا اينکلوزيون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته يو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او رييل ګڼونه وکمپلکس ګڼونو ته يو لاندې ګروپ جوړوي.

که چيرې صفر لرې شي، نو ضرب يا څله ونه هم يو ګروپ جوړښت تعريفوي:

$$\mathbb{Q}\backslash\{0\}\subset\mathbb{R}\backslash\{0\}\subset\mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$$

تړاو جدول يا تړاوتخته

کارونه$\diamond$ په پاې ګروپ $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$ باندې کيدی شي د تړاوماتريکس

$$A:\quad a_{i,j}=g_i\diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځیرونه (بې له پرموتېشن یا بدلون څخه) آول تړاوجوړښتونه ښايي د يوه ګروپ لپاره د $n \leq 4$ سره :

$n = 2$

$\diamond$	e	a
e	e	a
a	a	e

$n = 3$

$\diamond$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$n = 4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$n = 4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتريکس A د سيومتري ($a_{i,j} = a_{j,i}$)چې ليدل کيږي.

لومړی ناابل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1,2,3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدی شي

Permutations پرموتيشونونه ((د توکو يا اعدادو) ځای بدلون)

د په خوښه ډېری M لپاره د بيجکشن (په کې ځيرونه يا په کې فنکشن) لاندې له M په Mکې ، چې کمپوزيشن کارونه يا ځيرونه يی د کارونې په ځير وي، يو ګروپ پو هيږوو داسې په نامه د M سيومتري ګروپ.

لنډ : د M په M کې ځيروني ته پرموتېشن يا بدلون وايو.

که $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ وي، نو د سيومتري ګروپ S_n څخه غربيږو، چې ګراد يا درجه يې n وي.

د S_n ډېری د π توکي $n!$ پرموتيشن يا بدلون بلل کيږي او داسې يې ليکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرمېوټېشنګروپ په ټوليزه توګه کموټاتيو نه دی، لکه د لاندې بېلګې څخه ليدل کيږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلنون (پرموتيشن) څيوکليکي يا تل بيرته راګرځيدونی ليکندود:

پرموتيشنونه داسې په نامه څيوکليکي ليکندود له لارې هم ورکول کيږي..يو څيکلوس يا تل بيرته راګرځيدنه د يوه توکي او د هغه له څېرو، چې ډېرځله د بدلون يا پرموتيشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بيرته هغه پيل توکي يا وتونتوکي ته ورسيږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلبېرته راګځيدنې کې منځ ته نه راځي، نور څيوکلونه جوړيږي ، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. څيکلونه د توکو د ګڼون(تعداد) ټيټيدونکي يا لوېدونکي ډول تنظيم کيږي او په کړو نوکانوکې يو پر بل پسې ليکل کيږي. هغه څيوکلونه يا تلبيرته راګرځيدوني ، چې اوږدوالی يې ۱ وي نه ليکلکيږي.

د بيلګې په توګه دی

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5)$$

همداسې

$$\pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)\ .$$

د پرموتيشن ترانسپوني کوونه يا په بل ډول ليکنه او سيګنوم

يو ترانسپوزيشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j\ k)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د j او k بدلون دی. ددې ساده یا بنسټيز پرموتيشن ترړنې سره دا پرموتيشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m \, .$$

دلته برابرازښتوالی (جوړه یا ناجوړه m) یواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتيشن مخ نخښې یا د پرموتاشن زيګنوم π په څير π ټاکو یا تعريفوو.

د

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} \, ,$$

څکه چې د ترانسپوزيشن کمپوزيشن سره n کره په ځای نيول کيږي یا ځای په ځای پاتيږي. اینډوکټيو Induktiv (د ځانګړي په توليز پایونه) کيدی شي و نيول شي یا فرض شي، چې برابرارزښتوالی یا پاريټي د $\tilde{\pi}$ په اینډوڅيري ټوټه ونه کې یواځنی ټاکلې ، پسې د $(-1)^m$ مخنخښه.

ددې لپاره، چې د پرموتيشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سيګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \ldots, \; \pi(6)) = (6, \; 5, \; 3, \; 1, \; 2, \; 4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترانسپوزیشن سوکخیسیو(sukzessiv) پل په پل یو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په خیر لیکنې ته بیایو:

$$(1\ 6):\qquad (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5):\qquad (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6):\qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\,.$$

په دې پسې یا له دې امله

$$(4\ 6)\circ(2\ 5)\circ(1\ 6)\circ\pi$$

کټمټوالی یا ایدنټیک ده، همداسې

$$\pi=(1\ 6)\circ(2\ 5)\circ(4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi)=(-1)^3$$

الترناتیو یا بدیلي سرې کړی شي څویکلیکي لیکډوله وکارول شي:

$$\pi=(1\ 6\ 4)\ \ (2\ 5)\ \ (3)\ .$$

ځکه چې د k اوږدوالي یوه څیوکلوس τ لپاره $\sigma(\tau)=(-1)^{k-1},$ دی

$$\sigma(\pi)=(-1)^2\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0=-1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مودولوس Modulus

(که دوه ګڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ وویشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ پاتې سره. دا داسې لیکو:

$$13 : 5 = 2$$

پاتي 3

لیکلی شو $(13-3) : 5 = 0$ دا په دې مانا چې ګڼ ۵ ګڼ13-3 وېشي

پیژند (تاکونکی یا تعریف) که تولګنونهx او y او یو طبیعي عدد یا پیداښتي ګڼ a ولرو ، نو وایو ،، x کونګروانیځy مودولو a (mod a) ده،، په نخښه $x\equiv y \bmod a$ ، که $x\equiv y \bmod a$ نه وي، نو واي چې : x د y سره کونګروانیځ مودولو a(moda) نه ده ،،یعني $x\not\equiv y \bmod a$

Modulus مودولوس

لرو $a > 0$ او $x \in \mathbb{R}$. د $x \bmod a$ (لوستل : x مودولو a)لاندې په a باندې د x وېشني پاتې پوهیږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د یوه تولګڼn لپاره . که باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a\,,$$

نو x او y کونګروانیخ مودولو a بلل کیږي.

پاتیتولګی(باقي-)(مودولو) modulo n

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرۍ $\{0,1,\ldots,n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زیاتون یا جمعې او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نخښه کیږي.

پام دې وي، چې ضرب modulo n په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعریفوي، خکه چې 0 په څېټ توکی نه لري.

د دې روښانه بیلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ په بنسټ اسان ارماېښت کیدی شي، چې زیاتون یا جمعې، همداسې کمون یا تفرق د مودول – کارونې یا عملیې سره زغموږ دي.

د بیلګې په توګه دی

$$1+3 \bmod 4 = 0, \quad 0-2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې ځل مودولو ۴ (modulo 4) مو د ګروپ تیوري ته نه لاربنودوي، خکه چې

$$1\cdot 2 \bmod 4 = 3\cdot 2 \bmod 4 = 2\,.$$

دا د ناپیلي توکې د یواځیوالي سره په مخامخوالي یا تضادګې پروت دی

بدن(جسم یا تن یا پټی Field)

یوه ډېرئ (سټ) چې په هغه کې یوه جمعه ``+,, او یو ضرب ``· ,,تعریف وي، بدن یا پټی یا ورشو بلل کیږي، که لاندې خویونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې یا زیاتیز جوړښت: $(K,+)$ یو ابل ګروپ دی د توکی(سفرتوکي) سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$b + a$	$=$	$a + b$
$a + (b + c)$	$=$	$(a + b) + c$
a	$=$	$a + 0$
$0\,,$	$=$	$a + (-a)$

دويم – دلته $(-a)$ د a په څېر یا معکوس توکی دی.

دريم – د ضرب ګروپي جوړښت: $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ يو د ابل ګروپ دی د ناپيلي توکي 1 سره(يوي توکی یا که غواړئ واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره باور لري:

چيرته چې $(-a)$ و a ته په څېر یا پرعکس توکی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت : $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ يو ابلګروپ دی د ناپيلي توکي (يوي توکی)، دا په دې معنا چې د تولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره صدق کوي

a.b=ba

(a,b).c=a.(b.c)

a.1=a

1=$a \cdot a^{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې a^{-1} د a په څټ يا برعکس توکی دی.

ديستريبيوتيو قانون: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ د ټول $a,b,c\in K$ لپاره.

د ريښتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېری، د حقيقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېری او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېری

د شميرني قاعده يې سملاسي د اړونده تړني له لارې لاس ته راځي. صفرتوکی يې 0 او يويتوکی يې 1.

همداسې يې د کمپلکس عدد $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ يوي توکی نسبت و ضرب ته $w=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\,,$ دی، ځکه چې لرو:

$$z\cdot w=(x+\mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-\mathrm{i}^2y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}=1+\mathrm{i}0\,.$$

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو

د هر لومړني عدد p لپاره $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\dots,p-1\}$ د ډېريو يو تن دی د د جمعې او ضرب موډولو p سره.

د په څټ – يا برعکس توکي شتون پورې ، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقيتولګيو لپاره به ميراث پاتي شي.

د $a\in\{2,\dots,p-1\}$ لپاره کيدی شي a^{-1} په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نيسي چې، $a^i\neq 0 \bmod p \quad \forall i\in\mathbb{N}\,.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزیې څخه به ولرو، چې په p ویشل کیږي، څه چې د $a < p$ له امله ناشونی دی. که اوس پرلپسې $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$ په پام کې ونیسو

، نو باید کم له کمه یو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، یعنې

$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p\,, \quad i_1 < i_2$$

به ضدق وکړي. له دې سره به وي:

$$a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکی پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکې دي

2^{-1}	$=$	$3 \bmod 5$
3^{-1}	$=$	$2 \bmod 5$
4^{-1}	$=$	$4 \bmod 5\,.$

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضریب تجزیې څخه به مو لرودی، چې p وېشي، څه چې د $a < p$ له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسې یا $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1\,,$ په پام کې ونیسو، نو باید کم له کمه یو باقي دوه واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$ به صدق وکړي د کوم سره به چې د a برعکس توکی پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې په څټ – یا برعکس توکي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5\,.$$

د دې سره د بيلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږيز دی له دې لاندې سره.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 = & \quad 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5 \\ = & \quad 4 + 3 \bmod 5 \\ = & \quad 2\,. \end{aligned}$$

ګالويز – بدن Galois-Körper

تن$GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعي او ضرب د ترنو له لارې کيدی شی ورکړل شي:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

(c) ketabton.com: The Digital Library

a	a	b	0	1	a	0	a	b	1
b	b	a	1	0	b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنيو تنونو $\mathbb{Z}_p$ کې او د گالويز له خوا پيدا شوي دي. دا په تړليږه توگه کېدی شي د تنرنر. ځخه د p^ℓ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$ ، د په خوښه p لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي يا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توگه ټول تنونه لاس ته راوړي.

په گروبونو کې تورنی (لکه د مسابقې لپاره جمتو کيدو گروپ)

به کابل، غزني او ننگرهار کې په څلورو مهالوېش(وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بيل کيږي. د لته دي ،، هر يو د هر يو په مقابل کې،، لوبه وکړي. دا يه دې معنا چې په هر مهالوېش دې درې گروپونه د هر درې ډلو څخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځايونو کې دې لوبه وشي. ستونځی په دې کې پرتې دي، چې يو بل بايد سره غوځ يا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ گروپونو کې بايد يو ځل رامنځ ته شی

د شميرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکيزې ډېری

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \ldots, 9\}, \quad k = 0, \ldots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېريو غوڅی ماکسيمال يو توکی خوندي ولري.

د دې شرايطو سره د دې مخه نيول کيږي، چې د گروپونو ډېری چې د لوبو ورځې يې مختلفې دي، گډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $S_{j,k}$ ډېری د لومړنی تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړ بدلای شی.. د لته د لوبدلې نمرې $1,\dots,9$ د نهه توکیزه ،، پای سطحې،، دټکو $(\alpha,\beta), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_3$ سره په نخښنه کېدی شي او دا په نخښنه شوی ،، پای سطحه،، ډېری د دې سطحې د کرښوسره په نخښنه کېدی شي:

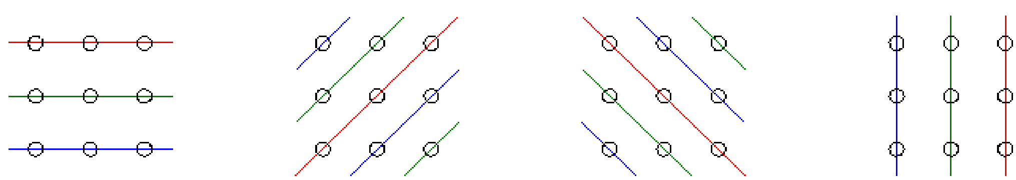
$$S_{j,k} = \{(\alpha, k\cdot\alpha + j \bmod 3) : \ \alpha = 0,1,2\}, \quad ($$

کربنه د $k = 0,1,2)$ جګېدنې(سره

$$S_{j,3} = \{(j,\alpha) : \ \alpha = 0,1,2\} \quad ($$

ولاړه یا عمود کرښه).

داګروپ وېشنه په لاندې شکل کې لیدوړ ده:



همدا مسأله د 16 تیمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل کېدی شي. سری 4-توکیزه ګالویز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبځای1	لوبځای2	لوبځای3	لوبځای4
لومړی لوبورځ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورځ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3 -مه لوبورځ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4 -مه لوبورځ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 -مه لوبورځ	1,5,9,13	2,6,10,14	3,7,11,15	4,8,12,16

په ټولیزه توګه د لیل د q^2 لوبډلو او q ښارونو لپاره دلیل شوونی دی، هلته چې q د یوه لومړنی عدد توان دی، ځکه چې د داسې یوه عدد q لپاره تن $GF(q)$ شتون لری.

وکتورفضا یا وکتوري فضا

یو ابل ګروپ $(V, +)$ وکتورفضا په یوه تن K یا K -وکتورفضا بلل کیږی، که یو سکالار ضرب ``·,, تعریف وي، چې $(\lambda, v) \in K \times V$ په ضرب $\lambda \cdot v \in V$ تنظیم او لاندې خویونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ او ټولو وکتورونو v، v_1، $v_2 \in V$ لپاره صدق کوی:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v\,.$$

که $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$ وی، نو سړی د یوه حقیقي همداسې کمپلکس وکتورفضا غږیږو او په ټولیزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي څخه تېرېږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې د حمعي علامه د V په همداسې په K کې کارول کيږي. همداسې ضرب هم په K کې د ضرب لپاره کارول کيږي. پای

د تعریف سره سم په ځانګړي ډول په وکتورفضا کې د ګروپ اکسیومونه ضدق کوی:

اسوشیاتیو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی(صفروکتور) : تیک یو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري ، د ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعي ته په څېټ – یا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره ټیک یو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعي بدلون قانو:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرایط تنظیموي، چې جمعه، کمون یا تفریق او ضرب دا ورسره بلد شمیرقوانین پوره کوي.. سرې داسې کړی شي چې ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j\,.$$

سربیره پردې د مخ نخښې قانون صدق کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(-v) = (-1)\cdot(-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i\,.$$

د Gard ≤ n (درجې) پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

یو حقیقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي،، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعریف دي:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x)\,.$$

د وکتورفضا خویونه ساده تصدیق کیدلی شي.

په پام کې لرو چې پولینوم د n درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتورفضا نه جوړوی. د جمعي جوړول کیدی شي د درجې کموالی ته لاربنود کړي. د بیلګې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x\,.$$

پای

حقیقي پرلپسي (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره یوه حقیقي وکتورفضا د عملیې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n)\,.$$

که سربیره پردې و غوښتل شي، چې ایا د وکتور سترکچر یا جوړښت خرابیدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بېلګې په توګه یوغږيزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسیو جمعه اړیین نه ده یوغږيز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښايي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی یا محدودیت یو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتورفضا

د K تن لپاره n -ګوني یا n-وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتورفضا K^n د کمپوننت ډوله تعریف شوي جمعي او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زياتو حالاتو کې ساده دی چې nګونی يا nتوپل د ليکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^t$$

همداسې

$$a^t = (a_1, \ldots, a_n)$$

وليکل شي. د ترانسپوزيشن سيومبول ``t ,, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حيث توپيرېږي.

پای

لاندې فضا يا برخه فضا sub space

د يوه K -وکتورفضا V پيرخه ډېری U، چې د په V کې تعريف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتورفضا جوړوی، د V لاندې فضا يا برخه فضا بلل کيږي.

برخه فضا U زيات وخت د V توکو شرايطو سره تعريفيږی:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چېA يوه په نخښنه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره بايد پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمايو چې ايا U د V لاندې فضا ده، کفايت کوي چې وښايو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلې ده:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U\,.$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U\,.$$

ليکونکي اپپ، کيمرلې

برخفضاوې زيات وخت د ورزياتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خويونو له لارې منځ ته راځي. که د حقيقي توابعو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$ وکتورفضا په پام کې ونيسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره يوه برخفضا جوړوی.
نورې بيلګې همداسې معکوسي بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوي دی.

لاندې فضا	خويونه
هو	ناجوړه
ja هو	بند يا مخدود
نه	يوغړيز
هو	نابرېکيدونکي
نه	مثبت
هو	ګربنيز

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه K -وکتورفضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تیرېدونکي کرښه $v = \lambda d, \quad \lambda \in K$ یوه لاندې – یا برخفضا جوړوي.

په هر حالت یوه کرښه چې له صفر 0 نه تیریږي، لاندې یا برخفضا نه ده. د بېلګې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(1,0)^t$ په کرښه

پرته ده، مګر $(2,0)^t$ نه.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ګرښیز کمبینیشن Linearkombination

په یوه K - وکتورفضا V وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_m$ لپاره سړی

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i ګرښیز کمبینیشن بولي یا نوموي.

په تولیزه توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه کرښیز کمبینېشن لاندې ، د W څخه د ناپای ډېرو وکتورونو یو کرښیز کمبینېشن پوهیږو.

لیکونکي: اپپ، کیمرلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور $v = (1,2,3)^t$ د وکتورونو $v_1 = (3,4,5)^t,\ v_2 = (1,1,1)^t,$ یو کرښیز کمبینېشن دی، ځکه چې $v = v_1 - 2v_2$.

د دې برعکس $v = (1,0)^t$ د وکتورونو $v_1 = (0,1)^t,\ v_2 = (0,2)^t,$ کرښیز کمبینېشن نه دی.،ځکه چې د v_1 او v_2 کرښیز پولینوم بڼه $(0,*)^t$ لری..

بالاخره کېدی شي $v = (0,0,0,0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1,1,0,0)^t,\ v_2 = (0,2,2,0)^t,\ v_3 = (0,0,3,3)^t,\ v_4 = (4,0,0,4)^t$$

کرښیز کمبینیشن په څیر انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کرښیزه هیولې یا سپاین یا سمڅ Lineare Hülle(span)

یادونه: د په یوه فضا کې د خوندې شیاانو او د باندې په منځ کې یو دیوال جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د K - وکتورفضا V د وکتورونو $v_1, \dots, v_n$ ټولو ګرښيزو کمبينېشنونو ډېرۍ د وکتورونو v_i کرښيزه سپاين يا هيولې(يو څه يا کوټی يا ...و چې په فضا کې يو ځا رابندوي (ژباړې)) بلل کيږي او داسې يې په نخښه کوو:

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

په ورته توګه سرې د $\mathrm{span}(U)$ وکتورونو د يوې ډېرۍ U لپاره د U د ټولو کرښيزوکمبينېشنونو ډېرۍ تعريفوی..

د هرې برخډېرۍ $U \in V$ لپاره د V يو برخفضا ده. $\mathrm{span}(U)$

ليکونکي: اپ، کيمرلې

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچينې کرښې g_1 او g_2 په پام کې ونيسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1, 0, 0)^t,\ g_2 : x = \lambda_2(0, 1, 0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هريو د لوريزو وکتورونو کرښيزه سپاين يا ګرښيزه هيولې دي، دلته

$$v_1 = (1, 0, 0)^t,\ v_2 = (0, 1, 0)^t.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 کرښيزه هيولې يا سپاين يوه سطحه $E = \mathrm{span}(v_1, v_2)$ ده، چې کرښې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1, 0, 0)^t + \lambda_2(0, 1, 0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی – يا محدب کمبينيشن Konvexkombination

په يوه حقيقي وکتورفضا V کې يو کرښيز کمبينيشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکسکمبينيشن بلل کيږي.

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی يا محدبه هيبولې يا سپاين(المانی ويينه :شپاين)Konvexe Hülle

د يوه حقيقي وکتورفضا V د يوې برخډېرۍ M محدبه هيولې د ټولو محدب کمبېشنونو

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

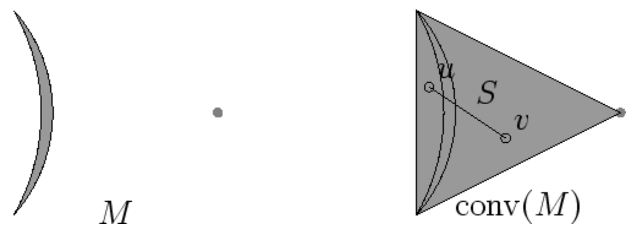
ډېرۍ ده د $v_i \in M$ سره او د $\operatorname{conv}(M)$ سره ليکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمككچيز يا هندسي $\mathrm{conv}(M)$ خورا كوچنۍ ډېرۍ ده، چې M خوندى لري، كومه چې د هرو دوه توكو u, v لپاره د هغو ترنكربشه

$$S = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندى لري



ليكونكي اپ، هيوليک

حقيقي- ياريبنتونى سكالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په يوه حقيقي وكتور فضا V باندې يو سكالارضرب يو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خويونو سره:

مثبتوالى :

$\langle v, v \rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

سيومتري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

کرښيزوالى:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

دلته $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$ په خوښه وکتورونه هرداسي سکالار.

د سيومتري په بنسټ يو حقيقي سکالار ضرب د دويم دليل په بنسټ هم کرښيز دی، يعني په V يو بي کرښيزه Bilinearform بڼه.

ليکونکي اپ، هيوليک، کرايخ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په يو کمپلکس وکتورفضا V يو سکالار ضرب يو فنکشن

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خويونو سره:

مثبتوالى:

$\langle v, v\rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

مائل سيومتري:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنیزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ همداسې $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوبنه وکتورونه همداسې سکالار دي.

مایل سیومتریکSchiefsymmetrie :

کربنیزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوبنه وکت.ورونه همداسی سکلار دي

د مائل سیومتري په اساس یو کمپلکس سکالارضرپ نسبت و دویمي متحولې ته ګربنیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

فقط د حقیقي سکالار لپاره کمپلکس کونجوګېشن بې مفهومه دی.

لیکونکي اپ، هیولیګ، کرایخ

دا ترې لاس ته راغلې اسیومتري اړیین ده، چې د کمپلکس سکالارضرب مثبتوالی تضمینوي. د بېلګې په توګه دی:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v\rangle \neq \mathrm{i}^2\langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زيات صدق کوي:

$$\langle iv, iv\rangle = (i\bar{i})\langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle > 0.$$

مثبتوالی اړيين دو چې له $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ لارې ئو نورم تعريف کړاي شو.

ليکونکي هيوليک، هيورنر

د وکتورونو $x, y \in \mathbb{R}^2$ لپاره يوه دحقيقي سکالار ضربونو د ممکنه تعريفونو لړۍ تر ځېړنې نيسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خويونه پوره دي.

