

گنونیو هنه

(د اعداد تیوری)

Nummbertheory

$$k = n \pmod{m}$$

smakhan1946@gmail.com

Ketabton.com

لیکونی: جورج کوننبرویر

ژبانی: ډاکتر ماخان (میری) شینواری

دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت -
په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: گڼونپوهنه

ليکونکي: پروفیسور جورج گوتنبرونر

ژباړی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

د خپریدو لړۍ:

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړې برېښنا پته: smakhan1946@gmail.com

چاپ چاري

چاپ ته يې د هر چمتو هیوادوال مرسته په سترگو منل کیږي

پښتو موزېبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

د ژباړې مننه

نيوليک

د ژباړې سريزه

د ليکونکي سريزه

۱ - د... خويونه

۱ د. د اکسيومونو سيستم

۸ د طبيعي اعدادو ځای انځورونه

۱۴ - ۲- په ... وېشنيزوالی

۳۱ پروېشنوني (مقسوم عليه)

۱۸ د اويکلید يا اقلیدس له مخې ټاکل

۲۸ خورا غټ گډ پروېشنوني

۳۲ ۳ - لومړني گڼونه

۳۸ نور خويونه

۴۲ (د خ غ ک او خ ک گ زياتځلي - -

۵۱ ۴ - کونگروانځ

۵۱ د کونگروانځ سره شمېرنه

۵۸ د پروېشنيزوالي قوانين

۶۳ پاتي ټولگي

۶۷	د پاتې ټولګې کړۍ يا - رينګ
۷۵	۵ - الجبري کونګروانڅ
۷۵	د کرښيزو کونګروانڅو حلوروالي
۸۱	سيمولتان کونګروانت
۸۷	الجبري کونګروانت
۸۹	۶ - د حلونوو عملي شمېرڼه
۹۸	د الجبري کونګرواينڅو دحلونو ګڼون يا تعداد
۱۰۱	- لومړني پاتې ټولګي کروپونه
۱۰۱	د ابل ګروپ
۱۰۳	د $\varphi(m)$ شمېرڼي ته
۱۱۰	د اوپلر جمله
۱۱۶	د $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ جوړښت
۱۲۶	د حقيقي اعدادو g - اديکي وديزيڼه
۱۲۶	ټولزه وديزيڼه
۱۳۳	کله $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ دوه g - اديکي انځورونه لري؟
۱۳۵	کوم $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ يوه پای g - اديکي انځورونه لري؟

۱۳۸	پريوديکي وده
۱۴۵	ځانگړی حالت: سوچه پريوديکي وده
۱۴۹	ټوليز حالت: نه سوچه – پريوديکي وده
۱۵۰	۸ - N-م توان
۱۵۰	په ځانگړي حالت بيرته اړول
۱۵۳	د... د حل لپاره تگلار
۱۵۸	د حل ساده متودونه
۱۵۸	ځانگړی حالت
۱۶۵	د $x^n \equiv a(2^k), k \geq 3$ لپاره د حل متودونه
۱۶۹	څلوريز پاتي(که غواړئ: مربع باقیمانده)
۱۶۹	ځانگړی حالت
۱۷۴	څلوريز پاتي(که غواړئ: مربع باقیمانده
۱۷۴	ځانگړی حالت
۱۷۹	لژندر-سومبول
۱۸۰	ساده خويونه:
۱۸۶	د گاوس ليما يا جملگي
۱۹۶	د Legendre-Symbo لپاره د څلورۍ – يا ...
۲۰۱	جاکوبي سومبول
۲۰۵	ځانگړي حالتونه

د ژباړې سریزه

گرانو لوستونکو!

د لیکونکي سریزه راوړل شوې هلته اړین څه شته دی، خو زه غواړم دومره یادونه وکړم، چې ګڼوښوونه یا د اعدو تیوري یو له بنسټیزو درسونو څخه ګڼل کیږي، چې ما یې ډېر وخت د یوې داسې لیکنې لټه کوله. ښه دی، دا مې یو ډېر ښه سکریپټ پیدا کړ او بیا دا د ویانا د پوهنتون هم دی، چې ما هلته درس ویلی. دا په ګوته کوم، چې د ویانا پوهنتون کې ډېر ښه او مشهور ګڼوښووهان تیر شوي او لا هم شته.

دا ما له دې امله هم اړینه وبلله، چې زما په اند دا درس د افغانستان پوهنتونونو کې نه شته. هیله ده، چې دابه د گرانو هیوادوالو په ګټه وځوري.

په دې هیله هم، چې ګڼوښوونه به دپه درسي پروګرام کې خوندي شي.

ستاسو ماخان

سریزه:

په هغه وخت کې گاوس گڼونپوهنه یا د عددونو تیوري د ماتماتیک د ملکې (پاچاګۍ) په نوم ونوموله. د دې لپاره چې د شمیرپوهنې په دې ساحې ښه وپوهیږو، مختلفې پیلونې — همداسې مخ ته تللي لکچرونه وړاندې کيږي.

ګڼونتیوري د ډېرو داسې ساده برېښیدونکو پرابلمونو، ښوونه او یا د هغوي تضاد تر څیړنې لاندې نیسي، چې تر نن ورځې پورې دا پاتې دي یا نه دي شوي، او د پوره پام کونې له مخې خورا سخت مخ ته لیدل شوي دي. د وخت په تیریدو سره دې د ګڼونپوهنې دې خویونو یو د شمیر پوهنې تیوري ودې خورا ستر د تغذیې ورشو وموندله، چې د خپل دسټیلین ډپولي زیاته ور اخواته رسیدونکې ده. په دې اړوند دې دا هم په ګوته شوې وي، چې د ساده پرابلمونو یو ډکې (حجم) شتون لري، د کومې له مخې چې هر څوک په خوښه ازمايلي شي ([Guy94] وګورئ).

، د ګڼونتیوري یوه غټه معنا، چې د دې ساحې یا ورشو د یوه قهرمان څخه نږدې ۳۰۰ نا روښانه کلونو وروسته حل شوې: د فرمات Fermat گومان چې په ښه توګه د ،، لوی فرمات Der große Fermat ،، تر نامه لاندې نوم یا شهرت لري. که څه هم عملي کارونه یا استعمال یې د ۱۹۹۴ د اندریو او ریچارد تیلور جملې څخه په سختی لیدل کيږي، بیا هم ګڼونپوهنه سیده یا په همدې وخت کې په ماډرن شمیرپوهنه کې غوره رول لري. په دې اړونده سړی فقط د بیلګې په توګه کریپتوګرافي ته خپل پام اړوي، چیرته چې د خبرونو د کود (شفر) څخه وازونه، د نورو تر څنګ خورا لوي لومړنیو ګڼونو ته اړتیا پېښيږي.

په ۶/۳ برخه کې لنډې پرابلم ته پام شوی دی، د ګڼونپوهنې د بنسټیز د استعمالووالي دې دلته انتظار نه کیږي، ځکه چې بنسټیزه تیوري، نه مګر د هغې استعمال د دې سکریپټ په ککره کې ځای لري. علاقمند لوستونکي دې په دې هکله نورو د ګڼونتیوري زیاتو کتابونو لوستلو ته راوبلل شي. دا مخ ته پرته لیکنه د ویانا پوهنتو کې د ۲۰۰۰ او ۲۰۰۱ ژمي سمستر لپاره لکل شوې. بنسټیزې پوهنې یې له وړاندې — یا مخنیونه نه ده، مګر ښه خو ده، چې د الجبري جوړښت او کلیمو سره بلدتیا شتون ولري. لکچر پروفیسر میچ او اړونده تمرینونه یې ډاکټر شویزنګایر مخ ته بیول. دا سکریپټ د لکچر په لیکنو ولاړ دی او د تکمیل ادعا نه کوي.

جورج ګوټنبرونر اپریل ۲۰۰۲

د $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ خوږونه

د $\mathbb{Z}$ لپاره اکسیومسیستمونه Axiomensystemen

د $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ لپاره یو ممکنه اکسیوم دی:

لومړۍ: اکسیوم، ، + ، پوره کوي: $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ او :

الف::

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \text{اسوځیاتیو قانون}$$

ب-

$$\exists 0 \in \mathbb{Z} (, Null) : a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad \text{(بي اغیزه يا ناپیلی توکی)}$$

پ -

$$\forall a \in \mathbb{Z} \exists -a \in \mathbb{Z} : a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad \text{(په څټ يا معکوس توکی)}$$

ت -

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{(کمواتیو يا د بدلېدو قانون)}$$

دویم: ضرب ، ، . ، پوره کوي $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b^1 \in \mathbb{Z}$ او:

الف-

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \text{(اسوځیاتیو قانون)}$$

ب -

(, , Eins“ $\exists 1 \in \mathbb{Z}, 1 \neq 0$ د $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \forall a \in \mathbb{Z}$) بی اغیزه یا ناپیلی توکی

پ-

(کموتاتیو یا د بدلېدو قانون) $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in \mathbb{Z}$

ت-

(دیستریبوتیو قانون) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

دریم: نسبت و نظم, $\leq$ ته باور لري:

الف - $a \leq a \forall a \in \mathbb{Z}$ رفلکسیوي

ب . $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b \forall a, b \in \mathbb{Z}$ انتیسیومتری.

پ - $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ ترانزیتیو.

ب - $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a = b \vee a \leq b \vee b \leq a$

ت - $a \leq b, c \in \mathbb{Z}$ په خوښه $\Rightarrow a + c \leq b + c \forall a, b \in \mathbb{Z}$

ث - $a \leq b, c \in \mathbb{Z}, c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \forall a, b \in \mathbb{Z}$

څلوم- برخدېری $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}$ پوره منظمه ده، دا په دې معنا چې د $\mathbb{N}$ هره ناتش برخدېری A کوچنی توکی لري. (نو:

$$(A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_0 \in A : a_0 \leq a, \forall a \in A$$

یادونه ۱.۱.۱ د جمعی یا زیاتون د څلور خویونو لپاره $(\mathbb{Z}, +)$ یو ابل گروپ

جوړوي، د ضرب د خویونو سره په ګډه د $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ سره په اړوند د یوه

کموتاتیو رینگ څخه غږیرو، د یوې (واحد) توکي سره.

د اکسیومونو $3a - 3d$ سره په ګډه $(\mathbb{Z}, \leq)$ یو توتالمنظمه ډېری (،،خُنْخیر،،) جوړوي.. که ټول اکسیومونه $1 - 3$ باور ولري، نو دا بی یو منظم رینګ (کړی) دی (بېلګه: $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$)

یادونه ۱. ۱. ۲. سری کړی شي وښايي: $(R, \oplus, \odot, \preceq)$ یو په خوښه الجبري جوړښت دی. هغه چې دا پورته له ۱ تر ۴ اکسیومونه پوره کوي، نو دا بیا په روښانه توګه 1.1 برابر دی له $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ سره.

ترې لاس ته راوړنه: په $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ کې باور لري:

$$a \leq b, c < 0 \Rightarrow bc \leq ac. \quad (1.1)$$

ښوونه:

$$c < 0 \xRightarrow{3e} c + (-c) < 0 + (-c) \stackrel{1b}{=} -c \Rightarrow 0 < -c. \quad (1.2)$$

$$a \leq b \xRightarrow{3f} a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) \xRightarrow{UE} -(ac) \leq -(bc) \xRightarrow{3e} (1.3)$$

$$\xRightarrow{3e} -(ac) + (bc) \leq -(bc) + (bc) = 0 \xRightarrow{3e} (1.4)$$

$$\xRightarrow{3e} (ac) - (ac) + (bc) \leq (ac) + 0 \Rightarrow (1.5)$$

$$\Rightarrow bc \leq ac. \quad (1.6)$$

ګڼونپوهنه

جمله ګی ۱ . ۱ . ۴ له $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ څخه د $\leq$ لپاره باور لري:

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b \vee b = a + n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.7)$$

($\Leftarrow$)
ښوونه:

$$b = a + n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow b - a = n \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow b > a \Rightarrow a < b. \quad (1.8)$$

($\Rightarrow$)

$$a \leq b \stackrel{3e}{\Rightarrow} a + (-a) \leq b + (-a) \Rightarrow 0 \leq b - a \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow b - a = 0 \vee b - a > 0 \Rightarrow b = a \vee b - a \in \mathbb{N} \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow n := b - a \Rightarrow b = a + n \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.11)$$

د سره

لاس ته راوړنه ۱ . ۱ . ۵ : $\cdots - 2 < -1 < 0 < 1 < 2 \cdots$

جمله ګی ۱ . ۱ . ۶ : د $\mathbb{N}$ لپاره د اندکشن اصول باور لري، دا په دې معنا چې

$$\exists \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N} \quad \text{د لاندې سره:}$$

$$1 \in A$$

1.

$$, n \in A \Rightarrow n + 1 \in A \quad 2.$$

نو باور لري $A = \mathbb{N}$.

ښوونه: وي دې $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ په خوښه دواړو خويونو سره ورکړ شوي، ښايو:

$A = \mathbb{N}$ د $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ اکسیومونو په مرسته

نیسو $A \neq \mathbb{N}$. راوړو

$$T := \mathbb{N} \setminus A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A\}, \quad (1.12)$$

له دې امله $T \neq \emptyset$. د اکسیم 4 له مخې T یو کوچنی توکی $n_0 \in T$ لري.. دی $n_0 \neq 1$ ، ځکه چې د A خوی 1 له مخې:

$$1 \notin T = \mathbb{N} \setminus A. \Rightarrow 1 \in A, \quad (1.13)$$

د 1.1.4 پسي $n_0 > 1$ لرو ، داسې چې د 3e پسي باور لري:

$$n_0 - 1 \in \mathbb{N} \quad n_0 - 1 > 1 - 1 = 0, \quad (1.14)$$

(د $\mathbb{N}$ تعریف وګورئ) د

$$n_0 - 1 < n_0 \quad (n_0 = (n_0 - 1) + 1 \xrightarrow{1.1.4} n_0 - 1 < n_0), \quad (1.15)$$

له امله او داچې $n_0 \in T$ د T کوچنی توکی دی، لرو:

$$n_0 - 1 \notin T. \quad (1.16)$$

له دې امله $n_0 - 1 \in A$ باور لري (پام: $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$). له دې سره د A د 2 له مخې $n_0 \in A$ خوي له امله ، داسې چې هم $(n_0 - 1) + 1 \in A$ دی، دا په دې معنا چې $n_0 \in A$ تضاد.

کنونپوهنه

جملگی ۱. ۱. ۷: (د پاتې سره وېش) که $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ وي، نو ګڼونه یا عددونه
(یواځني ټاکلي) $q, r \in \mathbb{Z}$ شتون لري د $a = bq + r$ سره د $0 \leq r < b$ سره.

ښوونه: وي دي

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n = a - bx \quad x \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.17)$$

وښايه: $M \neq \emptyset$

که $a \geq 0$ وي، نو دی

$$n := a - b \cdot 0 = a \in \mathbb{N}_0, \quad (1.18)$$

پس $n \in M$ ، که $a < 0$ وی، نو $0 < -a$ او له $a \leq b$ څخه د [3f](#) له مخې لاس ته راځي

$$1 \cdot (-a) \leq b \cdot (-a), \quad (1.19)$$

دا په دي معنا، جي

$$-a \leq -(ba) \xrightarrow{3g} a + (-a) \leq a + (-ba), \quad (1.20)$$

دا په دي معنا، چي $0 \leq a - b \cdot a$ ، له دي سره $a - ba \in \mathbb{N}_0$ او $n = a - ba \in M$ دی (د [3d](#) له مخې بل امکانات نه شته).

د له مخې دا ډېری یو کوچنی توکی r لري: r ، داپه دي معنا، چي $r \in \mathbb{N}_0$ او

$$r = a - b \cdot x_0 \text{ für ein } x_0 \in \mathbb{Z}; \quad (1.21)$$

له دې سره لاس ته راځي

$$0 \leq r. \text{ چېرته چې } a = b \cdot x_0 + r, \quad (1.22)$$

نور غواړو وښايو: $r < b$

نيسو $r \geq b$ (3d)، د 1.1.4 پسي $x_0 < x_0 + 1$ باور لري، له دې

سره $-(x_0 + 1) < -x_0$ ، د $b > 0$ له امله د 3f پسي لرو:

$$-(x_0 + 1)b < -x_0b \stackrel{3e}{\Rightarrow} a - (x_0 + 1)b < a - x_0b = r; \quad (1.23)$$

باور لري

$$a = bx_0 + r \stackrel{r \leq b}{\leq} bx_0 + b = b(x_0 + 1), \quad (1.24)$$

نو لاس ته راځي: $a - b(x_0 + 1) \leq 0$ ، له دې سره

$$a - (x_0 + 1)b \in M. \quad (1.25)$$

تضاد، ځکه چې r په M کې کوچنی ګڼ يا عدد دی.

$$\text{بېلګه 1.1.8: } a = -42, b = 32$$

$$-42 = 32 \cdot (-1) + (-10) \quad \text{اجازه نه لري، ځکه چې } r = -10 < 0 \text{ دی.}$$

$$-42 = 32 \cdot (-2) + 22 \quad \text{د پاتې سره وېشېدی، ځکه چې } 0 \leq r = 22 < b = 32 \text{ دی.}$$

د پښې یادونه:

...غوره 1.1

سړی هم وايي، تر ايزومورفي پورې، .

د طبيعي ګڼونو يا -اعدادو ځای انځورونه

لکه $273 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ ، له دې سره

$$0 \leq 2 < 10, 0 \leq 7 < 10, 0 \leq 3 < 10$$

جملګۍ 1.2.1 : وي دې $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ ، نو يواځنی ټاکلی ګڼ يا عدد $n \geq 0, a_i \in \mathbb{N}_0$ شتون لري د لاندې سره:

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad (1.26)$$

د کوم سره چې $a_n > 0, 0 \leq a_i < b \ (i = 1, \dots, n)$

ښوونه:

شتون:

که $a < b$ وي، نو $a = a_0$ ، د کوم سره چې $n = 0, a_0 = a < b$ راکوي.

وي دې $a \geq b$. د وېش له امله د پاتې سره راکوي:

$$a = bq_1 + a_0, 0 \leq a_0 < b, \quad (1.27)$$

$$q_1 = bq_2 + a_1, 0 \leq a_1 < b, \quad (1.28)$$

(1.29) :

$$q_i = bq_{i+1} + a_i, 0 \leq a_i < b. \quad (1.30)$$

وښايه : $q_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots)$ د پورا ايندکشن له لارې:

$i = 1$:

نيسو $q_1 < 0$ ، نو باور لري

$$a = bq_1 + a_0 < b \cdot 0 + a_0 = a_0 < b, \quad (1.31)$$

- تضاد يا مخامخوالی!

$i \rightarrow i + 1$
:

نيسو $q_{i+1} < 0 \Rightarrow q_{i+1} \leq -1$ ، داسې چې

$$q_{i+1} + 1 \leq -1 + 1 = 0, \quad (1.32)$$

نو

$$q_i = bq_{i+1} + a_i < bq_{i+1} + b = b(q_{i+1} + 1) \leq b \cdot 0 = 0 \quad (1.33)$$

- تضاد!

باور لري: $q_i \geq q_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots)$. ځکه چې:

$$q_i = bq_{i+1} + a_i \geq bq_{i+1} \stackrel{b \geq 2, q_{i+1} \geq 0}{\geq} 2q_{i+1} \geq q_{i+1}. \quad (1.34)$$

له دې سره $q_1 \geq q_2 \geq \dots$ دی ، نو $q_{i+1} > 0$ ، نو $q_i > q_{i+1}$ دی .

کنونپوهنه

د ډېری یاسټ $M := \{q_i \mid q_i > 0\}$ لپاره باور لري، $M \neq \emptyset$ ، نو یو کوچنی توکی $q_n \in M$ شتون لري. پسي لاس ته راځی $q_{n+1} = 0$. له دې سره:

$$q_n = bq_{n+1} + a_n = a_n, \quad (1.35)$$

دابه دې معنا چې $a_n = q_n > 0$ ، د په ځټ ایښوونې له لارې لاس ته راوړو:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + a_0 = b(bq_2 + a_1) + a_0 = q_2b^2 + ba_1b + a_0 = \dots \\ &= q_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 \quad (q_n = a_n > 0). \end{aligned}$$

یواځیوالی:

نیسو، چې دوه مختلفې انځورونې شتون لري. وي دې

$$a = a_nb^n + \dots + a_1b + a_0 = \bar{a}_mb^m + \bar{a}_{m-1}b^{m-1} + \dots + \bar{a}_1b + \bar{a}_0, \quad (1.36)$$

د $n \geq m$, $a_n > 0$, $0 \leq a_i < b \forall i$, $\bar{a}_m > 0$, $0 \leq \bar{a}_j < b \forall j$ سره.

له دې امله: $a_0 - \bar{a}_0 = bq$ د یوه $q \in \mathbb{Z}$ لپاره، د $0 \leq \bar{a}_0 < b$ له امله باور لري

$$-b < -\bar{a}_0 \leq 0 \xrightarrow{0 \leq a_0 < b} -b < a_0 - \bar{a}_0 < b. \quad (1.37)$$

که $q > 0$ وي، نو $q \geq 1$ دی او د $b > 0 : a_0 - \bar{a}_0 = bq \geq b \cdot 1 = b$ له امله، تضاد.

که $q < 0$ وي، نو $q \leq -1$ دی او د
 $b > 0 : a_0 - \bar{a}_0 = bq \leq (-1)b = -b$
 له امله تضاد .

نو باید $q = 0$ باور ولري، له دې سره $a_0 - \bar{a}_0 = b \cdot 0 = 0$ او $a_0 = \bar{a}_0$. له
 دې امله باور لري:

$$a_n b^n + \dots + a_1 b = \bar{a}_n b^n + \dots + \bar{a}_1 b; \quad (1.38)$$

د b سره لنډونې له لارې لاس ته راځي:

$$a_n b^{n-1} + \dots + a_2 b + a_1 = \bar{a}_n b^{n-1} + \dots + \bar{a}_2 b + \bar{a}_1. \quad (1.39)$$

په ورته توګه لاس ته راځي: $a_1 = \bar{a}_1, a_2 = \bar{a}_2, \dots, a_m = \bar{a}_m$ ، داسې چې په
 ټولیزه توګه راګوي:

$$a_n b^{n-(m+1)} + \dots + a_{m+1} = 0 \quad (n \geq m) \quad (1.40)$$

که $n > m$ وی له $a_n > 0, b > 0 \Rightarrow$ سره وی ، نو لاس ته ترې راځي: کینه لور
 له صفر لویه ده، تضاد.

له دې امله باید $n = m$ باور ولري، او
 $a_m = \bar{a}_m, a_0 = \bar{a}_0, a_1 = \bar{a}_1, \dots$
 هم. $\square$

پېژند (تعریف) 1.2.2 : پورتنی د $a \in \mathbb{N}$ یواځنی انځورونه د $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ له
 لارې د a ځای انځورونه بلل کېږي نسبت بنسټ b ته، سومبولیک

$a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)_b.$	(1.41)
--	--------

که $b = 10$ وي، نو له دیکادیکي *dekadischen* یا لسميزي انځورونې غږیزو، د $b > 0$ سره له بینار یا دوه یيزي انځورونې غږیزو. که وي، نو سړی لیکي $A = 10, B = 11, \dots$ (د دې لپاره چې له $1 \ 0$ څخه یې توپیر وکړای شو).