خويونه	سکالار ځل
ټول	$10x_1y_1 + x_2y_2$
کرښيزوالی	x_1y_2
مثبتوالی، سيومتري	$\|x_1y_1\| + \|x_2y_2\|$
سيومتري	$x_1x_2 + y_1y_2$

فقط لومړی تعريف ټول غوښتوني شرايط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سيومتري پوره نه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle(\mathrm{i},0),(\mathrm{i},0)\rangle = \qquad 10\mathrm{i}^2 = -10 < 0$$

$$\langle(\mathrm{i},0),(1,0)\rangle = 10\mathrm{i} \neq \overline{\langle(1,0),(\mathrm{i},0)\rangle} = -10\mathrm{i}$$

په داسې حالت کې چې د دويم Arguments اجزا وې يا کمپوننتونه کمپلمس کنجوګيرت کړي، پرابلک له منځه تلاي شي. تعريف

$$\langle x,y\rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د کوشي-شوارځ – نامساوات(نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوځياتيو قانون له مخې تخمين شي:

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w,w\rangle}\,.$$

مساوات ټيک هلته صدق کوي، که صدق ولري $u \parallel v$.

که $v = \lambda u$ وي، لکه ځنګه چې غوښتل کيږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د يوه سکالار سره نامساوات تغير نه خوري. کېدی شي ونيسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|u|^2 = |v|^2 = 1\,.$$

که د سکالار ضرب سره (دلیل حقیقي حالت په بر کې نیسي) دي

$$\langle u, v\rangle = r\exp(\mathrm{i}\varphi)\,, \quad r > 0\,,$$

د $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ سره د ناغبرگو(ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= 1 + \lambda\bar{\lambda} - \lambda\overline{r\exp(\mathrm{i}\varphi)} - \bar{\lambda}r\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &= 1 + 1 - r - r\,. \end{aligned}$$

له دې سرره $r = |\langle u, v\rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Normر دولیزوال

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا V نورم یا تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ده

د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

هوموګینیوالی یا برابیرډولیزوالی Homogenität :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېګوډي (مثلث-) نامساوات:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

د لته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ يو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u,v) = \|u-v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعريف شي.

د سکالار ضرب نورم Skalarprodukt - Norm

په يوه حقيقي يا کمپلکس وکتورفضا V د يوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V$$

سره په يوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګينيتي (ورته والی) تړلې د سکالارضرب د ورته خويونو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u,u \rangle + \underbrace{\langle u,v \rangle + \overline{\langle u,v \rangle}}_{\in \mathbb{R}} + \langle v,v \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq |u|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + |v|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

$$= (|u| + |v|)^2$$

ڠخه د ريښې نيونې له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ماکسيموم - نورمMaximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکيموم – نورم په نخښنه کوي.

دريګوډي نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i \left(|x_i| + |y_i|\right) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \,.$$

ماکسيموم-نورم کېدی شي د وزنونو $w_i \in \mathbb{R}_+$ د پيل کولو يا رامنځ ته کولو سره تولېز شي:

$$\|z\|_{\infty,w} = \max_i (w_i |z_i|) \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حقيقي- يا ريل وکتورونو سکالار ضربSkalarprodukt reeller Vektoren

د وکتورونو $v=(v_1,\ldots,v_n)^{\mathrm{t}}, w=(w_1,\ldots,w_n)^{\mathrm{t}}\in\mathbb{R}^n$ لپاره کانونيکي
ضرب د

$$v^{\mathrm{t}}w=\sum_{i=1}^{n}v_iw_i=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$$

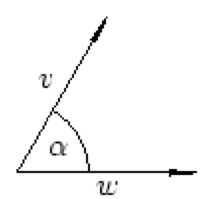
سره تعريف دی د ورکړشوي assoziierten نورم

$$|v|=\sqrt{v_1^2+\cdots+v_n^2}\,.$$

سره.

$$v^{\mathrm{t}}w=|v||w|\cos\alpha$$

هندسي کېدی شي دا نورم د له لارې تعريف شي، د v او w
ترمنځ کوچنی زاويه يا کونج α په نخښه کوي، چې د u او v څخه غزيدلې سطحې کې
اندازه کيږي.



د سکالار ضرب خويونه ساده ازمايل کيږي.

د هدسي تعريف ورته والی د کوساين جلې سره تصديقيږي(لومړی د $n=2$ لپاره).

دې پسې د $v=(v_1,v_2)^{\mathrm{t}}$ او $w=(w_1,w_2)^{\mathrm{t}}$ سره باور لري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha \ .$$

که ځاي په ځاي کړو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بنه بدلو سره ښونه یا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په $\mathbb{R}^n$ کې یوه سطحه اواره(هواروي) وي یا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې ښايي، چې د په خوښه ډیمنزیونون (ابعادو یا پراخېدونو) $n \geq 2$ لپاره ټیک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضربSkalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو $x = (x_1, \ldots, x_n)^t, y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ لپاره کانونیکي

سکالار ضرب د $$y^* x = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$$ له خوا تعریف دی د شسوخیري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \, .$$

سره.

دا سوپرسکریپت له دې سره د یوه وکتور ترانسپوزیشن او کمپلکس کنجوکېشن په ګوته کوي.

دا تعریف حقیقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوګیري حالت پوره وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو

$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

سکالارضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y \rangle = (1+2\mathrm{i}) \cdot 2 + (-2-\mathrm{i}) \cdot \overline{2\mathrm{i}} = 2 + 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = 2 + 8\mathrm{i} - 2 = 8\mathrm{i}\,.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړیین نه دی چې حقیقي وي.

د اسوڅییري نورم سره د دویم وکتور کنجوګیري کونه غوره رول لري. بې له کنجوګیري کونې څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرودی

$$\sqrt{(1+2\mathrm{i})^2 + (-2-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1 + 4\mathrm{i} - 4 + 4 + 4\mathrm{i} - 1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R}\,,$$

او د دویم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2 + (2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0\,.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

د یوه حقیقي سکالار ضرب لپاره د

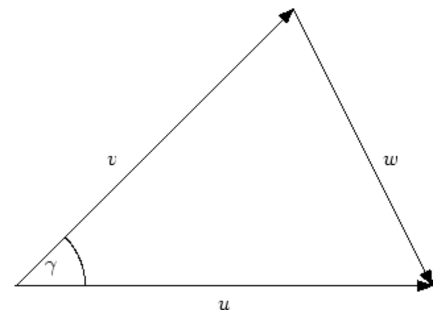
$$\cos \sphericalangle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

لخوا

په $[0, \pi]$ کې د u او v ترمنځ یوکونج تعریفوي. په ځانګړې توګه u او v اورتوګونال، $u \bot v$ ، بولو که $\langle u, v \rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعریف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساین له مخې رابولي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



په یوه درېګوډي یا مثلث کې د اړخونو $|u|, |v|, |w|$ اوږدوالي لپاره اړیکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \sphericalangle(u, v) \, .$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعریف څخه

$$|w|^2 = |v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u, v \rangle \, ,$$

د کونج تعریف د پرتلې له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقیقي سکالارضرب لپاره د کوشي-شورځ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \in [-1, 1] \, .$$

وېش کېدی شي په $[0, \pi]$ کې د یوه کونج د کوساین سره برابر کېښوول شي یا ځای په ځای شي.

د پیتاګوراس(فیثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د یوه سکالارضرب-نورم د اورتوګونال یا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \, .$$

باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0,\ \text{da}\ u\perp v} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0,\ \text{da}\ v\perp u} + \langle v,v\rangle =$$

$$= |u|^2 + |v|^2 .$$

دا حمله د پیتاګوراس جملې تر نامه شهرت لري(569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابلیانو پېژندله.

امکان لري، چې پیتاګوراس به لومړنی وو، چې دا جمله یې ثبوت کړې.

د پیتاګوراس درېګونيPythagoräisches Tripel

د پیتاګوراس درېګونو سره درې طبیعي اعداد l, m, n بلل کیږي، د $l^2 + m^2 = n^2$, سره، د بېلګې په توګه $(3,4,5)$.

یو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت یې د پیتاګوراس درېګونې پوره کوي، د پیتاګوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولارګوډیز یا ولاړکونجیز او که غواړی قایم االزاویه دي.

مصریانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د یوې رسی یا پړي ځخه کار رخسته، چې رابند او ۱۲ ګنډې د برابر یون (واحد)اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی یو درېګوډی داسي جوړ شي، چې اخونه یې درې، ځلور، پنځه یوونه یا واحده اوږده وي، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوج ولاړ یا عمود دی.

هر ناجوړه یا طاق عدد $l \geq 3$ کېدی شي د عددونو $m = (l^2-1)/2$ او $n = (l^2+1)/2$ سره د یو پیتاګوراس درېګوني ته پوره یا مکمل شي، ځکه چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2+1}{2}\right)^2 .$$

د دې درېګوني له 2 سره ضرب له لارې يو درېګونی لاس ته راځي، د هر ټول عدد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړخت اصول د يوې طريقې ځانګړی حالت دی، کزمه چې د ؛بينوم د دريم فرمول خڅه لاس ته راحي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضريبونو تجزيه کېدی شي، چې يو يې جوړه کمښت يا تفريق $(= 2b)$ ولري. د ناجوړه يا طاق $a = l$ لپاره دا ټوټه کونه $a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2 - 1}{2}\ , \quad c = \frac{a^2+1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانګړی حالت.

کرښيز نابلواکوالی يا خپلواکوالی يا نا تابعيت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1, \ldots, v_m$ کرښيز بلواک بللکيږي، که سکالار $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ شتون ولري د $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$

او لږ تر لږه يوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرښيز خپلواک بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولېږه توګه د وکتورونو يوه ډېرۍ M کرښيز نا بلوک يا خپواکه بلل کيږي، که د M هره پاي برخډېرۍ د کرښيز نا بلوک يا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کرښيزه بلواکه پلل کيږي.

په پام کی دې وې، چې د کرښيز الجبر په موخه په حقيقت کی ناپاي ډېريو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کرښيوې کمپينيشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسيو وکتورفضا ډېريو کې

$$e = (1,1,\ldots)^t,\ e_1 = (1,0,0,\ldots)^t,\ e_2 = (0,1,0,\ldots)^t,\ \ldots$$

کرښيز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\ .$$

دي.

د ثابتو پرلپسيو يا ترادفونو د کانونيکي يوون- يا واحدوکتورونو سره پاي انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه تيک هلته کرښيز خپلواک دي، که يو هم د بل ډېر واره نه وي، د بيلګې په توګه ږکتورونه $(1,0)^t$ او $(1,1)^t$ کرښيز خپلواک دي، څکه چې ايښوونه

$$\alpha(1,0)^t + \quad \beta(1,1)^t = (0,0)^t$$

راکوي

$$\beta = \qquad\qquad \alpha = 0\ .$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کرښيز بلواک دي، که

$$0(2,3)^t = (0,0)^t$$

همداسي:

$$1(0,0)^t + 0(2,3)^t = (0,0)^t;$$

پس د صفر وکتور يو ،،نه ترېويال،، يا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې د رې وکتورونه u, v, w تل کرښيزبلواک يا تابع دي، ځکه چې لاندې ځاي په ځاي کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاينيز هوموجين سيستم ته مو لاربښودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل يو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دا غبرګ(موازي) وي، دا په دې معنا چې که يو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرګ يا موازي وي يا که يو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلې سطحه کې پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = (1, 2, -3)^t,\ v = (4, -6, 2)^t,\ w = (-9, 3, 6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0, 0, 0)^t$$

، پس وکتورونه کرښيز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کرښيز بلواکوالي لپاره ازماينښت ورته دئ يوه هوموجېن کرښيز مساواتسيستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانګړي توګه ښايي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل ګرښيز بلواک يا تابع دي.

بنسټ Basis

د يوه وکتور فضا V برخدېرئ B د وکتور V يو بنسټ بلل کيږی، که B کرښيز خپلواکه وي او د V يو توليدېدونکی يا جړوېدوکی سيستم وي، دا په دې معناچې که هر وکتور $v \in V$ يو يوائځنی انځورونه د يوه پای کمبينېشن $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ د $b_i \in B$ سره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د يوه وضعيه قېمت له لارې سره نسبت و بنسټ ته وليکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t .$$

د وضعيه قيمت انځورونې

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t ,$$

سره ، دا په نامه کانونيکي ايزومورفيزم، سرې کړی شي يو پای بعدي K -وکتورفضا V د n–ګونی وکتور فضا K^n سره په نخښنه کړی شي يا وپېژندلی شي. په ځانګړې توګه کېدی شي چې د پای حقيقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تيوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود يا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولينومونو وکتور فضا يدلکيږي، اړيين نه ده چې وکتورفضا دې پای بنسټ ولري. مګر د د کرښيز الجب په ساحه کې پای کرښيز کمپېشنونه تر څېړنې لاندې نيول کيږي. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسي

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^t,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^t, \ldots$$

د پرلپسيو د وکتورفضا لپاره بنسټ نه جوړوي. دا د ناپای کرښيز کمبينېشن مطالعه يا راوړنه ، لکه دا چې ځنګه په فوريې لړيو کې رامنځ ته کيږي، په لاس لرو، خو يوه کونورکنځ يا پولې ته يوه تګ کليمه غواړي، يعني د فقط وکتورفضاجوړښت څخه زيات.

بعد يا پراخيدونی Dimension

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

که یو وکتورفضا V یو پاي بنسټ ولری، نو د بنسټ وکتورونو ګنون یا تعداد یواځنی ټاکلی او د V بعد یاپراخېدونی بلل کیږي:

$$n = \dim V \ .$$

د $V = \{0\}$ لپاره لیکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د یو ناپای بنسټ وکتورفضا لپاره.

د ټولیز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا یو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښایو، چې بعدونه یا پراخیدوني یواځني ټاکلی دي، بسیا کوی، چې لاندې وبینه وښایو:

که یوه وکتورفضا n-توکیزه بنسټ

$$b_1, \ldots, b_n \ ,$$

ولري، نو $n + 1$ وکتورونه

$$v_1, \ldots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n + 1$ څخه زیات وکتورونه هم) کربنیز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنښټوکتورونه به کربنیز خپلواکوالی ته یو تضاد لاس ته راشي.

پورتنۍ غوښتنه یا ثبوت کیدی شي د n پسې د ایندکشن له لارې و ښوول شي.

د ایندکشن پل لپاره (اندکشن پیل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه راواخلو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1 .$$

.

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0,$$

،

نو دی ، او کرښیزبلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کیدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونیسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتنې یا پیل سړی اوس ومتورونه تعریفوي، کوم چې د $n-1$ وکتورونو $b_1, \ldots, b_{n-1}$ څخه د کرښیز کمبینیشن په څیر انځوریدلای شي:

$$v_i' = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

دا چې د b_n ضریب یا ځلوونی ورکیږي، ساده کتل کیږي. دا چې

$$\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}, \;\; v_1', \ldots, v_n' \in V' =$$

Span

کیی شي سړی د ایندکشن نیونې(فرضیی) وکاروي او نه ساده کرښیز کمبینیشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = 0 .$$

د بنه بدلون پسي د کرښیز کمبینیشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتنونی بلواکوالی یا تابعیت.

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال یا ولاړ بنسټ Orthogonale Basis

یو بنسټ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ اورتوګونال بلل کیږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j \; .$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوګونال سیستم یا اورتوګونال بنسټ څخه غږیږو.

یو وکتور v نسبت و یوه اورتوکونال بنسټ $u_1, \ldots, u_n$ ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \; , \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2} \; .$$

لري.

د ضریبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2 \; .$$

د یوه نورمي پنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle \; , \quad |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 = |v|^2 \; .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کیمرلې

دا چې $u_1, \ldots, u_n$ یو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1, \ldots, c_n$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \ .$$

سره شتون لري.

که د پورتني مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ دد اورتوګوناليټي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k\rangle = c_k \langle u_k , u_k\rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v , u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} \ .$$

د ضريبونو لپاره کټمټوالی د پيتاګوراس د جملې ($n = 2$) ټوليزونه ده. دا تړلې د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n\rangle \, ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j , c_k u_k\rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګوناليټي له امله ورکيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت و اورتوګونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8, 4)^t$ دا لاندې انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \frac{8+12}{1+9} u_1 + \frac{-48+8}{36+4} u_2 = 2u_1 - u_2 \; .$$

د ضريبونو لپاره باور لري:

$$|2|^2 \; \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 + |-1|^2 \; \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = 4 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 \; .$$

نسپت و اورتوګونال پنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \; u_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \; u_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1, 1, 3)^t$ لاندې انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \langle v, u_1 \rangle u_1 = 3u_1 - u_2 - u_3 \; .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضريبونو لپاره باور لري

$$|3|^2+|-1|^2+|-1|^2=\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right|^2 .$$

ليكونكي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال پروجکشن يا - پرپوستون Orthogonale Projektion

په يوه برخفضا U اورتوګونال پرپوستون

$$v\mapsto P_U(v)\in U$$

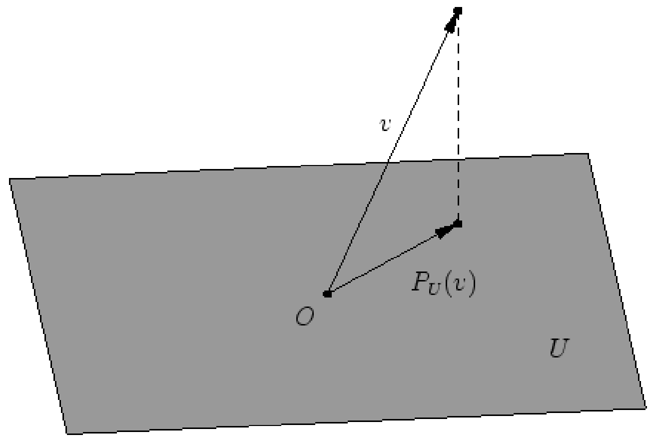
داورتوګوناليتي شرايط

$$\langle v-P_U(v),u\rangle=0,\quad \forall u\in U$$

سره پيژندل شوی دی.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $u_1, \ldots, u_j$ د U یو اوتوګونال پنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره یوه هایپرسطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعریف کیږي. د اوروتوګونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوګونال پروجکشن لپارره لاندې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2} u + \frac{x^t v}{|v|^2} v + \frac{x^t w}{|w|^2} w = \frac{-4}{4} u + \frac{-2}{4} v + \frac{0}{4} w$$

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د ګرام-شميت تکلار يا قانون Verfahren von Gram-Schmidt

د يوه بنسټ $b_1, \ldots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توګه، يو اورتوګونال بسټ $u_1, \ldots, u_n$ جوړ شي. دا سړی د $j = 1, \ldots, n$ لپاره سوکڅيسيو تعريفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \ldots, n$ لپاره.

دا رکورزيو ساده کيږي، که بنسټوکتور له هر پل(قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې خالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سړی ايندوکتيو(له يوه څخه تولېز ته) ښايي، چې $u_1, \ldots, u_l$ د $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l)$ لپاره يو اورتوګونال بنسټ جوړ‌زي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ايندكشن پل $(l \to l+1)$ لپاره په پام کې نيسو، چې د $j \leq l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j}|u_k|^2} = 0 \, .$$

له دې امله $u_1, \ldots, u_{l+1}$ اورتوګونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_l) = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_l) \, ,$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غېوي يا خوروي.

ليكونكي: هيوليک، کرايخ

د دې لپاره چې نسبت سكالار ضرب يا ځل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$$

ته د پولينومونو $p_0, p_1, \ldots$ اورتوګونال پرلپسې(ترادف) جوړه کړو ,کيدی شنلار سرهي سړی د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لاړشي. د ګرامشميت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 = x - 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\,dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle q_{n+1}, p_j}{p_j, p_j} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سرې د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولینوم $\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$ وکاروي. د

$$\operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زیاتوونی یا د جمعي غړی د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

$\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x\, q_n(x)\, q_n(x)\, dx$

د سیمتري په بنسټ د $j = n$ لپاره

ورکیږي.د $j < n - 1$ لپاره $[x\, p_j(x)]$ د $p_k(x), k < n$ یوکرښیز کمبینیشن دی.

د $\langle p_n, p_n \rangle = 0$ له امله له دې سره

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, [x\, p_j(x)]\, dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجندر Legendre پولینومونه بلل کیږي. د
یوه بل نومالي کوني سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \ldots$$

د لاندې بڼې د دوه ترمونو ريکورزيون لرې

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

د $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n\rangle}{\varrho_n}, \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}}$ او $\varrho_n = \langle p_n, p_n\rangle$ سره

کرښيزه څيرونه (فنکشن يا تابع)Lineare Abbildung

د K–وکتور فضا V او W ترمنځ فنکشن $L : V \longmapsto W$ ګرښيز بلل کيږی، که دا لاندې خوبونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

-هوموګيپينوالی:

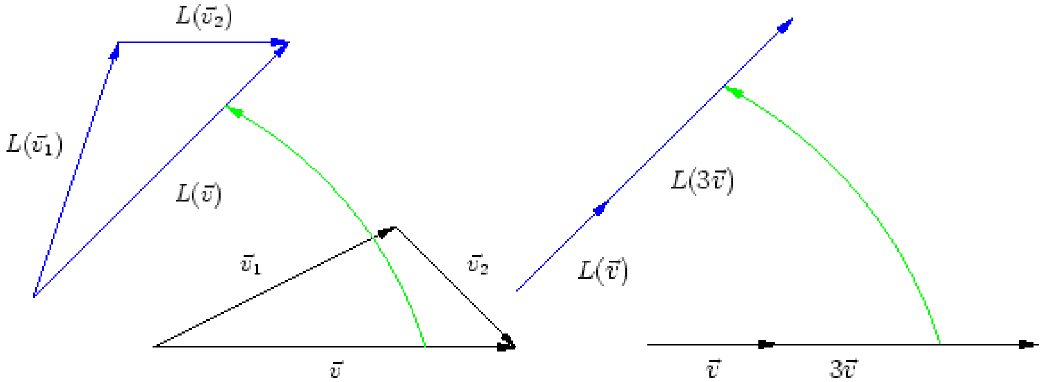
$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

په ځانګړې توګه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

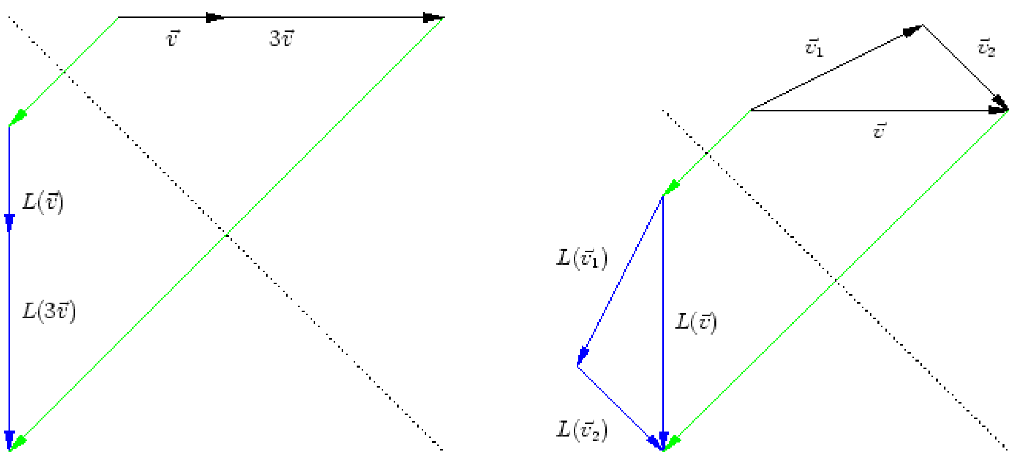
لکه په لاندې بيلګه کې به چې ښوول شي، يو څرخون کرښيز دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېګوټی جوړوي، چې د ده بڼه د څرخون سره بې تغیره باتیرږي، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضریب λ سره غزونه د څرخون سره بدلیږي، بسې تړلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هندارونه هم کرښیزه ده.



په سطحه کې د تګو یوه راکښنه کرښیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیتي پوره دي. د

$$T: \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ \lambda = 2$$

لپاره د بيلګي به توګه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2,1) \neq (3,1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3,0) \neq \qquad (4,0) = \lambda T(v)\ .$$

ليکونکي: هيورليک، هيورنر

يو ځو بيلګي لاندي د حقيقي توابعو يا فنکشنونو جدول ښايي. دلته هرچيرته ورکړ شوي، چي د کرښيزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

ځيرونه يا فنکشن mapping	جمعي Additive	هوموجين homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \|f\|$	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د یوه فنکشن لپاره یوه بیلګه، زیاتیز (مثبت) مګر هوموجېن نه دی، دادی، چې یو فنکشن T ، چې یو کمپلکس ارزښتیزه تابع د هغې حقیقي برخه په ګوته کړي یا وښایی یا په هغې څېره شي. دلته باور لري: $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$

لیکونکي: هیورلیګ، هیورنر

د کرښیزو توابعو کمپوزیشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرښیزو توابعو

$$S : U \to V\,, \qquad T : V \to W\,.$$

لپاره سړی کمپوزیشن تعریفوي(چې یوبل پسې تړاو یا ځنزیرونه هم بلل کیږي)

$$T \circ S : \quad U \to W$$

دا د لاندې لاري

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن S او په نتیجه باندې فنکشن T کارول کیږي، فنکشن T د فنکشن S پسې کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه کربنیزو فنکشنونو کمپوزیشن بېرته کربنیز دی.

ماتریکس Matrix

په یوه تن یا جسم باندې د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس تر نامه لاندې ($m, n \in \mathbb{N}$) دا لاندې یوه ولاړکډیزه - یا قام الزاویه شکل پوهیږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ د i –مې لیکې – او $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ د j –مې متې(ستن یا پرته لیکه یا درځ...) وکتورونه بلل کیږي. په ځانګړي توګه $(n \times 1)$ - ماتریکس یو د لیکې - او $(1 \times n)$ - ماتریکس یو د متې یا ستنې وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتریکسونو ټولګه په $K^{n\times m}$ سره په نخښه کیږي، حقیقي (کمپلکس) ماتریکسونه د $\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) سره په نخښه کیږي.

لاندې بېلګې د مختلف د ماتریکس بعدونه یا پراخېدونې ښايي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي دوه ماتريکسونه د ليکو – همداسي د مټووکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د يوې ديمنزيون 1 دی. ښي لور ته يو څلوريځ يا مربع ماتريکس او يو يو ولاړګوډيز- يا مستطيلي ماتريکس دی.

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د يوه کرښيز فنکشن ماتريکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ او $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ سره يو کرښيز فنکشن $L : V \longmapsto W$ دبنسټوکتورونو د $L(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$ عکسونو يا ارزښت قيمتونو سره يواځني ټاکلي دي. دا لاندې دماتريکس انځورونه لری:

$$w_F = A v_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

د کومو سره چې v_j او w_i د v او $w = L(v)$ وضعيه قيمتونه (کواوردیناتونه) په نخښه کيږي نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتريکس A په j-مه مټه کې د $L(e_j)$ کواوردیناتونه يا وضعيه قېمتونه نسبت د F بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې L د يوه بنسټ د عکسونو يا ارزښتونو سره يواځنی ټاکلي، تړلي د کرښيزوالي لپاره شرايطو څخه ورکول کيږي:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکو

$$w = \sum_i w_i f_i$$

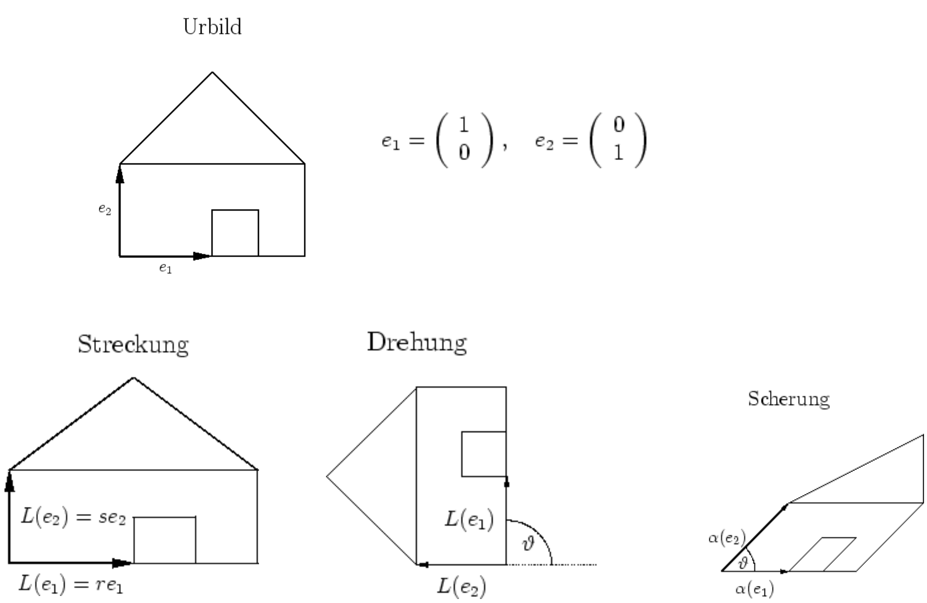
او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردينات پرتله کيږي، داسي هم سړی غوښتل شوي د ماتريکسونو انځورونه لاس ته روړي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې کې يو څو د سطحې کرښيزې تابع

$$L:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د يوون – يا واحد وکتورونو شکلونو يا بهتره ارزښتونو e_i (غوړ) له لارې کره شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سړی کړی شي چې د ماتريکس A انځورونه نسبت کانونيکي بنسټونو e_1, e_2 ته ټړلی معلوميږی يا لوستل کيږي. د ماتريکس متې هره يوه ځانله د وکتورونو $L(e_i)$ $i = 1, 2$، کواوردیناتونه خوندی لري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

يو کرښيز فنکشن يا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x = 0, 1$ باندې د هغو ارزښتونو سره ټاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرښيز دی او کېدی شي نسبت د ضريب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعريف شوي مونومبنسټ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

رکربنیز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لارې انځور شي

که بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتریکس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(0) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

ټولیز د $\leq n$ درجې په m تکیه ځایون $x = x_1, \ldots, x_m$ کې د یوه پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ارزښتونه یا قیمت ټاکنه د واندرموند –ماتریکس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشریح شوې یا ورکړل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کواوردیناتونو ترانسفورمیشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د يوه بنسټبدلون $E \to E'$ سره د يوه وکتور v کواوردیناتونه د

$$v_E = Av_{E'} \quad \Leftrightarrow \quad v_{E'} = A^{-1}v_E\,,$$

سره سم ترانسفورمي کوي، د کوم سره چې د مربع ماتريکس A متې د بنسټ وکتورونو e'_i ضريبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e'_i = \sum_j a_{j,i} e_j \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda'_k e'_k \,.$$

د e'_k د انځوروني په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$v = \sum_k \lambda'_k e'_k = \sum_k \lambda'_k \left(\sum_j a_{j,k} e_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} \lambda'_k \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کواوردينات پرتلې سره لاس ته راځي: $v_E = Av_{E'}$

ليکونکی:ويپر

Bild او Kern معنا خیره یا شکل او زړي

د يوه کربښيز تابع $L : V \to W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V :\ L(v) = 0\} \subseteq V$$

سره سړی کرن یا زړی په نخښه کوي او د

$$\text{Bild}\, L = \{w \in W :\ \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \subseteq W$$

د سره د L ارزښت يا شکل ښوول کيږي يا په نخښه کيږي.
دواړه ډېرى(ستونه) لاندې – يا برخه فضاوې دي.

ليکونکی: کيمرلې

ثبوتوو چې د K –وکتورفضا V همداسې W نسبت و کربښيزو عملياتو ته تړلې يا رابند دي يعنې دا عمليات په کې بې بنديزه اجراکېدی شي.

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د $u, v \in \ker(L),\ \lambda \in K$ لپاره، د کربښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda\, u) = \lambda\, L(u) = \lambda\, 0 = 0$$

او

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دويم - $\operatorname{Bild} L$ د W لاندېفضا ده: د $u, v \in \operatorname{Bild} L$ لپاره د $u = L(x), v = L(y)$ او $\lambda \in K$ سره د L کرښيزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x+y) \ .$$

دا چې V يوه وکتورفضا ده، نو اړونده له مخ ښېروني يا عکسونه يا تابع وې هم شته او په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\operatorname{Bild} L$ توکي دي.

ليکونکی: ويپر

د Bild او Kern ابعاد يا براخيدوني Dimension von Bild und Kern

د يوه کرښيز فنکشن $L : V \to W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{Bild}(L) \ ,$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کتمتوالی وښايو، نو د $\ker L$ لپاره يو بنسټ $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته پوره کوو. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\mathrm{Bild}\, L = \mathrm{span}\, F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \ldots, L(e_n)\}.$$

دا چې پسې F کربنيز خپلواک دی، يعني د $\mathrm{Bild}\, L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i = 0$.

دا غوښتونی د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راحي.

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولينومونو - چې له $\leq n$ درجه لري- په فضا باندې k-م مشتق څېړل کيږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولينومونو د فضا لپاره چې درجه يې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$ بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ يو پولينوم دی چې درجه يې ≤ 1 ده. بيلدفضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنيولو سره ثابته له منځه ځي يا ورکيږي. دا يوه يو بعدې لاندې - برخفضا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګرن يا زړی بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی يا بنول شوی.

په توليزه توګه پولينوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k} .$$

بيلد يا ځيره يا ارزښت د $\leq n-k$ درجې پولينوم دی او پولينومونه چې $< k$ درجه لري له منځه وړل کيږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n+1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \mathrm{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \ker} .$$

•

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

معکوس يا په ځت تابع (ځيرونه يا فنکشن)Inverse Abbildung

يوه کرښيزه تابع $L : V \to W$ تيک هلته انجکتيو يا په کې ده، که $\ker L = 0_V$ وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v) ,$$

له مخې يو معکوس تابع $L^{-1} : \mathrm{Bild}\, L \to V$ تعريف شوې، چې دا هم کرښيزه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړي توګه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v\,, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $v \in V$ او $w \in \text{Bild}\, L$ لپاره

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

د L د ګرښيزوالي په دليل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2)\,,$$

او له دې اړيکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L\,.$$

د يوه انجکتيو (په کې) کرښيزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن يازړی فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرښيزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2))\,,$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1))\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

د ماتريکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $(m \times n)$ -ماتریکسونه یو وکتورفضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې یا عملیې په لاندې توګه کمپوننتډوله تعریف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow \qquad b_{i,j} = \lambda a_{i,j} .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

د ماتریکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د یوه $(n \times m)$ -ماتریکس A او یوه $(m \times s)$ -ماتریکس B ضرب لاندې د $(n \times s)$ –ماتریکس دی:

$$C = AB \; , \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \; ,$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} دتعریف لپاره د A د i لیکې توکي او د B د j متې توکي سره جمعه کیږي:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{kj} & \\ & \vdots & \\ & b_{mj} & \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې له دې سره باید د A د متو تعداد (ګڼون) د B د لیکو تعداد(ګڼون) سره برابر وي.

د ماتريکس ضرب همغه د کرښيزو توابعو کمپوزيشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av \,,$$

دا په دې معنا چې C د $S \circ T$ ماتريکس انځورونه ده.

د کمپوزيشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k \,, \quad v_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj} u_j$$

له مخې تعريف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j \,.$$

په ګوډيزه يا کونجيزه نوکانو يا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتريکسونو ضرب دی او کمپوزيشن توابعو د ماتريکس C سره سرخوري(يا باربر دی).

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې يو څو معلوم د ماتريکسونو ضربونه ورکړشوي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

د ستراسن(وبينه: شتراس) الګوریتم Strassens Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتریکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څیړنې لاندې ونیسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتیا لري. په ډېر هکبکوالي(چې د څه انتظار نه کیږي او پیښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسیا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربونې شمیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
\end{aligned}
$$

او د C ضرب د زیاتون یا جمعي جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$
\begin{aligned}
c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &&= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &&= p_4 + p_5 \\
c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &&= p_6 + p_7 \\
c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &&= p_2 - p_3 + p_5 - p_7.
\end{aligned}
$$

کوموتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتریکسونو کموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حیث تعریف شوی او په ټولیزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت کې ماتریکسونه A او B کموتي کیدونکی ماتریکسونه بلل کیږي.

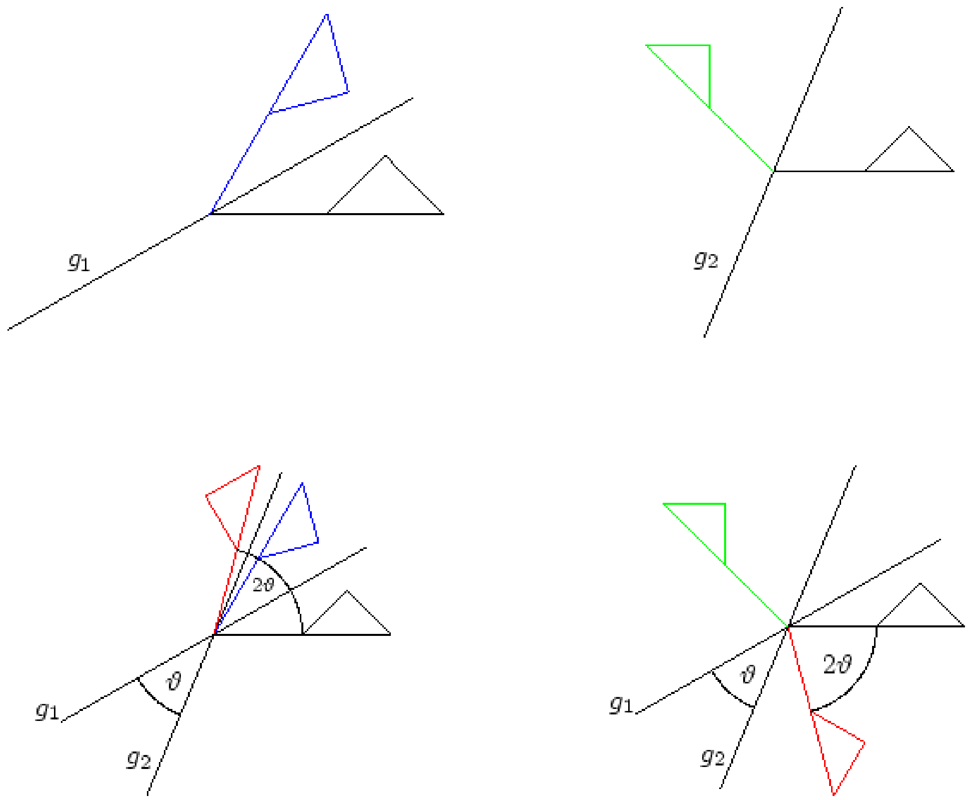
لیکونکي: هیولیک، هیورن

په مختلفو محورونو g_1 او g_2 د دوه وکتوررونو S_1 او S_2 دهنداروني (که غواړی انغکاس) یو په بل پسي راوړنه کې د لړی پرلپسي رول نه لري.

دا پورته ځیره یا عکس د یوګونو هنداررونو شکلونه ښایی. په لاندې لړی کې کیڼ ډبله هندارونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله یا دوه واره هندارونه $S_1 \circ S_2$. د هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځله نتيجې يې د کرښو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلو لورو.



که g_1 د لومړی کونجنيمي په څېر ونيسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتريکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \,,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېل هندارونه يا ا نعکاسونه لاندې انځورونه لري

$$w = S_2 S_1 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \,,$$

$$w = S_1 S_2 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u \,.$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

په څټ يا معکوس ماتريکسونه Inverse Matrix

د يوه معکوس کېدونکي کرښيز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتريکس په نخښنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

يون – واحد ماتريکس سره؟

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول رېګولار ماتريکسونه $A \in K^{n\times n}$ نسبت و ضرب ته يو ګروپ جوړوي، کرښيز ګروپ چې د $\mathrm{GL}(n,K)$ سره په نخښه کيږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

د $A, B \in \mathrm{GL}(n,K)$ لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E\ ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیاګونال ماتریکس معکوس داسي لاس ته راځي، چې د دیاګونال توکو معکوس یا په ځته ارزښت جوړېږي،، د بېلګي په توګه:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1/7\end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}.$$

د درېګودئ – یا مثلث متاریکس لپاره په معکوسوني کي د مثلث بڼه ساتلي پاتیي کیږي، د بېلګي په توګه:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

په ټولیزه توګه د ماتریکس په ځته یا معکوس پوره ځاي نیولی یا ډک دی، د بېلګي په توګه:

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

لیکني باید د یوه کرښیز مساواتیتم له لارې و ټاکمل شي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

تراسپوني او ادجونګیري ماتریکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د یوه ماتریکس A لیکي اوو متې سره بدلي شي، نو د ترانپوني ماتریکس $B=A^{t}$ څخه غږیږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j}=a_{j,i}\,.$$

که د یوه کمپلکس ماتریکس A سربېره پر دې لیکني کنجوګیر شي، نو ادیونګیري ماتریکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$.

يو ماتريکس د $A = A^{\mathrm{t}}$ سره سيومتريک بلل کيږي، يوه ماتريکس د $A = A^*$ سره د پخپله اديونګيري په ځبر ده يا هرميتيکي Hermitesch ده. د حقيقي ماتريکسونو لپاره کليمي سيومتريک او هرميتيکي همغه (يوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

- $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$ او $(AB)^* = B^* A^*$

- $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$ او $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

د يوې ليکنې لپاره په $C^{\mathrm{t}} = (AB)^{\mathrm{t}}$ کې باور لري

$$c^{\mathrm{t}}_{ji} = c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a^{\mathrm{t}}_{ki} b^{\mathrm{t}}_{jk} = \sum_k b^{\mathrm{t}}_{jk} a^{\mathrm{t}}_{ki}$$

او له دې سره $C^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$. دا چې $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د اديونګيري لپاره هم ټيک دی.

له

$$E = E^{\mathrm{t}} = \left(AA^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$$

لاس $\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$ ته راځي. په ورته توګه د ادجونګيري لپاره هم صدق کوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپور Spur

(د ا لماني ژخه د شپور پښتو معنا: نخښه یا علامه)

شپور د یوه $n \times n$ -ماتریکس A اصلي دوه کونټرې توکو(وتر) جمع د A شپور بلل کیږي،

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,.$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ - ماتریکسونه وي، نو باور لري:

$$\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د یوه رېګولار ماتریکس T او یوه په خوښه ماتریکس A لپاره صدق کوي:

$$\operatorname{Spur}(T^{-1}AT) = \operatorname{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور یا سپور د کواوردینات ترانفورمیشن لاندېinvariant (نسبت یوې کچونې یا اندازه کونې ته بې تغیره پتتې کیدل) یا بې تغیره پاتیږي.

د یوه ماتریکس رانګ Rang einer Matrix

د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس لپاره د کرښیز خپلواکو متو ماکسیمال ګڼون یاتعداد د ماکسیمالو ګرښیزو خپلواکو کیلو سره یو په بل پریوحي یا یو بل سره مساوي دي او د رانګ A په لکنیز ډول $\operatorname{Rang} A$ بلل کیږي،

په ځانګړي ډول باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{Rang} A \leq \max\{m,n\}.$$

د ماکسيمال کرښيز خپلواکو متو $v_1,\ldots,v_n$ تعداد د وکتورفضا پعد په ګوته کوي

$$V = \operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_n\},$$

ځکه چې سړی کړی شي د متو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توګه وينا د ليکو $w_1,\ldots,w_m$ څخه غزيدلي وکتورفضا W لپاره هم صدق کوي.

غوښتنه $\dim V = \dim W$ د n پسې اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کيږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عمليو يا کارونو سره بې تغيره پاتيږي:

- د متو يا ليکو بدلېدنه يا پرموتيشن

- د يوه سکالار جمعه ډېرځله يا د يوه ډېرځله سکالار سره د يوې متې (ليکې)حمعه د يوه بلې متې (ليکې) سره.

که $A \neq 0$ وي، سړی کړی شي دا عمليه په لاندې بڼه

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتيشن سره لومړی $b_{1,1} \neq 0$ لاس ته راځي او بيا د لومړی ليکې يا کيلې او متې پاتې توکي د مناسب جمعې له لارې له منځه وړي. په ټيک ډول لومړي د لومړی متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-b_{1,j}/b_{1,1})$ -ځله و j -مې متې ($j = 2, \ldots, n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د لیکو وکتورونو سره هم دا عمل وخ ته بیولاي شو . که د V' او W' سره ْوبښتونې وکتورفضاوې د $(m-1) \times (n-1)$ - ماتریکس A' لپاره ، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ایندکشن له لارې غوښتنه.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

یو څو تیپیکي حالتونه د درې (3×2) -متریکسونو سره دلیدلو شوي یا ورکړ شوي دي

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{Rang} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 1 .$$

د دریم ماتریکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د متو S_1 او S_2 لپاره او د لیکو $2Z_3 = 3Z_2 = 6Z_1$ Z_1, Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتورفضا دیمنژن یا بعد برابر په 1 دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه ماتریکس نورم Norm einer Matrix

د یوه وکتور نورم د ماتریکس نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

ته بنسټ ووي د نورم خويونو سربېره (مثپتوالی، هوموچی‌نيتي، مثلثنمساوات)

$$||AB|| \leq ||A||||B||,$$

باور لري، دا په دی کعنا چی د ورسره تنظيم شوی ماتريکس نورم سبضريبي submultiplikativ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په لاندې کې به يوګوني خويونه د ازمايني له لارې زښوول شي:

مثبتوالی: د وکتور فضا تعريف له لارې تظمين دی، چې $||A|| \geq 0$ دی. که A صفرمآتريکس وي، نو فقط صفروکتور 0د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفروکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کيږي، او تابع يا فنکشن د صفرماتريکس سره تشريح کيږي.

Homogenitätهوموحنيتي:

$$\max_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \max_{||x||=1} |\lambda|||Ax|| = ||\lambda A||$$

$$= |\lambda| \max_{||x||=1} ||Ax|| = |\lambda|||A||.$$

$$||\lambda A|| = \max_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \max_{||x||=1} |\lambda|||Ax||$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| \,.$$

Dreiecksungleichungمثلثات برابرون :

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \\ &\le \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\le \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| \,. \end{aligned}$$

Submultiplikativitätسب ضریبوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x:Bx\neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\le \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| \,. \end{aligned}$$

د لومړي بڼې بدلون سره ، چې په حقیقت کی ډېری یا سټ په یوه سوپرېموم Supremumڅېره کیږي محدودیږي، مګر فقط وکتورونه ترې لرې کیږي، چې صفروکتور دڅېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغیزمن کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليګ ، کرايخ

د ليکو د جمعي نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسيمومو نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتريکسونو لپاره د ليکوجمعي نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظيم دی.