یادونه 1.2.3: د a ځای انځورونه نسبت $b \geq 2$ ته کېدی شي د [1.2.1](#) د بنسټ په بنسټ و ټاکل شي [1.2](#).

$$a = q_1 b + a_0 \quad 0 \leq a_0 < b \Rightarrow a_0 \text{ ټاکلی.} \quad (1.42)$$

$$q_1 = q_2 b + a_1 \quad 0 \leq a_1 < b \Rightarrow a_1 \text{ ټاکلی.} \quad (1.43)$$

$$q_2 = q_3 b + a_2 \quad 0 \leq a_2 < b \Rightarrow a_2 \text{ ټاکلی.} \quad (1.44)$$

بېلګه 1.2.4: وي دې $a = 731, b = 10$ ، غوښته: د انځورونه $731 : 10 = 73 + 1$ ، نو

$$\left. \begin{array}{l} 731 = 73 \cdot 10 + 1 \quad 0 \leq 1 < 10 \Rightarrow a_0 = 1 \\ 73 = 7 \cdot 10 + 3 \quad 0 \leq 3 < 10 \Rightarrow a_1 = 3 \\ 7 = 0 \cdot 10 + 7 \quad 0 \leq 7 < 10 \Rightarrow a_2 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 731 = (731)_{10}. \quad (1.45)$$

بېلګه 1.2.5: وي دې $a = 367, b = 2$ ، غوښتنه یا ثبوت: د بینار-یا دوه یيزه انځورونه $367 = 183 \cdot 2 + 1 = \dots$ سړی داسې لیکي:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 367 : 2 & 183 : 2 & 91 : 2 & 45 : 2 & 22 : 2 & 11 : 2 & 5 : 2 & 2 : 2 & 1 : 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 367 = (101101111)_2$$

ازمايښت:

$$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 9 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + \\ 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 = 367$$

په $\mathbb{Z}$ کې توپه ونه Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$

لاندې برخه (خوړا غټ ګډ پروېشونى ggT)

- پروېشونى او $\text{ggT}(a, b)$ (مقسوم عليه او) يا

د اوکليد له مخې د ggT ټاکنه

د

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

خوړا غټ ګډ پروېشونى (بزرګترین مقسوم عليه مشترک)

Georg Gutenbrunner 2002-10-04

پروېشونى او خوړا غټ ګډ پروېشونى $\text{ggT}(a, b)$

پېژند(تعريف) 2.1.1 : وي دې $a \in \mathbb{Z}$ ، سړى وايي $b \in \mathbb{Z}$ وېشي، که د يوه a وېشي، که د يوه $a = b \cdot q$ لپاره باور ولري $q \in \mathbb{Z}$.

سومبولیک: $b \mid a$ ، b د a پروېشوني بلل کيږي، q د b پوره کېدونکي يا کمېلمنتار پروېشوني بلل کيږي. که b د a پروېشوني (مقسوم عليه) نه وي، نو لیکو $b \nmid a$.

د 1 پروېشوني د $\mathbb{Z}$ یوونونه يا واحدونه بلکيږي (دا فقط $\{1, -1\}$ دي).

یادونه 2.1.2: هر ګڼ يا عدد $a \in \mathbb{Z}$ پروېشوني $1, -1, a, -a$ لري، داسې په نامه ساده (نا اصلي) پروېشوني. که نور پروېشوني شتون ولري، نو دا اصلي پروېشوني بلل کيږي.

لېما جمله ګوتي 2.1.3:

$$b \mid a \Rightarrow b \cdot c \mid a \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{Z} \quad .1$$

$$bc \mid ac, c \neq 0 \Rightarrow b \mid a \quad .2$$

$$a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c \quad .3$$

$$a \mid b, b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b| \quad .4$$

$$|a| = |b| \quad a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = \pm b \quad .5$$

$$b \mid a_1, \dots, b \mid a_n \quad a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z} \quad .6$$

که $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ وي، د سره، نو باور لري $\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z} :$

$$b \mid \sum_{i=1}^n c_i a_i \quad .(2.1)$$

بڼونه:

ad [4](#)

$$a \mid b = a \cdot q \quad \text{لپاره} \quad q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |b| = |a| \cdot |q|, \text{ پرته له دې } b = 0,$$

$$\text{نو } |q| \geq 1 \text{ او } |a| \cdot |q| = |b| \geq |a| > 0 \text{ هم پرته له دې } b = 0.$$

ad [5](#)

$$a \mid b \Rightarrow b = aq, b \mid a \Rightarrow a = br \Rightarrow \text{lcm } a = b,$$

نو له دې $b = 0$ لاس ته راځي. که $b = 0$ وي، نو $a = 0$ هم. که a او b د صفر سره برابر نه وي:

$$a = \pm b \quad |a| = |b| \quad \text{له دې سره} \quad |b| \leq |a| \quad \text{او} \quad |a| \leq |b|$$

دی، داپه دې معناچي . دی .

ad [6](#)

$$a_1 = bq_1, \dots, a_n = bq_n \quad (q_i \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i c_i = \sum_{i=1}^n (bq_i) c_i = b \underbrace{\sum_{i=1}^n q_i c_i}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow b \mid \sum_{i=1}^n a_i c_i \quad \forall c_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

لاس ته راوړنه 2.1.4 : هر $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ ، پای دېرې پروېشوني b لري، ځکه چې د(4) 2.1.3 پسې باور لري: $|b| \leq |a|$ ، نو $-|a| \leq b \leq |a|$ ، له دې امله

کنونپوهنه

$$b \in \{-|a|, -|a| + 1, \dots, |a| - 1, |a|\}, \quad (2.3)$$

دا فقط پای ډېر دي.

$$0 = b \cdot 0 \quad \forall b \in \mathbb{Z}$$

مگر: $a = 0$ ټول ګڼونه يا ټول عددونه د پروېشونو په څېر لري: ، دا په دې معنا چې a ناپای ډېر پروېشوني لري.

$$(\Rightarrow a \neq 0) \quad a \in \mathbb{N}$$

پسې راتلنه يا لاس ته راوړنه 2.1.5 د: د زیاتیزو يا مثبتو

$$1 \leq b \leq \sqrt{a}$$

پروېشونو د ټاکلو له امله کېدی شي سړی ځان په هغه د سره رابند يا محدود کړي.

ځکه چې: که q د $a \neq 0$ یو پروېشونی وي د سره او $q > \sqrt{a}$ $a = qr$ ($r \in \mathbb{Z}$) وي، نو دی ، ځکه چې: $r < \sqrt{a}$

$$r \geq \sqrt{a} \Rightarrow a = qr \geq q\sqrt{a} > \sqrt{a}\sqrt{a} = a \quad (2.4)$$

- تضاد! له دې سره r پورره کېدونکې پروېشوني ده د سره. $r \leq \sqrt{a}$

بېلګه 2.1.6: $a = 80$ ، ټول پروېشوني غوښتونوي دي. د له امله ټول $\sqrt{80} < 9$

زیاتیز يا مثبت پروېشوني b دي د $1 \leq b \leq \sqrt{80} < 9$ سره وټاکل شي:

$$1, 2, 4, 5, 8; 80, 40, 20, 16, 10. \quad (2.5)$$

له دې سره ټول پروېشوني دي:

$$\pm 40, \pm 80 \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 16, \pm 20,$$

پېژد (تعريف) 2.1.7: وي دې $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نو $c \in \mathbb{Z}$ د a, b ګډ پروېشونى بلل کيږي، که $c | a$ او $c | b$ وي.

ياودونه 2.1.8: که $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ وي، نو a د 2.1.4 پسي يا له مخي فقط پای ډېر پروېشوني لري. که $b \in \mathbb{Z}$ په خوښه وي، نو a او b فقط پای ډېر پروېشوني لري. د اکسيوم 3d له مخي $\mathbb{Z}$ توتالي (ټول يا بېخي) منظم دی، يعنې د a, b ګډ پروېشونى يو خورا لوي توکى دی. نو سړى کړى شي تعريف کړي:

پېژند يا تعريف 2.1.9: (خورا غټ ګډ پروېشونى يا بزرګترين مقسوم عليه Greatest Common Divisor (comon divisor) وي دې $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نه دواړه صفر، نو $\text{ggT}(a, b)$ (انګرېزي يې $\text{gcd}(a, b)$) د ټولو ګډ پروېشونو خورا لوى (يعنې تر ټولو لوي) دی. دا يواځنى ټاکلى دی. دى، که $\text{ggT}(a, b) = 1$ وي، نو a, b نسبي لومړني يا پريم بلل کيږي يا پروېش پردې (ګډ اصلي پروېشونى نه لري).

يادونه 2.1.10: که $a, b \in \mathbb{Z}$ دواړه صفر نه وي. نو کېدى شي سړى د $\text{ggT}(a, b)$ ټاکلو لپاره په زياتيزو يا مثبتو ګډو پروېشونو ځنونه محدود کړي، ځکه چې 1 يو ګډ پروېشونى دی، يعنې باور لري:

$$\text{ggT}(a, b) \geq 1$$

بېلګه 2.1.11: $a = 12, b = -8$

د زياتيز پروېشونو له دې لاس ته راځي $a : 1, 2, 3, 4, 6, 12; b : 1, 2, 4, 8$ ګډ مثبت پروېشوني دي:

$$1, 2, 4 \Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(12, -8) = 4$$

د اویکلید یا اقلیدس له مخې د ggT ټاکنه

جمله 2.2.1 : د اویکلید الګوریتم (Euklidische [2.1 Algorithmus](#)) وي دي

$a, b \in \mathbb{N}$ او بې له ټولیزو بندیزونو $b \leq a$. که $b \mid a$ وي، نو ږدو $r_0 = b$ ،
که $b \nmid a$ باور لري، ځکه چې که د وېش له لارې د پاتې سره $q_i, r_i \in \mathbb{Z}$ سری په
لاندې توګه ټاکي:

$$a = q_0 b + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$b = q_1 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$\vdots$

$$r_{m-1} = q_m r_m + r_{m+1}, \quad 0 \leq r_{m+1} < r_m$$

$\vdots$

نو کوچنی $n \in \mathbb{N}_0$ شتون لري د $r_{n+1} = 0, r_n \neq 0$ سره او $r_n = \text{ggT}(a, b)$ باور لري .

بڼوونه : که $b \mid a$ وي، نو باور لري

$$r_0 = b = \text{ggT}(a, b), r_1 = r_{0+1} = 0 \quad (2.6)$$

$$a = b \cdot q_0 + r_1 \quad \text{د لپاره.}$$

وي دي ، نو ، $b \nmid a$ ، $a = q_0 b + r_1, 0 \leq r_1 < b$ باور لري د $r_1 \neq 0$ سره. د جوړښت له مخې باور لري

$$r_1 > r_2 > \dots > r_i > r_{i+1} > \dots. \quad (2.7)$$

وي دي ، نو ، $M := \{r_i \mid r_i > 0\}$ ، دی، ځکه چې $r_1 \neq 0$ ، له دي سره $r_1 \in M$. د پوره نظم اصولو له مخې (Axiom 4) په M کې يو کوچنی توکی شتون لري: r_n . نو باور لري:

$$r_n > 0 \ (r_n \in M) \quad \text{und} \quad r_{n+1} = 0 \ (0 \leq r_{n+1} < r_n). \quad (2.8)$$

$$r_n = \text{ggT}(a, b) \quad \text{وښايي:}$$

• :اخرنی مساوات يا برابرون دی $r_n \mid a, b$

$r_{n-1} = q_n r_n (+ r_{n+1}),$	(2.9)
----------------------------------	-------

نو $r_n \mid r_{n-1}$. له اخر د مخه مساوات دي:

$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n,$	(2.10)
------------------------------------	--------

نو $r_n \mid r_{n-1}, r_{n-2}$

ګڼونپوهنه

- که په ورته توګه مخ ته لاړ شو، نو ترې لاس ته راځي
 $r_n \mid r_2, r_n \mid r_1, r_n \mid b$ او له دې امله

$$r_n \mid q_0 b + r_1 = a \Rightarrow r_n \mid a, b. \quad (2.11)$$

$$r_n = \text{ggT}(a, b)$$

t دې په خوښه یو د a, b مثبت پروېشونی وي. نو د لومړي مساوات څخه لرو:

$$r_1 = a - q_0 b \stackrel{2.1.3(6)}{\Rightarrow} t \mid r_1; \quad (2.12)$$

له 2 مساوات:

$$r_2 = b - r_1 q_1 \Rightarrow t \mid r_2, \quad (2.13)$$

او همداسې پسي، تر

$$t \mid r_{n-1}, t \mid r_n \stackrel{2.1.3(4)}{\Rightarrow} |t| \leq |r_n|. \quad (2.14)$$

t مثبت، $t \leq r_n \Rightarrow r_n$ مثبت له دې لاس ته راځي. $\text{ggT}(a, b)$ غټ ګډ پروېشونی دی.

یادونه 2.2.2: که د اعدادو یو (یا دواړه) $a, b \in \mathbb{Z}$ د صفر کوچني وي، نو د اوکلید الګوریتم دې په $|a|$ همداسې په $|b|$ باندې وکارول شي، ځکه چې

مور د a, b د مثبت پروېشونو پیداګډل غواړو (پام $\text{ggT}(a, b) \geq 1$).

بېلګه 2.2.3: $a = 97, b = -44$ ، نو باور لري: $|b| = 44 \leq 97 = a$ ، نو لاس ته راځي:

$$97 = 44 \cdot 2 + 9 \quad 0 \leq 9 < 44$$

$$44 = 9 \cdot 4 + 8 \quad 0 \leq 8 < 9$$

$$9 = 8 \cdot 1 + 1 \quad 0 \leq 1 < 8$$

$$8 = 1 \cdot 8 \quad \Rightarrow \text{ggT}(97, -44) = 1$$

بېژند يا تعريف 2.2.4: (ګرښيز کمپوزېشن يا - يوځای ايښوونه): وي دي $a, b \in \mathbb{Z}$

، نو يو $c \in \mathbb{Z}$ د a, b ګرښيز کمپوزېشن بلل کيږي، که $c = xa + yb$ وي د

ځانګړو $x, y \in \mathbb{Z}$ سره.

که $c, d \in \mathbb{Z}$ د a, b ګرښيز ښيز کمپوزېشنونه وي، په دي پسي $ac + \beta d$ ، $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

هم ګرښيز کمپوزېشن دی..

جمله 2.2.5: (اوکلید) که وي $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نه دواړه صفر، نو $\text{ggT}(a, b)$ د a, b :

$\text{ggT}(a, b) = xa + yb$ يو ګرښيز کمپوزېشن دی، د ټاکلو $x, y \in \mathbb{Z}$ لپاره.

ښوونه:

لومړی $b > 0$: نو $0 < b \leq a$ ، $a, b \in \mathbb{N}$ ، داسي چې د اوکلید الګوريتم 2.2.1 سره باور لري:

$\text{ggT}(a, b) = r_n, r_{n+1} = 0, r_0 = b \mid a.$	(2.15)
--	----------

دويم . له دې سره باور لري

$$r_{n-2} = q_{n-1}r_{n-1} + r_n, \dots, a = q_0b + r_1$$

$r_1 = a - q_0b,$ نو $\Rightarrow r_2 = b - q_1r_1,$ $\dots \Rightarrow \underbrace{r_n}_{\text{ggT}(a,b)} = r_{n-2} - q_{n-1}r_{n-1},$	د a, b د r_1 داپه دې معنا چې کمیوزیشن دی د a, b د r_2 داپه دې معنا چې کمیوزیشن دی د a, b د r_n داپه دې معنا چې کمیوزیشن دی
---	---

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) = xa + yb \quad .1$$

د ټاکلو یا معلومو $x, y \in \mathbb{Z}$ لپاره .

$$d = \text{ggT}(a, b) = a = 1 \cdot a + 0 \cdot b \quad : b = 0 \quad .2$$

$$-b > 0 \quad b < 0 \quad .3$$

دې او له ۱ . حالت به باور لري

$$\text{ggT}(a, b) = x \cdot a + y \cdot (-b)$$

(که غوښتونې وي a له $-b$ سره بدله کړی، که $a \leq -b$ باور ولري). که $r_0 = b$ وي، نو $b \mid a$ او $\text{ggT}(a, b) = 0 \cdot a + 1 \cdot b$. باور لري.

□

یادونه 2.2.6: ښوونه بېرته جوړځتیزه ده، دا یو متود راګوي د $x, y \in \mathbb{Z}$ ټاکلو

$$\text{ggT}(a, b) = xa + yb$$

لپاره په کې، داسې چې د اوکلید الګوریم څخه پاتې افاده کوو یا وایو له مخ ته تیرو د کرښیز کمپوزیشن لویو څخه او په لاندې راتلونکي مساوات کې یې ځایه ځایو کوو.

بېلګه 2.2.7: $a = 111, b = 39$ ، نو دی، $b = 39 \leq 111 = a$ ، داسې چې

د [2.2.1](#) سره باور لري:

$$111 = 2 \cdot 39 + 33 \quad 3 = 33 - 5 \cdot 6$$

$$39 = 1 \cdot 33 + 6 \quad = 33 - 5(39 - 33) = 6 \cdot 33 - 5 \cdot 39$$

$$33 = 5 \cdot 6 + 3 \quad = 6(111 - 2 \cdot 39) - 5 \cdot 39$$

$$6 = 2 \cdot 3. \quad = 6 \cdot 111 - 17 \cdot 39$$

بېلګه 2.2.8: د $\text{ggT}(a, b)$ د ټاکلو لپاره، که a او b د یوې اووښتونې یا متحولې په واک کې وي یا تابع وي.

غواړو پیدا کړو:

ګڼونپوهنه

$$d := \text{ggT}(2k - 1, 9k + 4) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

د $d \mid 2k - 1, d \mid 9k + 4$ له امله ، په ځانګړې توګه باور لري:

$$b \mid 9(2k - 1) + (-2)(9k + 1) = -17. \quad (2.16)$$

(x, y داسې ټاکل سوي دي، چې له هغې سره اووښتونې يا متحوله لرې کيږي، دا زیات وخت ممکن دی، ځکه چې $\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad d = xa + yb$ د d زیات وخت ممکن دی، ځکه چې d د $d = 17$ د کوم $k \in \mathbb{Z}$ لپاره $d = 1$ يا $d = 17$ دی؟

که $d = 17$ وي ، نو دا په دې معنا چې $17 \mid 2k - 1, 17 \mid 9k + 4$ ، یعنې $2k - 1 = 17 \cdot t$ د $t \in \mathbb{Z}$ یوه لپاره، له دې امله $k = \frac{1}{2}(17t + 1)$.

له دې امله باید t ناجوره يا طاق وي (پرتله له دې $k \in \mathbb{Z}$ دی)، یعنې $t = 2n - 1, n \in \mathbb{Z}$. له دې نمله :

$$k = \frac{1}{2}(17(2n - 1) + 1) = \frac{1}{2}(34n - 16) = 17n - 8. \quad (2.17)$$

برعکس يا په څټ: که د یوه $n \in \mathbb{Z}$ لپاره $k = 17n - 8$ وي، نو بلاور لري:

$$2k - 1 = 34n - 16 - 1 = 34n - 17 = 17(2n - 1)$$

دا په دې معنا چې $17 \mid 2k - 1$.

$$9k + 4 = 9 \cdot 17n + 4 - 72 = 17(9n - 4)$$

دا په دې معنا چې $17 \mid 9k + 4$.

له دې امله باور لري: $d = 17 \Leftrightarrow k = 17n - 8, n \in \mathbb{Z}$ په خوښه، $d = 1$ پرته له دې له [2.2.5](#) څخه لاس ته راوړنې.

کورولار يا جملکي 2.2.9: وي دې $a, b \in \mathbb{Z}$ ، نه دواړه صفر، نو باور لري:

$$d = \text{ggT}(a, b) \Rightarrow \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad .1$$

$$\text{ggT}(a, b) = |t| \quad \text{د} \quad \text{ggT}\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = 1 \quad \text{سره، نو دى} \quad t \mid a, t \mid b \quad .2$$

$$\text{ggT}(a \cdot m, b \cdot m) = |m| \cdot \text{ggT}(a, b) \quad \text{نو،} \quad m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \quad .3$$

ښوونه: ad 1:

[2.2.5](#) له مخې باور لري: $d = xa + yb$ د ټاکلو $x, y \in \mathbb{Z}$ لپاره، يعنې

$$1 = x \frac{a}{d} + y \frac{b}{d} \quad (d \neq 0) \quad \text{داسې چې باور لري،} \quad d \cdot 1 = d(x \frac{a}{d} + y \frac{b}{d})$$

وي دې $t \geq 1$ په خوښه د $t \mid \frac{a}{d}, t \mid \frac{b}{d}$ سره، نو د [2.1.3\(6\)](#) له مخې: $t \mid 1$ ،

دا په دې معنا چې $|t| \leq 1$ ، يعنې $t \leq 1$ ، له دې سره $t = 1$ نو

$$\text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

ad 2:

له [2.2.5](#) سره د معلومو $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ لپاره

راکوي $1 = \alpha \frac{a}{t} + \beta \frac{b}{t}$ ، يعنې $t = \alpha a + \beta b$. د وړاندنيونو(فرضيو) وروسته $t \mid$

د a, b يو ګډ پروبشونى دى. وي دې $s \geq 1, s \mid a, s \mid b$ په خوښه، نو د [2.1.3](#) له

مخې $s \mid t$ بارورلري، داسې چې $|s| \leq |t|$ دى، دا په دې معنا چې $s \leq |t|$.

يعنې $\text{ggT}(a, b) = |t|$ دى.

ad 3:

$$\begin{aligned}
 & d = \text{ggT}(a, b) \quad \text{د 1 له مخې د} \\
 & \text{لپاره باور لري، چې} \quad \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad \text{د} \\
 & d \mid a, b \quad \text{له امله د} \quad \text{2.1.3 پسي لاس ته راځي} \quad md \mid ma, mb \\
 & \text{له دې سره لاس ته} \quad \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \text{ggT}\left(\frac{ma}{md}, \frac{mb}{md}\right) = 1 \\
 & \text{د 2 پسي لاس ته راځي} \\
 & |md| = \text{ggT}(ma, mb)
 \end{aligned}$$

دایه دې معنا چې . $|m| \cdot d = |m| \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(ma, mb)$.

$$\begin{aligned}
 & \text{یادونه 2.2.10 :} \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad \text{وي (ریښتوني یا راشنل)، نو د} \\
 & \text{تولو} \quad d = \text{ggT}(a, b) : \quad \text{لپاره} \quad \frac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{b} \\
 & \text{باور لري. د} \quad \text{2.2.9 (1) له مخې باور لري:} \\
 & \text{د} \quad \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \quad \text{دا په دې معنا چې} \quad \frac{1}{b} \quad \text{کېدی شي په} \quad \frac{c}{d} \quad \text{بڼه د} \\
 & \text{سر ه ولیکل شي} \quad (\text{حتی یواځنی ټاکلي دي}). \quad \text{ggT}(c, d) = 1
 \end{aligned}$$

Korollar (جمله، چې د بنوول شوي جملې څخه لاس ته راځي کورولار بلل کیږي)
2.2.11:

$$\begin{aligned}
 & \text{وي دې} \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{نه دواړه صفر، نو باور لري:} \quad d \in \mathbb{N} \quad \text{ګڼ یا عدد ټیک هلته خرا} \\
 & \text{غټ پروېشونی (لنډ: خ غ پ ggT = gcm)} \quad \text{دې، که} \quad \text{ggT}(a, b) \\
 & (1) \quad d \mid a, d \mid b
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad c \mid a, c \mid b \quad (c \in \mathbb{Z}) \quad \text{په خوښه} \quad c \in \mathbb{Z} \quad \text{له دې لاس ته راځي} \quad c \mid d.$$

ښوونه:

 $(\Rightarrow)$

دی $d = \text{ggT}(a, b)$ ، نو باور $d \mid a, d \mid b$ لري، دا په دې معنا چې (1) باور لري،
 وي دې c د a, b په خوښه پروېشونې، نو له $d = xa + yb$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) لاس ته
 راځي (جمله 2.2.5 دې وکتل شي)، چې $c \mid d$ دی (2.1.3) ، دا په دې معنا چې (2)
 باور لري.

 $(\Leftarrow)$

د (1) له مخې d د a, b ګډ پروېشونې دی. وي دې $c \in \mathbb{Z}, c \geq 1$ په خوښه د
 پروېشونې، نو د (2) له مخې لاس ته راځي $c \mid d$ ، دا په دې معنا چې د 2.1.3
 پسې $|c| \leq |d|$ دی ، له دې سره $c \leq d$. يعنې d د a, b خورا غټ ګډ
 پروېشونې (بزرګترین مقسوم علیه مشترک؟) دی

□

جمله 2.2.12 : (بنسټيزه lemma) مرستندوی جمله چې د ښوونې يا ثبوت په جريان
 کې په کار راځي)) وي دې $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, \text{ggT}(a, b) = 1$ ، نو د $a \mid b \cdot c$
 له مخې لاس ته راځي، چې $a \mid c$ دی.