ليکونکي: هيوليګ ، کرايخ

د $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1$ لپاره

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}| ,$$

دی

او سړی لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \le \max_i \sum_j |a_{ij}| .$$

که سړی ونيسي يا فرض کړي، چې ماکسيموم د $i = k$ لپاره فرض شوی يا نيول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \operatorname{sign} a_{kj}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتخاب له لارې لاس ته راځي، څکه چې دی:

$$\left|\sum_j a_{kj}x_j\right| = \sum_j \|a_{kj}| \ .$$

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ماتريکس د ډکونې جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتريکس توکو $a_{i,j}$ د تنظيم سره سم د لاندې ترمنځ توپير کوي

اول – دياګونالماتريکس: $a_{i,j}=0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتريکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتريکسونو د دياګونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نخښه کيږي يا نومول کيږي،

پورته (کښته) مثلث ماتريکسونه: $a_{i,j}=0$ د $i<j$ ($i>j$) لپاره.

په توليزه توګه يو $(m \times n)$ - ماتريکس ضعيف ډکشوی، که فقط توکي $c\max(m,n)$ د صفې سره نامساوي وي، د يوې نه ډېرې لوې ثابتې c سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يونيتار بلل کيږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^*,$$

دا په دې معنا چې که د A متې د $\mathbb{C}^n$ يو اورتوګونال بنسټ جوړ کړي.

د حقيقي ماتريکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجګيشن،

$$A^{-1} = A^t,$$

او سرې د يوه اورتوګونال ماتريکس څخه غبرګېږي.

اورتوګونال (يونيتار) ماتريکسونه د($\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) يو لاندې – برخګروپ جوړوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هادامارد – ماتريکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنوپورې اورتوګونال ماتريسکونه شتون لري د H_k د $n \times n$ بعد په $\{-1,1\}$ کې د ليکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتريکسونه.

د هاداماد لومړی ماتيکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوليزه توګه ماتريسونه د ريکورزيون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير (وينه: فوريې) ماتريکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د يوون - يا واحد ريښې

$$w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

سړی داسې په نامه فوريې ماتري:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) پسې يونيتار دي، دا په دې معنا چې $W_n^* W_n/n$ يوون – يا واحد ماتريکس دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متو اورتوګوناليټي ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ ـمو او $(k+1)$ ـمو متو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j}\overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n}-1}{w_n^{j-k}-1},$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت يا ماتباندې صفر دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د $n=4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi\mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$ دی، او سرى لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 يونيتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right)\left(\frac{1}{2}W_4\right) = E\,.$$

له دې امله د فوريې ماتريکسونو د سيومترى والى له امله $W_4^* = \overline{W_4}^{\,t} = \overline{W_4}$ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

نورم ريښتونې يا ـ وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ماتريکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي (كمپلكس) ماتريكس A ټيک هلته اوتوګونال (يونيتار) دی، كه دا د هر وكتور اوكليد(اقليدسeuklidische) نورم انواريانت پريږدي:

$$|Av| = |v| .$$

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

بسيا كوي، چې كمپلكس حالت وڅيړو، چې حقيقي حالت په بر كې نيسي.

اول - A يونيتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

پس په ټوليزه توګه د كمپلكس وكتورونو سكالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمريښتونوالی په بر كې لري.

دويم – د نورم ريښونوالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متې وكتور v_j د يوون وكتورونو e_j د عكسونو نورم يوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښايو چې مختلفې متې اوتوګونال دي،نو $\lambda = \exp(i\vartheta)$ ټاكو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R} .$$

پسې د نورريښتونوالی او اقليدس نورم تعريف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2|v_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2\overline{\lambda} v_k^* v_j ,$$

په تعقيب بايد په ښی لور سكالار ضرب ورک شي.

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيوکليکي (تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه Zyklische Matrizen

د ځيکليکي $(n \times n)$-ماتريکسونو متې د لومړی متې د ځيوکليکي راکښني له لارې جوړيږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتريکسونو ضرب سره ځيوکليکي جوړښت ساتلی يا خوندي پاتي کيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه ځيوکليکي ماتريکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچي

$$\{0,\ldots,n-1\} = k + \{0,\ldots,n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سړی په زياتوونو (د جمعي اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای کړي، کوم چې ښايي، چې $c_{i,k}$ فقط د $i-k \bmod n$ په واک کې دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ځيوکليکي ماتريکسونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب   دا لاندې څيوكليكي ماتريک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ستوښاستيكي ماتريكسونه

يو $(n \times n)$ -ماتريکس   ستوښايتيکي بلل كيږي، كه $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ستوښاستيکي ماتريکس د احتمالوالو x_i تغير ښايي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د P د ښوېيونو په ښنسټ x' هم يو د احتمالوالي وكتور دی، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1\,.$$

دا نه کمښتوالی یا نه منفیوالی ښرګند دی او د جمعي انواریانت له لاندې ښخه تعقیبیږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ديترمينانت د انتيسيومتري کرښيزفورم په حيث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د يوه مربع ماتريکس A ديترمينانت

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$$

د متي a_j سره کېدی شي د لاندې خويونو له لارې تعريف شي.

اول – دېرکرښيزوالی

$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots)\,.$$

دويم - انتيسيومتري:

$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots)\,.$$

دريم – نورمي کونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1\,, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}\,.$$

د دې قانون سره دیترمینانت د n –ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}\,,$$

د کوم سره چې د $(1, \ldots, n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1, \ldots, i_n)$ سره جمعه کېږي او σ د ځاي بدلونون سره مخنخښه ښايو.

سړی دا لاندې لیکدود هم استعمالوي

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

د زیاتیدونو (د جمعې اجزاوو) د تعداد د ځګیدو له امله($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د دیترمینانت د عملي آنځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مګر دا تړلی د تعریف شوو خویونو تړلی (د عملیو له لارې) دا د ښووني او د نوروو خویونو د لاس ته راوړلو لپاره اړیین دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازښته) تعریف لپاره ورکړشوی دی.

لومړ ی ښايو، چې غوښتل شوي خویونه مو اړیین د دیترمینانت ودیزوني ته بيايي، په اړیینه توګه د برموتیشن په مرستې .

د دې سره د A متي د یوون – یا واحد وکتورونو e_i د کرښیز کمبینیشنونو په حیث انځوروي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

د ډېرکرښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=:d_i} \,.$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کېدی شي ساده شي. که له دې دوه يوون - يا واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتيسيومتري په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) = -\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) \,.$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې $(i_1, \ldots, i_n)$ يو پرموتيشن دی د $(1, \ldots, n)$، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} \,,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو 2 د بدلونونو يواځنی ټاکلی تعداد(ګڼون) په نخښه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونيکي لړی پرلپسي راوړی شو. ځای بدلون د مخنخښې تعريف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(i) \,,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوې وديزينه لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس کېدی شي و ازمایو، چې ودیزینه د غوښتوني قانون سره تړلې ده. ډېرکربنیز والی باور لري، خکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې تیک یو توکی منځ ته راځي. انتی سیومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له پدلون دبدلولو تعداد کانونیکي لړی پرلپسي په یو تغیر خوري، بالاخره په واحد ماتریکس کې جمعه په یوه زیاتووني (د جمعې غړي) کمیږي

$$a_{1,1}\cdots a_{n,n}=1\cdots 1=1$$
.

لیکونکي: هیولیک، هیونر

2 - لیکیزه دیترمینانت 2-reihige Determinante

د یوه -ماتریکس دیترمینانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

دی.

دا د برموتیشن ودیزینې پسې په ساده ډول لیدل کیږي، ځکه چې 2 زیاتیدونی شتون لري.

دبدیل په توګه کېدی شي دیترميناتونه د تعریف شوو خویونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متې د کانونیکي واحد وکتور(یوون-) e_k کربنیز کمبینیشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-)کربنیزوالي له امله لاس ته راځي

$$\det(ae_1+ce_2,be_1+de_2) \;=\; a\det(e_1,be_1+de_2)+c\det(e_2,be_1+de_2)$$

$$=\qquad ab\det(e_1,e_1)+ad\det(e_1,e_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

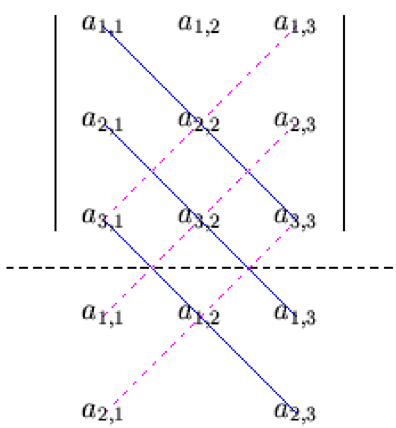
$$+\,cb\det(e_2,e_1)+cd\det(e_2,e_2)$$

$$=ab\cdot 0+ad\cdot 1+cb\cdot(-1)+cd\cdot 0=ad-bc\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

د ساروس شيما يا شکلSarrus-Schema

د یوه (3×3) - ماتريکس ديترمينانت لکه ښنګه چې په تابع يا فنکشن کې ښوول شوې د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دياګونالونه (دوه کونجتړې) په ګوته کوي:



$$=\begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}\\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}\end{array}$$

دې د ساروس په نامه يادې شوې شيما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري. سملاسي د $n=4$ ديترمينانت د 24 ضربونه يوه جمعه لري.

د ساروس –شېما په ساده توګه د ځاي بدلون وديزيېنه پسې په ساده توګه و ازمايي. لاندې جدول ټول زياتووني يا جمعی اجزاوې ښايي همداسې دا د ځايبدلون i سره اسوځييري بدلونې، له کومو چې دا مخنخښنه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتيدوني يا د جمعې اجزا		Vertauschungen	
$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$	$+$		$(1,2,3)$
$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$	$+$	$\to (3,2,1) \to (1,2,3)$	$(2,3,1)$
$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$	$+$	$\to (2,1,3) \to (1,2,3)$	$(3,1,2)$
$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$	$-$	$\to (1,2,3)$	$(3,2,1)$
$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$	$-$	$\to (1,2,3)$	$(1,3,2)$
$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$	$-$	$\to (1,2,3)$	$(2,1,3)$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

لوريز حجمونه (ډکي) Orientiertes Volumen

د يوه حقيقي ماتريکس A ديترمينانت مطلق ارزښت د بعدي سره چې له متو څخه غزيدلی شپات(Spats) سره پراپر دی يا يو په بل پربوځي:

$$|\det A| = \operatorname{vol}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : \ 0 \leq \alpha_i \leq 1\right\} = \operatorname{vol}\left(A[0,1]^n\right) .$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده ازمايل کيدی شي، چې لوريز حجمونه يا ډکي

$$\mathrm{vol}_* A := \mathrm{sign}(\det A)\,\mathrm{vol}(A[0,1]^n)$$

ټول درې د ديترميناتونو تعريف شوي خويونه (مولتی کرښيزوالی، انتي سيومتري، نورمي ونه) لري، له دې امله بايد باور ولري:

$$\mathrm{vol}_* A = \det A$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو $u,\ v,\ w$ لپاره ديترمينانتونه د شپات ضرب سره سر خوري يا برابر دی:

$$\det(u,v,w) = [u,v,w]\,.$$

د بديل په قسم دا کېدی شي د ε -تنځور ε Tensors- سره افاده شي:

$$\det(u,v,w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k\,.$$

که وکتورونه د بېلګې په توګه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو شپاټ ضرب لاس ته راځي.

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=(2,1,1)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=6-1-1=4\,.$$

د ε - تنځور سره لاندې انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) &= \varepsilon_{1,2,3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\varepsilon_{1,3,2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{2,1,3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\\ &\quad +\varepsilon_{2,3,1}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,1,2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,2,1}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\\ &= 8-2-2+1+1-2=4\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n\times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

- $$\det A=\det A^{t},\quad \det A^{*}=\overline{\det A}$$
- $$\det(AB)=(\det A)(\det B)$$.
- A تيک هلته انورتير وړ يا معکوسکېدونکي ده، که او $\det A\neq 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

ليکونکي: هيوليگ، هيونر

اول – د سيومتري خويونه د ځای بدلون پسې وديزوني څخه لاس ته راځي:

$$\det A^{t} = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} .$$

که د جمعۍ اجزا سره اندکسونه يا پيژند نخښې $\{1, \ldots, n\}$ هر يو په لړۍ پرلپسې و i ته معکوس ځاي بدلون j سره و وځغلوو، نو د تابع يو تغير شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي وديزينه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بيلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

يو بل ته معکوس ځاي پلونونه دي په څيکليکي ليکډول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} .$$

که د زياتيدونو يا د جمعي د اجزاو ا ينکسونو يا پيژندنخښو $\{1, \ldots, n\}$ کې وځغلي هر يو په لړۍ پرلپسي و i ته په څټ يا برعکس بدلونونه يا پرموتيشنونه j ته ، نو فنکشن يو تغير شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو سرب مساوي يا باربه وده لاس ته راولي لکه $\det A$.

د بيلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

يو بل ته په ځيکليکي لکندود په ځت يا معکوس پرموتيشنونه يا ځای بدليدنې دي، او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} \,.$$

مخنخښهσ مثبت ده او هرځل ، ځکه چې

$$i = (1\ 3) \circ (1\ 2), \quad j = i^{-1} = (1\ 2) \circ (1\ 3)\,,$$

دا په دې معنا چې د پدلونون شميره (ګڼون) هر ځل 2 دی.

دويم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دريم خوي څخه لاس ته راځي.

د $\det A \neq 0$ لپاره ښوول کيږي، چې تابع

$$B \mapsto f(B) := \det(AB)/\det(A)$$

تو د ديترمينانت ک ټاکونکي خويونه لري، په تعقيب د $\det B$ سره بايد برابر وي.
نورمي کونه $f(E_n) = 1$ څرکنده ده. د ډېرکرښيزوالي او انتيسيومتري لپاره په پام کې نيسو، چې فنکشن(تابع) $B \mapsto AB$ کرښيزه ده د B په متو کې او دا چې د دوه متو بدلون د AB د اړونده متو بدلون په ګوته کوي.

دريم – يو مربع ماتريکسA ټيک هلته نامعکوسوړ ده، که د يوه نه ساده وکتور x لپاره $Ax = 0$ وي، دا په دې معنا چې که د A د د متو يو نه ساده کرښيو کمپينيشن a_j شتون ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0\,.$$

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0\,.$$

په ورکړشوي حالتکې د متووکتور څایپدلون څه کېدی شي $x_1 \neq 0$ ونيسو، دا په دې معنا چې

$$a_1 = y_2a_2 + \cdots + y_na_n, \quad y_j = -x_j/x_1\,.$$

د ضربیوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} y_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = 0\,,$$

ځکه چې ټولې په ښي لور دیترميناتونه دوه برابرې متې خوندي لري، بايد د انتی سيومتري له امله ورکې شي يا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورتير وړ invertierbaren (په ښتوړ) ماتريکس ديترمينانت د صفرسره برابر نه دی، د يوه له متو خواره شوي غبرګ اړخيز لوريز حجم په حيث ديترمينانت د هندسي تشريح څخه لاس ته راځي . بالاخره دا همدااوس د $\det(A^{-1})\,.$ لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ځانګړو ماتريکسونو ديترمئناتونه

Determinanten spezieller Matrizen

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A لپاره ديترمينانتونه ترلي ورکول کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مثلث ماتريکس: که $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ لپاره يا $i > j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n} .$$

- بلوک دياګونال ماتريکس: که ماتريکس B بلوک جوړښت د $i \neq j$, $A_{i,j} = 0$ سره ولري اومربع دياګونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^{k} \det A_{i,i} .$$

- اورتوګونا او يونيتار ماتريکسونه: د يوه يونيتارمياتريکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1 .$$

د يوه اورتوګونال ماتريکس $(u_{i,j} \in \mathbb{R})$ لپاره ځانګړی دی

$$\det U \in \{-1, 1\} .$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

مثلثماتريکس : دا چې $\det A = \det A^{t}$ دی، بسيا کوي چې پورته مثلث ماتريکس وڅېړو. د $(1, \ldots, n)$ دځای بدلون i لپاره، کوم چې کتمتوال(ايدنتيتي) نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه یو توکی i_k د $i_k > k$ سره باید ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې $a_{i_k,k} = 0$. داسې جمعه راکمیږي، د کټمتوالي ورکړه ، او دیترمینانت د دیاګونال توکو د ضرب څخه ورکول کیږي.

بلوکدیاګونال ماتریکسونه : لومړی فقط یو وېش په 2 دیاګونالبلوکونو راړړو چې لویې n_1 او n_2 لري، نو دا بسیا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو یا وربیات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، څکه چې نور مو پاتېدونو یا د جمعې اجزاوو 0 ته بیایي. دا د جمعې پاتې اجزاوې د لومړیو n_1 توکو یوه ځایبدلون k او د اخرو n_2 توکو یو ځاي بدلون l د ضرب په څیر لیکل کیږي:

$$
\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i \in S_n} \sigma(i) \left(a_{i_1,1} \cdots a_{i_{n_1},n_1}\right) \left(a_{i_{n_1+1},n_1+1} \cdots a_{i_n,n}\right) \\
&= \left(\sum_{k \in S_{n_1}} \sigma(k) \left(a_{k_1,1} \cdots a_{k_{n_1},n_1}\right) \right) \left(\sum_{l \in S_{n_2}} \sigma(l) \left(a_{n_1+l_1,n_1+1} \cdots a_{n_1+l_{n_2},n}\right) \right) \\
&= \det A_{1,1} \det A_{2,2} \, .
\end{aligned}
$$

ایندوکتیو له دې څخه یوه وینا لاس ته رورل کیږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو یوې ویشنې لپاره.

اورتوګونال او یونیتار ماتریکسونه: دا چې کمپلکس کنجوګیشن په جمعې ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^{t}$ صدق کوي، نو د دیترمینانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = \det E = \det (U^* U) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^t} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U| .$$

په حقيقي حالت کې ديترمينانت حقيقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د يو ماتريکس ديترمينانتونه د د دوه برابرو متو او يا دوه برابرو ليکو سره صفر دي.له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځيو چې ديترمينانتونه تغير نه خوري، که که سړى د يوې متې (ليکې) يوې بلې متې (ليکې) ته ورزيات کړي يا ورجمعه کړي ليکونکي : هيوليک، هيورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د يوه ماتريکس متِه په ليکې بدليږي او $\det A = \det A^t$ صدق کوي،دنو بسيا کوي، چد متو حالت وڅيرو.

د دوه متو د پدلولو سره بايد ديترمينانت د تعريف له مخې مخنخښه بدله کړي. که دواړه کټمټ متې يو د بل سره بدلې کړی شي ماتريکسونه ځان نه بدلوي او ديترمينانتونه بايد صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې $i \neq j$ a_i, ته ور زياته يا جمعه شي، نو لاندې ماتريکس لاس ت ه راځي

$$A' = (a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) .$$

د کرښيز کمبينيشن په بنسټ کېدی شي ديترمينانت و وېشل شي يا ټوټه شي په

$$\det A' = \det (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + \lambda \det (a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) .$$

دويم ماتريکس دوه کټمټي متې لري او له دې امله دا ديترمينانت صفر لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي : هيوليگ، هيورنر

د يوه ماتريکس د يوې ليکي ډيرواره د ماتريکس د بلې ليکې سره زياتولو يا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتريکس په مثلث بڼه باندې واړول شي او ديترمينانت بيا د دياگونال توکو د ضرب له لارې وگټل شي يا لاس ته راړل شي.

که د متو يا ليکو بدلون صورت ونيسي، مخنخښه تغير خوري.

د بيلگې په توگه کېدی شي

$$A=\begin{pmatrix}1&4&0&2\\0&8&0&4\\3&3&3&2\\0&6&0&4\end{pmatrix}$$

لکه چې تعقيبوي وشمېرل شي.

دريمه ليکه ترې کم يا منفی د لومړۍ ليکې درې ځله راکوي :

$$\det A=\det\begin{pmatrix}1&4&0&2\\0&8&0&4\\0&-9&3&-4\\0&6&0&4\end{pmatrix}$$

د دويمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A=-\det\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&4&0&8\\0&-4&3&-9\\0&4&0&6\end{pmatrix}$$

دريمه ليکه ورزيات دويمه ليکه، څلورمه ليکه ترې کم دويمه ليکه راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1\cdot 4\cdot 3\cdot(-2)) = 24\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو وديزيينه Entwicklung von Determinanten

د يوه $(n\times n)$ - ماتريکس A ديترمينانت کېدی شي د يوې په خوښه متې يا ليکې پسې وديزيينه کړي.:

$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det\tilde{A}_{k,j}$	د ليکې k پسې وديزيينه
$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{i,l}\det\tilde{A}_{i,l}$	د درز يا متې l پسې وديزيينه

چېرته چې $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتريکس په ګوته کوي، کومه چې د A د i -مې ليکې ، j - مې متې د کرښې کولو (په کرښه کولو له منځه وړنې) له لارې منځ ته راځي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسيا کوي، چې وديزيينه د يوې متې پسې تر ښېرنې لاندې ونيسو.

- مه متې په متو

$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l}e_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوټه کوو، د دیترمینانتونو د ډېرکربنیزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} \det \underbrace{\left(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \ldots, a_n\right)}_{=B_i} .$$

یو ماتریکس B_i ترڅېړنې لاندې نیسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ مته بدلونونو له لارې l ــمه مته اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو متو لړپرلپسې په خپلو منځونوکې تغیر شي.

په ورته توګه کېدی شي i ــمه لیکه د $n-l$ لیکه بدلونونو سره اخرې لیکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د بنې اړخ دیترمینانت کې فقط د S_n ځاي بدلونونه ونډه اخلي، چې د n ــمې لیکنې په خیث n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون ښايي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l} .$$

د زیاتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي ودیزېینې فرمول ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره دیترمینانت د لومړی لیکې پسې ودیزبینه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4\,. \end{aligned}$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ایمپلیځیت(ساده) انځورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې یوه سطحه چې د درې ټکو

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ او $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې ورکړ شوې وي، کېدی شي په ايمپليځيت فرمول له

$$E: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

له انځور شي. د لومړی ليکې پسې وديزيينې سره لاس ته راځي

$$E: ax + by + cz = d$$

د لاندې سره

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

بنسټ ازمايښت Basistest

وکتورونه $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ تيک هلته يو بنسټ جوړوي، که د ماتريکس $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ديترمينانتونه ورک نه شي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

که د A لومړی ليکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متې يوه ځاي بدلون پسې ونيسو يا فرض کړو، چې $a_{1,1} \neq 0$ اومتې a_j لکه ښنګه لرو بڼه بدل کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j \to a'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}\, a_1, \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

دا د مټو عملیو کارولو له لارې کېدی شي د مټو دیټرمینانت او هم د بنسټ خویونه بې تغیره پاتې شي. دا بڼه بدل شوی ماتریکس لاندې بڼه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{pmatrix}.$$

د ودیزیېنې جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B\,,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' مټې ټیک هلته یو د K^n بنسټ دي، که د B مټې یوه د K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتیو و ښوول شي.

لیکونکې : هیولیګ، هیورنر

د بیلګې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماېښت روښانه شي.

که د مټو یا لیکو څخه یو یې فقط له صفر جوړ وي، نو د دیټرمینانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتریکس رانګ ماکسیمال 1 دی او له دې امله مټې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-ba \\ ad-bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متې كربنيز بلواک دي.

که د متې کربنيز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

ديترمينانت شمېرل کي.ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د واندرموند – ديترمينانتونه Vandermonde-Determinante

په n ټکو x_i کي ارزښت شوي مونومونو $1, x, \ldots x^{n-1}$ ديترمينانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د $n = 2$ لپاره د واندرمود – ماتريکس ديترمينانت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 \,.$$

د يوه ټوليز n لپاره د ټولو نورو ليکو څخه لومړۍ ليکه کميږي:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} .$$

د لومړۍ متې پسې وديزيېنې سره راکوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} ,$$

د کوم سره چې له k -مې ليکې څخه ضريب $x_k - x_1$ رادباندې کيدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{vmatrix} .$$

که د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا x_1 – ځله کم کړو، نو بېرته پيل بڼې ديترمينانت لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

کربنيز مساوات سيستم Lineares Gleichungssystem

په يوه تن يا جسم K کربنيز مساوات سيستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

د يوه ضريبونو د ماتريکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او يو ښی اړخ $b \in K^m$ سره.

دا کربنيز مساوانسيستم هوموجېن بلل کيږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کيږي.

د يوه حقيقي $(K = \mathbb{R})$ يا کمپلکس $(K = \mathbb{C})$ کربنيز سيستم لپاره K اکسپليڅيت explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې ليدل کيږي يا روښانه دی.

که کربنيز مساوات سيستم کوم حل نه لري (په ټوليزه د $m > n$ لپاره)، نو دا باندې- ټاکلی بلل کيږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږيږو. يو کربنيز مساوات سيستم د

(c) ketabton.com: The Digital Library

نا يواحني حل سره (په تولیزه توګه د $m < n$ لپاره) کښته - – یا لاندې- تکلی بلل کيږي.

یوه تابع $f(x)$ کیدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

څخه د انټرپولیشن له لارې په نږدې توګه بیا جوړه rekonstruiert شي. که یوه کرښیزه ځاي په ځاي کونه یا اینوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

د مناسب بنسټتوابعو p_j سره، نو د انټرپولیشن شرایطو څخه

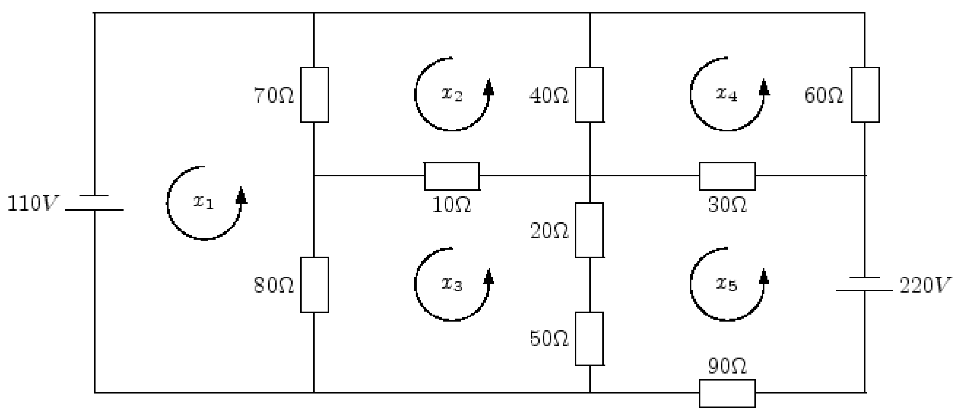
برېښنايي جریاندایره Elektrischer Schaltkreis

که په یوه برېناجریان دایره (ګردی)کې د x_i سره د دایرې برېښناجریان وښایو د جریانلور د ساعتتنخبنه وونې (عقربک) مخامخ یعني معکوس، د سره د i - مې او j – مې پټی ګسره دډ یا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره اینوولی Spannungen ، نود اوم Ohm او کیرښهوف Kirchhoff قانون څخه دا کرښیز مساوات سیستم لرو

$$\sum_{i \sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i \sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j –م د برېښناپټۍ یو ګډ مقاومت لري.
$x_i - x_j$ د دې مقاومت له لارې برېښناجریان دی. د $i \sim 0$, $R_{i,0}$ سره مقاومت شوول کیږي چې هغه فقط په i –مې پټۍ کې پروت دی.



د بیلګې په توګه د څېره شوې جریان دایرې(ګردی) لپاره کربنیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضریبونو ماتریکس په دیاګونال کې د یوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځاي یا (i,j) Position د i او j ګمیز یا منفي ګډ مقاومت . د دې راوړل شوې بېلګې حل دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالی

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په يوه تن يا جسم K د يوه هموجېن کرښيز مساوات سيستم حلډېرى

$$Ax = 0,$$

د يوه $m \times n$ ضريبونو ماتريکس A يوه د K^n لاندې – يا برخډېرى U ده.

که دا هموجېن کرښيز سيستم

$$Ax = b$$

يو حل v ولري، نو د توليز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U,$$

دا په دې معنا چې حللډېرى د K^n يو افين affin لاندې – يا برخډېرى ده. په ځانګړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه کېدی شي هوموجېن کرښيز مساوات سيستم هيڅ ، يو $U = \emptyset$ يا ناپای ډېر زيات $\dim U > 0$ حلونه ولري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ، کيمرلي

که x, y د هوموجېن کرښيز مساوت سيستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x + y) \; = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسي

$$A(\lambda x) \; = \lambda Ax = \lambda 0 = 0 \, ,$$

دا په دې معنا چې د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ يوه لاندې- يا برخفضا U جوړوي.

که v د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v + u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

برعکس د ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم د دوه حلونو v او w سره کمښت يا تفريق $v - w$ د

$$A(v - w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د یوه ناهوموجېن کرښیز مساوات سیستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهوموجېن کرښیز مساوات سیستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموجېن کرښیز مساوات سیستم حلونو جمعه جوړه کړو، یعې سره جمعه کړو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا لاندې ساده حالتونه د کرښیزو مساواتو مختلف ډولونه د لیدنې کوي:

لومړی – کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

یواځني حلونه لري: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$.

دويم – کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

یواځنی حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_1 = 2$, $x_2 = 2t$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دريم - کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوم حل نه لري. اخرنی ليکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په يوه ليکه کې کېښوول شي، د لومړۍ ليکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دويمې څخه برعکس $x_1 = 1$.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ديترمينانت او د يوه مساوات سيستم حلوړوالی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

يو کرښيز مساوات سيستم

$$Ax = b$$

د مربع ضريبونو ماتريکس A سره ټيک هلته يو يواځنی حل لري، هر ښي لوريزې b سره، که همداسې دا هوموجېن سيستم $Ax = 0$ فقط يو ساده حل $x = 0$ ورلري.

که $\det A = 0$ وي، نو يو حل فقط د ښی لورې b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلي لاندې – يا برخفضا ده. په دې حالت کې حل يواځنی نه دی.

ليکونکي: کرايخ، هيوليک

غوښتنه د ديترمينانت د خويونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متې $a_1, \dots, a_n$ کرښيز خپلواکې دي. د تعريف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجېن سیستم یواځنی حلوړوالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متې یو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر ښی اړخ b د

$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$

کرښیزکمبېنېشن په حیث

یواځنی انځوروړ دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تیک هلته یو یواځنی حل لري، که دیترمینانت $ad - bc \neq 0$ وي. په دې حالت کې حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

که دیترملنانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په تېپیزه توګه کرښیز مساوات سیستم حل نه لري. په دې حالات حلونه فقط هلته شتون لري، که

$$av \qquad = cu$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$bv \qquad = du$$

صدق ولري. که د بېلګې به توګه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو او د x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a}\,.$$

ليکونکي: پپ، اهيوليک

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د يوه مربع کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\,,$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضريبونو ماتريکس A په نخښه کيږي.

په ځانګړې توګه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په ښت يا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د ډېرکرښيزوالي او سيومتري له امله لاس ته راځي:

$$\det(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n) = \det(a_1,\ldots,a_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_i x_i, a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= x_i \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

په ځانګړي توکه د $b = e_j$ سره د معکوسې j ـمه مټه $x = (c_{i,j},\ldots,c_{n,j})^{\mathrm{t}}$ راکوي

ليکونکي: هيوليک، شترايت

ديوه (2×2) - ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د (3×3) - ماتريکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \qquad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \qquad \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول داسې دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

ليكونكي: هيوليګ، شترايت

په شا لور ځای په ځای کول Rückwärts-Einsetzen

په يوه کربنيز مساوات سيستم کې د پورته مثلث -بڼې سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} ,$$

د $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کېږی شو ناټاکلي $x_n, \ldots, x_1$ يو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n}x_n = b_n \to x_n = b_n / r_{n,n}$$

او د $\ell = n-1, \ldots 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \to x_\ell = (b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n)/r_{\ell,\ell}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره به هر يو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ و کارول شي.

په يوه مساوات سيستم کي د يوه لاندې مثلث ماتريکس کې کېدی شي په ورته توګه يو په بل پسې $x_1, \ldots, x_n$ و ټاکل شي.

د کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

لپاره په ملث بنې کې د په خټ اېښووني له لارې حلونه لاس ته اځي

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0-2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6-3(-1)-1) = 2\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ګاوس ترانفورميشنGauß-Transformationen

لاندې عمليې د کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ بې تغيره پرېږدي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دوه مساوتو بدلونه
- يوه مساوات ضربونه د يوه ضريب $\neq 0$ سره.
- د يوه مساوات کمول له يوه بل مساوات څخه

د اخرو دوه عمليو د کمبينېشن له لارې د يوې ليکې ډېرواره زياتول يا جمعه کول و بلې ليکې ته عمليي دي چې اجازه لري يا پريښوول شوې عمليي دي.

د داسې په نامه ګاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدی شي sukzessive يا يو په بل پسې ناټاکلي له منځه يووړل شي او يو کرښيز مساوات سيستم په مثلثفورم تراسفورمه کړو يا په بله بڼه واړوو او بيا يې په څټ اېښووني له لارې حل کړو.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

حل ځان ته تغير نه ورکوي له

- د لومړي او دويم مساوات بدلونه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دويم مساوات ضربونه د 2 ضريب سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دریم مساوات کمول یا تفریقول له دویم مساوات څخه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د ګاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د ګاوس – بڼه بدلون له لارې کېدی شي یو کربنیز مساوات سیستم د انعکاس وړ $(n \times n)$ -ضریبماتریکس به ماکسیمال $n-1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبڼه باندې واړول شي یا راوړو. د دې لپاره یو په بل پسې د دیاګونال لاندې کښته ضریبونه له منځه یوسو دا په دې معنا چې له $\ell-1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س (کربنیز مساوات سیستم) لاندې بڼه غوره کوي :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوګوني ډول ℓ-م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا ℓ-م دیاګونال توکی، داسې په نامه د پیوت-توني -Pivot-Element، صفر دی، نو ℓ -م به د یوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به د i -م مساوات څخه د ℓ -م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره..

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کربنیز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د ګاوس الګوریتم په لاندې توګه ځغلي:

- د لومړی او دویمې لیکې پدلول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3 ليکه) – (1 ليکه) او (4 ليکه) - (1 ليکه)·2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (.ليکه2) + (ليکه·2 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (ليکه3)- (ليکه4)·3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ايښيلون بڼه Echelon-Form

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کرښيز مساوات سيستم د يوه $(m \times n)$ - ضريب ماتريکس سره کېدی شي د ګاوس –ترانفورميشن سره د اينښلون-فورم باندې يې بڼ بدله يا واړول شي:

$$Ax = b \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} .$$

له دې سره داسې په نامه پيووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \ldots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانګ ی.

د k –م ترانفورميشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- يو له صفر مختلف متريکس توکی p_k د خورا کوچنی متې ايندکس(پيژندنخښې) سره او $\geq k$ ليکې اندکس(د ليکې پيژند نخښه) د پيووت توکی په حيث ټاکل کيږي او د ليکو بدلون له لارې پوزيشن (k, j_k) ته راوړل کيږي. که پيووت توکی شتون نه لري، نو د اينښلون پڼه مو لاس ته راوړې ده.

- د k ليکې ډېرواره کمون يا تفريق له لارې د پيووت لاندې لور ته د ماتريکس توکی له منځه ځي.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورمیشن د ایښلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دويمې لیکې پدلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3.لیکهZeile) - $2\cdot$(1.لیکهZeile) und (4.لیکهZeile) او + (1.لیکهZeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile)

او (5.Zeile) - (2.Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلې په معنا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.4 (4. Zeile) - $\frac{1}{2}\cdot$ (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ایښلون – فورم لري نا ساده ليکي د پيووت –توکو $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (کرښيز مساواتسستم)حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

يو کرښيز مساوات سيستم $Dx = c$ د ايښلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پیووت $p_1, \ldots, p_k$ سره تیک هلته حلوږ دی، که $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ وي.

حل یواځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجین کرښیز مساوات سیستم ($c_i = 0$)تیک $n - k$ کرښیز خپلواک حلونه شته .

نا معلومې، چې بې له پیووت یې متې په ګوته کوي. کېدی شي ازادې یا په خوښه و ټاکل شي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې کې به زیات تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

- $k = n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په ځتې اینسونې له لارې ریکورزیو یواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

- $3 = k < n = 5$ ، $c_4 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرنۍ لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کرښیز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

- $3 = k < n = 5$ ، $c_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کرښیز مساوات سیستم $Dx = c$ حلوړ دی

د $\operatorname{Rang} D = 3 = n - 2$ له امله حل x یواځنی نه دی. دلته د دوه کرښیز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجېن سیستم او د ټولیز حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\,, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پیووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي (بڼه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجېن سیستم باندې:

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \to x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n\right)/r_{\ell,\ell}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ځانګړی حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ اینوونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

رانګ او د ک م س(کرښيز مساواتسیستم) حلوړوالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

وي دې $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$

- کرښيز مساوات سیستم $Ax = b$ يو حل لري

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b).$$

- کرښيز مساوات سیستم $Ax = b$ يواځنی حلوړ دی

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

- کرښيز مساوات سیستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولرئ، چې د A رانګ او د غزېدلي ماتريکس $(A,$ اينواريانت دي د ساده بڼې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نيول شی يا فرض شي کرښيز مساوات سيستم به اينلون-بڼه دی. به دې بڼه کېدی شي نتيجې ترلې ولوستل شي.

د انډول کرښه(انډولکرښه) Ausgleichsgerade

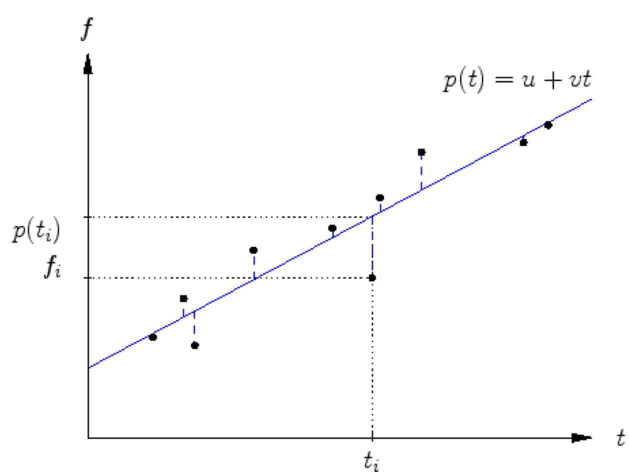
يوه کرښه

$$p(t) = u + vt\,,$$

، چې داتونه $i = 1, \ldots, n$ ، به خورا ښه توګه approximiert کوي، کېدی شي د ناتيکاوي مربع جمعي کمښت

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پيدا کړی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د محوربرخي u او جګېدني v لباره لاندې فرمولونه راکوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

که لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه یا قیمتونه t_i ورک شي یعني صفر وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د مینیموم سره بایدد غلطی مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسي صفر وي:

$$0 = 2\sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2\sum_i t_i(u + vt_i - f_i).$$

دواړه مساوات د ماتریکس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

که لږ ترلږه دوه t_i مختلفي وي، نو دیترمینانت ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\,\text{mal}}|(t_1,\dots,t_n)^t|_2^2-\left(\sum_i 1\cdot t_i\right)^2>0\,,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د برابروني حل يو بل سره يوغړيز کيدل يا يو په بل پريوتلو، کربنيزو مساوات سيستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د يوه کربنيز مساوات سيستم $Ax=b$ بنې خوا b وي د $(m\times n)$ - اتريکس A متو کربنيزې هيولي ياسپاين کې خوندي نه وي (په تيپيکي دول د $m>n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\text{Rang}\, A<\text{Rang}\,(A,b)\,,$$

نو مساوات سيستم حل نه لري. سړی د يوه د پاسه تاکلي سيستم څخه خبرې کوي. په دې حالت کې کېدی شي يو اپروکسيميشن د برابروالي پرابلم

$$|Ax-b|\to\min$$

له لارې و ټاکل شي.

د برابروالي حل شمېرل د نورمالومساوات يا سينګولارارزښتتوته کوني په مرسته ممکن يا شوني دی

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر - کربنیز مساوات سیستم-برابروني پرابلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمالمساواتونه Normalengleichungen

د یوه په خوښه $m \times n$ – ماتریکس A لپاره هر د برابروني پرابلم

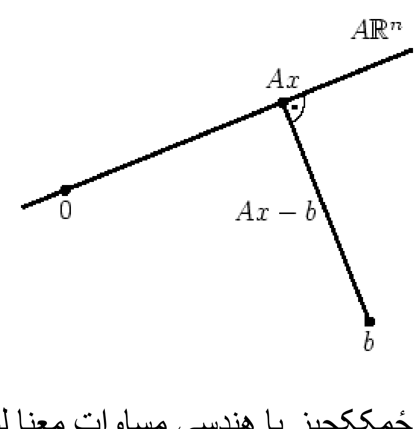
$$|Ax - b| \to \min$$

هر حل x نورمالمیز –مساواتونه

$$A^{t}Ax = A^{t}b\,,$$

پوره کوي، دا په دې معنا چې

ریزیدووم $r = Ax - b$ Residuum اورتوگونال دی د A د متو څخه غزېدلي لاندیفضا $\text{Bild}\, A$ سره



ځمککچیز یا هندسي مساوات معنا لري، چې ریزیدووم $r = Ax - b$ د ماتریکس A په متو نیغ ولاړ دی یعنې عمود دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتریکس $A^{t}A$ مربعیزه ده او پراخپدونی یا بعد n لري. دا ټیک هلته معکوسوړ ده کله چې $\operatorname{Rang} A = n$ وي، دا په دی معنا چې کله د A متې کرښیز خپلواکې وي.
نورمالیز-مساوات د سینګولار حالت کې هم حلوړ دی، خو حل یې یواځنی نه دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2$$

د

$$(Ax-b)^{t}y = y^{t}(Ax-b), \quad r = Ax-b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^{t}A^{t}r + t^2y^{t}A^{t}Ay \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کیڼ اړخ په t کې د پارابول په څېر ونیول شي، نو نه منفیوال(نه کمیزوالي) د

$$y^{t}(A^{t}r) = 0\,.$$

سره به یوه معنا دي.

دا ټیک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده (وبینه) صفروکتور وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لپاره نورمالمساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کرښيز مساوات سيستم ئواځني حل $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$ لري.ريزيدووم $r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$ دي.

که A کرښيز بلواکې متې ولري، لکه په بېلګه کې

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سيستم سينګولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې يواځني نه دي، مګر ريزيدووم

$$r = \left(\tfrac{6}{5} \quad -\tfrac{12}{5} \quad 0 \right)^t$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

توموګرافيTomographie

لکه څنګه په فنکشن يا څيرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپيوتر-توموګرافي Computer-Tomographie کې د حجروغړو ټينګوالي (غلظت) $x(u,v)$ بيا جوړيږي ، په کومه کې چې د ګڼوالي يا ټينګوالي بايليدنه(کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کودې له ℓ غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i: \quad (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell\,,$$

کچ کيږي. سړي د ټينګوالي وېش د يوه ټوټه ډوله ثابتې تابع approximiert کوي

سړی د ټينګواليخورونه د يوه ټوټه ډوله يا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د مربعو Q_j په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلې کرښيز ا نتيګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\,,$$

چيرته چې x_j د $x(u,v)$ يو اپروکسيميشن دی په Q_j او

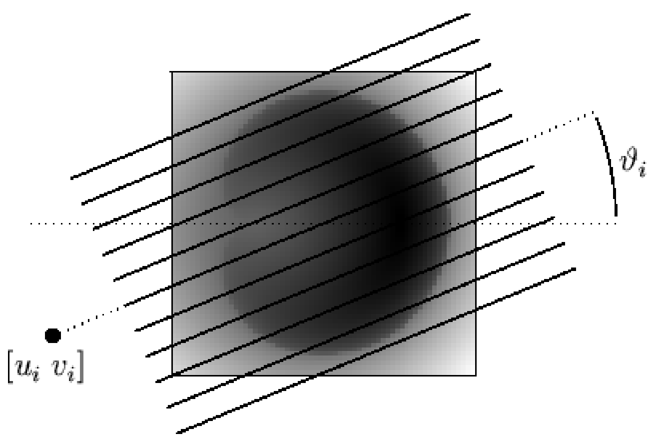
$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap Q_j|$$

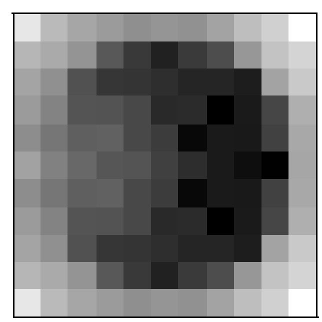
(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو $\mathcal{R}_i$ د Q_j سره غوڅ ي يا تقاطع ا وړدوالی په ګوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد يا ګڼون په ټوليزه توګه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې ځيره پرې کښل کيږي) څلوريو او شنتيګرالونه چې ټيک نه شي شميرل کيدی، د داتا b ځخه د x ټاکلوته سړی يو برابروالیز يا د انډول پرابلم سره مخامخ کيږي.

دالاندې ژباړي دلته راکاپي کړي(دا لاندې دې همداسې په انګرېزي پاتې وي):

›› The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also rastrum, a device for drawing musical staff lines پای››





پورته ښي لور ته ځيره په يوه 11×11 راستر شميرلی نږديوالی ښايي کيڼ ځيره شوی ټينګوالي خورونه(غلظت-) ښايي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

لپاره 11 غبرګ سکن-لوري د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

يو سکالار λ د يوه مرئع ماتريکس A آيګو-ارزښت بلل کيږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آيګن-ارزښته λ ته آيګن-وکتورونه بلل کيږي.
آيګن-وکتورونه و آيګن-ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي يوه کرښيزه فضا جوړوي،
داسې په نامه د λ آيګن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

ليکونکي: هيوليک،هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

لاندې بېلګې د (2×2) ـماتریکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښایي

- دوه حقیقي آیګن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = -1 , v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = 3 , v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- یو حقیقي آیګن- ارزښت، دوه کرښیز خپلواک آیګن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 2 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- یو حقیقي آیګن-ارزښت، یو آیګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 1 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- دوه کنجوګیري کمپلکس آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp \mathrm{i} , v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې بېلګې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه څېړي.