ښوونه : له $\text{ggT}(a, b) = 1$ لاس ته راځي

$1 = xa + yb$	(2.18)
---------------	--------

ګڼونپوهنه

د څه يا ټاکلو $x, y \in \mathbb{Z}$ لپاره. له دې امله لاس ته راځي

$$c = xca + ybc. \quad (2.19)$$

دا چې د وړاندنيوني $a \mid bc, a \mid a$ څخه باور لري $\stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} a \mid c.$ □

دېني يادون: اوکلید د 200-365 ز ک څخه له مخه.

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

خورا غټ ګډ پروېشوني $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

پېژند يا تعريف :

لومړی : $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ دې وي، نو $b \in \mathbb{Z}$ د $a_1, \dots, a_n$ ګډ پروېشوني بلل کيږي، که $b \mid a_i, i = 1, \dots, n$ باور دلري.

دويم : د ټول خورا غټ ګډ پروېشوني (نسبت $\leq$ ته) د $\text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ سره په نڅېنه کيږي. که ټول $a_i = 0$ صفر نه وي، نو $a_i \neq 0$ هر يو فقط پای ډېر پروېشوني لري، يعنې هم پای ډېر ګډ پروېشوني. د دوي تر منځ يو خورا غټ شتون لري.

درېم : که $\text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = 1$ وي، نو $a_1, \dots, a_n$ نسبي لومړني (وروسته به دا پروېش پردي وبلل شي) بلل کيږي.

څلورم : $a_1, \dots, a_n$ جوړه (حفت) نسبي لومړني ګڼونه يا عددونه بلل کيږي، که $\text{ggT}(a_i, a_j) = 1$ وي د ټولو $\forall i \neq j$ لپاره.

يادونه 2.3.2 : له جوړه نسبي لومړنيو څخه لومړني لاس ته راځي. برعکسونه يا په

څټ کېدنه يې باور نه لري:

$$\text{ggT}(1, 2, 4) = 1, \text{ggT}(2, 4) = 2$$

دا په دې معنا چې $(1, 2, 4)$ نسبي لومړني مګر نه جوړه لومړني ګڼونه دي.

جمله 2.3.3: وي دې $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ، نه ټول صفر او $d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ نو باور لري:

$d = \sum_{i=1}^n x_i a_i$	(2.20)
----------------------------	--------

د څه يا ځنو $x_i, i = 1, \dots, n$ لپاره.

ښوونه: وي دې

$M := \{c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \in \mathbb{Z} \mid c_i \in \mathbb{Z} \ i = 1, \dots, n\},$	(2.21)
--	--------

نو $a_i \in M, i = 1, \dots, n$ ($c_i = 1, c_j = 0$) باور لري د $i \neq j$ او $M \neq \emptyset$

لپاره. د $a_i \in M$ له امله هم $-a_i \in M$ باور لري، که $a_i \notin \mathbb{N}$ وي،

نو $-a_i \in \mathbb{N}$ باور لري، دا په دې معنا چې هم M طبيعي يا پېداېښتي ګڼونه يا عددونه لري. د $\mathbb{N}$ د ټولنظم له مخې په M کې د ټولو طبيعي اعدادو ډېری يا ست يو خوا کوچنی توکی d^* لري، دا په دې معنا چې

$d^* = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$	(2.22)
-----------------------------------	--------

د ځنو $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ لپاره. وښايی: $d^* = d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$

د پاتې سره د a_i وېشنه په d^* له لارې راکوي:

$$a_i = q_i d^* + r_i, 0 \leq r_i < d^*; \quad (2.23)$$

نو $r_i = a_i - q_i d^*$ او $r_i \in M$ د $a_1, \dots, a_n$ کرښیز کمینیشن دی،
همداسې a_i ، په تعقیب کمښت یا تفریق هم. له دې سره له
څخه لرو. یعنې:

$$a_i = q_i d^* \text{ und } d^* \mid a_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

وي دې $a_1, \dots, a_n, t$ د $t \geq 1$ یو په خوښه ګډپروېشونی، نو t هر کرښیز
کمینیشن وېشي یعنې دا لاندې هم

$$t \mid x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = d^*; \quad (2.25)$$

$$d^* = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = d.$$

له دې سره د [2.2.11](#) پسې لرو، چې

□

د $d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ د ټاکلو لپاره تلنلار:

د $n = 2$ لپاره: د اویکلید الګوریتم، جمله [2.2.1](#).

د $d \geq 1$ له امله کېدی شي سړی ټول ونیسي (فرض کړي) پرته له دې

مطلق ارزښت، a_i ، چې صفر دي، (لري) پریږدي. سړی اوس د $a_1, \dots, a_n$ لاندې

هغه خورا کوچنی لتوي، دا دې بې له توليزو بنديزونو a_1 وي (کېدی شي نمره بدل شي). د پاتې سره د $a_2, \dots, a_n$ وېش د a_1 له لارې راکوي:

$$a_i = q_i a_1 + r_i, 0 \leq r_i < a_1 \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.26)$$

$$d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = d' = \text{ggT}(a_1, r_2, \dots, r_n) \quad \text{وېنایی:}$$

وي دې

$$d := \text{ggT}(a_1, \dots, a_n), d' := \text{ggT}(a_1, r_2, \dots, r_n); \quad (2.27)$$

نو باور لري $d \mid a_1, \dots, a_n$ ، يعنې، $d \mid a_1$ ، او له $r_i = a_i - q_i a_1$ لاس ته راځي $d \mid r_i \quad (i = 2, \dots, n)$ ، دا په دې معنا چې d د $a_1, r_2, \dots, r_n$ يو ګډ پروېشونی دی. d' خورا لويه ده له دې لاس ته راځي $\Rightarrow d \leq d'$

برعکس يا په څټ باور لري: d' وېشي،، يعنې داسې $a_1, d' \mid r_i \quad (i = 2, \dots, n)$

لاس ته راځي $a_i = q_i a_1 + r_i : d' \mid a_i \quad (i = 2, \dots, n)$ (د ليما يا جملګۍ

[2.1.3](#) پسې)، يعنې d' د $a_1, \dots, a_n$ ګډپروېشونی دی. d خورا لوی دی له دې

$$\Rightarrow d' \leq d \stackrel{3b}{\Rightarrow} d = d'. \quad \text{لاس ته راځي}$$

يادونه : په پام کې دې وي: د دې تلنلار سره ګڼونه يا غددونه تل کوچني کيږي)

($0 \leq r_i < a_1$) او د امکان په حالت کې حتی کميږي (کېدی شي $r_i = 0$ وي).

بېلګه 2.3.5 : $d = \text{ggT}(721, 613, 114)$.

ګڼونپوهنه

$\alpha_1 = 114$ ، وېش له پاتې سره :

$$721 = 6 \cdot 114 + 37, 0 \leq 37 < 114$$

$$613 = 5 \cdot 114 + 43, 0 \leq 43 < 114$$

$$d = \text{ggT}(114, 37, 43)$$

له دې سره:

$$\tilde{\alpha}_1 = 37$$

، وېش له پاتې سره:

$$114 = 4 \cdot 37 + 3, 0 \leq 3 < 37$$

$$43 = 1 \cdot 37 + 6, 0 \leq 6 < 37$$

$$d = \text{ggT}(37, 3, 6)$$

له دې سره:

$$\tilde{\tilde{\alpha}}_1 = 3$$

، وېش له پاتې سره:

$$37 = 12 \cdot 3 + 1, \dots \Rightarrow d = 1$$

۳ - لومړني ګڼونه (اعداد) Primzahlen

لومړني ګڼونه $\mathbb{P}$

Die Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ بنسټونه *Grundlagen*

پېژند(تعريف) 3.1.1 : يو طبيعي ګڼ يا عدد p لومړنی بلل کيږي، که هغه فقط ساده پروېشوني ولري، دا په دې معنا، چې فقط $\pm 1, \pm p$ پروېشوني دي. د ټول لومړنيو اعدادو ډېری $\mathbb{P}$ سره په نڅېنه کوو. جمله : (اویکلید) ناپای ډېر لومړني ګڼونه شته.

بنوونه: نيسو، چې $p_1, \dots, p_n$ ټول لومړني اعداد دي چې شتون لري. جوړوو

$$N := p_1 \cdots p_n + 1. \quad (3.1)$$

ترڅېړني نيسو

$$M := \{q \in \mathbb{N} \mid q > 1 \text{ او } q \mid N\}, \quad (3.2)$$

نو $M \neq \emptyset$ دی، ځکه چې $N \in M$ (په ساده توګه $N \mid N, N > 1$). د ټول نظم اصولو سره يو خورا کوچنی توکی q شتون لري، دا په دې معنا، چې $q > 1$ او $q \mid N$. وښايي: يو لومړنی عدد دی:

وي دې $t \mid q, t > 1$ سره، نو د 2.1.3 پسي لاس ته راځي، چې $t \mid N \Rightarrow t \in M$ له $q, t \leq q$ د $M \Rightarrow t = q$ خورا کوچنی توکی دی. يعنې q لومړنی ګڼ دی، له نيوني څخه لاس ته راځي: $\exists j : q = p_j$. له دې سره $q \mid N (q \in M)$ باولري او په ساده توګه :

ګڼونپوهنه

$$p_j \mid p_1 \cdots p_n \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} p_j \mid N - p_1 \cdots p_n = 1 \Rightarrow p_j \leq 1, (3.3)$$

- تضاد $\square$

د ټول لومړنيو اعدادو ټاکل، چې $\leq n$ دي ($n \in \mathbb{N}$ ورکړ شوی): د اراتوستنس [3.1](#) Eratosthenes غلبېل:

ټوله 1 تر n پورې ټول ګڼونه وليکه، که ټول لومړني اعداد $\leq \sqrt{n}$ پېژندل شوي وي، نو سړی دې د ټولو دې لومړنيو ګڼونو په ډېرواره کرښه راکاږي (تر پخپله لومړني $\leq \sqrt{n}$ عدد پورې)، اوس فقط لومړني ګڼونه پاتې دي.

بېلګه 3.1.3: ټول له ≤ 50 لومړني عددونه وټاکي. د $\sqrt{50} < 8$ او 2, 3, 5, 7 له امله ټول لومړني عددونه ≤ 8 لاس ته راځي (≤ 50 جوړه اعداد کېدی شي تر 2 پورې لري شي):

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, 27, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~,

37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~

ټول اعداد چې کرښه په راکښل شوي نه ده لومړني اعداد دي او ≤ 50 دي.

یادوني 3.1.4:

لومړی: د دې لپاره چې ایا یو عدد پریم دی، که نه، یوه اغیزمنه – یا اقتصادي تلنلار نه شته (لږ تر لږه تر اوسه، وګورئ [Gut02b, Rie94])، کارونه یا استعمالیې په کریپتولوژي Kryptologie کې کيږي.

دویم: د لومړنیو ګڼونو جمله:

که $\pi(x)$ د لومړنیو ګڼونو ګڼون یا تعداد وي، نو باور لري

$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$	(3.4)
-------------------------------	-------

دریم: د لویې $x \in \mathbb{N}$ لپاره

نږدې:

$$\pi(100) \sim 178; \pi(1000) \sim 1247; \pi(10000) \sim 9360$$

څلورم: لومړني اعداد په طبیعي اعدادو کټ ډېر نامنظم خواره دي، له یوې خوا یو په بل پسې لومړني ګڼونه شتون لري، چې د هغو کمښت 2 دی، داسې په نامه د لومړنیو اعدادو غبرګوني: (اټکل کيږي، چې ناپای ډېر د لومړنیو اعدادو غبرګوني شتون لري، د دې لپاره [Gut02a], [HL22] وګورئ).

له بلې خوا د دوه لومړنیو اعدادو ترمنځ په خوښه لویې تشیاوې شتون لري. وي دې

$$(n+1)! + 2, \dots, (n+1)! + (n+1) \quad n \in \mathbb{N}$$

، نو ګڼونه

همدا اوس n یو په بل پسې اعداد دي، چې لومړني اعداد نه دي، ځکه چې:

که $g = (n+1)! + k$ د $2 \leq k \leq n+1$ سره وي، نو باور لري

له دې لاس ته راځي $k \mid g$ $\stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} k \mid (n+1)!$ ، کوم ته چې

ګڼونپوهنه

او $k \neq 1 \ (2 \leq k)$ $k \neq g \ (g = (n+1)! + k > k)$ (د اعدادو پرلپسې).

کېدی شي لا له پخوا رامنځ ته شي، لکه د $n = 4$ لپاره $24 - 27$ دی دا همدا

اوس یوه تشیا ده، لکه چې غوښتل مو چېرته چې $27 \ll (4+1)! + 2$ دی).

پنځم: د دیرینیلیت^{3.2} Dirichlet جمله: که $a, b \in \mathbb{N}$ وي د $\text{ggT}(a, b) = 1$ سره، نو ډېری دا لاندې خوندي لري

$$\{ak + b \mid k = 1, 2, \dots\} \quad (3.5)$$

ناپای ډېر لومړني اعداد. (د اریتمیتیکی پروګرشن لپاره د لومړنیو اعدادو جمله، ټولیزه بنوونه ډېره پېچلې ده!)

د $\{4k + 1 \mid k = 1, 2, \dots\}$ لپاره، همداسې $\{4k + 3 \mid k = 1, 2, \dots\}$ لپاره لږ څه وروسته بڼایو (جمله ^{9.2.8} همداسې جمله ^{3.1.10} وګورئ).

شپږم: د $2^{2^n} + 1 \ (n \in \mathbb{N})$ بنې عدد د فرمات عدد ^{3.3} Fermat'sche Zahl بلل

کیري، د $n = 0, 1, 2, 3, 4$ لپاره په رېښتوني لومړني اعداد دي:

3, 5, 17, 257, 65.537

له دې پسې چا نور د فرمات اعداد پیدا نه کړل. تر اوسه معلومه نه ده، چې ایا پای او که ناپای ډېر فرمات ګڼونه شتون لري. د فرمات کوچنی عدد، چې تراوسه یط څوک

ترتیبولی نه شي F_{33} دی.

اوم : يو د $2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) ټولې عدد د مرزن عدد [3.4](#) *Mersenne'sche Zahl* بلل کيږي. د دې ټول عدد لومړني اعداد نه دي. دلته هم روښانه نه ده، چې ايا پای ډېر مرزن ګڼونه شتون لري. دا تراوسه خورا ستر لومړنی عدد مرزن عدد دی، داسې

$$p = 2^{13466917} - 1$$

ناميز .

اتم: د ګولډباڼ ګومان : هر جوړه عدد له څلور سره برابر يا ترې لوی وي د دوه لومړنيو اعدادو د زياتون يا جمعې په څېر انځوروي دی. (د بېلګې په توګه $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, \dots$). د عدد 1742 په هکله ګومان کېدی شي نه تراوسه وښوول شي او نه رد شي.

جمله 3.1.5: که $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ وي او p يو لومړنی عدد د $p \mid a_1 \cdots a_n$ سره وي، نو لږ تر لږه p د ضريبون يا څلورنو $a_i, 1 \leq i \leq n$ څخه يو وېشي.

ښوونه: د n پسې ايندکشن:

: $n = 1$ ساده دی.

: $n \rightarrow n + 1$

وي دې $p \mid a_1 \cdots a_n a_{n+1}$ ، باور لري $p \mid a_{n+1}$ ، نو وښوول شو. پرته له دې: $\text{ggT}(p, a_{n+1}) = 1$ نو $p \nmid a_{n+1}$ دی، داسې چې د بنسټيزې جملهګۍ [2.2.12](#)

څخه لاس ته راځي، چې $p \mid a_1 \cdots a_n$. د ايندکشن د نيونې يا فرضيې څخه لاس ته

راځي $p \mid a_i$ د $1 \leq i \leq n$. لپاره.

□

ګڼونپوهنه

لاس ته راورنه 3.1.6 : د $n = 2$ لپاره باور لري: د $a_1 \cdot a_2$ یو پروپشنی دی،
 $p \mid a_1 \vee p \mid a_2 \vee p \mid a_1, a_2$ لومړنی ګڼ له دی لاس ته راځي . په څتوالی یا
 معکوسوالی هم باور لري: که g یو طبیعي عدد وی د،
 $g \mid a_1 \cdot a_2 \ (a_1, a_2 \in \mathbb{Z})$ سره، نو تل دواړه $g \mid a_1 \vee g \mid a_2$ لاس ته راځي،
 ، نو g بیا یو لومړنی ګڼ دی.

ښوونه: نیسو، چې g لومړنی عدد نه دی، نو g بیا اصلي پروپشنی لري، دا په دې
 معنا چې ، چېرته چې $g = a \cdot b$ ، $1 < a < g, 1 < b < g$ دي . نو باور لري:
 $g \mid a \cdot b$ ، یعنې د نیونی له مخې ، $g \mid a \vee g \mid b$. که $g \mid a$ وي، نو
 د $a \mid g \ (g = a \cdot b)$ سره لاس ته راځي، چې $g = \pm a$ - تضاد.
 که $g \mid b$ وي، نو په ورته توګه لاس ته راځي $g = \pm b \Rightarrow g$ ، چې باید لومړنی
 وي.

□

نور خوښونه Weitere Eigenschaften

جمله 3.1.7 : (لومړني ضریب توتنه ونه یا په لورنیو ضریبونو توتنه کونه) هر طبیعي
 عدد $n > 1$ کېدی شي په یواځني ډول د لومړنیو عددونو د ضرب په څېر ولیکل شي)
 دا په دې معنا ، چې لومړني ګڼونه د $\mathbb{N}$ ضریبي جوړښت خبتي دي).
 ښوونه:
 شتونوالی:

په n پسې د (توليز شوي) ايندکشن Induktion له لارې:

$$: n = 2$$

ساده

$$: n - 1 \rightarrow n :$$

بنايو: جمله د $2, 3, \dots, n - 1$ لپاره ټيک ده.

نسیده، نيسو چې $\exists k : 2 \leq k \leq n - 1$ ، کوم چې د لومړنيو ګڼونو يا عددونو ضرب نه دی. وي دې k_0 د دوی ترمنځ خورا کوچنی عدد. نو k_0 لومړنی عدد نه دی. يعنې که باور ولري $k_0 = a \cdot b$ ، چېرته چې $a < b < k_0$ ، له دې سره لاس ته راځي: a او b هر يو د لومړنيو ګڼونو ضرب دی، له دې امله k_0 هم د لومړنيو ګڼونو ضرب دی – تضاد!

وښايي: n د لومړنيو عددونو ضرب نه دی.

که n لومړنی عدد وي، نو موږ کار تمام کړ.

که n لومړنی عدد نه وي، نو $n = cd$ باور لري د $1 < c, d < n$ سره. د پورته پام کوني څخه جمله د c, d لپاره ټيک ده، دا په دې معنا چې c, d هر يو د لومړنيو عددونو ضرب دی، يهني هم $n = c \cdot d$.

يواخېوالی يا يواځنوالی:

وي دې $n > 1$ او

$$n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s \quad (3.6)$$

د کومو سره چې $p_i, q_j \in \mathbb{P}, r \leq s$ د $p_1 \mid p_1 \cdots p_r$ له امله لاس ته راځي $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$ ، د [3.1.5](#) پسې لرو $p_1 \mid q_i$ (لومړنی عدد) د لږ تر لږه یوې i لپاره د $1 \leq i \leq s$ سره، له دې امله $p_1 = \pm 1$ یا $p_1 = \pm q_i$ (لومړنی عدد)، یعنې $p_1 = q_i$ (لومړنی عدد دی، یعنې > 1). د نمره بدلون سره کېدی سړی لاس ته راوړي: $p_1 = q_1$ ($q_i \rightarrow q_1$) له دې سره لاس ته راځي.

$$p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s \Leftrightarrow p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s; \quad (3.7)$$

په ورته توګه مخ ته ځو، تر $p_r = q_r, 1 = q_{r+1} \cdots q_s$ پورې.

که $s > r$ وی نو باور لري چې q_{r+1} بنی خوا وېشي: $q_{r+1} \mid 1$ ، یعنې $q_{r+1} \leq 1$ ، و q_{r+1} ته تضاد چې لومړنی عدد دی له دې لاس ته راځي $s = r \Rightarrow$ او له دې سره $p_i = q_i, 1 \leq i \leq r$.

یادونه 3.1.8: که $g \in \mathbb{Z}$ وي د $g < -1$ سره، نو $-g > 1$ دی او د [3.1.7](#)

پسې $-g = p_1 \cdots p_r$ د ځنو، یواځنیو، لومړنیو ضربونو لپاره، یعنې $g = -p_1 \cdots p_r$.

یادونه 3.1.9: که د $n > 1$ د لومړنیو ضربونو ټوټه کونه سره یوځای کړو

$$n = p_1 \cdots p_r \quad (3.8)$$

مساوي عددونه سره یوځای کړو، نو د لومړنیو عددونو توان لاس ته راځي، یعنې

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \alpha_i \in \mathbb{N}.$	(3.9)
--	---------

که دا دلته نه شتون لرونکو لومړنیو عددونه p د $p^0 := 1$ له لارې پوره کړو، نو سړی لیکلی شي:

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p} \quad (3.10)$$

(د ټول لومړنیو عددونو ضرب، فقي پای ډېر $\alpha_p \neq 0$)! له دې سره

هم لیکلی شو. یعنې د په ټولیزه توګه د ټول $g \in \mathbb{Z}, g \neq 0$ لپاره باور لري:

$$g = \pm \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p} \quad (\alpha_p \in \mathbb{N}_0). \quad (3.11)$$

جمله 3.1.10 (دیرینلایت) د $4k + 3$ ($k = 0, 1, \dots$) بڼې ناپای ډېر لومړني ګڼونه شتون لری، دا به دې معنا، چې د $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$ عدونو په ډېری کې ناپای ډېر لومړني عددونه شتون لری..

بنسونه: نیسو چې په دې ډول ډېر لومړني عددونه شتون لري، چې د $p_1, \dots, p_s$ سره یې سړی په نخښه کولی شي. سړی جوړوي

$$N := p_1^2 \cdots p_s^2 + 2; \quad (3.12)$$

کنونپوهنه

د نیوني یا فرضیې له مخې د ځنو $k_i \in \mathbb{N}_0 \ (i = 1, \dots, s)$ لپاره
 $p_i = 4k_i + 3$ باور لري، یعنې

$p_i^2 = (4k_i + 3)^2 = 16k_i^2 + 24k_i + 9 = 4k + 1$	(3.13)
---	--------

د یوه k لپاره. له دې امله $m \in \mathbb{N}$ د یوه $(4k + 3)(4l + 3) = 4m + 1$ لپاره.
 له دې امله $N := p_1^2 \cdots p_s^2 + 2$ بڼه $(4n + 1) + 2 = 4n + 3$ لري.

وې دې $N \in \mathbb{N} \ (N > 1)$ د $N = q_1 \cdots q_r$ په لومړنیو ګڼونو توپه ونه. نه
 ټول q_i د بڼې $4k + 1$ دي (ځکه چې بیا به N هم له دې بڼې وی). له دې امله q_j ،
 $1 \leq j \leq r$ یو شتون لري د بڼې $q_j = 4k + 3$ سره (د پاتې سره وېشنه راکوي):
 $q_j = 4 \cdot k + a$ $0 \leq a < 4$ ، یعنې .

مګر $4k + 0$ او $4k + 2$ لومړني عددونه نه دي. که همدا اوس ترې $4k + 1$
 دباندې دی. 2 د ضریب په حیث نه رامنځ ته کېږي، ځکه چې $N = 4k + 3$ ناجوړه دی).

لاس ته راځي: $q_j = p_i$ د یوه $i \ (1 \leq i \leq s)$ لپاره چېرته چې لرو $q_i \mid N$ او

$$q_j = p_i \mid p_1^2 \cdots p_s^2 \Rightarrow q_j \mid N - p_1^2 \cdots p_i^2 \cdots p_s^2 = 2, \quad (3.14)$$

یعنې $q_j \leq 2$ - تضاد ($q_i = 4k + 3 \geq 3$).)