- دوه آيګن-ارزښتونه اودوه آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + i, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda = i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک،هيوررنر

ورته والي - ترانفورميشن Ähnlichkeitstransformation

د يوه مربعيز ماتريکس A په ورته والي تراسفورميشن

$$A \rightarrow B = Q^{-1} A Q,$$

کې آيګن-ارزښتونه ساتلي پاتيږي. آيګن-وکتورونه د اينورتيروړ ماتريکس Q له لارې تشريح شوي بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د A آيګن-

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور v و آيګن- ارزښت λ ته و همهغسې د B آيګن-وکتور $w = Q^{-1}v$ په ګوته کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که v د A يو آيګن-وکتور وي و آيګن-ارزښت λ ته، يعنې $Av = \lambda v$ ، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لاندې مربع ماتريکس دې ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيکن-ارزښت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آيګن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سره راکوي.

د B آیګن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سره، همداسې

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سره شمیرل کیږي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

کرکتریستکي پولینوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتریکس A آیګن-ارزښتونه د کرکتریستیکي پولینوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانګړې توګه د ماتبریکس آیګن – ارزښونه د ترانسبوزیشن سره اینواریانت پاتې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کیمرلې

یو سکالار λ تیک هلته د $(n \times n)$-ماتریکس A آیګن-ارزښت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq 0,$$

دا په د ې معنا چې که دا هوموجېن کربنیز مساوات سیستم $(A - \lambda E)v = 0$ یو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت تیک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زینګولار وي یعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د آیګن – ارزښتونو او - - وکتوونوشمیرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتریکس A لپاره د آیګن-ارزښت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکتریستیکي پولینومونو آیګن-ارزښتونه λ د صفرځایونو په حیث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)\,.$$

د هر آیګن – ارزښت λ لپاره له دې سره اړوند آیګن – وکتور v لاس ته راوړو د هوموجېن ګربنیز مساوات سیستم د یوه ناتریویال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0\,.$$

د دې لپاره چې د آیګن-فضا V_λ لپاره یو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سیستم په اپښیلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\dim V_\lambda = 1$

په ټوليزه توګه دی. دا تر یوه سکالار ضیب یواځنی ټاکلی آیګن-وکتور v کېدی شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آيګن –ارزښت د ټالکو لپاره کرکتيستيکی پولينوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4\,.$$

او د ده صفرځايونه ټاکي. د ګومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونی يا مقسوم عليه) د لومړي صفرځای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرځای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنيمې شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې يې ځای په ځای کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm \mathrm{i}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو آيګن – وکتور و آيګن – ارزښت 2 ته کيدی شي د هوموجين مساوات سيستم

$$(A-2E)v = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

حلونو له لارې وټاکل شی. حل $v=(1,0,-2)^t$ ساده ليدل کيږي

يوه آيګن-ارزښته $1+\mathrm{i}$ ته يو آيګن – وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1 = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} w_1 = 0\,.$$

او داسې د پزلګز به تګه $w_1=(-1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2)^t$. دا A چې حقيقي ده، کېدی شي و $\lambda = 1-\mathrm{i}$ ته آيګن-وکتور د کمبلکس کنجوګيشن له لارې جوړ شي:

$$w_2 = \overline{w_1} = (-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2)^t$$
.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که λ د $(n \times n)$ – ماتريکس A آيګن –ارزښت وي، نو دکرکتريستيکي پولينوم

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

د صفرځای په حيث د λ ډېرځلوالی د آيګن-ارزښت λ

الجبري m_λ ډېرځلوالی بللکيږي

د يوه آيګن – ارزښت λ د آيګن-فضا V_λ بعد يا پراخپدونی d_λ د λ هندسي ډېرځلوالی بلل کيږي. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda\,, \qquad \sum_\lambda m_\lambda = n\,,$$

همداسي

$$d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکتريستيکي پولينوم لري:

$$(4-\lambda)^3 = (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 4 - \lambda = (4-\lambda)^3 + 12(4-\lambda) - 12(4-\lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانګ په لرودو سره $d_4 = 3$ د A_1 لپاره، $d_4 = 2$ د A_2 لپاره او $d_4 = 1$ د A_3 لپاره پيژني

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د يوه $(n \times n)$-ماتريکس A د آيګن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$-Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چي ډېرځله آيګن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د مولتی کربنيزوالی په اساس د کرکتريستيکي پولينوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A\,.$$

بلې لور ته پولينوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

انځوريدلای شي. د دويم فرمول په ضربونه او د ضريبونو پرتله کونه دا ورکړ شوی کټمټوالی يا ايدنتيتي راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتريتيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځايونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}\,.$$

که د آيګن – ارزښتونو جمعه تشکيل شي، دا ريښې افاده له ةنځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = \operatorname{Spur} A\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که آيګن – ارزښتونه سره ضرب شي، نو د دريم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(a+d)^2 - (a+d)^2 + 4(ad-bc)}{4} = ad - bc = \det A\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د ماتريکسونو ريښتونی فنکشنونه يا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس A يو آيګن-ارزښت λ د ريښتوني فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \cdots}{b_0 + b_1 t + \cdots}\,,$$

قطبځای نه وي ، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1}p(A) = p(A)q(A)^{-1}\,.$$

آيګن – ارزښت دی.

په ځانګړي توګه λ^k د توان-ماتريکس A^k آيګن – ارزښت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس A^{-1} يو آيګن-ارزښت دی.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په ټوليزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k\right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k\right) v \, .$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v \, ,$$

که A معکوسوړ وي

که λ د صورت پولينوم q صفرځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v \, ,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چې غوښتل .

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د آيګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که يوه ماتريکس A ته د آيګن – وکتورونو v_j څخه يو بنسټ شتون ولري د آيګن – ارزښت λ_j سره ، نو دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n),$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ته دیاګونال بڼه لري.

لیکونکي: هیولی، اپپ

د ښوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

باور لرى، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته)دئ

$$AV = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n).$$

دا چې v_j د V متړه و λ_j ته د آیګن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کیږي

لیکونکي: هیولی، اپپ

ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیګن- ارزښتونه -2, -2 او 3 لري. اړونده آئګن-وکتورونه دپیلګی به توګه دئ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځئ

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيولی، اپپ

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

يو ځيوکليکي $(n \times n)$ – ماتريکس A کېدی شي د پورير-ماتريکس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi \mathrm{i}/n) ,$$

په مرسته دياګونالي شي.

$$\frac{1}{n}\overline{W} \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, n-1 ,$$

سره د A آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: هيولی، اپپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی ساده بسي شمېرلی شي، چې د W ℓ -مه متِه د A يو آيګن – وکتور دی. د Aw_ℓ

د j ــم کمپوننت لپاره سړی لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell} .$$

دا اندکس يا پېژند نخښه مودولو سره ښوول کيږي، کېدی شي د جمعي کېدنې ورشو د $k' = 0, \ldots, n-1$ سره ځاي په ځاي شي يا بدله شي. په تعقيب سره يې زياتون يا

جمعه برابر په λ_ℓ ده ،لکه جي غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ يوتيتار دی،دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W \right)^{-1}$ ، سړی
غوښتونکی ترانسفورمېشن په دياګونال بڼه لاس ته راوړي

ليکونکي: هيولی، اپپ

د عمومي تيوري سره سم کيدی شي ځيوکليکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فورير- ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

سره په دیاگونال بڼه واړول شي(ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د 2 ,2 ,0 او 4 سره د A آیگن – ارزښت. دا چي A حقیقي دی باید کمپلکس آیگن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(د W دویمه او څلورمه متړه) یو کډ آیگن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کربنیز کمبینېشن له لارې د آیگن-وکتورونو لپاره یو حقیقي بنسټ تشکیل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} - \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي : اپپ، هیولیگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتريکسونو توان Potenzen von Matrizen

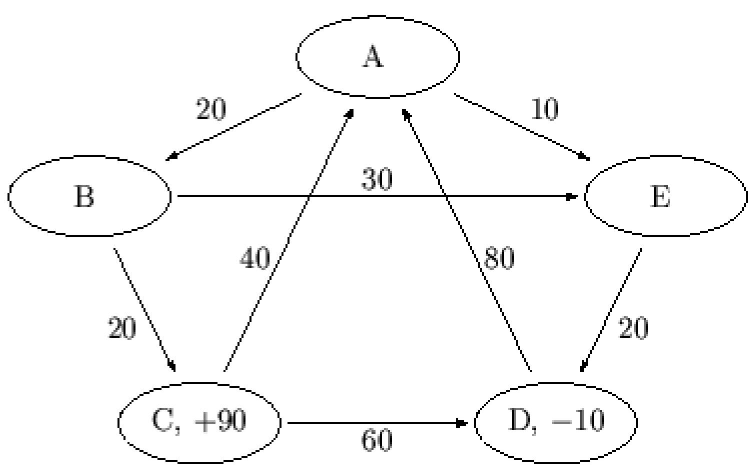
که A د مطلق ارزښت سره سم يا - - ډوله خورا لوي آيګن- ارزښت λ د آيګن – وکتور v سره ولري،نو صدق کوي:

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty\,,$$

که x يو ناترېويال کمپوننت د λ په آيګن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې $x = cv + w$ د $c \neq 0$ او $v \nparallel w$ سره.

ليکونکي : اپپ، هيوليګ

دا تابع د مارکيټپرخې x_i د رقابت د فيرما ګانو کلنی تغير ښايي.په دې ترتيب فيرماA د 80% بېلګې په توګه د فيرما D د مارکېټ برخه ګټي او د فيرما C خپله د مرکيټ برخه د 90% په شاوخوا کې لوېه وي د نوي خرڅلاو امکانات پيداکولو سره ، په همدې وخت کې د مارکيټ برخې A او D ته له لاسه ورکوي.



د ليدخيرې څخه د مارکيټ نوې برخې(ونډه) رانيسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوې $A_{neu} = 0.7A + 0.4C + 0.8D$

نوې $B_{neu} = 0.5B + 0.2A$

نوې $C_{neu} = 0.9C + 0.2B$

نوې $D_{neu} = 0.1D + 0.6C + 0.2E$

نوې $E_{neu} = 0.8E + 0.3B + 0.1A\,.$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

نوی x_{neu}

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x\,.$$

د ایتراشن ماتریکس د n–توان سره ضربولو د n کلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورميري شوي وکتورونه x^0 د یوه آیګن- وکتور v_{max} (ماکس) پولې ته ځي(کونورګیریګي) د ماتر یکس د ارزښت له مخې لوی ا یګن ارزښت λ_{max} ته. سړی لاس ته راوړي $\lambda_{max} = 1.1$ او دې ته اړوند ایګنوکتور

$$v_{max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوږده وخت لپاره بازار يا مارکيټ د A ه خوا ټاکل کيږي يا تعينيږي. په سلو کې برخې د $\max v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي يعني , $\max v/\|v\|_1$ په دې توګه

$$A:\ 37.5\%,\ \ B,C,D:\ 12.5\%,\ \ E:\ 25\%\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فيبوناچي پرلپسې يا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسي يا ترادفونه داسې پيژند لري يا تعريف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad \text{د } n \geq 1 \text{ لپاره}$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دواړو ترمخ غړو زياتونن يا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,\ldots\,.$$

سرې د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - $a_2 = 3$ Lucas- عدد:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,\ldots\,.$$

که دوه يو په بل پسې د فيبوناچي عددونه يوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته سره یوځاي شي، نو ریکورزیون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څیر د لاندې سره ولیکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسلیکنې په مرسته کېدی شي د فیبوناچي عدد دا اسیمپتوتیکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سرې د A آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix}.$$

که سرې د ریکورزیون وکتورونه د v_+ کرښیز کمبینېشن په حیث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}}v_-,$$

، نو لاس ته راځي:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+\lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_-\lambda_-^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + o(\lambda_-^n).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال ماتريکسونه Normale Matrizen

يو کمپلکس ماتريکس A نورمال بلل کيږي، که

$$AA^* = A^*A\,,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^t$ سره. په ځانګړې توګه يونيتار او هرمييتيکي ماتريکسونه نورمال دي.

د حقيقي نورمال ماتريکسونو لپاره دی:

$$AA^t = A^tA\,,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اورتوګونال او سيومتري ماتريکسونو لپاره پوره دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،کيمرلي

د يونيتارو او هرميتيکي ماتريکسونو نورمالوالی تړلی له تعريف څخه لاس ته راځي.

د ئوه يونيتار ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A\,.$$

د يوه هرمېتيکي ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمالو ماتريکسونو يونيتار دياګونالي – يا دوه کونجتړي کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

يو ماتريکس A تيک هلته نورمال دی، که A يونيتار دياګوناوړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې د U متې يو اورتونورمال بنسټ و آيګن – ارزښت λ_j ته له آيګن- وکتورونو تشکيل کړي.

ليکونکي: اېپ، هيوليک، کيمرلې

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1}\,,$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ &= U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ &= A^*A\,. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د يوه اورتوګونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ايندکشن له لارې وښايي. د ايندکشن پل لپاره يو يونيتار ماتريکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینکشن نیونې یا فرضیې له مخې کېدی شي B د یونتارماتریکس W له لارې په دیاګونال بڼه ترنسفورمي شي، داسې چې سړی ځاي په ځاي کولی شي:

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

.

د V دجوړښت یا کنسترکشن ته د یوه نورمي آیګن – وکتور v څخه و آیګن- ارزښت λ ته ځي او بړدي

$$V = (v|\tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متې وکتور v و اورتوګونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^*AV = \left(\frac{v^*}{\tilde{V}^*} \right) \left(\; \lambda v \; \middle| \; A\tilde{V} \; \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \; .$$

ښوولو تهدومره پاتیږي، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپمالیټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورمیشن سره ساتلي پاتې کیږیو ، پس د پورته مساوات د ښي اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D}\tilde{D}^* = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^*B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}^*\tilde{D} = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \bar{\lambda}c^* \\ \hline \lambda c & B^*B \end{array} \right),$$

تشکیل کړو، نو غوښتونی خویونه د پورته ماتریکسونو د دیاګونال بلوکونو د پرتلې له لارې لاس ته راځي. لیکونکي: اپپ،هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکسونه

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سيده شمېرنې له لارې تصديق کېدی شي.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} = A^*A$$

د دې په تعقيب بايد A يونيتار دياګونالوړ وي. سرې آيګن – ارزښتونه6 او $4i$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيګن-وکتورونه د بېلګې په توګه دي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د يونيتار ماتريکس $U = (v_1, v_2)$ سره دياګونال ماتريکس لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اېپ،هيوليک

د هرميتيکي ماتريکسونو دياګونال بڼه Diagonalform hermitescher Matrizen

ديوه هوموجېن ماتريکس $A\ (A = A^*)$ آيګن-ارزښتونه λ_i حقيقي دي او د آيګن-وکتورونو v_i څخه يو اورتوګونال بنسټ شتون لري. په تعقيب

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده د يونيتارماتريکس سره

$$U^*AU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

ده د يونيتارماتريکس $U = (v_1, \ldots, v_n)$ سره.

په ځانګړې حالت کې حقيقي سيومتريکي ماتريکسونو $(A = A^t)$ آيګن-وکتورونه هم حقيقي دي.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

يونيتار دياګوناوړوالی په نورمالو ماتريکسونو د اړونده ټوليزې نتيجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هرميتيکي حالت خوندي لري. د ښولو دا پاتې دی چې آيګن – ارزښت λ حقيقي دی. که په ورته توګه v آيګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\lambda v^*v = \quad v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^*v)^*v$$

$$= \quad (Av)^*v = (\lambda v)^*v = \overline{\lambda} v^*v\,,$$

ځکه چې $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

هرميتيکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

ديترمينانت 0 لري. پسې $\lambda = 0$ يو آيګن – ارزښت دی او سړی تړلی ګوري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

يو اړونده آيګن-وکتور دی. له $\operatorname{Spur} A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ويم آيګن – ارزښت په حيث $\varrho = 3$ لاسته راځي. يو اړونده آيګن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوګونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې يونيتار ماتريکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقيب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که v^*Av يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياګونالتوکي لري او آيګن-ارزښتونه. په ځنګړي توګه A معکوسوړ ده او معکوس يي هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

ريلا ي – ويش (هعني هغه د ويش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکی مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسې په نامه ريلای-وېش اکسترم – ارزښتونه

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د S آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ماتريکس S کېدی شي ا يونيتار ماتريکس U له لارې دياګونال فروم ته واړول شي:

$$U^*SU = D, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ نيول يا فرض کېدی شي.

که سړی $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^*(U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2} .$$

دا ښايي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max} ,$$

چېرته چې د مطلوب آيګن-وکتورونو لپاره $y = e_n$ او $y = e_1$ لپاره صدق کوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

مثلث بڼه Dreiecksform

يو کمپلکس مربع ماتريکس A کيدی شي د يوه ورته ترانسفورميشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانفورمي شي، چېرته چې دياګونالي د A آيګن-ارزښتونه λ_i خوندي لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

ښوونه د ماترريکس په بعد n باندې د اينډکشن له لارې کېدی شي صورت ونيسي، د يوه (1×1)-ماتريکس د ترېويال حالت څخه په پيل.

يو $(n\times n)$-ماتريکس A تر څېړنې لاندې نيسو، نو دا لږترلږه يو ايګنوکتور v لري.

دا د نورمي کېدلو وروسته يوه اورتوګونال بنسټ $\{v, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کېدی شي. په دې بنسټ کې څېرونه(فنکشن-که غواړئ تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^*AT = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1)\times(n-1))$-ماتريکس لپاره د اينډکشن نيونې يا فرضيې له مخې يو يونيتار ترانفورميشن $\tilde{Q}$ شتون لری د $\tilde{Q}^*B\tilde{Q} = R_{n-1}$ سره. له دې امله د

$$Q = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^*AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^*AT \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & B\tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^*B\tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که λ د کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يو آيګن-ارزښت وي، د الجبرى ډېرخلوالى m سره، نو يو وکتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0\,, \quad v \neq 0$$

سره اصلى وکتور بلل کيږي و آيګن-ارزښت λ ته.

ټول اصلي وکتورونه و آئګن – ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي د بعد m يو لاندې- يا برخوکتور جوړوي، دا اصليفضا H_λ و آيګن – ارزښت λ ته. دا کرښيزې څېروني يا فنکشن A ته انواريانت دی.

ټوله فضا د اصلي فضاو سيده جمعه يا زيتون دی:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda H_\lambda$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه يې له ډېرو برخپلونو يا-قدمونو رايوځای کيږي.

اول - داچې يوونماتريکس يا واحد ماتريکس د هر ماتريکس سره بدلپدونکی دی يوه وکتور $v \in H_\lambda$ د څېرې(عکس ؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A-\lambda E)^m Av = \left(A^{m+1} + \cdots + \lambda^m E^m A\right) v = A\left(A^m + \cdots + \lambda^m E^m\right) v$$

$$= \qquad A(A-\lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0\,.$$

په تعقيب $Av \in H_\lambda$ دی.

دويم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتريکس A په پورتني مثلثبنه ترانفورمي کوو:

$$A \to B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & 0 & & R & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

دا جې د $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A-\lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B-\lambda E)^m (Q^{-1}v)\,,$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \to w = Q^{-1}v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کيږي.

مکر د B له بنې روښانه دی، چې يوون – يا واحدوکتورونه د e_i $i \leq m$ لپاره د B

په اصليفضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسې يو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د يوه $i > m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $(B-\lambda E)^m$ له لارې په 0 نه څېره کيږي يا فنکشن 0نه دی. په تعقيب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دريم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعې سره برابر دی، يعني برابر په n دی، بسيا کوي، چې د بنسټ خويونو لپاره د اصلي فضا کربنيز خپلواکوالی وښودل شي يا وښايو. دې ته استعماليږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A-\varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه يوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \ldots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$((A-\varrho E)^{m_\varrho}(A-\sigma E)^{m_\sigma}\ldots)\, v_\lambda = 0.$$

دا چې يوګونی ضريبونه H_λ انواريانت دي، په پورته يادونه استعماليږ دی، او لاس ته ترې $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \ldots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځورو دی.

ليکونکي: هيليک، هيورنر

د اصلفضا څيوکليکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د يوه کمپلکس مربع ماتريکس A يو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څيکليکي برخفضاو په يوه سيده جمعې تجزيه شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell \,,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا V_i د لاندې بنې يو بنسټ لري

$$B^{k_i} v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i} v_i$ سره يوه آيګن-وکتور و آيګن-ارزښت λ ته.

ماتريکس A برخفضا V_i اينواريانت پرېږدياو هلته لاندې ماتريکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د تعريف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1}v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنۍ ده د λ د الجبري ډېرځلوالي m څخه. د بنسټ ټاکلې بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B \,,$$

چې بنسټ کره کوي ، وټاکو ، نو د ايګنوکتورونو و $\ker B$ و λ ته برخفضاوې

$$U_j = \ker B \,\cap\, \mathrm{Bild}\; B^j$$

تر څېړنې لاندې نيسو. په روښانه نوګه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B \,.$$

وکتورونه w_i به اوس ، له تشدېرې سره په پيل، ايندوکتي، جوړيږي. که $w_1, \ldots, w_{i-1}$ همدا اوس کره شوي وي ، نو سړی لويوالی دا لوي k_i داسې، د هغه لپاره داسې چې U_{k_i} په کربنيزه هيولې W_{i-1} کې نه وی پروت، دا په دې معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i} v_i = w_i \notin W_{i-1}, \quad B w_i = 0 \,.$ سره .

په دې ډول باالاخره د ټول آيګن-فضا $\ker B$ لپاره يو بنسټ $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ جوړيږي او اړونده ځيوکليکي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لارې روښانه دی. د غوښتل شوې ماتريکس انځورنه له اندې څخه لاس ته ارځي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B) B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i \,,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه څنګه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره تنظيم کړي.

د جوړښت د ټيکوالي لپاره بايد برسېره پر دې د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خويونه هم وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نيسي.

اول - لومړی کربښي. خپلواکوالی ښوول کيږي. دا تخنيکي دلايل کزدی شي د دوه ځيکليکي ځنځيرونو د بېلګې

$$B^2 v_1,\ B v_1,\ v_1, \quad B v_2,\ v_2 \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې لیدوړ شي. نیسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1 + \alpha_{1,1}Bv_1 + \alpha_{0,1}v_1 + \alpha_{1,2}Bv_2 + \alpha_{0,2}v_2 = 0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لارې لرو

$$\alpha_{0,1}w_1 = 0 \implies \alpha_{0,1} = 0\,,$$

د $B^3v_1 = Bw_1 = 0$ او $B^2v_2 = Bw_2 = 0$ له امله . د B سره د ضرب له لارې اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1 + \alpha_{0,2}w_2 = 0 \implies \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0$$

د جوړښت سره سم د آیګن-وکتورونو w_i کرښيز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = 0$$

بیا هم د آیګن-وکتور w_i د کرښيز خپلواکوالی له امله.

په ټولیز حالت په ورته توګه مخ ته ځو. د یوه کرښيز کمبینیشن د تحلیل په هکله بسټوکتور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیګن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومرهښايو، چې هر وکتور $u \in H_\lambda$ د بنسټوکتورونو سره انځوروړ دی.

پس وي دې $B^k u = 0\,,$ $k \le m$ ، د سره. د $k = 1$ لپاره يې نه ښايو، ځکه چې وکتورونه w_i د جوړښت له امله د آیګن – فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي. اندوکتیو سړی نیوی شي یا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروړ دي.

همداسې آیګن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروړ دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i.$$

له دې لاس ته راځی، چې

$$B^{k-1}\underbrace{(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i-k+1} v_i)}_{u'} = 0\,.$$

د دې په تعقيب u' انځوروړ دی او له دې سره u هم .