د ggT او kgV ترمنځ اړیکې (د x او y کک زیاتځلي - -

جمله 3.2.1 : وي دی ، $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}$ ، $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ ، نو باور لري

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}. \quad (3.15)$$

ښوونه: ښایو: وی دی ، $x = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p}$ ، $y = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sigma_p}$ ، نو باور لري:

$$x \mid y \Leftrightarrow \rho_p \leq \sigma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$$

($\Rightarrow$) یا له ندي لاس ته راځي

$$x \mid y \Rightarrow y = x \cdot z ,$$

د $z = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p}$ سره په لومړنيو ضربونو توته کوني په حیث، یعنی

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p + \tau_p} = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p} \right) \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p} \right) = xz = y = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sigma_p}. \quad (3.16)$$

په لومړنيو ضربونو توته کوني د یواځيوالي په بنسټ لاس ته راځي عددونو په

$$\rho_p + \tau_p = \sigma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}; \quad (3.17)$$

ګڼونپوهنه

د [1.1.4](#) پسي لاس ته راځي $\rho_p \leq \sigma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$.

($\Leftarrow$)

د [1.1.4](#) پسي باور لري: $\rho_p \leq \sigma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$

$$\sigma_p = \rho_p + \tau_p \quad \tau_p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall p \in \mathbb{P}. \quad (3.18)$$

وي دې $z := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p}$ ، نو لاس ته راځي:

$$xz = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p} \right) \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\tau_p} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\rho_p + \tau_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sigma_p} = y, \quad (3.19)$$

يعنې $xz = y \Rightarrow x \mid y$.

وي دې $d := \text{ggT}(a, b)$ او $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\gamma_p}$ ، د $d \mid a, b$ له امله باور لري $\gamma_p \leq \min(\alpha_p, \beta_p)$. له دې سره $\gamma_p \leq \alpha_p, \beta_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$. برعکس له

$$\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \gamma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}, \quad (3.20)$$

څخه لاس ته راځي، چې عدد $c := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}$ عددونه a, b ويشي، د

جملې [2.2.5](#) او جملگي يا کورولار [2.2.11](#) څخه $c \mid d$ لاس ته راځي، دا په دې معن،

چې $\min(\alpha_p, \beta_p) \leq \gamma_p \quad \forall p \in \mathbb{P}$
 . يعنې د اکسيوم [3b](#) سره لاس ته راځي

$$\gamma_p = \min(\alpha_p, \beta_p) \quad \forall p \in \mathbb{P}$$

له دې سره د لومړنيو ضربيونو يواځيوالي سره لاس ته راځي، چې $c = d$ ، دا په دې معنا، چې

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}. \quad (3.21)$$

بېلګه 3.2.2: وي دې
 $a = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2, b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3$
 ، نو د ناشتونو
 لومړنيو ګڼونو د پوره کېدنې له امله د 0 اکسپننټ له لارې باور لري:

$$a = 2^2 3^4 5^2 7^0, b = 2^3 3^2 5^0 7^3$$

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} = 2^2 3^2 5^0 7^0 = 2^2 3^2. \quad (3.22)$$

کورولار يا جملې 3.2.3:

لومړی:

وي دې
 $a_i \in \mathbb{N}, \text{ sei } a_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i,p}}, \quad i = 1, \dots, n$
 د لومړنيو ضربيونو ټوټه
 کونه، نو باور لري

$$\text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})}. \quad (3.23)$$

دويم : وي دې ، نو باور لري

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}, b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}$$

$$\text{ggT}(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \min(\alpha_p, \beta_p) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}. \quad (3.24)$$

تعريف 3.2.4 : وي دې، نو $a, b \mid v \in \mathbb{Z}$ ګډ ډېرځله (مضرب مشترک) بلل کيږي،
که $a \mid v$ او $b \mid v$ وي (دایه دې معناچې) $v = xa = yb$ د ځنو $x, y \in \mathbb{Z}$ سره).

يادونه 3.2.5 : $a \cdot b$ او $|a| \cdot |b|$ هر يو د a, b ګډ ډېرځله دي، دا په دې معنا، چې هم کميز او هم زياتيز يعنې منفي او مثبت ګډ ډېرواره يا ګډ ډېرځله شتون لري.

که د a, b د ټول مثبتو ګډ ډېرځلو ډېری په پام کې ونيسو، نو دا ډېری د پورته يادونو په بنسټ هم تشه نه ده، دا د اکسيم 4 په بنسټ هم دا ډېری کوچنی توکی لري. نو کړی شو تعريف کړو:

پېژند(تعيف) 3.2.6 : وي دې $a, b \in \mathbb{Z}$ ، دواړه د صفر سره نابرابر، نو د a, b د ټولو مثبتو خورا کوچنيو ګډ زياتځلو د $\text{kgV}(a, b)$ سره په نځېنه کوو.

$$\text{kgV}(a, b) := 0$$

که له دې ګڼونو يو صفر وي، يا دواړه، نو تعريفوو .

يادونه 3.2.7 : شرايط (مثبت) مهم دي، ځکه چې پرته له دې بايد نه دی، چې خورا کوچنی ګډ زياتځله شتون ولري. وي دې $a = 2, b = 3$ ، نو ټول $v = -6, -12, -18, \dots$ د a, b ګډ پروېشوني دي.

جمله 3.2.8 : $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ ، $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}$ دې ورکړ شوي وي، نو باور لري

$$\text{kgV}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}. \quad (3.25)$$

ښوونه: وي دي $v = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$ ، نو ، $v > 0$ دی. له

$\alpha_p, \beta_p \leq \max(\alpha_p, \beta_p)$	(3.26)
--	--------

امله د جملې [3.2.1](#) ښوونه پسې باور لري، چې

$a \mid v, b \mid v.$	(3.27)
-----------------------	--------

که $c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\gamma_p}$ د a, b يو گډ زیاتځله وي (c په خوښه، زیاتیز)، نو له $a \mid c$ ،
 $\alpha_p \leq \gamma_p, \beta_p \leq \gamma_p \mid c$ او $\max(\alpha_p, \beta_p) \leq \gamma_p \forall p \in \mathbb{P}$ لاس ته راځي.
 یعنې باور لري: ، دا په دي معنا، چې $v \leq c$ ($c > 0, v > 0$) د لیمې (5) [2.1.3](#)
 له لارې دي. نو له دي سره v د a, b خورا کوچنی گډ زیاتځله دی، یعنې

$$\text{kgV}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

بېلگه 3.2.9 : وي دي $a = 2^3 3^2 5$ ، $b = 2^2 3^3 7$ نو

$$a = 2^3 3^2 5^{17^0}, b = 2^2 3^3 5^{07^1}$$

$$\Rightarrow \text{kgV}(a, b) = 2^3 3^3 5^1 7^1 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

کورولار (جمله گۍ) 3.2.10: وي دې $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $v \leq 0$ ، نو $\text{kgV}(a, b)$ ټيک هلته دی، که وي

$$a \mid v, b \mid v \quad .1$$

$$a \mid c, b \mid c \Rightarrow v \mid c \quad .2$$

د $a_1, \dots, a_n$ لپاره په ټوليزه توگه:

تعريف 3.2.11: وي دې $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ، نو $v \in \mathbb{Z}$ د $a_1, \dots, a_n$ يو گډ

زياتځله بلل کيږي، که $a_i \mid v, i = 1, \dots, n$.

وي دې $a_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ ، نو دا د ټول مثبتو خورا کوچنيو گډزياتځله د

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n)$$

سره په نخښه کوو (شتون و حالت $n = 2$ ته ورته مدلل وړ دی)

که لږ تر لږه يو $a_i = 0$ وي، نو سړی تعريفوي $\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) := 0$.

يادونه 3.2.12: د $\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = \text{kgV}(|a_1|, \dots, |a_n|)$ له امله کېدی

شي دا حالت په باندې $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ محدود شي.

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i,p}}$$

کورولار (حمله گۍ) 3.2.13: وي دې په لږمړنی

ضريب ټوټه کونه، نو باور لري ($a_i \neq 0 \forall i$):

$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})}.$	(3.28)
---	--------

د kgV او ggT (خ غ پ او خوک ز) د اړیکې به هکله بالاخره لاندې جمله معلومات راکوي:

جمله 3.2.14: وي دې $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ او په نخښه کړه $A_i := \frac{a_1 \cdots a_n}{a_i}$ ،
 $(i = 1, \dots, n)$. نو باور لري:

$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = a_1 \cdots a_n.$	(3.29)
---	--------

ښوونه: وي دې $a_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i,p}}, i = 1, \dots, n$. نو باور لري

$$A_i = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p}}, i = 1, \dots, n$$

او

$$\text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min_{1 \leq i \leq n} (\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p})}, \quad (3.30)$$

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})}, \quad (3.31)$$

$$a_1 \cdots a_n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sum_{i=1}^n \alpha_{i,p}}. \quad (3.32)$$

وي دې $\alpha_{i_0,p} = \max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_{i,p})$ ، نو باور لري ، $\alpha_{i,p} \leq \alpha_{i_0,p}, i = 1, \dots, n$ يعنې

$$-\alpha_{i,p} \geq -\alpha_{i_0,p} \quad \text{او}$$

کنونپوهنه

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{j,p} - \alpha_{i,p} \geq \sum_{j=1}^n \alpha_{j,p} - \alpha_{i_0,p}, \quad (3.33)$$

$$\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p} \geq \sum_{j \neq i_0} \alpha_{j,p}, \quad i = 1, \dots, n$$

دا په دې معنا، چې

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_{j,p} \right) = \sum_{j \neq i_0} \alpha_{j,p}$$

نو له دې سره:

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) \text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_{i_0,p} + \sum_{j \neq i_0} \alpha_{j,p}} = (3.34)$$

$$= \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\sum_{i=1}^n \alpha_{i,p}} = a_1 \cdots a_n. \quad (3.35)$$

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n)$$

جملگی 3.2.15: دا یو امکان دی، چې د لویو گڼو یا عددونو

لپاره و شمېرو () $\text{ggT}(A_1, \dots, A_n) = \frac{a_1 \cdots a_n}{\text{ggT}(A_1, \dots, A_n)}$ ، چېرته چې د وېش له لارې د پاتې سره شمېرل کېږي).

$$\text{kgV}(6, 8, 15) = ?$$

بېلگه 3.2.16: ؟

(عددونه ډېر کوچني دي، دلته په لومړنیو ضریبونو ټوټه کونه ښه ده)

$$A_1 = a_2 a_3 = 120, A_2 = a_1 a_3 = 90, A_3 = a_1 a_2 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ggT}(A_1, A_2, A_3) = \text{ggT}(120, 90, 48) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{kgV}(6, 8, 15) = \frac{6 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 120.$$

لاس ته راوړنه 3.2.17:

$$n = 2, a_1, a_2 \in \mathbb{N}; \text{kgV}(a_1, a_2) \text{ggT}(a_1, a_2) = a_1 a_2$$

دا په دې معنا، چې

$$\text{kgV}(a_1, a_2) \text{ggT}(a_1, a_2) = a_1 a_2$$

، نو لاس ته راځي:

$$\text{kgV}(a_1, a_2) = a_1 a_2 \Leftrightarrow \text{ggT}(a_1, a_2) = 1, (3.36)$$

دا په دې معنا، چې د دوه گڼونو a_1, a_2 خورا کوچنی گڼزیاتځله ټیک هلته د هغو ضرب دی، که دا یو بل ته نسبي لومړني عددونه وي.

یادونه 3.2.18: په ټولیزه وګه: که $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ وي، نو

$$\text{kgV}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdots a_n$$

ټیک هلته دی، که $a_i, i = 1, \dots, n$ جوړه یو بل ته نسبي لومړني عددونه وي. (بنوونه د لومړنیو فاکتورونو ټوټه کوني سره کیږي)

Kongruenzen

د کونګروانځ سره شمېرنه Rechnen mit Kongruenzen

که $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ وي، د پاتې سره وېش راګوي:

$$a = qm + r, 0 \leq r < m; (4.1)$$

کنونپوهنه

$$a - r = qm, \quad m \mid a - r$$

یعني ، دا به دې معنا، چې

بیژند(تعریف) 4.1.1 : که وي $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ په خوښه، نو a, b کونگروانڅ

$$a \equiv b(m) \quad m \mid a - b$$

مودولو m بلل کيږي، که ، سومبولیک یا لیکندود

$$6 \equiv 24(9) \quad 9 \mid 24 - 6 = -18$$

بېلگه 4.1.2 : ، ځکه چې

$$14 \equiv -1(5) \quad 5 \mid 14 - (-1) = 15$$

، ځکه چې

لېما 4.1.3 : که وي $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ ، نو a, b ټیک هلته کونگروانت مودولو

m دي، که a, b د m له لارې د پاتې سره په وېش کې دا یو د بل پاتې برابر دي.

$$a = qm + r, 0 \leq r < m \quad \text{او} \quad b = q'm + r', 0 \leq r' < m$$

بنسونه : وي دې

$$a \equiv b(m) \Leftrightarrow r = r'$$

(د پاتې سره وېش). بنایو:

$$(\Leftarrow)$$

$$r = r' :$$

$$a - b = (qm + r) - (q'm + r') = (q - q')m + \underbrace{(r - r')}_{=0}, (4.2)$$

دا په دې معن، چې $m \mid a - b$ ، له دې ، باور لري. $a \equiv b(m)$

$(\Rightarrow)$ $a \equiv b(m) :$

$$m \mid a - b = (q - q')m + (r - r') \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid r - r', (4.3)$$

وي، نو له $|r - r'| \leq 0$ باور لري . که $m = |m| \leq |r - r'|$ يعني
 $0 \leq r < m, \quad 0 \leq r' < m$ لاس ته راځي، چې

$$0 \leq r < m, -m < -r' \leq 0, (4.4)$$

نو لرو $-m < r - r' < m$ ، دا په دې معنا، چې $|r - r'| < m$ - تضاد!

له دې سره لاس ته راځي $|r - r'| = 0$ ، يعني $r = r'$.

يادونه : د $\equiv$ له لارې په $\mathbb{Z}$ د $m \in \mathbb{N}$ لپاره يو ورته اړيکي ، په خوښه مګر کره ټاکلې، تعريف دي:

لومړی : (

1. Reflexivität (هندارونه) $a \equiv a(m) \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ ، ځکه

$$m \mid a - a = 0$$

چې

2. (Symmetrie سيوتري)

$$a \equiv b(m) \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid b - a \Rightarrow b \equiv a(m)$$

3. (Transitivität).

کنونپوهنه

$$a \equiv b(m), b \equiv c(m) \Rightarrow m \mid a - b, m \mid b - c$$

$$\stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid (a - b) + (b - c) = a - c \Rightarrow a \equiv c(m)$$

ختی لا ډېر باور لري ($\equiv$ د $+$ او $\cdot$ سره زعمور دی، د $\equiv$ کونگروانڅ،، کلمه دي
پع الجبر کې پرتله شي)

لېما 4.1.5: وي دي $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ په خوبنه. نو باور لري

1. $a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow a + c \equiv b + d(m)$,
2. $a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d(m)$,
3. $a \equiv b(m), t \mid m \Rightarrow a \equiv b(t)$,
4. $a \equiv b(m), k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \Rightarrow ka \equiv kb(k|m)$,
5. $ka \equiv kb(m)$ für ein $k \in \mathbb{Z}, d = \text{ggT}(k, m) \Rightarrow a \equiv b(\frac{m}{d})$,
6. $a \equiv b(m), a \equiv b(n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \equiv b(\text{kgV}(m, n))$.

بنوونه:

1. $a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow m \mid a - b, m \mid c - d \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid (a - b) + (c - d) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + d)(m)$

$$a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow m \mid a - b, m \mid c - d \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} m \mid (a - b)c = ac - bc$$

$$m \mid (c - d)b = cb - db$$

$$\Rightarrow m \mid (ac - bc) + (cd + db) = ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd(m)$$

$$a \equiv b(m) \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow t \mid a - b \Rightarrow a \equiv b(|t|)$$

$$a \equiv b(m) \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow km \mid k(a - b) = ka - kb \Rightarrow ka \equiv kb(k \mid m)$$

$$ka \equiv kb(m) \Rightarrow m \mid ka - kb \Rightarrow k(a - b) = m \cdot s$$

1. $s \in \mathbb{Z}$ یوه لپاره

$$\Rightarrow \frac{k}{d}(a - b) = \frac{m}{d} \cdot s \frac{m}{d} \mid \frac{k}{d}(a - b), \quad (4.5)$$

د کورولار یا جملګۍ (1) 2.2.9 له امله باور وي:

$\text{ggT}\left(\frac{m}{d}, \frac{k}{d}\right) = 1,$	(4.6)
--	-------

نو د بنسټيزې لېما 2.2.12 څخه لاس ته راځي:

$\frac{m}{d} \mid a - b \Rightarrow a \equiv b\left(\frac{m}{d}\right).$	(4.7)
$a \equiv b(m), a \equiv b(n)$	

$\Rightarrow m \mid a - b, n \mid a - b,$	(4.8)
---	---------

دا په دې معنا، چې $a - b$ د m, n ګډ ډېرځله دی

$\Rightarrow \text{kgV}(m, n) \mid a - b \Rightarrow a \equiv b(\text{kgV}(m, n)).$	(4.9)
---	---------

لومړی :

$$a \equiv b(m), c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \equiv b + c(m), ac \equiv bc(m)$$

$\equiv$ ، دا په دې معنا، چې د ترنو یا کارونو یا عملیو سره زغور دی (د ورته اړیکو یا کونګروانځ اړیکو په هکله دتر مخه تېرې یادونې [4.1.4](#) وګورئ) .

دویم :

$$\begin{aligned} a_i \equiv b_i(m), i = 1, \dots, k &\Rightarrow a_1 + \dots + a_k \equiv \\ &\equiv b_1 + \dots + b_k(m), a_1 \dots a_k \equiv b_1 \dots b_k(m) \end{aligned}$$

(ښوونه د ایندکشن له لارې) .

دریم :

$$a_1 = \dots = a_k = a, b_1 = \dots = b_k = b \Rightarrow a^k \equiv b^k(m) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$c_i \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b(m), f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$$

د سره، نو باور

لري

$$f(a) \equiv f(b)(m)$$

څلورم :

$$ka \equiv kb(m), \text{ggT}(k, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b(m)$$

(مگر له $4 \cdot 4 \equiv 4 \cdot 2(4)$ لاس ته نه اځي $3 \equiv 2(4)$. (!!!)

پنځم :

$$ka \equiv kb(m), k \mid m \stackrel{4.1.5(5)}{\Rightarrow} a \equiv b\left(\frac{m}{|k|}\right)$$

شپږم :

$$a \equiv b(m), a \equiv b(n), \text{ggT}(m, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b(m \cdot n)$$

اوم :

په لومړنيو ضربيونو تړته کونه $a \equiv b(m), m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$

$$\Rightarrow a \equiv b(p_i^{\alpha_i}) \forall i = 1, \dots, k$$

$$(p_i^{\alpha_i} \mid m \text{ ځکه چې})$$

اتم :

مختلف لومړني ګڼونه $a \equiv b(p_i^{\alpha_i}), i = 1, \dots, k, p_i$

$$\Rightarrow a \equiv b(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) : a \equiv b(m)$$

د پروېشنور والي قوانین Teilbarkeitsregeln

هر يا يوه يا بل د پروېشنور قوانین پېژني. د دې قوانینو څخه زیات یې به روښانه ت وگه د لاندې جملې په بنسټ ولاړ دي.

جمله 4.2.1: $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$ دې د $n \in \mathbb{N}$ دیکادیکي یا لسمیزه انځوره وي. نو باور لري

1. $n \equiv a_0 (2)$,
2. $n \equiv a_0 + \dots + a_k (3)$,
3. $n \equiv a_0 + 10 \cdot a_1 (4)$,
4. $n \equiv a_0 (5)$,
5. $n \equiv (a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2) - (a_3 + 10a_4 + 10^2 a_5) + - \dots (7)$,
6. $n \equiv a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 (8)$,
7. $n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k (9)$,
8. $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - + \dots + (-1)^k a_k (11)$.

(13)
resp. ,

ښوونه:

لومړۍ: د $10 \equiv 0(2)$ له امله باور لري $10^i \equiv 0^i(2) \forall i \geq 1$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_k(2) \Rightarrow n \equiv a_0(2). \quad (4.10)$$

دويم:

د $10 \equiv 1(3)$ له امله باور لري: $10^i \equiv 1^i(3) \forall i \geq 1$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 1 \cdot a_1 + \dots + 1 \cdot a_k(3) \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k(3). \quad (4.12)$$

درېم:

د $10^2 \equiv 0(4)$ له امله باور لري $10^i \equiv 0^i(4) \forall i \geq 2$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 10a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_k(4) \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 + 10a_1(4). \quad (4.14)$$

څلورم د $10 \equiv 0(5)$ له امله باور لري $10^i \equiv 0^i(5) \forall i \geq 1$ ، يعنې

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv a_0 + 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_k(5) \Rightarrow n \equiv a_0(5). \quad (4.15)$$

پنځم:

1. د ۱ - له امله

$$n = (a_0 + 10a_1 + 10^2a_2) + 10^3(a_3 + 10a_4 + 10^2a_5) + \quad (4.16)$$

$$+ 10^6(a_6 + 10a_7 + 10^2a_8) + \dots \quad (4.17)$$

او $1001 = 10^3 + 1 = 7 \cdot 13$ باور لري: $10^3 \equiv -1(7, 13)$ ، نو هم

$$(10^3)^i \equiv (-1)^i(7, 13) \quad \forall i \geq 0$$

داسې چې ،

$$n \equiv (a_0 + 10a_1 + 10^2a_2) + (-1)(a_3 + 10a_4 + 10^2a_5) + \quad (4.18)$$

$$(-1)^2(a_6 + 10a_7 + 10^2a_8) + \dots (7, 13). \quad (4.19)$$

$$10^i \equiv 0^i(8) \quad \forall i \geq 3$$

د $10^3 \equiv 0(8)$ له امله باور لري: ، نو

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv \quad (4.20)$$

$$\equiv a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \dots + 0 \cdot a_k(8) \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 + 10a_1 + 10^2a_2(8). \quad (4.22)$$

$$10 \equiv 1(9) \dots \text{Modul } 3 \text{ ته ورته}$$

$$10^i \equiv (-1)^i(11) \quad \forall i \geq 0 \quad \text{له } 10 \equiv -1(11) \text{ امله باور لري: نو،}$$

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^k a_k \equiv \quad (4.23)$$

$$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - + \dots + (-1)^k \cdot a_k(11) \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - + \dots + (-1)^k a_k(11). \quad (4.25)$$

جمله گي 4.2.2 : (پروېشنور قوانين) که
 $n = (a_k \dots a_0)_{10} \in \mathbb{N}$ وي، نو باور لري:

1. $2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid a_0$,
2. $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid a_0 + \dots + a_k$,
3. $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid (a_1 a_0)_{10}$,
4. $5 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid a_0$,
5. $7, 13 \mid n \Leftrightarrow 7, 13 \mid (a_2 a_1 a_0)_{10} - (a_5 a_4 a_3)_{10} + (a_8 a_7 a_6)_{10} - + \dots$,
6. $8 \mid n \Leftrightarrow 8 \mid (a_2 a_1 a_0)_{10}$,

کڼونډپوهنه

$$\begin{aligned}
 7. \quad & 9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid a_0 + \cdots + a_k, \\
 8. \quad & 11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k.
 \end{aligned}$$

ښوونه : د بېلگې په توگه د دې لومړنيو درې راوړل شوي قوانین ښایو، نو ټول کېدی شي په ورته توگه وښوول شي.

$$2 \mid n \Leftrightarrow n \equiv 0(2) \quad (4.26)$$

$$\Leftrightarrow^1 a_0 \equiv n \equiv 0(2) \quad (4.27)$$

$$\Leftrightarrow 2 \mid a_0. \quad (4.28)$$

یادونه 4.2.3 : سړی کړی شي د معلومو پروېشقوانینو پسې وغزوي، که مودول نسبي لومړني وي.

$$m = 2, n = 3 \Rightarrow \text{لکه}$$

لاس ته راځي او

$$\text{Etwa } m = 2, n = 3 \Rightarrow \text{bzgl. 6 = bzgl. 2 und bzgl. 3 (} \text{ggT}(2, 3) = 1 \text{)}.$$

Beispiel 4.2.4

$$\begin{aligned}
 n = 97234382 \mid n \quad & 2 \mid 8 \quad 3 \mid n \quad 3 \mid 36 \quad 4 \nmid n \\
 , \text{ da } & \quad ; \quad , \text{ da } \quad ; \quad , \\
 4 \nmid 38 \quad 5 \nmid n \quad & 5 \nmid 8 \quad 6 \mid n \quad 2 \mid n, 3 \mid n \wedge \text{ggT}(2, 3) = 1 \\
 \text{da } & \quad ; \quad , \text{ da } \quad ; \quad , \text{ da } \quad ; \\
 7 \nmid n \quad & 7 \nmid (438 - 723 + 009) = -276 \quad 8 \nmid n \quad 8 \nmid 438 \quad 9 \mid n \\
 , \text{ da } & \quad , \text{ da } \quad ; \quad , \text{ da }
 \end{aligned}$$

$$9 \mid 36 \quad 11 \nmid n \quad 11 \nmid (8 - 3 + 4 - 3 + 2 - 7 + 9) = 10 \quad 12 \nmid n$$

; , da ; ,

$$4 \nmid n$$

da ; ...

پاتې ټولګي Restklassen

د 4.1.3 له مخې باور لري: $a \equiv b(m)$ ټيک هلته يا هلته او هلته، که د m سر د a او b وېشنې برابر پاتې ولري ($0 \leq r < m$).

که ټول $a, b \in \mathbb{Z}$ د دې خويونو سره د يوې ډېرې په توګه سره يوځای کړو، نو سړی داسې په نامه، پاتې ټولګي، لاس ته راوړي، فورمال د 4.1.4 پسې $\equiv$ ، په $\mathbb{Z}$ يو ورته اړيکه ده، يعنې له دې سره د $\mathbb{Z}$ يو پارټیشن يا ټوټه کونه ورکړ شوی د پرديو $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a(m)\}$ سره، داسې په نامه ورته ټولګي disjunkte ټولګيو $\bar{a}$ ، دا په دې معنا، چې

$$\begin{aligned} 1. \quad & \bar{a} \neq \emptyset \\ 2. \quad & \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset \vee \bar{a} = \bar{b} \\ 3. \quad & \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} \bar{a} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

باور لري:

لومړی: د $\bar{a}$ څخه توکي بڼه $a + km$ لري (د $k \in \mathbb{Z}$ لپاره)، ځکه چې:

ګڼونپوهنه

$$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = a + km \quad x \in \bar{a} \Leftrightarrow x \equiv a(m) \Leftrightarrow x - a = km$$

د یوه

لپاره . له دې سره

$$\bar{a} = \{a + km \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + m\mathbb{Z}$$

په خوښه

دویم : $\forall a \in \mathbb{Z} : \bar{a} = \bar{r}$ د کوم سره چې $r \in \mathbb{Z}$ په m باندې a د

وېشنې پاتې دی $(0 \leq r < m)$ ، ځکه چې:

$$a = qm + r, 0 \leq r < m \Leftrightarrow a - r = qm \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r(m) \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{r}$$

پېژند(تعریف) 4.3.1 : وي دې $m \in \mathbb{N}$ په خوښه، نو ورته بیا اکوئوالنت ټولګی $\text{mod } m$ یو پاتې ټولګی $\text{mod } m$ بلل کیږي. هر دې $\bar{a}$ ټوکی د ټولګی $\bar{a}$ نماینده بلل کیږي. د ټول پاتې ټولګیو $\text{mod } m$ ډېری د $\mathbb{Z}_m$ سره په نڅېنه کیږي.

لیما 4.3.2 : د په خوښه $m \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري:

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$$

دا په دې معنا، چې $\mathbb{Z}_m$ ټوکی لري.

ښوونه : که $\bar{a}$ په خوښه پاتې ټولګی وي، نو باور لري:

$$a = qm + r, 0 \leq r < m, \quad (4.29)$$

دا په دې معن، چې $0 \leq r \leq m-1$ ، دا په دې معنا، چې زیات له زیاته m مختلف پاتې ټولګي شتون لري.

که $r \equiv r'(m) \quad \bar{r} = \bar{r'}, 0 \leq r \leq m-1, 0 \leq r' \leq m-1$ باور ولري، نو

باور لري ، په m باندې د r, r' د وېشنې څخه r همداسې r' پاتې (که غواړئ: باقي) پاتې کيږي، دا باید د [4.1.3](#) پسې باور ولري: $r = r'$. برعکس: $r = r' \Rightarrow \bar{r} = \bar{r'}$. نو ټیک m ټولګي شتون لري.

بېلګه 4.3.3: $m = 5 : \mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ ، څه:

$\bar{2} = \{2 + 5 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$ ، نو په

ځانګړې توګه

$$\bar{2} = \bar{17} = \overline{(-3)} = \dots$$

پېژند (تعریف) 4.3.4: د $\mathbb{Z}$ یوه برخه ډېری کومه چې له هر پاتې ټولګي ټیک یو توکی خوندي لري، نو پوره مودولو m پاتې سیستم بلل کيږي.

بېلګه 4.3.5: $m = 4, \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}; \{0, 1, 2, 3\}$ یو پوره پاتې

سیستم $\text{mod } 4$ دی، همداسې $\{4, -3, -2, 4\}$ یا $\{100, 99, 98, 97\}$.

لیما 4.3.6: یوه برخه ډېری $\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ ټیک هلته یو پوره پاتې سیستم

مودولو m دی، که $r_i \not\equiv r_j(m) \quad \forall i, j = 1, \dots, m : i \neq j$ وي.

ښوونه:

$(\Rightarrow)$

که $\{r_1, \dots, r_m\}$ یو پوره پاتې سیستم وي، نو r_i ، $i = 1, \dots, m$ په مختلفو پاتې ټولګیو $\text{mod } m$ کې پراته دي، نو باور لري

$$\forall i \neq j, r_i \not\equiv r_j(m)$$
 $(\Leftarrow)$

که باور ولري $r_i \not\equiv r_j \forall i \neq j$ ، نو r_i په مختلفو پاتې ټولګیو کې پراته دي، او ټول مختلف دي، نو $\{r_1, \dots, r_m\}$ یو پوره پاتې سیستم دی.

کورولار یا جمله ګۍ 4.3.7: وې دي $\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ یو پوره پاتې سیستم

مودولو m او $a, b \in \mathbb{Z}$ دي د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره وي، نو $\{ar_1 + b, \dots, ar_m + b\}$ هم یو پوره پاتې سیستم مودولو m دی.

ښوونه: نیسو چې $\exists i \neq j : ar_i + b \equiv ar_j + b(m)$ ، نو لاس ته رځي

$$ar_i \equiv ar_j(m), \quad (4.30)$$

او له دي سره د (4.1.6) له امله:

$$r_i \equiv r_j(m), \quad (4.31)$$

دا چې $\text{ggT}(a, m) = 1$ دی، نو تضاد ته خړ!

نو له دې سره لاس ته راځي

$$ar_i + b \not\equiv ar_j + b \quad \forall i \neq j, \quad (4.32)$$

او له [4.3.6](#) سره غوښتنه لرو.

جمله گي 4.3.8: وي دې $\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ يو پوره پاتي سيستم مودولو m ،
 $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ يو پوره پاتي سيستم مودولو n او $\text{ggT}(m, n) = 1$ ، نو

$\{nr_1 + ms_1, \dots, nr_m + ms_n\}$	(4.33)
---------------------------------------	----------

$$\{nr_1 + ms_1, \dots, nr_m + ms_n\} \quad (4.33)$$

يو پوره پاتي سيستم مودولو $m \cdot n$ دی.

ښوونه: نيسو، چې باور لري

$$nr_i + ms_j \equiv nr_k + ms_l(m \cdot n) \quad (4.34)$$

د ځنو $i \neq k$ همدا سي $j \neq l$ لپاره يا دواړه. د $m \mid m \cdot n$ له امله لاس ته راځي:

$$nr_i + ms_j \equiv nr_k + ms_l(m), \quad (4.35)$$

$$nr_i \equiv nr_k(m)$$

له دې سره .

له دې امله د لاس ته راوړني پسي [4.1.6\(4\)](#) لاس ته راځي: $r_i \equiv r_k(m)$ ځکه چې

$$\text{ggT}(m, n) = 1 \Rightarrow i = k$$

د 4.3.6 له مخې . له دې سره نښه داسې ده:

$$nr_i + ms_j \equiv nr_i + ms_l(m \cdot n) \Rightarrow ms_j \equiv ms_l(m \cdot n), \quad (4.36)$$

نو $s_j \equiv s_l(n) \Rightarrow j = l$ دی دا د 4.3.6 له امله - تضاد دی $\square$

د پاتې ټولګې کړۍ یا -- رینګ $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

Der Restklassenring $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

په $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ تعریفوو (توګي دي)

په $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ (m توګي دي) یو زیاتون یا جمعه $\oplus$ او یو ضرب یا

حل $\odot$ تعریفوو د لاندې سره:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} := \overline{a + b} \quad \bar{a} \odot \bar{b} := \overline{ab}. \quad (4.37)$$

او

بڼایو: دا تعریفونه د وکیلانو (Repräsentanten) خپلواک دي، دا په دې معنا،

چې $\bar{a} = \bar{a'}, \bar{b} = \bar{b'}$ نو، $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ هم باور لریاو همداسې $\overline{ab} = \overline{a'b'}$ هم

$$\bar{a} = \bar{a'} \Rightarrow a \equiv a'(m), \bar{b} = \bar{b'} \Rightarrow b \equiv b'(m),$$

نو:

$$\left. \begin{aligned} a + b &\equiv a' + b'(m), \\ a \cdot b &\equiv a' \cdot b'(m) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{4.1.5} \overline{a + b} = \overline{a' + b'}, \overline{ab} = \overline{a'b'}.$$

نسبت جمعې $\oplus$ ته باور لري: $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ یو کموتاتیو ګروپ دی. ځکه چې:

$$1. \quad \overline{a} \oplus \overline{b} \in \mathbb{Z}_m, \text{ ځکه چې } \overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m.$$

$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m.$	(4.38)
---	--------

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m. \quad (4.38)$$

$$2. \quad \overline{a} \oplus (\overline{b} \oplus \overline{c}) = (\overline{a} \oplus \overline{b}) \oplus \overline{c} \quad \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$$

ځکه چې ،

$$a + (b + c) = (a + b) + c \Rightarrow \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c}. \quad (4.39)$$

$$3. \quad \overline{a} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{a} = \overline{a} \quad \forall \overline{a} \in \mathbb{Z}_m \quad \overline{0} \in \mathbb{Z}_m$$

پوره کوي .

$$4. \quad \overline{a} \oplus \overline{-a} = \overline{-a} \oplus \overline{a} = \overline{0}. \quad (4.40)$$

و $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ ته $\overline{-a}$ زیلتیز یا مثبت معکوس دی، ځکه چې

$$\overline{a} \oplus \overline{-a} = \overline{-a} \oplus \overline{a} = \overline{0}. \quad (4.40)$$

$$5. \quad \overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \overline{b} \oplus \overline{a} \quad \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$$

نسبت ضرب $\odot$ ته باور لري: $(\mathbb{Z}_m, \odot)$ یو نیم ګروپ دی د 1 سره. ځکه چې:

$$\bar{a} \odot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{, خكه چي} \quad 1.$$

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab} \in \mathbb{Z}_m \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m. \quad (4.41)$$

$$\bar{a} \odot (\bar{b} \odot \bar{c}) = (\bar{a} \odot \bar{b}) \odot \bar{c} \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{, خكه چي} \quad 2.$$

$$a(bc) = (ab)c \Rightarrow \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c}. \quad (4.42)$$

$$\bar{a} \odot \bar{1} = \bar{1} \odot \bar{a} = \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m \quad \bar{1} \in \mathbb{Z}_m \quad \text{پوره کوي} \quad 3.$$

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \bar{b} \odot \bar{a} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m \quad 4.$$

$$\bar{a} \odot (\bar{b} \oplus \bar{c}) = (\bar{a} \odot \bar{b}) \oplus (\bar{a} \odot \bar{c}) \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m \quad 5.$$

$$a(b+c) = ab+ac \Rightarrow \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} \quad \text{(خكه چي:)} \quad (.).$$

له دې سره $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ يو کموتاتیو رینگ (کری) دی د 1 سره، داسې په نامه
 “پاتي تولکي رینگ یا — - کری) mod m،، دی. د $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ انخورونه د
 جدول په مرسته صورت نیسي یا لاس ته راځي. دا د $\mathbb{Z}_4$ لپاره په لاندې ډول لیدل
 کیږي:

$arrayc cccc\oplus\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$
$\bar{00}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$
$\bar{11}$	$\bar{03}$	$\bar{2}$
$\bar{22}$	$\bar{30}$	$\bar{1}$
$\bar{33}$	$\bar{21}$	$\bar{0}$

$arrayc cccc\odot\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$
$\bar{00}$	$\bar{00}$	$\bar{0}$
$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$
$\bar{20}$	$\bar{23}$	$\bar{1}$
$\bar{30}$	$\bar{31}$	$\bar{2}$

په ګری یا رینګ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (کموتاتیو ګری د 1 سره) کې باور لري:

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 4.1. په ټولیزه توګه دا په $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ 4.2 کې ټیک نه دی، دا د $m = 6$ لپاره باور لري $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$ ، چېرته چې $\bar{2}, \bar{3} \neq \bar{0}$ دی.

پیژند(تعریف) 4.4.1: $(R, +, \cdot)$ دې یو کموتاتیو ګری وي د 1 سره

لومړی: یو $a \in R, a \neq 0$ صفرپروېشونی (مقسوم علیه صفر،،،؟)، بلل کیږي، که $b \in R, b \neq 0$ شتون ولري د $ab = 0$ سره.

دویم: یو R انټیګریتی ګری (صفرپروېشوني ازاد یا بی صفرپروېشوني) بلل کیږي، که په R کې صفرپروېشونی شتون ونه لري.

ګڼونپوهنه

دریم: یو $a \in R$ یوون یا واحد بلل کيږي، که یو $b \in R$ شتون ولري، د $ab = 1$ سره، a د b معکوس یا په څت بلل کيږي (نسبت و ضرب ته)، سومبولیک: $b = a^{-1}$.

څلورم: که په R کې هر $a \neq 0$ یو یوون وي، نو $(R, +, \cdot)$ یو بدن یا تن یا جسم بلل کيږي (انګریزي).

بېلګه 4.4.2:

لومړی: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ یو انتیګریټي کړۍ ده، یوونونه یا واحدونه ± 1 دي.

دویم: $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ صفرپروېشوني $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ او یوونونه $\bar{1}, \bar{5}$ لري.

دریم: $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ یو بدن دی، لکه په لاس ته راوړنه [4.1.6](#) کې چې لاس ته راځي.

پېژند(تعریف) 4.4.3: یو $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتې سیستم $\text{mod } m$ بلل کيږي، که $\text{ggT}(a, m) = 1$ وي، دا په دې معنا، چې a و m ته نسبي لومړنی دی.

لېم 4.4.4: هر $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ د لومړني پاتې ټولګې توکي و مودول m ته نسبي لومړنی دی.

ښوونه: وي دې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتې سیستم او $\text{ggT}(a, m) = 1$ (پرتله له دې بیا سړی بل نماینده سیستم ټاکي). وي دې $b \in \bar{a}$ په خوښه، و دې ښوول شي: $\text{ggT}(b, m) = 1$.

نيسو، چې $\text{ggT}(b, m) \neq 1$ ، داپه دېمعنا، چې يو لومړنی ګڼ $p \in \mathbb{P}$ شته د $p \mid b$ او $p \mid m$ سره (که وي) له دې څخه د $c \mid b, c \mid m \Rightarrow$ په لومړنيو ضربيونو توپه کونه د $p \mid b, p \mid m$ سره لاس ته راځي). د $b \in \bar{a}$ له امله باور لري:

$$b = a + km \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.43)$$

دا چې $b = a + km : p \mid b, p \mid m$ له امله لاس ته راځي:

$$p \mid a \Rightarrow \text{ggT}(a, m) \geq p \quad (4.44)$$

-- تضاد $\square$

جمله : په $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ کې يوونونه يا واحدونه ټيک لومړني پاتېتولګي دي. بنوونه:

لومړی: که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتې تولګی وي له دې لاس ته راځي $\Rightarrow \text{ggT}(a, m) = 1$ ، د [2.2.5](#) پسې لاس ته راځي $1 = \alpha a + \beta m$ د ځنو $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ لپاره . له دې امله

$1 = \alpha a + \beta m \equiv \alpha a(m) \Rightarrow \bar{a} = (\bar{a})^{-1},$	(4.45)
---	--------

دویم: $\bar{a}$ یوون یا واحد دی.

دریم: که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ یوون یا واحد وي، نو یو $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري د $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ سره،
 دا په دې معنا، چې $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ ، له دې سره $ab \equiv 1(m)$ ، دا په دې معن،
 چې $ab - 1 = km$ نيسو چې $\text{ggT}(a, m) \neq 1$ ، نو
 $\exists p \in \mathbb{P} : p \mid a, p \mid m \Rightarrow p \mid 1$

-- تضاد $\square$

جمله ګی 4.4.6: $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ټیک هلته یو بدن دی، که m یو لومړنی ګڼ وي.

ښوونه

$(\Leftarrow)$

وي دې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p, \bar{a} \neq \bar{0}$ دا چې $1, 2, \dots, p-1$ نسبت p ته نسبي لومړنی دی،
 $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}$ نو باور لري، چې ټول پاتې ټولګي لومړني دي، نو هر یو په
 $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ خوښه هم.

نو ټول یوونونه یا واحدونه په $\mathbb{Z}_p$ کې دي. نو د تعریف پسي باور لري: $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ یو بدن دی.

$(\Rightarrow)$ $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ یو بدن. ودي ښوول شي: $m \in \mathbb{P}$

نيسو یا فرضوو، چې m نالومړنی دی، نو

$$m = rs, 1 < r < m, 1 < s < m. \quad (4.46)$$

له دې سره باور لري

$$\overline{m} = \overline{0} = \overline{rs} = \overline{r} \cdot \overline{s}. \quad (4.47)$$

باور لري، چې $\overline{r}$ او $\overline{s}$ صفر $\overline{0}$ نه دي. ځکه چې: له $\overline{r} = \overline{0}$ لاس ته راځي $r \equiv 0(m)$ ، دا په دې معنا، چې $m \mid r$ او $m \leq r$ --تضاد يا مخامخوالی.

په ورته توګه د $\overline{s}$ لپاره. دا چې $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ یو بدن دی، نو هر $\overline{r} \in \mathbb{Z}_m$ ته یو $\overline{r}^{-1} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري د $\overline{r}\overline{r}^{-1} = \overline{1}$ سره. نو له $\overline{rs} = \overline{0}$ لاس ته راځي، چې $\overline{r}^{-1}\overline{rs} = \overline{r}^{-1}\overline{0} = \overline{0}$ ، دا په دې معنا، چې $\overline{s} = \overline{0}$ -- تضاد يا مخامخوالی!

له دې امله m لومړنی عدد دی، او له دې سره $m \in \mathbb{P}$.

بېلګه 4.4.7: $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ یو بدن دی.

معکوس یې دي:

$$\overline{1}^{-1} = \overline{1}, \overline{2}^{-1} = \overline{3}, \overline{3}^{-1} = \overline{2}, \overline{4}^{-1} = \overline{4}$$

پښه نوټ: ::

$$\text{4.1 } ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

په الجر کې همدا خوي د، صفر پروېشنې ازاد، بلل کیږي.

$$4.2 \quad (\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$$

موږ په راتلونکې کې د $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ په ځای $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ هم لیکو، سره له دې، د $+$ ، $\cdot$ ، او $.$ سره هغه د $\mathbb{Z}$ اصلي جمعه او ضرب په معنا پوهیږو!

الجبري کونګروانځ Algebraische Kongruenzen

د کرښیزو کونګروانځو حلوروالی

د جملې 4.4.5 پسي یو $\bar{a}$ په $\mathbb{Z}_m$ کې ټیک هلته یوون یا واحد دی، که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ $\text{ggT}(a, m) = 1$ لومړنی پاتې سیستم وي. د داسې یوه $\bar{a}$ لپاره له دې امله یو $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري د $\bar{ax} = \bar{1}$ سره، دا په دې معنا، چې $\bar{ax} = \bar{1}$ او $ax \equiv 1(m)$ د $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ غوښتنه: دي. $ax \equiv 1(m)$ د $\bar{x}$ سره.

په ټولیزه توګه: غواړو د $x \in \mathbb{Z}$ حل پیدا کړو د

$$ax \equiv b(m), a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, (5.1)$$

سره داسې کرښیز کونګروانځ یا ورته والی.

جمله 5.1.1: یو کرښیز کونګروانځ $ax \equiv b(m)$ ټیک هلته حل وړ دی، که $\text{ggT}(a, m) \mid b$ وي. که دا حالت وي، نو ټیک ناګونګروانځ حل $d = \text{ggT}(a, m) \bmod m$ لرو.

$$\Leftrightarrow \text{ggT}(a, m) \mid b$$

شوونه : په يوه لومړي پل يا قدم کې ښايو: حلور

$\Rightarrow$

وي دي $ax \equiv b(m)$ حلور، دا په دې معنا، چې $ax_0 \equiv b(m) \quad \exists x_0 \in \mathbb{Z}$ د سره
 ، نو $m \mid ax_0 - b$ او $ax_0 - b = tm$ د يوه $t \in \mathbb{Z}$ لپاره ، له دې سره
 $b = ax_0 + (-t)m$ دی . له دې امله باور لري: $d = \text{ggT}(a, m)$ ښی خوا
 وېشي، او له دې سره هم b .

$\Leftarrow$

برعکس : که $d = \text{ggT}(a, m) \mid b$ وي، نو باور لري: $b = cd$ د يوه $c \in \mathbb{Z}$
 لپاره او د: [2.2.5](#) پسې $d = \alpha a + \beta m$ د ځنو $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ لپاره. له دې څخه لاس
 ته راځي:

$$b = cd = (c\alpha)a + (c\beta)m \equiv (c\alpha)a(m), (5.2)$$

دا په دې معنا، چې $ax \equiv b(m) \quad x = c\alpha \in \mathbb{Z}$ د يو حل دی.

اوس ځانونه د (اينکونگروانڅ) حلونو سره ځان مصروفوو:

وښايي: که $x_0 \in \mathbb{Z}$ حل وي، نو هر $x_1 \in \overline{x_0}$ هم حل دی ($\overline{x_0} \in \mathbb{Z}_m$).

د $ax_0 \equiv b(m)$ او $x_1 = x_0 + km$ له امله د يوه $k \in \mathbb{Z}$ لپاره باور لري:

$$ax_1 = a(x_0 + km) = ax_0 + akm \equiv ax_0 \equiv b(m), \quad (5.3)$$

$$ax_1 \equiv b(m) \quad \text{نو هم.}$$

له دې امله غوښتنه :

$$x_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{حل، دا په دې معنا، چې} \quad ax_0 \equiv b(m) \quad \text{، او} \quad x \in \mathbb{Z} \quad \text{په خوښه نو}$$

$$ax \equiv b(m) \quad \text{حلوته دي، نو} \quad . \quad \text{له دې امله د کمښت یا تفریق له لارې:}$$

$$a(x - x_0) \equiv b - b = 0(m)$$

. نو

$d \frac{a}{d} (x - x_0) \equiv d \cdot 0(m) \quad \left(d = \text{ggT}(a, m) \Rightarrow \frac{a}{d} \in \mathbb{Z} \right).$	(5.4)
---	-------

د (5.1.5) پسي لاس ته راځي: د $\text{ggT}(d, m) = d$ له امله:

$$\frac{a}{d} (x - x_0) \equiv 0 \left(\frac{m}{d} \right), \quad (5.5)$$

دا په دې معنا، چې $\frac{m}{d} \mid \frac{a}{d} (x - x_0)$. د 2.2.9 له امله باور لري: $\text{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{a}{d}) = 1$

، د بتستيزې لیسما 2.2.12 سره لاس ته راځي $\frac{m}{d} \mid (x - x_0)$ ، دا په دې معنا، چې

د یوه $x - x_0 = t \frac{m}{d}$ لپاره $t \in \mathbb{Z}$. له دې امله لاس ته راځي:

$$x = x_0 + t \frac{m}{d}. \quad (5.6)$$

وښايي: $x_0, x_0 + 1\frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ حلونه دي.