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربعماتريکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانفورمېشن له لارې د بلوک دياګونال بڼه باندې تراسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

باندې تراسفورم شي. له دې سره د جوردانبلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A یوه آیګن – ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوردان بنه یواځنۍ ده.

لیکونکي:هیولیګ،هیورنر

دا چې اصلي فضاوې H_λ د فنکشن A لاندې انواریانت دي، کیدی شي د اصلي وکتورونو بلوکښې پورې یوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانګړو څیوکلیکي بسټونو

$$B^{k_i} v_i,\, \ldots,\, B v_i,\, v_i, \quad B = A - \lambda_i E\,,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتونې بڼه غوره کوي

لیکونکي: خیولیګ، هیورنر

ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکتریستیکي بولینوم

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3 + 4(4 - 3(-1-\lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د دېبل صفرځایونو $\lambda = -3$ او ساده صفځایونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانګ 2 دی، و ته فقط یو آیګن-وکتور شتون لري. د دې په تعقیب A د جوردان بنه لري.

$$Q^{-1}AQ=J=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, Q=(w,v,\tilde{w}).$$

د کربنیز و مساواتشیستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آیګن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

اصلي ډیاګونال پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دې معنا چې د بېلګې $v = (-3, 4, 1)^t$ په توګه . له دې سره دی

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چې د ازماېښت له لارې $A = QJQ^{-1}$ تصديق کيږي.

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

د يوه کمپلکس (2×2)-ماتريکس A لپاره 3 څرنګواليز (د کواليټي له مخې) مختلف جوردان-نورمالبڼې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کې λ يو ډبل آيګن – ارزښت دی د فقط يوه (تر سکالار ضرب پورې) آيګن-وکتور w سره، دا په ی معا چې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

يو په دې پورې اړونده اصلی وکتور v او له دې سره دې سره ترانسفورميشن ماتريکس د $Q = (w, v)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w = (A - \lambda E)v$$

$$\ker(A - \lambda E)^2$$

د حل له لارې لاس ته روارېي ، همداسې د تاكلو له لارې.

د دې لپاره يو څرګنده بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

كركتريستيكی پولينوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د ډبل صفرځای $\lambda = 2$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = (2,3)^t$$

حل له راې سړی لاس ته راوړي او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v = (1,2)^t$$

يو اړونده اصلي وكتور . دا د ازمايښت سره تصديق كيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصديق كيږي. ليكونكي: خيوليګ، كرايځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه کملکس (3×3) - ماتريکس A لپاره لاندې کولتاتيو مختلف جوردان –نورمالبڼې $J = Q^{-1}AQ$ شتون لری:

اول – جوړه دوله مختلف آيګن-ارزښتونه λ, ϱ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دويم – يو ډبل آيګن – ازښت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آيګن وکتورونو w او $\tilde{w}$ يوه اصلي وکتور v سره، هغه چې د مساوات سيستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدی شي.

دريم – يو دريواره آيګن –ارزښت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

دی او سړی یو اصلي وکتور v د

$$(A - \lambda E)^2 v = 0\,, \quad (A - \lambda E) v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

اړونده آيګن – وکتور $w = (A - \lambda E)v$ دی، او یو غزېدلی کرښيز خپلواک آيګن – وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A - \lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}\,.$$

بالاخره $Q = (w, v, \tilde{w})$ دی.

په دريم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

دی او $Q = (w, v, u)$ دی له

$$(A - \lambda E)w = 0\,, \quad w = (A - \lambda E)v\,, \quad v = (A - \lambda E)u\,.$$

سره. ليکونکی: ويپر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼې

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندې توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتريکسونو د جوردان – بڼې ځای نيوني جوړښتونه ښايي .

- ځلور مختلف آيګن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

- يو دوه ځله آيګن – ازښت λ_1 او دوه دوه ځله آيګن -ارزښتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- يو درې واره آيګن – ارزښت λ_1 او يو يووواره آيګن – ارزښت λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دوه دوه واره آيګن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- يو ځلورواره آيګن – ارزښت λ_1.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

د ماتريکسونو توانونه Potenzen vonMatrixen

د يو کمپلکس ماتريکس توانونه A^n، $n = 0, 1, \dots$ تيک هلته صفر ماتريکس پولې ته تلونکي دي، که د ټولوآيګن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسي (A^n) محدوده پاتې کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آيګن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A د جوردان – بڼې $J = Q^{-1}AQ$ سره کېدی شي د ماتریکس – توانونه په لاندې بڼه و لیکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته یواځې دې ته اړتیا ده چې د J پولې ته تلنه(لیمیټ) تر څېړنې لاندې و نیل شي. د J د بلوکفورم (- بڼې) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې ونیل شي. د دې لپاره لیکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D\,,$$

، د کوم سره چې D ګاوندی دیاګونال د یو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه ښوول کیږي، د بعد m د یوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسې صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_i^{n-m+1}D^{m-1}\,.$$

له دې کتمېوالي څخه کېدی شي د پرلبسپپولې ته تلنه(لیمیټ کونورګنت) و لوستل شي.

د $|\lambda_i| < 1$ لپاره دی

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j} = 0\,,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولینومیال یعنې پولینومي لوییږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکپوننشک ټیټیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا راپنده پاتېږي، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې ګاونډی دياګونال د يوه سره شتون نه لري.

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

په زيګولار ارزښت ټوټه کونه Singulärwert-Zerlegung

هر يوه کمپلکس $(m \times n)$ –ماتريکس A ته يونيتار ماتريکسونه U او V شتون لري د

$$U^* A V = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

د A^*A د آئګن – ارزښتونو ريښې دي او k د A رانګ دی.

د U متې u_j او د V متې v_j د AA^* همداسې A^*A د آيګن-وکتورونو اورتوګونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$Av_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سينګولارارزښت تېټه کونې له لارې کېدی شي کرښيزه څېرونه يا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i(v_i^* x)u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\text{Kern}\, A = \text{span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}, \quad \text{Bild}\, A = \text{span}\{u_1, \ldots, u_k\}\,.$$

ذاالاخره $\|A\|_2 = s_1$ او $\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \cdots + s_k^2$ دي.

ليکونکي: اېپ.هيوليګ

د هرمېتيکي ماتريکس A^*A د دياګونالي کونې له لارې لاس ته

$$V^*A^*AV = \text{diag}(s_1^2, \ldots, s_k^2, 0, \ldots, 0) = S^t S\,,$$

راځي، له هغې سره چې سرې نيولی شي، چې آيګن – ارزښتونه د خپلې لويې پسې منظم دي. دا چې A^*A مثبت ديفينيت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آيګن-ارزښتونه د مربع په څېر وليکي او په دې توګه د $m \times n$ دياګونالماتريکس S تعريف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د AV متې اورتوګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = \begin{pmatrix} s_1 u_1 & \cdots & s_k u_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = US$$

د يوه يونيتارماتريکس U سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسې راتلونکې وینا ساده پسې وازمائل شي.

دا چې یونیتار ترانسفورمیشن د یوه ماتریکس رانګ نه تغیروي، صدق کوي

$$\mathrm{Rang}\ A = \mathrm{Rang}\ S = k\,.$$

پسې لرو

$$AA^*u_j = U(SS^t)U^*u_j = u_j(s_j)^2$$

او

$$A^*Av_j = V(S^tS)V^*v_j = v_j(s_j)^2\,.$$

باالاخره Av_j د US د j ــمي متې سره برابر دی، یعني د u_js_j سره برابر.

لیکونکي: اپپ.هیولیک

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

یو کمپلکس $(m \times n)$-ماتریکس A د سینګولار-ارزښت-تېوته کوني USV^* سره کیدی شي د اندولوني پرابلم(مسئله $|Ax - b| \to \min$ د مینیمال نورم سره په بڼه

$$x = A^+b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وليکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \operatorname{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0), \quad k = \operatorname{Rang} A\,,$$

د $(n \times m)$ - دياګونال ماتريکس د مثبت سينګولار ارزښت دی

د په څټ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \ldots, u_m\}$ او $\{v_1, \ldots, v_n\}$ د U همداسې V ، د متو اورتوګونال بنستونه وي، نو کېدی شي کرښيز فنکشن $b \mapsto x = A^+b$ په ضريبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{s_\ell}\,(u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\operatorname{Kern} A^+ = \operatorname{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}, \quad \operatorname{Bild} A^+ = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

او $\|A^+\|_2 = 1/s_k$.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د د $2-$ نورم انواريانت له امله د يونيتار ترانفورميشن له لارې کېدی شي $Ax - b$ له کيڼ د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^* b, \quad y = V^* x$$

سره ترې ورته د مينيمال کولو پرابلم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|Sy-c| = \left| \begin{pmatrix} s_1y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_ky_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \to \min .$$

مينيموم سړی د لومړيو k مساواواتو د حل له لارې لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i/s_i,\ i = 1:k .$$

د يونيتار مياتريکس V $(|x| = |y|)$ نورم ته ريښتينوالي له امله د مينيمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 .$$

په ټوليزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+c, \quad s^+_{i,j} = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \le k \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره دې د انډولوالي پرابلم حل شي

د زيګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزيه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^tA = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه ټاکل کيږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144,\ s_2^2 = 36,\ s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د U دوه لومړنی متې د AV د اړنده متو سره د ويش له لارې لاس ته راځي او د سيګولار ارزښتونو (له دې شره بايد ئوون- يا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې متې (نه يواځنی ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دي سره فاسد- معکوسيت

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^+ b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مينيمال نورم حل.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د توپوګرافيکي کچونداتنونو تيکاوی يا اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

د توپګرافي جګوال h_i داتنونه يا اعداد چي کچوني له لاري لاس ته راړني ته د جګوالو کمبنتونه $d_{i,j}$ کچ کيري. د کچوني ناتيکاوي په بنسټ د قانون له مخي صدق $d_{i,j} \neq h_i - h_j$ کوي

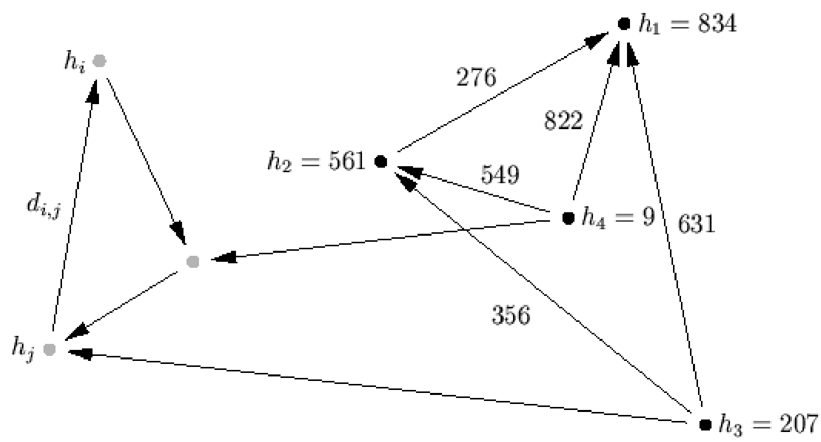
مناسب د جګوالي تيکاوي x_i کېدی شي د اندولوني پرابلم

$$\sum_{(i,j)} \Big(d_{i,j} - \big((h_i + x_i) - (h_j + x_j)\big)\Big)^2 \longrightarrow \min \ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې حل شي.

د تلنلارې د ښوولو لپاره د کمو داتن سره يو مودل-پرابلم حل کيږي.



د جګوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره ، دا لاندې له ټاکلو اخوا (پورته، زيات) سيستم لاس ته راځي

F

$$A(h+x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال نورم غ،ښتونی حل دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه ور دی، ځکه چې بايد د ډېر امکان سره کوچنی تېکاوی وتاکل شي.

ليکونکی : وېپر

د مور-پينروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کتمتوالي له لارې يواځنی کرکتريستيک شي:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$
- $(A^+A)^* = A^+A$
- ليکونکي: اپپ.هيوليک

ساده ښوول کيدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعريف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرايط پوره کوي.

د بېلګې په توګه لومړی کتمتوالی د لاندې څخه لاس ته ارځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

ځکه چې په کونجيزو نوکانو يا قوسونو کې د تولېز شوو دياګونال ماتريکسونو (دوه کونجتړو – يا قطبي ماتريکسونو) ضرب به د دياګونال توکو د ضربوني له لارې جوړېږ شي او لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_{i,i}^{+} = 1/s_{i,i}, \quad i \leq \text{Rang}\, A\,.$$

نور ټول کتمتوالي هم دسېده پسي- شمېرني له لارې لاس ته راځي.

د دې ښوونه چې وښايو A^{+} يواځنی کرکتريستيک شوی دی د ورکړ شوو شرايطو له لارې، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړنې تېرېږو.

ليکونکې: اېپ.هيوليک

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوګونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری(سټ) د اورتوګونال ګروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نخښنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^{t}\,, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواوردينات ترانسفورميشن

$$x \rightarrow x' = Qx$$

سره اوږدوالی اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوګونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری د $\det Q = 1$ سره د
څرخونګروپ يا ځانګړی اورتوګونال ګروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کيږي.

هندارونه Spiegelung

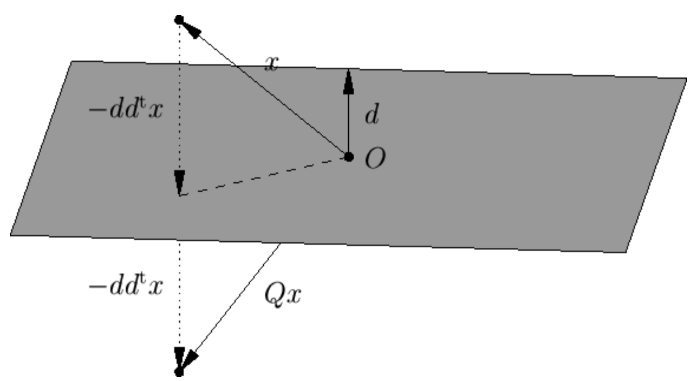
په $\mathbb{R}^n$ کې هندارونه (په هنداره انعکاسونه) و يوه يوونوکتور(واحد-) $d \neq 0$ ته اورتوګونال هايپرسطحه(Hyperebene)

$$H: \; d^t x = 0$$

باندې هندارونه د سيوم تري اورتوګونال ماتريکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لارې د يوونماتريکس (واحد-) E سره په نښه کيږي



پکي يا ميلي په معنا ده

د Q سيومتري روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E\,,$$

دا په دې معنا چې Q اورتوګونال ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هنداروني خويونو ښوولز لپاره لومړی په پامکې نيسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرګ دی، او منځټکی د x او Qx ترمنځ په هايپرهواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t d d^t x = 0\,.$$

له دې سره Qx په هايپرهواره د x هندارونه ده په سرچينه کې، هغه چې د d سره اورتوګونا ده.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

ځرخون Drehung

آورتوګونال $(n \times n)$ - مآتريکس

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{Zeile } i \;\longrightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \;\longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

په پورته کې Zeile د ليکي يا کيلې په معنا ده

د $c = \cos\varphi$ او $s = \sin\varphi$ سره يوه ځرخون په φ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ - سطحه کې په ګوته کوي(تحليلوي). ليکونکي: اپپ.هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده شمیرنه او د

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

په پام کې نیولو سره تصدیقیږي، چې ځرخونماتریکس R اورتوګونال دی:

$$RR^{t} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

- لیکونکي: اپپ.هیولیک

ځرخونمحور او ځرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کې ځرخون Q یو ځرخون محور لري، دا پهدې معنا چې یو یوونوکتور u اینواریانت پریږدي،او په یوه کونج φ یو ځرخون بنایي په هغه هواره کې چې u ته(باندې) اورتوګونال ده.

نسبت و یوه اورتوګونال ولاړسیستم u, v, w ته Q لاندې د ماتریکس آنځوررونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

او د ځرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Spur} Q - 1\right) .$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

د يوه څرخونماتريکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^{t} , \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د يوه اورتوګونالماتريکس آيګن –ارزښت λ_i مطلق ارزښت 1 لري او $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه يو آيګن – ارزښت 1 دی. د مناسب په ګڼه کزلز يا نمرهکولو سره يا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} , \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

دی او يا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ايګن- وکتور u د آيګن – ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د يوه اورتوګونالولاړسيستم u, v, w لپاره باور لري:

$$Qu = u$$

$$Qv = \alpha v + \beta w$$

$$Qw = \gamma v + \delta w .$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوګونال مارتيکسونو څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u\,.$$

که پورته مساوات د ماتریکس بنه باندې

$$Q(\underbrace{u,v,w}_{P}) = (u,v,w)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}}_{\tilde{Q}},$$

باندې ولیکل شي، له $\tilde{Q} = P^{-1}QP$ لاس ته ارځي، چې

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

یو څرخون ماتریکس دی. په همدې ډول د شپور د انواریانت له امله لاس ته راځي:

$$\mathrm{Spur}\, Q = \mathrm{Spur}\, \tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

ماتریکس

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

یو دیاګونال ماتریکس دی، څکه چې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^{\mathrm{t}}Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^{\mathrm{t}} = Q^*$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1\,.$$

څرخونمحور د آئګن- وکتور u په حیث ټاکل کیږي و آیګن – ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

څرخونکونج φ له

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\,Q - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

څخه لاس ته ارځي، د $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ په حیث .

د φ مخنخښه د څرخونلور u د لوریزوالي په واک کې ده او کېدی شي د یوه ولاړسیستم(کواوردینات سیستم) $\{u, v, w\}$ وټاکپ شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w^t Qv = w^t(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi\,.$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوې بېلګې لپاره لرو:

$$\sin\varphi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليکونی: ويپر

د يو خرخون په ضريبونو ټوټه کونه Faktorisierung einer Drehung

يو خرخون Q په $\mathbb{R}^3$ کي په کواورد يناتمخور د د کواوردخرخونونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x\,.$$

- ليکونکي: هيوليک، ربل

خرخون D کېدی شي و ټاکل شي، دا سي چي يو په بل پسي sukzessive د Q توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه يووړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R\,.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی یا مخ ته تللي یو، چې یو په خوښه آیګن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1,0)^t$ باندې د یوې سطحې د څرخون D له لارې ځان څېره کړی شي (یعنې د تابع په څېر ولیکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د مټو د نورمي کولو له امله باید R یوونماتریکس (واحدماتریمس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

د دې لپاره چې د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضريبونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه ځرخون د z – محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y-محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه ځرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتريکس يوو ځرخون D_x دی د x -محور باندې. په ټوليزه توګه لاندې په ضريبونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

D_x D_y D_z

- ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

ځرخونماتريکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې يو ځرخون د نورمي شوي ځرخون محورلور u او ځرخونکونج φ سره ، داسې لوريزه لکه ښی پيچي ميخ ، د يو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1-\cos\varphi)\, u u^{t} x + \sin\varphi\, u \times x$$

، چيرته چې $v \times x$ د u او x صليب ضرب(وکتوري ضرب، چې x سره په نخښه کيږي) په نخښه کوي. اړونده ځرخونماتريکس دی:

$$Q: \quad q_{ik} = \quad \cos\varphi\, \delta_{ik} + (1-\cos\varphi)\, u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j \,.$$

د کرونيکرسومبول δ_{ik} او ε -تنزور ε_{ijk} سره.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

دا بسيا کوي پسي وښايو، چې $Qu = u$ او يو و u ته اورتوګونال وکتور v په يوه کونج φ د u په محور باندې وځرخي. لومړی غوښتنه ترلړ کتل کيږي. د v ځيرې يا تابع ارزښت په ځير لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Qv = \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, u \times v\,,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلي سطحه په ګوته کوي.

- ليکونکي: هيوليک، ربل

د ټوليز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^t$ په محرړر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ يو د څرخون ماتريکس Q له 3ترمونو څخه په لاندې ډول يوځاي کيږي:

په ټوليزه توګه لاس ته راوړ

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\cos\varphi\ \delta_{ik}: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1-\cos\varphi)u_i u_k: \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ليکونکي: هيوليک، کرايخ

$$\sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j: \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مربعيزه فورم(څلورې يې بڼه)

Quadratische Form

د يوه حقيقي سيموټريک ماتريکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^t A x$$

مربعيزه فورم نوموو.

د A د آيګن – ارزښت د مختخښي بدلون له مخې لاندې درې تيوپه(ډولونه) توپيروو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- الیپتیکي (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیګن – ارزښتونه همغه مخنښه لري.
- پارابولیک : لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت صفر دی او نور آیګن ارزښتونه همه یابرابرې وخنخښې لري.
- های پارابولیکي : د مختلفو مخنخښو سره آیګن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د A سیومتري اړیین نه ده چې مخ له مخه ونیول شي(فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\sum_{j,k}x_j a_{j,k}x_k=\sum_j a_{j,j}x_j^2+\sum_{j<k}(a_{j,k}+a_{k,j})x_j x_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتري کړو یا په سیمتري واړوو:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(A+A^{\mathrm{t}})x\,.$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د یوه سکالارتابع f د تیلور- ودې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x)=f(0)+\operatorname{grad}f(0)^{\mathrm{t}}\,x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}\,f(0))\,x\,.$$

په دې حالت کې $\mathrm{H}\,f$ د دویم ټوټه (partiellen -) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتري دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتریک ماتریکس

$$A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^t A x$$

د $\lambda > 0$ لپاره بيضوي(هګۍ ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابوليک او د $\lambda < 0$ لپاره هايپارابوليک دی.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

کوادريک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادريک بلل کيږي، چيرته چي α يو مربعيزه بڼه، β يوه کرښوزه بڼه او γ يوه ثابته ده.

Q د ماتريکس ليکدود په ډول ليکل په لاندې ډول ليکل کيږي

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^t A x$ او $\beta(x) = b^t x$ سره.

د Q انځورونه يواځنی نه ده. د بېلګي په توګه کېدی شي د تعريف مساوات د يوه په خوښه ثابتي سره ضرب شي.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوادریکونو شډله ټوټه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د یوه کوادریک د مساوات څخه په پیل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

لیکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right) .$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجین بڼه ولیکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه یا تیوپونه توپیروو:

- مخروطي کوادریک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- منځتکي کوادریک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- پارابولیکي کوادریک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$
- لیکونکي: ایپ، هیولیګ

کوادریک

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا دونه(ژباړی): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په درې بعديزه (درېپراخيدونې) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدی شي.پای

$$Q: \quad x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسي د ماتريکس لکيندود

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\operatorname{Rang} A = 1$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$ لپاره $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 3$ دی. له دی سره Q د $\lambda = 0$ لپاره يو پارابول ، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي دوله کوادريک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره يو منځټکي کوادريک دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

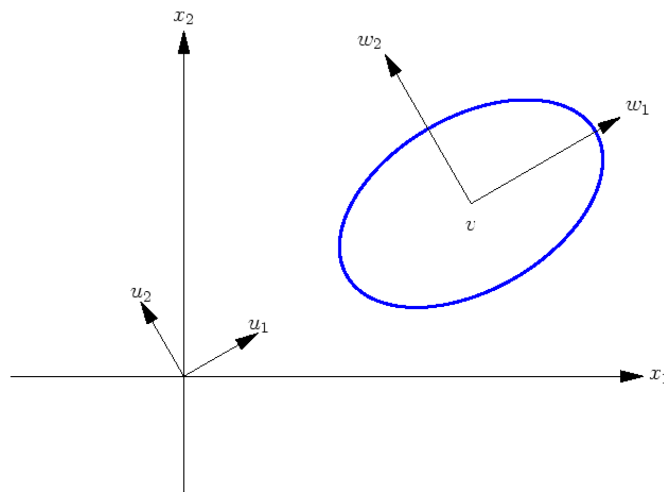
اصلي- محور –ترانفورميشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنی له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدی شي يو کوادريک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^t A x + 2b^t x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma\,, \quad x = Uw + v\,,$$

چیرته چې $m = \text{Rang}\, A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.