وي دي $x_0 + k\frac{m}{d}$ د $0 \leq k < d$ سره ، نو باور لري:

$$a\left(x_0 + k \underbrace{\frac{m}{d}}_{\in \mathbb{N}}\right) = ax_0 + ak \underbrace{\frac{m}{d}}_{\in \mathbb{N}} = ax_0 + \underbrace{\frac{a}{d}}_{\in \mathbb{N}} km \equiv ax_0 \equiv b(m). \quad (5.7)$$

وښايي: هر حل $x \in \mathbb{Z}$ يو له دي کڼونو d سره کونگروانځ مودولو m دی.

پورته لورته $x = x_0 + t\frac{m}{d}$ دی د يوه $t \in \mathbb{Z}$ لپاره. د d سره د پاتي سره وېشنې

له امله سړی $t = qd + r$ د $0 \leq r < d$ سره لاس ته راوړي ، نو

$$x = x_0 + t\frac{m}{d} = x_0 + (qd + r)\frac{m}{d} = x_0 + qm + r\frac{m}{d} \equiv x_0 + r\frac{m}{d} \quad (5.8)$$

د $0 \leq r < d$ سره.

وښايي: $x_0, x_0 + 1\frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}$ کونگروانت مودولو m دي.

نيسو: $x_0 + k\frac{m}{d} \equiv x_0 + l\frac{m}{d} (m)$ د $0 \leq k < l \leq d-1$ لپاره، نو باور لري:

$$(l-k)\frac{m}{d} \equiv 0(m) \Rightarrow m \mid (l-k)\frac{m}{d}. \quad (5.9)$$

، نو $l-k \equiv 0\left(\frac{m}{d}\right)$ ، $\text{ggT}(m, \frac{m}{d}) = \frac{m}{d}$ ، دا په دي معنا، چې

، $l-k \equiv 0(d)$ له دي سره

کښونپوهنه

$$d \mid l - k \leq d - 1 < d, (5.10)$$

نو $|d| \leq |l - k|$ ، دا په دې معنا، چې $d \mid l - k < d$ - تضاد! $\square$

یادونه 5.1.2: د $ax \equiv b(m)$ دټولو اینکونگروانت حلونو ته بسيا کوي، چې یو

خانگړی حل x_0 پیدا کړو. ټول اینکونگروانت حلونه دا لاندې څېره لري

$$x_0, x_0 + \frac{m}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{m}{d}; (5.11)$$

له دې امله غوښتنه: د $ax \equiv b(m)$ یو خانگړی حل $x_0 \in \mathbb{Z}$.

د حل عملي شمېرنه:

بېلگه 5.1.3: $32x \equiv 20(14)$; د $\text{ggT}(32, 14) = 2 \mid 20$ له امله یو حل شتون لري.

را کمونه:

د $32x \equiv 4x(14)$ او $20 \equiv 6(14)$ له امله کونگروانت $4x \equiv 6(14)$ دی.

لومړی: د ښوونې سره سم: د $\text{ggT}(4, 14) = 2 \mid 6$ له امله دوه مودولو 14 اینکونگروانت حلونه شتون لري.

د اکلید په لار: $2 = \text{ggT}(4, 14) = (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 14$ ، نو

$6 = 2 \cdot 3 = (-9) \cdot 4 + 3 \cdot 14,$	(5.12)
--	----------

دویم: دا په دې معنا، چې $x_0 = -9$ یو حل دی.

دریم. $\text{mod } 14$ اینکونگروانت حل د بېلګې په توګه دی

$x_1 = x_0 + 1 \cdot \frac{m}{d} = -9 + \frac{14}{2} = -2;$	(5.13)
---	----------

دریم: نو هم $5, 12, 19, 26, \dots$

له دې لاس ته راځي ($\Rightarrow$) د ټول حلونو ټولګه.

$$\overline{5} = \{5 + k \cdot 14 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\overline{12} = \{12 + k \cdot 14 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

پنځم: د بڼې بدلون له لارې:

$$4x \equiv 6(14) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2x \equiv 2 \cdot 3(14) \stackrel{\text{ggT}(2,14)=2}{\Leftrightarrow}$$

$$2x \equiv 3(7) \Leftrightarrow$$

کښونپوهنه

$$2x \equiv 10(7) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot x \equiv 2 \cdot 5(7) \stackrel{\text{ggT}(2,7)=1}{\Leftrightarrow}$$

$$x \equiv 5(7)$$

شپږم: دويم حل: $5 + 7 = 12$

بېلگه 5.1.4: غوښتنه يا ثبوت د $\overline{3} \bmod 16$ معکوس (نسبت ضرب ته) غواړو پيدا

کړو. د 4.4.5 پسي $\overline{3}^{-1} \in \mathbb{Z}_{16}$ شتون لري، ځکه چې $\text{ggT}(3, 16) = 1$ ، نو $\overline{3}$

يو لومړنی پاتې ټولگی دی. غواړو يو x پيدا کړو، د $3x \equiv 1(16)$ سره، له دې امله

، نو $3x \equiv -15(16)$ او $x \equiv -5(16)$ داپه دې معن، چې $\overline{3}^{-1} = \overline{11}$.

سيمولتان کونگروانت Simultane Kongruenzen

غوښتنه: غواړو ټول $x \in \mathbb{Z}$ پيدا کړو، چې لاندې سيستم حل کړي:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x \equiv b_1(m_1) \\ \vdots \\ a_k x \equiv b_k(m_k) \end{array} \right\} (5.14)$$

ځانگړی حالت: $a_i = 1 \quad \forall i$ د لاندې نینونو یا فرضیو له مخې

لومړی: $m_1, \dots, m_k$ جوړه نسبي لومړنۍ.

دویم: $x \equiv b_i(m_i) \quad \forall i$ د لپاره حلور دی.

جمله 5.2.1: (چینایي پاتېجمله [5.1](#)) (یعنې د پاتو یا باقي مانده وو جمله) : وي دي $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ جوړه نسبي لومړنۍ او $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ په خوښه. نوډا لاندې حلور دی

$$x \equiv a_1(m_1), \dots, x \equiv a_k(m_k) \quad (5.15)$$

او دا په حقیقت کې مودولو $m_1 \cdots m_k$ یواځنی.

بنسونه: وي دي $M := m_1 \cdots m_k, M_i := \frac{M}{m_i}, i = 1, \dots, k$

نو $\text{ggT}(M_i, m_i) = 1$ باور لري، ځکه چې: که p یو لومړنی عدد وي د

$p \mid M_i, p \mid m_i$ سره د یوه $1 \leq i \leq k$ لپاره، نو:

د [3.1.5](#) پسی $p \mid m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$ د یوه $p \mid m_j$ لپاره $j \neq i$ --

تضاد، ځکه چې m_i جوړه لومړنۍ وو د نیونې 1 له مخې.

له دې امله [5.1.1](#) پسی یو حل $M_i x \equiv 1(m_i)$ د $y_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k$ لري. راوړو یا ترڅپړنې نیسو:

ګڼونپوهنه

$$x_0 = \sum_{i=0}^k a_i M_i y_i. \quad (5.16)$$

نو باور لري: x_0 د ورکړ شوي سیستم حل دی (5.15).

وي دې $1 \leq j \leq k$ په خوښه، نو مودولو m_j باور لري

$$x_0 = a_1 M_1 y_1 + \cdots + a_j M_j y_j + \cdots + a_k M_k y_k \quad (5.17)$$

$$\equiv 0 + \cdots + a_j M_j y_j + \cdots + 0 \quad (5.18)$$

$$= a_j \underbrace{M_j y_j}_{\equiv 1(m_j)} \quad (5.19)$$

$$\equiv a_j(m_j). \quad (5.20)$$

دا په دې معنا، چې x_0 د سیستم د k کونګروانتو هر یو پوره کوي.

وي دې $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ د سیستم حلونه، دا په دې

معنا، چې $\alpha \equiv a_i(m_i), \beta \equiv a_i(m_i) \quad \forall i$ باور لري، نو $\alpha - \beta \equiv 0(m_i)$

او $\alpha \equiv \beta(m_i) \quad i = 1, \dots, k$ لپاره. دا چې $m_1, \dots, m_k$ جوړه لومړني دي،

د (4.1.5(6) پسي $\text{kgV}(a_1, \dots, a_k) = m_1 \cdots m_k$ باور لري او

تيک يو حل شتون لري. $\alpha \equiv \beta(m_1 \cdots m_k)$ ، دا په دې معنا، چې $m_1 \cdots m_k$

□

بېلگه 5.2.2 : لاندې سيستم ورکړ شوی:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 2(3) \\ x \equiv 3(5) \\ x \equiv 2(7) \end{array} \right\} (5.21)$$

دا چې $3, 5, 7$ جوړه نسبي لومړني دي، نو $\text{mod } 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ يو يواځنی حل لري

لومړی : د بنووني سره سم: $M = 105, M_1 = 35, M_2 = 21, M_3 = 15$

$$35x \equiv 1(3) \Rightarrow y_1 = 2,$$

$$21x \equiv 1(5) \Rightarrow y_2 = 1,$$

$$15x \equiv 1(7) \Rightarrow y_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_0 = \sum_{i=0}^3 a_i M_i y_i = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 233 \equiv 2(3)$$

دويم: د سکڅيسيف پرځای کولو سره:

$$x \equiv 2(3) \Leftrightarrow x = 2 + 3t \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

کنونپوهنه

$$x \equiv 3(5) \Leftrightarrow 2 + 3t \equiv 3(5) \Leftrightarrow 3t \equiv 1(5) \Leftrightarrow 3t \equiv 6(5) \Leftrightarrow t \equiv 2(5)$$

$$\Leftrightarrow t = 2 + 5s \quad (s \in \mathbb{Z}),$$

$$x = 2 + 3t = 2 + 3(2 + 5s) = 8 + 15s \quad (s \in \mathbb{Z}).$$

نو

$$x \equiv 2(7) \Leftrightarrow 8 + 15s \equiv 2(7) \Leftrightarrow 15s \equiv -6(7) \Leftrightarrow 15s \equiv 15(7)$$

$$\Leftrightarrow s \equiv 1(7) \Leftrightarrow s = 1 + 7u \quad (u \in \mathbb{Z}),$$

$$x = 8 + 15s = 8 + 15(1 + 7u) = 23 + 105u \quad (u \in \mathbb{Z}).$$

نو

دریم : دا په دې معنا، چې $x = 23$ (مودولو) $\text{mod } 105$ د سیستم (5.18) یواځنی حل دی.

د دې ځانګړي حالت تر څنګ، اوس د کرښیزو کونګروانټو ټولیز سیستم تر څېړنې لاندې نیسو

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x \equiv b_1(m_1) \\ \vdots \\ a_k x \equiv b_k(m_k) \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

نیونه یا فرضیه :

1. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. جوړه نسبي لومړني
2. هر د k کونګروانټ حلور دی.

سری کړی شي وښايي:

جمله 5.2.3 : که کرښیزو کونگروانتو یو ټولیز [5.2](#) سیستم د پورته نیونو سره مخ ته ولرو، نو یواځنی ټاکلی حل $\text{mod } m_1 \cdots m_k$ شتون لري .

د لاندې یو په بل پسې ایښوونې له لارې عملي شمېرنې ته

بېلگه 5.2.4 : لاندې د کرښیزو کونگروانتو سیستم دې ورکړ شوی وي:

$$\left. \begin{array}{l} 4x \equiv 12(8) \\ 3x \equiv 5(7) \end{array} \right\} (5.23)$$

لکه ساده چې لیدل کیږي، دواړه نیونې پوره دي، د جملې [5.2.3](#) پسې د حلونو شتون تضمین دی.

$$4x \equiv 12(8) \Leftrightarrow x \equiv 3(2) \Leftrightarrow x \equiv 1(2) \Leftrightarrow x = 1 + 2t \ (t \in \mathbb{Z}),$$

$$3x \equiv 5(7) \Leftrightarrow 3x \equiv 12(7) \Leftrightarrow x \equiv 4(7),$$

$$1 + 2t \equiv 4(7) \Leftrightarrow 2t \equiv 3(7) \Leftrightarrow 2t \equiv 10(7) \Leftrightarrow t \equiv 5(7)$$

نو

$$\Leftrightarrow t = 5 + 7s \ (s \in \mathbb{Z}),$$

$$1 + 2(5 + 7s) = 11 + 14s \ (s \in \mathbb{Z}).$$

نو

دا په دې معنا، چې $x = 11, 25, 39, 53$ مودولو $m_1 \cdot m_2 = 8 \cdot 7 = 56$ اینکونگروانت دي.

ګڼونپوهنه

$$\overline{11}, \overline{25}, \overline{39}, \overline{53} \in \mathbb{Z}_{56}.$$

د سیستم حل (5.20). د ټول ځلونو ټولګه:

پښې یادونه:

... پاتې جمله 5.1 د ز. ک. څخه درېسوه کاله د مخه

.... ټولیز 5.2

د ،، ټولیز،، لاندې د 5.19 ډول یا تیوې سیستم پوهیږو، چېرته چې ټول $\alpha_i = 1$ نه دي.

الجبري کونګروانت Algebraische Kongruenzen

پېژند(تعریف) 5.3.1 : وي دي

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (5.24)$$

يو پولینوم د $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$ سره، نو

$$f(x) \equiv 0(m) \quad (5.25)$$

يو الجبري کونګروانت یل کيږي د درجې n . غوښتونې: ټول $x_0 \in \mathbb{Z}$ د لاندې سره

$$f(x_0) \equiv 0(m). \quad (5.26)$$

یادونه 5.3.2 :

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv 0(m) \Leftrightarrow \overline{a_n x^n + \cdots + a_0} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{a_n x^n} + \cdots + \overline{a_0} = \overline{0}.$$

نو : حلونه د پولینومون صفرځایونه دي

$$\overline{f} = \overline{a_n}x^n + \cdots + \overline{a_1}x + \overline{a_0} \quad \overline{a_0}, \overline{a_1}, \dots, \overline{a_n} \in \mathbb{Z}_m, (5.27)$$

په $\mathbb{Z}_m$ کې.

یادونه 5.3.3 : $x_0 \in \mathbb{Z}$ د $f(x) \equiv 0(m)$ حل دی، نو هر $x_1 \in \overline{x_0}$ هم (له $\mathbb{Z}_m$) حل دی، ځکه چې

$$x_1 \in \overline{x_0} \Rightarrow x_1 = x_0 + km$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + km \equiv x_0(m)$$

د لاس ته راوړنو سره (3) 4.1.6 :

$$\Rightarrow f(x_1) \equiv f(x_0)(m)$$

$$\Rightarrow x_1$$

بېلګه 5.3.4 : لومړی: $x^3 - x \equiv 0(3)$: ټول حلونه دي پيدا شي.

حلونه دي، دا په دي معنا، چې د یادونو 5.3.3 پسې هر ټول عدد حل دی. $x_0 = 0, 1, 2$

دویم: $x^2 - 2 \equiv 0(8)$ د دې عددونو $0, 1, \dots, 7$ څخه کوم یو حل نه دی، دا په دې معنا، چې دا کونګروانت کوم حل نه لري.

د $f(x) \equiv 0(m)$ حل متودونو ته تشریح.

پېژند(تعریف) : که

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

وي، نو

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \quad (5.28)$$

د $f(x)$ (فورمال) مشتق بلل کيږي.

یادونه 5.3.6 : د ټول $\forall x, a \in \mathbb{Z}$ لپاره باور لري :

$$f(x) - f(a) = (x - a)g(x) \quad (5.29)$$

د یوه پولینوم g لپاره د په $\mathbb{Z}$ کې ضریبونو سره، چېرته چې $g(a) = f'(a)$ باور لري..

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

، ځکه چې f پولینوم دی، دا په دې معنا، چې

مشتق $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ ، ځکه چې g پولینوم دی له دې لاس ته راځي، چې ناپېرېکېدونکی دی.)

د حلونو عملي شمېرنه Praktische Berechnung der Lösungen

لومړی : لیم 5.3.7 : $f(x) \equiv 0(m)$ تیک هلته حلور دی، که $f(x) = 0(p_i^{\alpha_i})$ حلور وي د ټولو $i = 1, \dots, k$ لپاره او که $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ د لومړنی ضرب توتنه ونه وي.

ښوونه :

($\Rightarrow$)

که $f(x) \equiv 0(m)$ حلور وي، نو $f(x_0) \equiv 0(m)$ باور لري د یوه $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره، یعنې $f(x) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \forall i = 1, \dots, k$ هم حلور دی ځکه چې $p_i^{\alpha_i} \mid m$ (4.1.5(3)).

($\Leftarrow$)

که $f(x) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \forall i = 1, \dots, k$ حلور وي، نو $f(a_i) \equiv 0(p_i^{\alpha_i})$ باور لري د $a_i \in \mathbb{Z} (i = 1, \dots, k)$ لپاره. په ټولیزه توګه a_i مختلف دي! دا لاندې سیستم تر څېړنې نیسو

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv a_1(p_1^{\alpha_1}) \\ \vdots \\ x \equiv a_k(p_k^{\alpha_k}) \end{array} \right\} (5.30)$$

د چینایي پاتې جملې 5.2.1 له مخې دا سیستم یو حل $a \in \mathbb{Z}$ لري (مودولونه جوړه لومړني دي) دا په دې معنا، چې

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv a_1(p_1^{\alpha_1}) \\ \vdots \\ a \equiv a_k(p_k^{\alpha_k}) \end{array} \right\} \quad (5.31)$$

يعنې د لاس ته راوړنې (3) 4.1.6 له لارې :

$$f(a) \equiv f(a_i)(p_i^{\alpha_i}), i = 1, \dots, k, \quad (5.32)$$

دا په دې معنا، چې $f(a) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \quad \forall i$ ، له دې سره د (5) 4.1.5 پسي

$$f(a) \equiv 0(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}). \quad (5.33)$$

يعنې: $a \in \mathbb{Z}$ د ورکړ شوي کونګروانت حل دی.

دويم: د $f(x) \equiv 0(p^n)$ لړمړنۍ عدد د حل متود يا لار ، $n \in \mathbb{N}$ په خوښه p د حلونو مودولو p کې و حلونو مودولو p^2 ته ؛ له دوی څخه و حلونو مودولو p^3 ته، ... په ،، مخ ته تلنه،، کې پروت دی،... تر هغې چې سړی حل مودولو p^n لاس ته راوړي:

$$f(x) \equiv 0(p) \quad 0, 1, \dots, p-1 \text{ د } x \text{ په ځای کوني يا ايښووني له لارې د}$$

ټول حلونه پيدا د $f(x) \equiv 0(p^{n-1})$ ټول حلونه دي معلوم وي ، نو باور لري:

لېما . وي دي $x_0 \in \mathbb{Z}$ د $f(x) \equiv 0(p^n)$ حل ، نو باور لري :

$$x_0 = a + tp^{n-1}, \quad (5.34)$$

چېرته چې $a, t \in \mathbb{Z}$ د $f(a) \equiv 0(p^{n-1})$ سره دی.

ښوونه:

د $f(x_0) \equiv 0(p^n)$ له امله هم باور لري،

يعني x_0 له نيونې سره سم پېژندلی دی ، $(x_0 \in \bar{a} \pmod{p^{n-1}})$ د يوه $a \in \mathbb{Z}$ لپاره ، يعني $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $t \in \mathbb{Z}$ لپاره $\square$

نه د هر $t \in \mathbb{Z}$ لپاره دا $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $f(x) \equiv 0(p^n)$ حل دی، دا کوم $t \in \mathbb{Z}$ دي؟

لېما 5.3.9: $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $a, t \in \mathbb{Z}$ او $f(a) \equiv 0(p^{n-1})$ سره ټيک

هله د $f(x) \equiv 0(p^n)$ يو حل دی، که $t \in \mathbb{Z}$ د کرښيز کونګروانځ يا ورته والي حل وي؟

$$f'(a)x + \frac{f(a)}{p^{n-1}} \equiv 0(p) \quad (5.35)$$

ښوونه:

 $(\Rightarrow)$

وي دي $x_0 = a + tp^{n-1}$ د $f(a) \equiv 0(p^{n-1})$ سره د $f(x) \equiv 0(p^n)$ يو حل، د ښوول دي: دا t د کرښيز ګونګرواينځ حل دی

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0) = tp^{n-1}g(x_0) \Rightarrow \quad (5.36)$$

$$\Rightarrow f(a) + tp^{n-1}g(x_0) = f(x_0) \equiv 0(p^n). \quad (5.37)$$

د $p^{n-1} \mid f(a)$ (ښوونه يا فرضيه) او $\text{ggT}(p^{n-1}, p^n) = p^{n-1}$ له امله لاس ته راځي:

$$\frac{f(a)}{p^{n-1}} + tg(x_0) \equiv 0(p). \quad (5.38)$$

دا چې $x_0 = a + tp^{n-1}$ دی، نو $p \mid x_0 - a$ باور لري: ، يعني $x_0 \equiv a(p)$ ،
د (3) 4.1.6 پسي $g(x_0) \equiv g(a)(p)$ باور لری (ځکه چې g پولینوم دی)، دا په دې م عنا، چې

$$g(x_0) \equiv f'(a)(p) \Rightarrow \frac{f(a)}{p^{n-1}} + tf'(a) \equiv 0(p). \quad (5.39)$$

 $(\Leftarrow)$

وي دي $f'(a)x + \frac{f(a)}{p^{n-1}} \equiv 0(p)$ $t \in \mathbb{Z}$ د حل، دا په دي معنا، چي باورلري:

$$f'(a) \cdot t + \frac{f(a)}{p^{n-1}} \equiv 0(p). \quad (5.40)$$

بنايو؛ $f(x) \equiv 0(p^n)$ $x_0 = a + tp^{n-1}$ د يو حل دی.

لاس ته راځي: $p^{n-1}f'(a)t + f(a) \equiv 0(p^n)$ $x_0 - a = tp^{n-1}$ د له امله باور لري:

$$f'(a)(x_0 - a) + f(a) \equiv 0(p^n), \quad (5.41)$$

يعني $f(x_0) - f(a) + f(a) \equiv 0(p^n)$ ، ځکه چي

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0) \equiv tp^{n-1}f'(a)(p^n). \quad (5.42)$$

له دي سره $f(x_0) \equiv 0(p^n)$ ، دا په دي معنا، چي

$$x_0 = a + tp^{n-1} \quad (5.43)$$

د $f(x) \equiv 0(p^n)$ حل دی.

لومړی: $f(x) \equiv 0(p_i^{\alpha_i})$ د $a_i \in \mathbb{Z}$ ټول حلونه د هر
 $i = 1, \dots, k$ ($m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$) لپاره معلوم دي، نو بیا سړی په خوښه یو k -
 $f(a_i) \equiv 0(p_i^{\alpha_i}) \forall i$ ټول یا k -گون جوړوي، چېرته چې ، او دا سیستم باورلري:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv a_1(p_1^{\alpha_1}) \\ \vdots \\ x \equiv a_k(p_k^{\alpha_k}) \end{array} \right\} (5.44)$$

یم: نو دا سیستم بیا د ضرب $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = m$ مودولو یواځنی حل $a \in \mathbb{Z}$
 $f(x) \equiv 0(m)$ $a \in \mathbb{Z}$ هم د یو حل دی.

که 5.3.10:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 6 \equiv 0(135). 135 = 5^1 \cdot 3^3, p_1 = 5, \alpha_1 = 1, p_2 = 3, \alpha_2 = 3$$

لومړی: حل $\text{mod } 5^1$:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - g \equiv 0(5) \quad \text{فقط حل } 1(-0, -2, -3, -4) \text{ لري، دا په دې}$$

م عنا، چې $\alpha_{11} = 1$. مخ ته تلنه یې اړینه نه ده، ځکه چې $\alpha_1 = 1$.

دویم: حل $\text{mod } 3^3$:

لومړی $\text{mod } 3^1$:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 6 \equiv 0(3) \quad \text{حل } 0, 2 \text{ لري.}$$

له دې څخه $\bmod 3^2$:

$a = 0$ مخ ته تلنه :

$$f(a) = f(0) = -6, f'(a) = -2$$

يعني بايد حل شي:

$$f'(0)x + \frac{f(0)}{p^1} \equiv 0(p), (5.45)$$

$$-2x + (-2) \equiv 0(3) \Rightarrow t = -1 \quad \text{دا په دې معنا، چې او}$$

$$a_1 = a + tp^{n-1} =$$

$$0 + (-1)3 = -3$$

له دې څخه $\bmod 3^3$:

$$f(-3) = -9, f'(-3) = 13 \Rightarrow 13x - \frac{9}{3^2} \equiv 0(3)$$

دا په دې معنا، چې

$$13x \equiv 0(3) \quad \text{يعني،} \quad x \equiv 1(3) \quad \text{يعني،} \quad t = 1.$$

$$a_{21} = a_1 + tp^{3-1} = -3 + 1 \cdot 9 = 6. (5.46)$$

بېرته $\bmod 3^2$:

ګڼونپوهنه

د $a = 2$ مخ ته بیونه یا مخ ته تلنه:

$$a_1 = a + tp^{2-1}$$

، چېرته چې t د

$$f'(a)x + \frac{f(a)}{p^{a-1}} \equiv 0(p); (5.47)$$

حل دی.

$$f'(2) = 18, f(2) = 0 \quad , \quad \text{یعني حل کوو:} \quad 18x + \frac{6}{3} \equiv 0(3)$$

، دا په دې معنا، چې

$$18x \equiv -2(3)$$

$$\text{د } \text{ggT}(18, 3) = 3 \nmid -2 \text{ له امله لاس ته راځي:}$$

کومه $t \in \mathbb{Z}$ شتون نه لري، ښي هم a_1 شتون نه لري، داپه دې معنا، چې د $a = 2$ و یو $\text{mod } 3^2$ حل ته مخ ته بیونه نه شته، یعني هم $\text{mod } 3^3$ حل شتون نه لري.

$$\begin{array}{cc} \text{mod } 5^1 & \text{mod } 3^1 \\ : & : \\ 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}$$

↓ ↓

$$\begin{array}{c} \text{mod } 3^2 \\ : \\ -3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{مخ ته بیونه ناشوني ده} \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{c} \text{mod } 3^3 \\ : \\ 6 \end{array}$$

لومړۍ: د $\text{mod } 5^1$ او $\text{mod } 3^3$ حلونو ټولګه: $(1, 6)$ و لاندې سیستم ته:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1(5) \\ x \equiv 6(3^3) \end{array} \right\} (5.48)$$

وېم:

$$x = 1 + 5t \Rightarrow 1 + 5t \equiv 6(3^3) \Rightarrow 5t \equiv 5(27) \xrightarrow{\text{ggT}(5,27)=1} t \equiv 1(27)$$

له دې سره: $x = 1 + 5t = 1 + 5 \cdot 1 = 6 \Rightarrow x = 6$ یواځنې $\text{mod } 135$
ناګونګروانځ حل دی.

د الجبري ګونګرواینځو دحلونو ګڼون یا تعداد
بېلګه 5.3.11:

$$5x \equiv 10(30) : \text{ggT}(5, 30) = 5 \mid 10 \Rightarrow \exists 5 \text{mod } 30 ,$$

$$x^2 \equiv 2(8) : ,$$

$$x^2 \equiv 1(8) : ,$$

ګڼونپوهنه

$$x^3 - x \equiv 0(3) : .$$

يادونه 5.3.12: په څرګنده توګه په ټوليز ډول ناشوني دي، چې د الجبري ويناو د حلونو په تعداد څه ووايو. او همداسې لاندې جمله هم د تعجب وړ ده، هغه چې د ځانګړي حالت لپاره، چې د لومړني عدد مودولو دي، مګر سره له دې پوښتنې ته ځواب، چې څومره حلونه شتون لري، ولرو:

جمله (لاګرانژ (1736-1813) (5.3 (5.3.13 : وي دي

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}$$

د $grad f = n$ ($i = 1, \dots, n$) سره او يو لومړنی عدد p دي ورګر شوی وي. که p ټول $a_i, i = 1, \dots, n$ ونه وېشي، نو $f(x) \equiv 0(p)$ خورا زيات $grad f = n(p)$ اينګونګرواينټ حلونه لري.

بنسونه: سړی کړی شي له وړاندې ونيسي چې $p \nmid a_n$ ، داچې پرته له دې به باور ولري: $a_n x^n \equiv 0(p)$ ، او کونګرواينځ ه يو کوچنی د رجه ولري.

$n = 1$:

$$a_1 x + a_0 \equiv 0(p) \quad \text{wobei} \quad p \nmid a_1; \quad (5.49)$$

که $\text{ggT}(a_1, p) \mid -a_0$ ، نو باور لري، چې $\text{ggT}(a_1, p) = 1 \bmod p$ اينګونګرواينځ حلونه شتون لري.

$n - 1 \rightarrow n$:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0(p) \quad \text{mit} \quad (5.50)$$

$$\text{ggT}(a_n, p) = 1, p \nmid a_n.$$

یا حل نه شته، چې بیا کار تمامدی.

یا: $a \in \mathbb{Z}$ دې له هغو څخه یو حل وي، د پورته پسي باور لري:

$$f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0) \quad (5.51)$$

د $f(x) \equiv 0(p)$ د هر د ورپسي حل $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره، يعنې:

$$(x_0 - a)g(x_0) \equiv 0(p) \Rightarrow p \mid (x_0 - a)g(x_0); \quad (5.52)$$

د [3.1.5](#) له مخې لاس ته راځي $p \mid x_0 - a$ یا $p \mid g(x_0)$. که $p \mid x_0 - a$ وي،

نو باور لري $x_0 \equiv a(p)$ ، دا په دې معنا، چې نور پسي اینکونگروانت حلونه نه شته..

که $g(x_0) \equiv 0(p)$ وي، له کوم سره چې د $f(x_0) - f(a) = (x_0 - a)g(x_0)$ له امله

$\text{grad } g = n - 1$ پسي a_n د خوراجک ضريب هم دی! د

وراندنيوني له مخې باور لری $p \nmid a_n$.

ګڼونپوهنه

د ایدکشن وړاندنږي له مخې د $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره زیات له زیاته $n-1$ امکانات)
 $f(x) \equiv 0(p) \pmod{p}$ شتون لري. له دې سره زیات له زیاته
 $(n-1) + 1 = n \pmod{p}$ اینګونګروانت حلونه لري.

لومړني پاتي ټولګي ګروپونه $\pmod{m}$

Die prime Restklassengruppe $\pmod{m}$

د ابل ګروپ $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ Die abelsche Gruppe

د 4.4.5 پسي یونونه یا واحدونه (دا په دې معنا، چې د معکوس کیدونکو توکو

ضرب) ټیک د لومړني پاتي ټولګي $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ دي، دا په دې معنا، چې هر د
 $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره وي دې په $\mathbb{Z}_m^*$ کې د ټولو واحدونو ډېری یا ست. نو
 باور لري:

لېما 6.1.1 : $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ یو ابل ګروپ جوړوي.

بڼوونه:

لومړی: که $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ وي، نو $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ دی، نو $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ دی، خکه
 $\bar{a}' \cdot \bar{b}' \in \mathbb{Z}_m$ د ځنو لپاره، یعنې
 $\bar{a} \cdot \bar{a}' = \bar{1}, \bar{b} \cdot \bar{b}' = \bar{1}$

$$(\bar{a} \cdot \bar{a}') \cdot (\bar{b} \cdot \bar{b}') = \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}, (6.1)$$

دویم: دا په دې معنا، چې $(\bar{a}\bar{b})(\bar{a}'\bar{b}') = \bar{1}$ ، همداسې

$$(\overline{a'b'})(\overline{ab}) = (\overline{a'a})(\overline{b'b}) = \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}; (6.2)$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \in \mathbb{Z}_m^*$$

دویم: یعنی د تعریف له مخې باور لري

دریم: اسوحياتيويټي روښانه ده، ځکه چې په $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ کې پوره ده، او باور لري:

$$\mathbb{Z}_m^* \subseteq \mathbb{Z}_m$$

څلورام: کموناتيويټي روښانه ده، ځکه چې همداسې له $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ را پاتې ده.

پنځم: وي دي $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ ، نو يو $\overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ شتون لري، د $\overline{a}\overline{b} = \overline{1}$ سره، يعني $\overline{b}\overline{a} = \overline{1}$ (د کموناتيويټي له امله)، دا په دي معنا، چې $\overline{b}$ هم د $\mathbb{Z}_m^*$ يو يوون يا واحد دی، او له دي سره لاس ته راځي:

$$\overline{b} \in \mathbb{Z}_m^*. (6.3)$$

پېژند (تعريف) 6.1.2: د ابل گروپ $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ لومړنی پاتېټولگي گروپ $\text{mod } m$ بلل کيږي.

بېلګه:

$$\mathbb{Z}_7^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}, \mathbb{Z}_{12}^* = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$$

$\mathbb{Z}_m^*$ څومره توکي لري؟

په ټوليزه توګه د يوه ګروپ $(G, \cdot)$ د توکو تعداد يا ګڼون د G نظم بلل کيږي. سومبولیک $|G|$.

پېژند يا تعريف 6.1.4 : د $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ نظم د $\varphi(m)$ سره ښوول - يا په نڅښه کيږي، تابع يا بلواک

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \varphi(n) \mapsto |\mathbb{Z}_m^*| \quad (6.4)$$

د اوپلر $Euler$ φ - تابع بلل کيږي.

ليما 6.1.5 : وي دې $m \in \mathbb{N}$ په خوښه، نو د $k \in \mathbb{N}$ ګڼون يا تعداد $\varphi(m)$ دی د $1 \leq k \leq m$ او د $ggT(k, m) = 1$ سره .

ښوونه : $\mathbb{Z}_m = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m} = \bar{0}\}$

$\bar{k} \in \mathbb{Z}_m^* \xLeftrightarrow{4.4.5} \text{mod } m$ لومړنی پاتې ټولګی دی

$$\Leftrightarrow ggT(k, m) = 1,$$

دا په دې معنا، چې په $\mathbb{Z}_m^*$ کې د توکو تعداد يا ګڼون د k د تعداد سره برابر دی، $ggT(k, m) = 1$ د $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m$ سره . $\square$

پسې راتلنه يا نتيجه 6.1.6 : وي دي $p \in \mathbb{P}$ يو په خوښه لومړنی ګڼ يا عدد، نو
 $\varphi(p) = p - 1$
 باور لری:

د شمیرني ته $\varphi(m)$ *Zur Berechnung von*
 پېژند يا تعريف 6.1.7 : د ټولو اعداد يا د ټول اعدادو يوه ډېری لومړنس پاتي سیستم
 $\bmod m$ بلل کيږی، که دا له هر لومړنی ټولګي $\bmod m$ ټيک يو توکی ولري.

ليما 6.1.8 : يو لومړنی پاتي سیستم ټيک $\bmod m$ ټيک $\varphi(m)$ توکي لري، ځکه
 $\varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^*|$ ، يعنې لومړني پاتي
 چې د 6.1.5 پسې ټيک يوونونه يا واحدونه
 $\bmod m$ شتون لري.
 بېلګه 6.1.9 :

لومړی : $m = 6\{0, 1, \dots, 5\}$ يو پوره پاتي سیستم دی، $\{1, 5\}$ يو لومړنی پاتي
 سیستم دی، يعنې : $|\mathbb{Z}_6^*| = 2$ ، دا په دې معنا، چې $\varphi(6) = 2$.
 دويم:

$$m = 5\{0, 1, \dots, 4\}$$

يو پوره پاتي سیستم دی، $\{1, 5\}$ يو لومړنی پاتي سیستم دی، يعنې $|\mathbb{Z}_6^*| = 2$ ، دا
 په دې معنا، چې $\varphi(6) = 2$.

جمله 6.1.10 : وي دي $\{r_1, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ ، $m, n \in \mathbb{N}, \text{ggT}(m, n) = 1$ يو

لومړنی پاتې سیستم $\text{mod } m$ دی، او $\{s_1, \dots, s_{\varphi(n)}\}$ يو لومړنی پاتې سیستم $\text{mod } n$ دی، نو

$$T = \{nr_i + ms_j \mid i = 1, \dots, \varphi(m), j = 1, \dots, \varphi(n)\} \quad (6.5)$$

يو لومړنی پاتې سیستم $\text{mod } m \cdot n$ دی.

بنوونه: $\{r_1, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ و يوه پوره سیستم $\text{mod } m$ ته پوره يا تکميل کړی:

$$\{r_1, \dots, r_{\varphi(m)}, r_{\varphi(m)+1}, \dots, r_m\} \quad (6.6)$$

او $\{s_1, \dots, s_{\varphi(n)}\}$ و يوه پوره پاتې سیستم $\text{mod } n$ ته پوره کړی:

$$\{s_1, \dots, s_{\varphi(n)}, s_{\varphi(n)+1}, \dots, s_n\}. \quad (6.7)$$

د [4.3.8](#) پسي

$$R = \{nr_i + ms_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} \quad (6.8)$$

يو پوره پاتې سیستم $\text{mod } m \cdot n$ دی، په ځانګړې توګه ټول ګڼونه يا عددونه له R يعني هم له T ټول عددونه، انګونګروانځ $\text{mod } mn$ دي.

و ښايی:

که $a \in R$ او $\text{ggT}(a, mn) = 1$ وي، نو $a \in T$ باور لري.

د $a \in R$ له امله $a = nr_i + ms_j$ باور لري د ځنو $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ لپاره. باور لري: $ggT(r_i, m) = 1, ggT(s_j, n) = 1$ ، ځکه چې:

نيسو، چې $ggT(r_i, m) \neq 1$ ، نو يو لومړنی گڼ يا عدد p شتون لري د لاندې سره

$$\left. \begin{matrix} p \mid r_i, \\ p \mid m \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} p \mid nr_i, p \mid ms_j \Rightarrow p \mid \underbrace{nr_i + ms_j}_{a=} \\ p \mid mn \end{matrix} \right\} \Rightarrow ggT(a, mn) \neq 1 \quad (6.9)$$

-- تضاد (په ورته توگه: $ggT(s_j, n) = 1 \Rightarrow nr_i + ms_j \in T$ د T تعريف له مخې).

وښايي:

$$a \in T \quad \text{که وي، نو باور لري:} \quad ggT(a, mn) = 1.$$

د $a \in T \subseteq R$ له امله باور لري:

$$a = nr_i + ms_j \quad (1 \leq i \leq \varphi(m), 1 \leq j \leq \varphi(n)); \quad (6.10)$$

نيسو، چې $ggT(a, mn) \neq 1$ ، نو يو لومړنی گڼ يا عدد p شتون لري د لاندې سره:

$$p \mid a = nr_i + ms_j \wedge p \mid mn. \quad (6.11)$$

له دې سره لاس ته راځي $p \mid m$ يا $p \mid n$ ،

ګڼونپوهنه

بې له ټوليزو بنديزونو يا محدوديتونو دې $p \mid m$ وي (ورته $p \mid n$ نو $p \mid ms_j$ او $p \mid a$ باور لري، يعنې $p \mid nr_i$ ، له دې سره د [3.1.5](#) له مخې $p \mid n \vee p \mid r_i$ ، باور لري $p \nmid n$ ، ځکه چې پرته له دې $\text{ggT}(m, n) \neq 1$ له دې امله $p \mid r_i$ ، لاس ته راځي، د $p \mid m$ سره لاس ته راځي $\text{ggT}(r_i, m) \neq 1$ - تضاد، ځکه چې r_i د لومړني پاتې سيستم $\text{mod } m$ توکي دی.

يعنې: T يو لومړنی پاتې سيستم $\text{mod } mn$ دی. $\square$

کورولار 6.1.11: وي دې $\text{ggT}(m, n) = 1$ د $m, n \in \mathbb{N}$ سره، نو باور لري:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n). \quad (6.12)$$

بڼوونه: د [6.1.10](#) له مخې

$$T = \{nr_i + ms_j \mid i = 1, \dots, \varphi(m), j = 1, \dots, \varphi(n)\} \quad (6.13)$$

يو لومړنی پاتې سيستم $\text{mod } mn$ دی، نو $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$ توکي لري. دا چې هر پاتې سيستم همدا اوس $\varphi(mn)$ توکي لري، نو لاس ته راځي:

$$\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(m \cdot n)$$

$\square$

يادونه 6.1.12: يو تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ د لاندې خويونو سره

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \forall m, n : \text{ggT}(m, n) = 1 \quad (6.14)$$

ضريبي يا خلیزه تابع بېلیري.

له دې سره د اویلر φ -تابع د یوه ضريبي تابع بېلګه ده (کاپیتل يا برخه 11 وګورئ).

پسې راتلنه يا ترې لاس ته راوړنه 6.1.13 : وي دې $m \in \mathbb{N}$ او $\text{ggT}(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}) = 1$ $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ د لومړنيضريب توتۀ ونه، نو باور لري ، یعنې

$$\varphi(p_i^{\alpha_i} \cdot p_j^{\alpha_j}) = \varphi(p_i^{\alpha_i}) \cdot \varphi(p_j^{\alpha_j}). \quad (6.15)$$

له دې سره د اندکشن له لارې :

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_k^{\alpha_k}), \quad (6.16)$$

دا په دې معنا، چې د $\varphi(m)$ شمېرنه د $\varphi(p^n)$ په شمېرنه ور اړول کيږي، د لومړني عدد p او $n \in \mathbb{N}$ لپاره.

جمله 6.1.14 : وي دې p یو لومړنی ګڼ يا عدد، $k \in \mathbb{N}$ ، نو باور لري::

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} \quad (p^0 := 1). \quad (6.17)$$

کنونپوهنه

بنوونه : $R = \{1, 2, \dots, p^k\}$ دې یو پوره پاتي سیستم $\text{mod } p^k$ وي. لومړی هغه $a \in R$ پیدا کړی، چې و p^k ته نسبي لومړني نه وي:

$$\text{ggT}(a, p^k) \neq 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\exists q \in \mathbb{P} : q \mid a, q \mid p^k \stackrel{3.1.5}{\Rightarrow} q \mid p \Rightarrow q = p \Rightarrow p \mid a, \quad (6.18)$$

$$p \mid a$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{ggT}(a, p^k) \geq p > 1 \Rightarrow \text{ggT}(a, p^k) \neq 1. \quad (6.19)$$

$\text{ggT}(a, p^k) \neq 1 \Rightarrow$	
$\exists q \in \mathbb{P} : q \mid a, q \mid p^k \stackrel{3.1.5}{\Rightarrow} q \mid p \Rightarrow q = p \Rightarrow p \mid a,$	(6.18)
$p \mid a \Rightarrow \text{ggT}(a, p^k) \geq p > 1 \Rightarrow \text{ggT}(a, p^k) \neq 1.$	(6.19)

دا په دې معنا، چې $a \in R$ ، کوم چې p^k ته نسبي لومړني نه دي، ټیک هغه دي د $p \mid a$ سره. یعنې غوښتونې: ټول $a \in R$ ، $p \mid a$ ، دا په دې معنا، چې $a = p \cdot t$ ($t = 1, 2, \dots$)

د $1 \leq a \leq p^k$ ($a \in R$) له امله باور لري $1 \leq pt \leq p^k$ ، يعنې
 بايد $1 \leq t \leq p^{k-1}$ باور ولري.

برعکس هر $t \in \mathbb{N}$ د $1 \leq t \leq p^{k-1}$ سره هم $p \mid pt = a$ پوره کوي. يعنې
 ټيک p^{k-1} ګڼونه $a \in R$ شتون لري د $p \mid a$ سره، يعنې

$$\text{ggT}(a, p^k) \neq 1$$

$$\Rightarrow \exists p^k - p^{k-1}a \in R : \text{ggT}(a, p^k) = 1$$

. له دې سره د پيژند له مخې هم باور لري: $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. $\square$

کورولار يا وړه جمل 6.1.15: وي دې $m \in \mathbb{N}, m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ په لومړنيو
 ضريبونو ټوټه کونه، نو باور لري:

$$\varphi(m) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}). \quad (6.20)$$

(دا په دې معنا، چې په په پاتېټولګي کړی (رين، حله) $\text{mod } m$ کې د يونونو يا
 واحدونو ګڼون يا تعداد شتون لري).

بېلګه:

لومړی:

$$m = 25m = 5^2 \Rightarrow \varphi(25) = 25 - 5 = 20$$

يعنې $|\mathbb{Z}_{25}^*| = 20$ ، دا په دې معنا، چې په $\mathbb{Z}_{25}$ کې ټيک 20 يونونه يا واحدونه
 شتون لري.

دویم:

$$m = 72m = 2^3 3^2 \Rightarrow \varphi(72) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3) = 4 \cdot 6 = 24$$

یعنې $|\mathbb{Z}_{72}^*| = 24$ دا په دې معنا، چې په $\mathbb{Z}_{72}$ کې ټیک 24 یونونه یا واحدونه شتون لري.

د اویلر جمله

Der Satz von Euler

لیما 6.1.17: وي دې $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ یو پای، ابل ګروپ، نو باور لري:

لومړۍ: د هر $a \in G$ لپاره باور لري $ag_i \neq ag_j \quad \forall i \neq j$,

دویم: د هر $a \in G : a^n = e$ لپاره باور لري، د کوم سره چې e د $(G, \cdot)$

یوون یا واحد دی، او $n = |G|$ دی.

بنسونه:

یو ته:

وړاندنیونه $ag_i = ag_j$ د یوه $a \in G, i \neq j$ لپاره، نو د $a^{-1} \in G$: سره د ضربولو له لارې لاس ته راځي:

$$a^{-1}ag_i = a^{-1}ag_j, (6.21)$$

دا په دې معنا، چې $i \neq j$ د $g_i = g_j$ سره. متضاد!

دويم ته:

$e(g_1 \cdots g_n) = g_1 \cdots g_n$ د لومړي ټکي له مخې $ag_i \neq ag_j$ باور لري، يعنې د $i = 1, \dots, n$ لپاره بېرته n مختلف توکي لاس ته راځي. له دې سره باور لري

$$g_1 \cdots g_n = (ag_1)(ag_2) \cdots (ag_n) = a^n(g_1 \cdots g_n), \quad (6.22)$$

همداسې

$$e(g_1 \cdots g_n)(g_1 \cdots g_n)^{-1} = a^n(g_1 \cdots g_n)(g_1 \cdots g_n)^{-1}. \quad (6.23)$$

له دې سره تړلې $e = a^n, n = |G|$ راځي. □

جمله 6.1.18: (اويلر 6.1) وي دې $a, m \in \mathbb{N}, \text{ggT}(a, m) = 1$ ، نو باور لري:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(m). \quad (6.24)$$

بنسونه: د $\text{ggT}(a, m) = 1$ له امله باور لري: $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ لومړنی پاتې ټولګی $\text{mod } m$ دی، يعنې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ باور لري. د $|Z_m^*| = \varphi(m)$ له امله د تعريف له مخې، د 6.1.17 له مخې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \bar{a}^{\varphi(m)} &= \bar{1}, \\ \text{d.h.} \quad \overline{a^{\varphi(m)}} &= \bar{1}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

داسې چې $a^{\varphi(m)} \equiv 1(m)$ باور لري. $\square$

يو ځانګړی غوره حالت او د [6.1.18](#) مشهور غوره حالت غواړو په لاندې کې ځانله تر څېړنې لاندې ونیسو:

کوروار 6.1.19: (کوچنی فرمات) د ټولو $a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P}$ لپاره باور لري:

$$a^p \equiv a(p). \quad (6.26)$$

ښوونه: دی $\text{ggT}(a, p) = 1$ ، نو د [6.1.18](#) له مخې باور لري: $a^{\varphi(m)} \equiv 1(p)$ او د $\varphi(p) = p - 1$ له امله لاس ته راځي:

$$a^{p-1} \equiv 1(p), \quad (6.27)$$

نو په ځانګړې توګه $a^p \equiv a(p)$.