له دې سره د څرخون ماتریکس U متې د A آیګن –ارزښتونو λ_i ته آیګن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کيږي. د راکښنې وکتور (راکښونوکتور) v د کوادریک منځټکی دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتري مارتیکس A ته له آیګن –وکتورونو u_i څخه د $\det(u_1, \ldots, u_n) = 1$ سره یو اروتوګونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آیګن – ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ ته آیګن – وکتورونه نئول کیږي. د لومړي ځای بدلون $x = Uy = (u_1, \ldots, u_n)y$ پسې له دې سره لاندې دیاګونال بڼه لاس ته راځي

$$y^t \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)y + 2(\underbrace{U^t b}_{\tilde{b}})^t y + c\,.$$

له صفر څخه مختلف آیګن-ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i/\lambda_i$$

کيدی شيکربنيز ترمونه له ځايه يوړل شي (مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \to \gamma = c - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i^2/\lambda_i \, .$$

سره سم تغير خوري،نو اوس له دې سره اوس دا بنه لرو

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} 2\tilde{b}_i z_i + \gamma \, .$$

که اوس يو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د يو ه بل څرخون پسي د

$$z'_i = z_i \, , \quad i \leq m$$

$$z'_{m+1} = (1/\beta) \sum_{m+1}^{n} \tilde{b}_i z_i \, , \quad \beta = \pm|\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوګونال د $z'_{m+2}, \ldots, z'_n$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z'_i)^2 + 2\beta z'_{m+1} + \gamma \, .$$

لاس ته راځي.

له دې سره د β سره مخ نخبنه ډاسي ټاکل کيږي، چې د β سره ويش وروسته لږ تر لمه دومره مثبت لکه منفي ترمونه λ_i/β رامنځ ته شي.

اخرنی راکبنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w_{m+1} = z'_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z'_i\,, \quad i \neq m+1$$

ثابته له منځه وړي او باالاخرخ راکوي:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کوادريکونه

يا دونه(ژباړی): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په درې بعديزه (درېپراخيدونې) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدی شي.پای

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم يا – پنې ترانسفورمي شي.

د ماتريکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره.

ماتريکس A آيګن – ارزښتونه 36، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آيګن-وکتورونه u_i د $\det(u_1,u_2,u_3)=1$ سره د بېلګې په توګه دي:

$$u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^t\,,\quad u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^t\,,\quad u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^t\,.$$

د ترانسفورميشن $x=Uy$ پسې د $U=(u_1,u_2,u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q:\quad 36y_1^2+9y_2^2-144y_1-18y_2+18y_3+207=0\,.$$

د مربعيزې تکميلونې له لارې

$$z_1=y_1-2\,,\ z_2=y_2-1\,,\ z_3=y_3$$

لاس ته راحي

$$Q:\quad 36z_1^2+9z_2^2+18z_3+54=0\,.$$

راکښنه

$$w_1=z_1\,,\ w_2=z_2\,,\ w_3=z_3+3$$

باالاحره نورمالفورم (- بڼه) راکوي

$$Q:\quad 36w_1^2+9w_2^2+18w_3=0\,.$$

په ټوليزه توګه ترانسفورميشن لاندې فورم يابنه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = Uy = Uz + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکښنه ده

$$v = U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منځ ټکی په ګوته کوي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

مخروط غوڅی Kegelschnitt

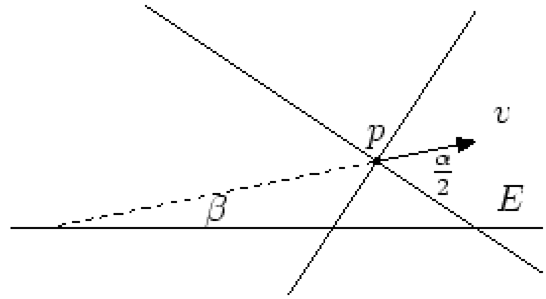
د یوه دېلمخروط غوڅی

$$K:\ (x-p)^{t}v = \pm\cos\frac{\alpha}{2}\,|x-p||v|$$

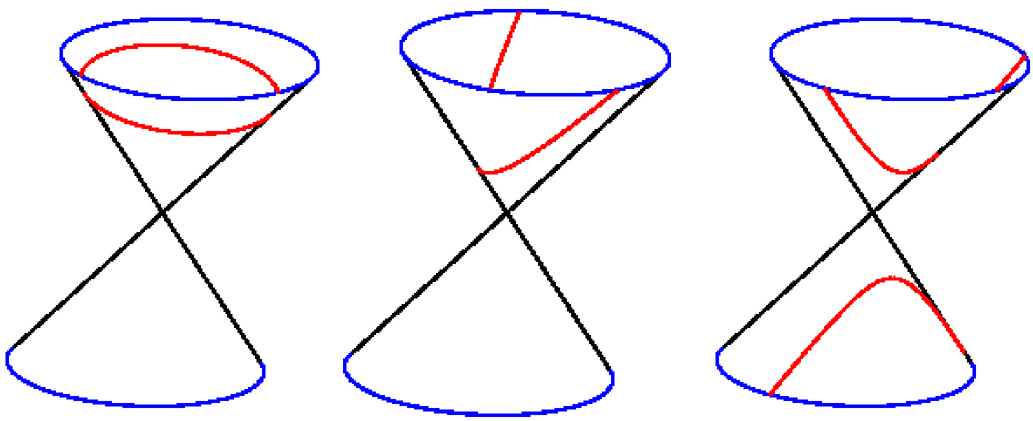
د ځوکې p ($p_3 \neq 0$)، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې $E:\ x_3 = 0$ سره یوه مربعیزه کړه ده

$$K \cap E:\ a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مخروط غوڅي تيوب يا ډول د E او کرښي , $t \in \mathbb{R}$, $p+tv$ ترمنځ کونج β د
لويوالي په واک کې دی



Hyperbel: های پارابول
$\beta < \alpha/2$

Parabel: پارابول
$\beta = \alpha/2$

Ellipse: بيضوي يا هګبښ
$\beta > \alpha/2$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحيزو کوادريکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مخروطي کوادریکونه

Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$	Punktټکی
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونکو کرښو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}=0$	Doppelgerade دبلي کرښې

- منځټکي کوادریکونه

Normalform نورما بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	(leere Mengeتش ډېری)
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	Hyperbelهای پارابول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	Ellipseبيضوي(هګی)
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	تش ډېری)leere Menge(
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	paralleles Geradenpaar د کرښو غبرګه جوړه

- پارابوليکي کوادريکونه

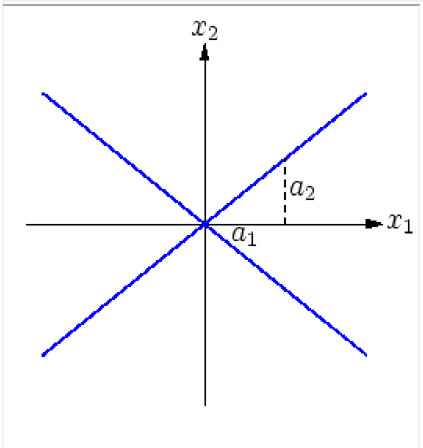
Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+2x_2=0$	Parabel پارابول

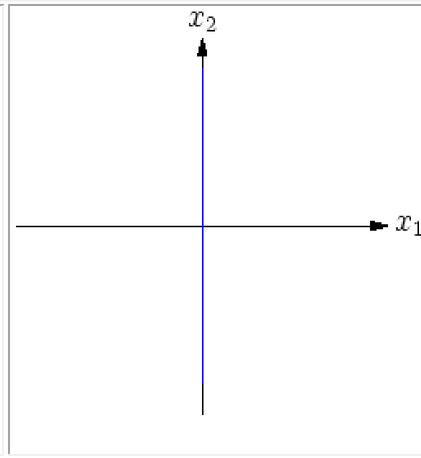
نورمالفورمونه يواځني دي، د ايندکسونو يا پيژند نخښنو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادريکونو د يوې ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې.

لويې a_i مثبت ايښول کيږي او د کوادريکونو داصلي محور اوږدوالی بلل کيږي

schneidendes Geradenpaar د غوڅېدونکو کرښو جوړه	Doppelgerade ډبل کرښې

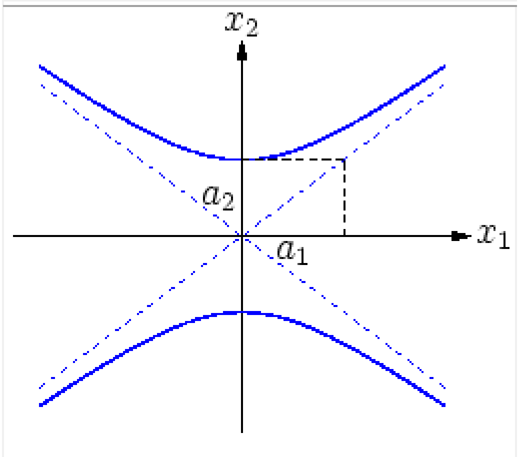
(c) ketabton.com: The Digital Library

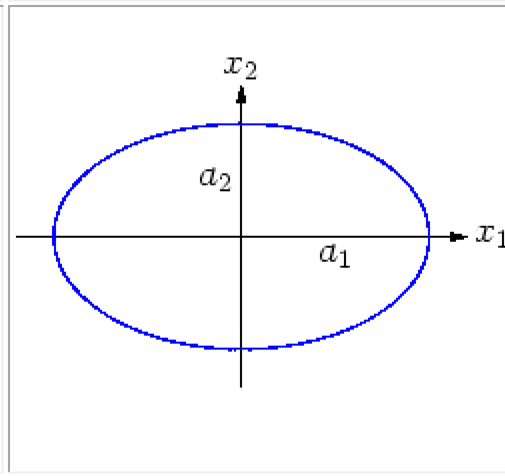




Hyperbel هاى پارابول

Ellipse بيضوي يا هكى



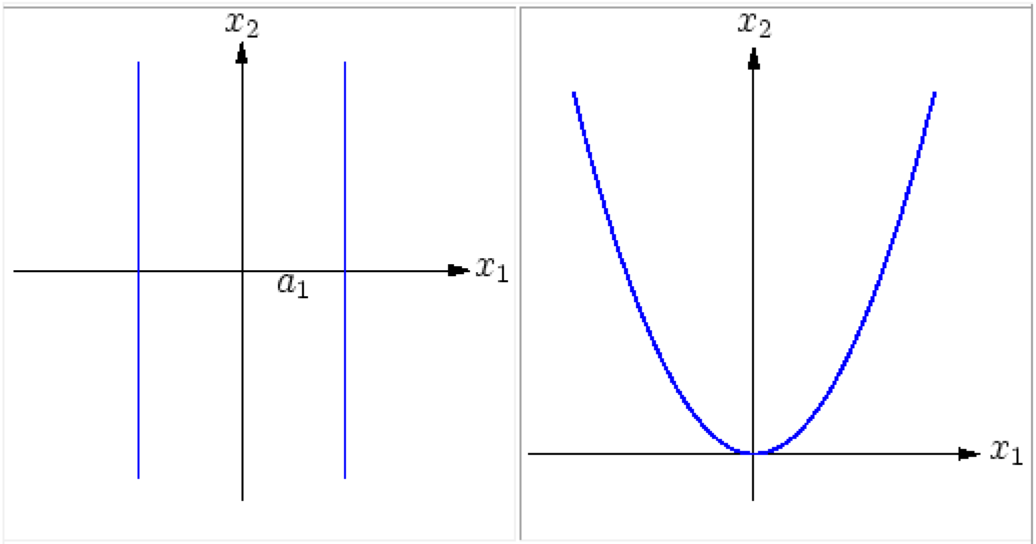


paralleles Geradenpaar

غبرگه(موازي) كرښجوړه

Parabel پارابول

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: اپپ، هيوليک

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمالفورم(- بڼه) او تيوپ وټاکل شي

$$Q:\quad 3x_1^2+3x_2^2+10x_1x_2-12\sqrt{2}x_1-4\sqrt{2}x_2-8=0$$ د

ماتريکسفورم د مربعيز فورم څخه په پيل،

$$x^tAx+2b^tx+c=x^t\begin{pmatrix}3&5\\5&3\end{pmatrix}x+2\sqrt{2}\,(-6,-2)\,x-8$$

لومړی سړی د ماتريکس A آيګن – ارزښتونه او آيګن – وکتورونه ټاکي.

کرکتريتيکي پولينوم دی:

$$(3-\lambda)^2-25=9-6\lambda+\lambda^2-25=\lambda^2-6\lambda-16$$

او لاندې صفرځايونه لري

$$\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+64}}{2}=3\pm5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و $\lambda_1 = -2$ ته یو نورمي شوی آیګن-وکتور د لاندې کربنیز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کیږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t$ دی. دا چې دویم آیګن-وکتور په په لومړي باید عمود (ولاړ) وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ، د کوم سره چې مخنخښه داسې باید ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوې ترانفورمیشن ماتریکس دیترمینانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره تراسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$\begin{aligned} 0 &= y^t \tilde{A} y + 2\tilde{b}^t y + c \\ &= y^t U^t A U y + 2\left(b^t U\right) y + c \\ &= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8\,. \end{aligned}$$

د مربعیزې پوره ونه یا تکمیلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad -2(y_1-2)^2+8(y_2-1)^2-8$$

$$= \quad -2z_1^2+8z_2^2-8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2}-\frac{z_2^2}{1^2}+1=0.$$

نو مساوات يو هاى پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي كوادريكونو د اقليدس (اويكليد) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي كوادريكونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندي نورمالفورمونو سره:

- مخروطي كوادريكونه

Bezeichnung نومونه	Normalform نورمال بڼه
Punktټکی	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Doppel-)Kegel(دبل)مخروط	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$
Geradeکربنه	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$
Schneidende Ebenenغوڅونکي سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$
Doppelebeneدبل سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2}=0$

- منځتکي کوادریکونه

په نخښه ونه Bezeichnung	نورمال بڼه Normalform
(leere Menge) (تشدېرى)	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$
دوه پوښیز های پرابولوئید zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$
یوپوښیز های پرابولوئید einschaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Ellipsoid ایلیبسوپید	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
(leere Menge) تشدېرى	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$
hyperbolischer Zylinder هایپربولیکي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$
elliptischer Zylinder ایلیپتیکي توته	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$
(leere Menge) تشدېرى	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$
parallele Ebenen غبرګې سطحې یا ۰ هوارئ	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$

- پارابولیکي کوادریکونه

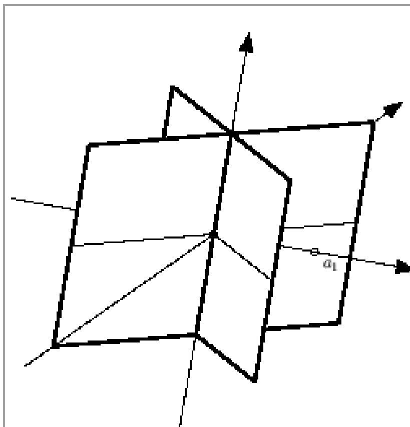
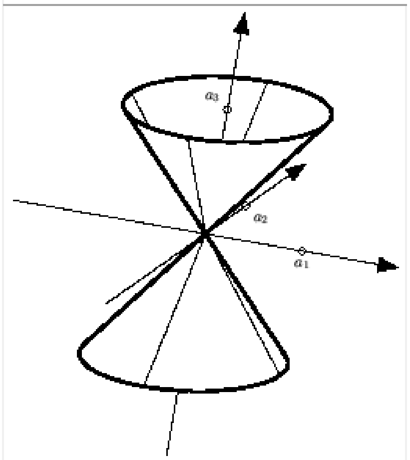
نومونه	نورمال بڼه
هګۍ ډوله ایلیپمیکي پارابولوئید	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$
هاي پارابولیکي پارابولوئید	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارابوليکي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$

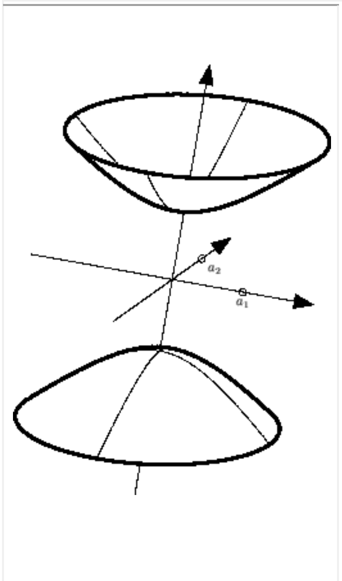
نورمال بڼې د ايندکسونو يا پيژند نخښو پورې يو اځني ټاکلي او مخروطئ کوادريکونه د ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې يو اځني ټاکلي.

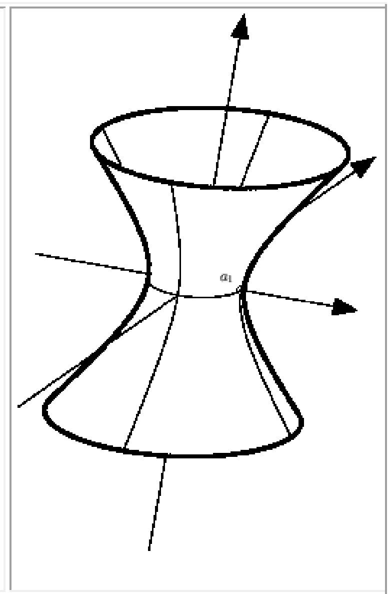
لويي a_i مثبت اينول کيږي او د کوادريکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کيږي.

غوڅوونکي سطحې	(دبل) مخروط
	

يو پوښيز های پارابول	دوه پوښيز های پارابول

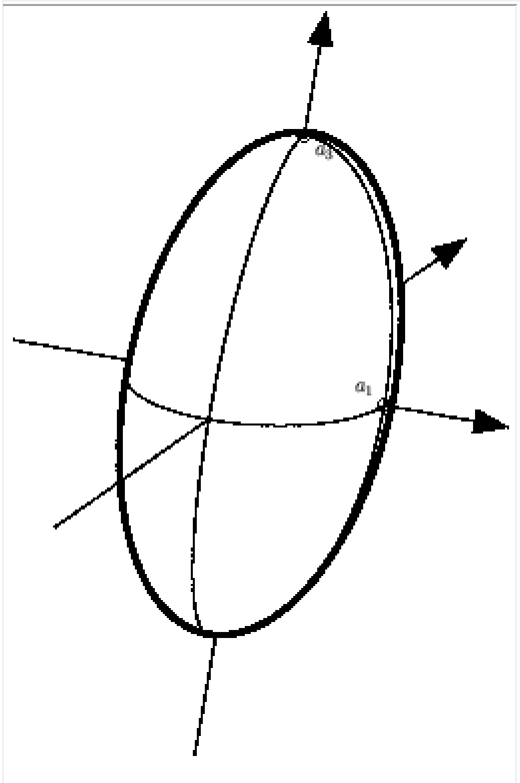
(c) ketabton.com: The Digital Library

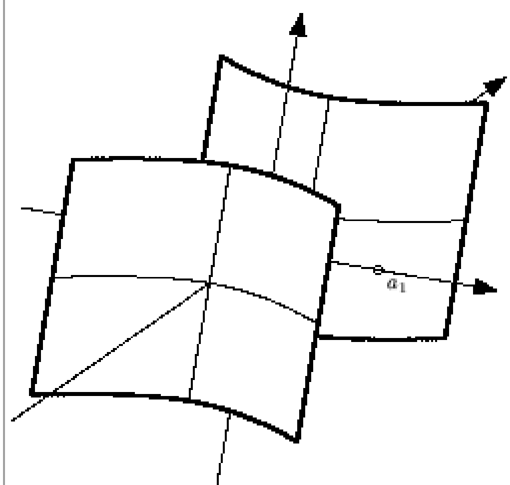




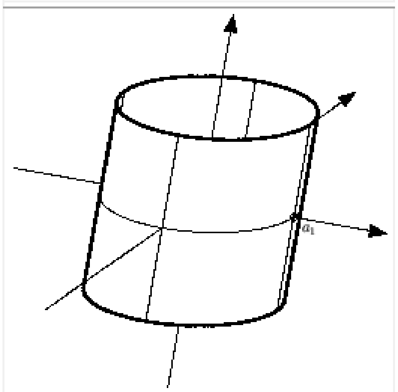
های پارابوليکي توته hyperbolischer Zylinder	Ellipsoidهکی ډوله يا بيضوي ډوله

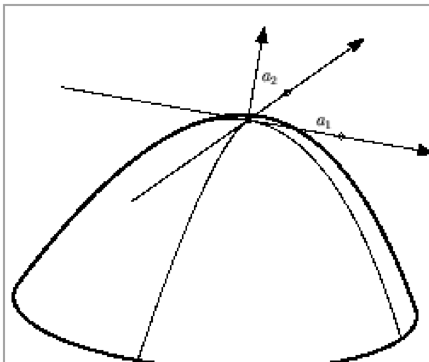
(c) ketabton.com: The Digital Library



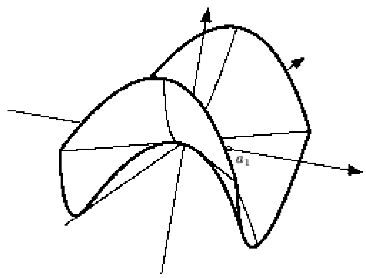
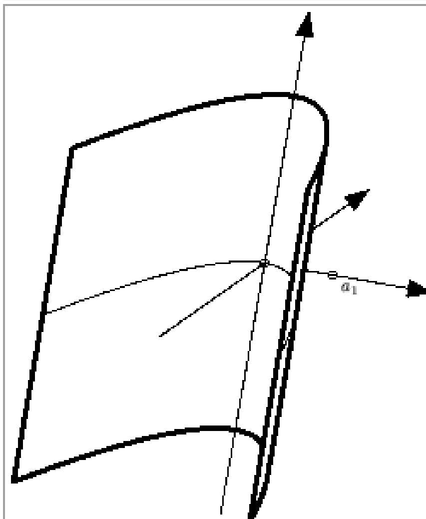


elliptischer Zylinder	elliptisches Paraboloid
بيضوي توته	بيضوي پارابولوئيد





(c) ketabton.com: The Digital Library

hyperbolisches Paraboloid های پارابوليکي پارابولوئيد	parabolischer Zylinder پارابوليکي توته يا - استوانه
	

ليکونکي: هيوليګ، هيرنر

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمال بڼه او تيوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^{t}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$$

د ماتريکس کرکتريستيکي يا ټاټونکی پولينوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = -3\,.$$

و آيګن – ارزښتونو λ_i ته اړونده نورمي آيګن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\,,$$

جېرته چې مخنخښه داسې ټاکل کيږي، چې ولاړسيستم منځ ته راځي.

د اورتوګونال ترانسفورميشن ماتريکس په حېث منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

مربعيزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توګه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0\,.$$

نور مساوات يوپوښيز های پارابول انځوروي

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

چې غوټې پسې وهې په لاس به درشي

چا وې دا چې په درياب کې ګور نه شته

برى د خداى (ج) سره دى.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

(c) ketabton.com: The Digital Library

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ - د احتمالوالي شميرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو ځو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library