که وي $\text{ggT}(a, p) \neq 1$ ، نو باور لري $a = pt, p \mid a \Rightarrow a^p \equiv 0 \equiv a(p)$

..جمله 6.1.20: (وېلسن [6.2](#) 1741-1793) : د یوه پیدایښتي ګڼ یا طبیعي عدد p لپاره باور لري:

$$(6.28) \quad \begin{aligned} & p \text{ لومړنی عدد دی} \\ & \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1(p). \end{aligned}$$

ښوونه:

$(\Rightarrow)$

وي دي $p \in \mathbb{N}$ لومړنی عدد. که وي $p = 2$ ، نو باور لري:

$$(2 - 1)! = 1 \equiv -1(2), (6.29)$$

نو غوښتنه ټيک ده.

وي دي $p > 2$ ، نو د ټولو $a \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري د

سر. د [6.1.19](#) له مخې د دي a لپاره لاس

$$a^{p-1} \equiv 1(p)$$

ته راځي:

له دي سره ټول عددونه $1 \leq a \leq p - 1$ د الجبري کونگروانځ

حلونه دي. د [5.3.13](#) له مخې کونگروانځ $x^{p-1} \equiv 1(p)$ خورازيات $p - 1$ د

پولينوم درجه ده $\text{mod } p$ بنکونگروانت حلونه، له دي سره لاس ته راځي:

$1, 2, \dots, p - 1$ همدا اوس ټول انکونگروانت $\text{mod } p$ حلونه دي.

پسي الجبري کونگروانځ

$$(x - 1)(x - 2) \cdots (x - (p - 1)) \equiv 0(p)$$

$\text{mod } p$ انکونگروانت حلونه $1, 2, \dots, p - 1$ لري. د $\text{grad} = p - 1$ له امله

$1, 2, \dots, p - 1$ ټيک $\text{mod } p$ انکونگروانت حلونه دي (د [5.3.13](#) سره د

ضریب دی، نو x^{p-1} یو دی، نو د p له لارې پروېشونې نه ده. د ضربولو وروسته
سری یو د $p-1$ درجې پولینوم د مطلق لري

$$c_0 = (-1)(-2) \cdots (-(p-1)) = (-1)^{p-1}(p-1)! = (p-1)! \quad (6.30)$$

سره لاس ته راوړي، ځکه چې $p > 2$ ، نو ناجوره یا طاق دی.

له $x^{p-1} \equiv 1(p)$ څخه د دې کونګروانتونو کمون له لارې سری یو الجبري
کونګروانت لاس ته راوړي

$$f(x) \equiv 0(p), \quad \text{grad } f \leq p-2 \quad (6.31)$$

او مطلق غری $-1 - c_0 = -1 - (p-1)!$. دا کونګروانت زیات له زیاته
 $\text{grad } f \leq p-2 \pmod{p}$ انګونګروانت حلونه لري، که p نه د f ټول ضریبونه
وېشي (5.3.13) مګر: $1, 2, \dots, p-1$ $p-1$ انګونګروانت $\pmod{p}$ حلونه دي
. له دې سره لاس ته راځي: f د p ټول کونګروانتونه وېشي، په ځانګړې توګه
 $-1 - c_0$ ، دا په دې معنا، چې

$$p \mid -1 - c_0 \Rightarrow -1 - c_0 \equiv 0(p) \Rightarrow c_0 \equiv -1(p), \quad (6.32)$$

دا په دې معنا، چې $(p-1)! \equiv -1(p)$

($\Leftarrow$)

وي دي $n \in \mathbb{N}$ د $(n-1)! \equiv -1(n)$ سره نيسو، چي $n \notin \mathbb{P}$ له دي .
 سره يو لومړنی ګڼ p د $p \mid n$ سره او $2 \leq p \leq n-1$ سره شتون لري، له دي سره

$$p \mid (n-1)! \Rightarrow (n-1)! \equiv 0(p). \quad (6.33)$$

د $(n-1)! \equiv -1(n)$ له امله د $p \mid n$ سره لاس ته راځي، چي
 $(n-1)! \equiv -1(p)$ له دي سره لاس ته راځي .

$$0 \equiv (n-1)! \equiv -1(p) \Rightarrow p \mid 0 - (-1) = 1 \quad (6.34)$$

--- تضاد ($p > 1, p \in \mathbb{P}$) $\square$

يادونه 6.1.21 : د ويلسن (6.1.20) 1741-1793) جملې له امله دا تروسه
 يواځنی څرګنده يا معلوم د لومړنيو ګڼو قضيه انځوروي!

د $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ جوړښت Struktur von $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$

د $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ نظم د اويلر φ -تابع په څخه معلوم دی: $|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$.

د ګروپ تيوري له مخې خورا ځانګړي ګروپونه داسې په نامه ،، ځيوکليکي،، ګروپونه دي:

پېژند(تعريف) 6.2.1 : يو پای ګروپ $(G, \cdot)$ ځيوکليکي دی، که

ګڼونپوهنه

$$G = \{a, a^2, \dots, a^{|G|} = e\} \quad (6.35)$$

د لږ تر لږه یوه $a \in G$ لپاره باور ولري. یو توکی $a \in G$ د دې خوي سره د $(G, \cdot)$ تولیدونکی توکی بلل کیږي.

یادونه 6.2.2:

لومړی: د یوه ځیوکلیکي ګروپ $(G, \cdot)$ هر توکی g کیدی شي د یوه کره یا همغه کلک توکي $a \in G$ د توان په توګه ولیکل شي: $g = a^n$ د یوه $n \in \mathbb{N}$ لپاره د $1 \leq n \leq |G|$ سره.

دویم: هر ځیوکلیکي ګروپ $(G, \cdot)$ د ابل ګروپ دی.

$$\begin{aligned} & (g, h \in G \Rightarrow g = a^m, h = a^n) \\ & \text{د یوه تولیدي توکي لپاره} \\ & a \in G \Rightarrow g \cdot h = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n \cdot a^m = h \cdot g \end{aligned}$$

بیلګه 6.2.3:

لومړی: $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ ځیوکلیکي دی:

$$\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \quad (\varphi(5) = 4) \quad \bar{2}^1 = \bar{2}, \bar{2}^2 = \bar{4}, \bar{2}^3 = \bar{3}, \bar{2}^4 = \bar{1} \Rightarrow a = \bar{2}$$

د $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ یو تولیدي سیستم دی.

همداسې: $\bar{3}^1 = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{4}, \bar{3}^3 = \bar{2}, \bar{3}^4 = \bar{1}$
 ټولیدي سیستم دی. $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ یو همدا $a = \bar{3}$ نو د

دویم: $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$ ځیوکلکي نه دی:

$\mathbb{Z}_8^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ ($\varphi(8) = \varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 4$) $\bar{3}^2 = \bar{1}$
 دا په دې $\bar{5}^2 = \bar{1}, \bar{7}^2 = \bar{1}$
 معنا، چې $\bar{3}$ ټولیدي نه دی، همداسې باور لري:

دریم: $(\mathbb{Z}_2^*, \cdot)$ او $(\mathbb{Z}_4^*, \cdot)$ ځیوکلکي نه دي

$\mathbb{Z}_2^* = \{\bar{1}\} - \text{trivial}; \mathbb{Z}_4^* = \{\bar{1}, \bar{3}\}, \bar{3}$ ساده دی،
 $\mathbb{Z}_2^* = \{\bar{1}\} - \text{trivial}; \mathbb{Z}_4^* = \{\bar{1}, \bar{3}\}, \bar{3}$ ټولیدي توکی دی)

اوس نو کوم $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ ځیوکلکي دی؟

پیژند(تعریف) 6.2.4: یو ټول ګڼ یا — عدد $g \in \mathbb{Z}$ ساده ریښه $\text{mod } m$ بلل کیږي،
 که $\bar{g} \in \mathbb{Z}_m^*$ لومړنی پاتې ټولګیګروپ $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ تولید کړي.

بیلګه 6.2.5:

لومړی: 2 یو ساده ریښه $\text{mod } 5$ دی (پورته بیلګه وګورئ: $\bar{2}$ $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ ټولیدوي)،
 همداسې: $g = 3$ ساده ریښه $\text{mod } 5$ دی.

ګڼونپوهنه

دویم: کومه ساده ریښه $\bmod 8$ شتون نه لري (همداسې: $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$ ځیوکلېکي نه دی).

درېم: 1 ساده ریښه $\bmod 2$ ، 3 ساده ریښه $\bmod 4$ دی.

یادونه 6.2.6: $g \in \mathbb{Z}$ ساده ریښه $\bmod m$ دی، نو بیا هم هر $g' \in \bar{g}$.

د هغه مودول $m \in \mathbb{N}$ ټاکنه، د کوم لپاره چې $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ ځیوکلېکي دی (دا په دې معنا، چې د هغه لپاره چې ساده ریښې $\bmod m$ شتون لري) [6.3](#):

لیما 6.2.7: وي دې $(G, \cdot)$ یو پای ابل ګروپ او $a \in G$ نو باور لري:

$$a^k = e \quad k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \text{ord } a \mid k. \quad (6.36)$$

له دې سره نظم $\text{ord } a$ خورا کوچنی طبیعي عدد $n \in \mathbb{N}$ دی، چې د هغې لپاره $a^n = e$ بارور لري.

جمله 6.2.8: وي دې p یو لومړنی عدد، نو $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ ځیوکلېکي یا تل بېرته راګرځېدونی دی.

(دایه دې معنا، چې ذات وخت ساده ریښې $\bmod p$ شتون لري، خو شمېرنو ته یې ټولیز متود شتون نه لري؟)

لیما 6.2.9: وي دې $p > 2$ یو لومړنی عدد، او $g \in \mathbb{Z}$ یوه ساده ریښه $\bmod p$ که

$$g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2} \quad \text{وي، نو } g \text{ هم یوه ساده ریښه } \bmod p^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{N} \text{ ده.}$$

جمله 6.2.10: وي دي $p > 2$ لومړنی عدد، نو $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot) \forall \alpha \in \mathbb{N}$ خيکليکي دی (دا په دي معنا، چپپوه ساده ريښه شتون لري).

ښوونه: له ښوونې: که g ساده ريښه $\text{mod } p$ وي، نو باور لري:

$$g^{p-1} \not\equiv 1(p^2) \vee (g+p)^{p-1} \not\equiv 1(p^2). \quad (6.37)$$

پام؛ $g+p$ ساده ريښه $\text{mod } p$ دی. ($\Rightarrow \exists$) له دي لاس ته راځي تل يو g شتون لري لکه په 6.2.9 کي غوښتل شوي). $\square$

بيلگه 6.2.11: وي دي $p = 5$ ، د 6.2.3 له مخي $g = 2$ يوه ساده ريښه $\text{mod } 5$ دی، د

$$g^{p-1} = 2^4 = 16 \not\equiv 1(25) \quad (6.38)$$

له امله $g = 2$ يوه ساده ريښه $\text{mod } 5^\alpha \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ده، دا په دي معنا، چي

$$\text{mod } 25, 125, 625, \dots$$

په همدې توگه: $g = 3$ يوه ساده ريښه $\text{mod } 5$ ده، د

$$g^{p-1} = 3^{p-1} = 3^4 = 81 \not\equiv 1(25) \quad (6.39)$$

له امله 3 هم يوه ساده ريښه $\text{mod } 5^\alpha \forall \alpha \in \mathbb{N}$ دی.

جمله 6.2.12: $p > 2$ دې یو لومړنی عدد وي، نو $(\mathbb{Z}_{2p^\alpha}, \cdot)$ ځیوکلېکي دی $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ $\text{mod } 2p^\alpha$ (دا په دې معنا، چې یوه ساده ریښه شتون لري).

ښوونه: له ښوونې څخه: g دې ناجوره وي، $g \in \mathbb{Z}$ ، او یوه ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$ ، نو g هم یوه ساده ریښه ده $(\text{mod } 2p^\alpha \forall \alpha \in \mathbb{N})$ ، که g جوړه وي، نو $g + p^\alpha$ ناجوره دی او ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$. $\square$.

بیلګه 6.2.13: وي دې $p = 5$ ، د 6.2.11 له مخې $g = 3$ یوه ساده ریښه $\text{mod } 5^\alpha \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ده او ناجوره، نو لاس ته راځي: 3 یوه ساده ریښه $\text{mod } 2 \cdot 5^\alpha \forall \alpha \in \mathbb{N}$ ده، دا په دې معنا، چې $\text{mod } 10, 50, 250, \dots$

د 6.2.11 له مخې $g = 2$ هم ساده ریښه ده، مګر جوړه، بیا هم $g' = g + p^\alpha = 2 + 5^\alpha$ ناجوره او ساده ریښه $\text{mod } 5^\alpha$ ده، نو هم ساده ریښه $\text{mod } 2 \cdot 5^\alpha$ ده.

لیما 6.2.14: د $\alpha \geq 3$ لپاره $(\mathbb{Z}_{2^\alpha}^*, \cdot)$ ځیوکلېکي نه دی. (دا په دې معنا، چې ساده ریښه $\text{mod } 2^\alpha$ شتون نه لري د $\alpha \geq 3$ لپاره).

جمله: (ګاوس 1777-1855)، $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ ټیک هلته ځیوکلېکي دی، که

$$m \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\} \quad p > 2, p \in \mathbb{P} \quad \text{سر ه او} \quad \alpha \in \mathbb{N} \quad \text{په خوښه وي} \quad (6.40)$$

نسبت $m = 2^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ ته نو هم باور لري: $(\mathbb{Z}_{2^\alpha}^*, \cdot)$ ، نږدي،، fast،،
ځيکليکي دی:

جمله 6.2.16: هر $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2^\alpha}^*$ ته يو يواځنی ټاکلی $j \in \{0, 1\}$ او
 $n \in \{1, 2, \dots, 2^{\alpha-2}\}$ شته دی د لاندې سر ه.

$\bar{a} = (-1)^j 5^n.$	(6.41)
-------------------------	--------

کارونه: کریپتولوژيKryptologie: Anwendung

د خبررسونې لپاره تل اړین همداسې غوښتنور دی، چې معلومات فقط نیوونکي B او نه بل چا ته ورسیري. کریپتولوژي د متودونو پوهنه ده، چې د خورا کم یا مینمال ورزیات معلومات له مخي (د له B لارې ورکړشوی) څوک د $A \rightarrow B$ څخه خبر پرانستلی نه شي، چې دا معلومات ونه لري.

بیلگه 6.3.1: (،Caesar،) الفبي: $A, B, \dots, Z$ ، په خوښه ټاکل شوی، تعریفوو:

$A = n\text{-ter Buchstabe}$ ، م توری -n

$B = (n+1)\text{-ter Buchstabe}$ ، م توری (n+1)

⋮

$Y = (n-2)\text{-ter Buchstabe}$ ، م توری (n-2)

$Z = (n-1)\text{-ter Buchstabe}$ ، م توری ()

له دې سره د $n=6$ لپاره بریدتکی قلفیږي و FSLWNKK ته وازېدنه ښوونې ده، که $n=6$ معلوم وي.

دا تروسه جوت د خبرونو شفرکونه یا قلفونه متمان متود داسې په نامه تلنلار انځوروي.

فکر یا اند

په ټولیزه توګه یو ډېر په راتلونکي وخت کې، ډېر ستر، طبیعي یا پیدایښتي ګڼ(عدد) $n \in \mathbb{N}$ په لومړنۍ ګڼونو نه شي ټوټه کیدی، حتی هلته هم نه، که سړی وپوهیږي، چې فقط دوه لومړني ضریبونه یا ځله وونې رامنځ ته کيږي:

$n = p \cdot q \quad (p, q \in \mathbb{P}).$	(6.42)
--	--------

تلنلار

که A و B به ته یو خبر استول غواړي، نو دوه ډېر ستر ګڼونه p, q ټاکي او یو عدد $e > 1, e \in \mathbb{N}$ ، چې $(n = p \cdot q, \varphi(n))$ ته نسبي لومړني عدد دی، او په (څرګند ډول) n او e معلوم ورکوي. دلته غوره ټکی: که سړی n, e هم وپېژني، د n دواړه لومړني ضریبونه (په ټولیزه توګه) p, q نه ټاکل کيږي. دا عددونه p, q باید سړی وپېژني د دې لپاره، چې

$\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1)$	(6.43)
--	--------

وټاکي (باید د خبرونو د وازولو لپاره وشمیرل شي: د یوه کرښیز کونګرواینڅ

$\text{mod } \varphi(n)$ حل یا اوبیونه).

د یوه خبر د قفلولو یا شفر کولو لپاره $\text{mod } \varphi(n)$ دا د یوه عدد ښه (لکه په بینار ښه)

اړوي او پیدایښتي بیت طبیعي عدد $w \in \mathbb{N}$ لاس ته راوړي. سړی کړی شي

لاس ته راوړي، داسې چې خبر په بلوکونو برخو یا سترو توتو د $w < n = p \cdot q$
 اوږدوالي سره توتې کړي، او دا ځانله یو پېه کوني ډول وليري. دا قلف شوی $l < n$
 لغات w د یوه کوچني بافي c په توګه تعریف دی، کوم چې د $w^e \in \mathbb{N}$ سره د وېشنې
 سره د $n = pq$ له لارې منځ ته راځي، داپه دې معنا، چې $w^e \equiv c(n)$. A اوس
 $c \in \mathbb{N}$ ورليږي. د دې لپاره چې w وټاکي، له دې امله الجبري کونګرواینڅ

$x^e \equiv c(n)$	(6.44)
-------------------	--------

باید حل شي (w یو حل یا اوبی دی) .

دا چې $n \in \mathbb{N}$ ډېر لوي دی، امکان شتون لري، چې دا فقط په لومړنیو ضریبونو توتې
 شي، او $x^e \equiv c$ د یوګونو اعدادو مودولو پسي حل شي (پېسي د چيني پاتي جمله [5.2.1](#)
 وکتل شي) . له دې سره باید د n دواړه لومړنیزریبونه p, q وټاکل شي. (نتشفر کیدی.
 دا د p, q لپاره ډېر لوي دی،، ناشونی،،) نو له $n, e, c \in \mathbb{N}$ څخه خبر په ټولیزه
 توګه نه شي وازیدی یا اشفري کیدی.نت

د $c \in \mathbb{N}$ وازول (د $w \in \mathbb{N}$ ټاکولپاره) کیدی شي په لاندې توګه لاس ته راشي:
 د $d \in \mathbb{N}$ $\text{mod } \varphi(n)$ یواځنی لاندې کرښیز کونګرواینڅ زیاتیز- یا مثبت حل دی

$ex \equiv 1(\varphi(n)),$	(6.45)
----------------------------	--------

نو باور لري، چې $w^{ed} \equiv w(n) : w \in \mathbb{N}$ خورا کوچنی څلوری یا مربع باقی دی،
 $w^{ed} \in \mathbb{N}$ کوم چې n له لاري د په وېش منځ ته راځي. (دا چې $c \equiv w^e$ يعنې
 $w^{ed} \equiv c^d$ نو له دې سره د $w \in \mathbb{N}$ شمیرنه ده د B لپاره ممکن د لویو
 $n = pq, e, c, d \in \mathbb{N}$ څخه).

بنسونه: د $\text{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$ له امله کرښیز کونگرواینڅ $ex \equiv 1(\varphi(n))$ د
 $\text{mod } \varphi(n)$ 5.1.1 له مخې ټیک یو ناگونگرواینڅ حل لري: d .

وښايي:

$w^{ed} \equiv w(n).$	(6.46)
-----------------------	--------

د $\text{ggT}(p, q) = 1$ او $n = pq$ له امله دې فقط وښوول شي، چې

$w^{ed} \equiv w(p) \wedge w^{ed} \equiv w(q)$	(6.47)
--	--------

باور لري (د 4.1.5(6) له مخې لاس ته راځي، چې $w^{ed} \equiv w(pq)$ ځکه چې
 $\text{kgV}(p, q) = pq$ (

دې، نو هم $p \mid w$ ، يعنې $p \mid w^{ed} - w$ ، داسې چې $w^{ed} \equiv w(p)$
 باور لري. دې: دا چې $p \nmid w$ $ed \equiv 1(\varphi(n))$ (حل دی) بار لري

$ed = 1 + k \cdot \varphi(n)$	(6.48)
-------------------------------	--------

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره $(e, d, 1, \varphi(n))$ زیاتیز یا مثبت دي). دا چې $\text{ggT}(w, p) = 1$ ،
د ،، کوچني فرمات،، [6.1.19](#) له مخې باور لري.

$w^{p-1} \equiv 1(p), \quad w^{\varphi(n)} \equiv 1(p),$ دا په دې معنا چې	(6.49)
--	--------

له دې سره لرو:

$w^{ed} = w^{1+k\varphi(n)} = w^{1+k(p-1)(q-1)} =$ $w = w(w^{p-1})^{k(q-1)} \equiv w \cdot 1^{k(q-1)} = w(p).$	(6.50)
--	--------

ورته: $w^{ed} \equiv w(q) \Rightarrow$ غوښتنه. $\square$

یادونه: 6.3.2 : B کړی شي د لاس ته راوړي خبر څخه e د $n = pq$ او $d \in \mathbb{N}$ له لارې پټه خبر w وشميري

بیلگه 6.3.3 (ګڼونه په رښتیا ډېر واړه دي!)

$n = 23 \cdot 3 = 69, \varphi(n) = 2 \cdot 22 = 44$ $p = 3, q = 23$ B غوره ټاکي، یعنې
او ټاکي $e > 1 \in \mathbb{N}, e = 3$ (و 44 ته نسبي لومړنۍ).

B معلومات ورکوي : $n = 69, e = 3$ او له A څخه شفري خبر یا کود یا پټ خبر
 $e = 12$ تر لاسه کوي.

ګڼونپوهنه

حلونه یا اوبیونه یې: $ex \equiv 1(\varphi(n))$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 1(44)$ ،
 $\text{mod } 44$ یواځنی ټاکلی حل: $d = 15$. له دې سره $e^d \equiv w(n)$ ، دا په دې معنا،
 $12^{15}(69)$ چې .

$$12^{15} : 12^2 \equiv 6(69), 12^4 \equiv 6^2 = 36(69), 12^5 \equiv 36 \cdot 12 \equiv 18(69),$$

$$, 12^{10} \equiv 18^2 = 324 \equiv 48(69), 12^{15} = 12^{10} \cdot 12^5 \equiv 48 \cdot 18 \equiv 36(69)$$

نو $w \equiv 12^{15} \equiv 36(n)$ ، دا پټ لغات 36 وو.

۷ - د حقیقي اعدادو g - ادیکي ودیزینه

g -adische Entwicklung reeller Zahlen

Allgemeine Entwicklungen ټولنه ودیزینه

په برخه 1 کې د هر $a \in \mathbb{N}$ لپاره (له دې سره د هر $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ لپاره) وېنول شو:

که $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ وي ، نو $a_n > 0, 0 \leq a_i \leq g (i = 0, \dots, n-1)$ شتون لري د

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_1 g + a_0 \quad (7.1)$$

سره

(د $a \in \mathbb{N}$ -ادیکي وده) g .

د صفر سره نابرابرو حقیقي عددونو ته ټولیزونه:

د $\pi = 3,1415\dots$ لپاره باور لري:

$$\pi = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i}. \quad (7.2)$$

جمله 7.1.1: $\alpha > 0$ د یو حقیقي عددوي او $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ نو $a_i \in \mathbb{N}_0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) شتون لري د $0 \leq a_i \leq g$ ($i = 1, 2, \dots$) سره، داسې چې دي

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}. \quad (7.3)$$

که α ریښتونی یا راشنل نه وي، نو دا انځورونه یواځنې ده (داسې په نامه g -ادیکي انځورونه).

ښوونه: د یوه داسې انځورونې یواځنوالی:

که $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ناراشنل وي، نو $[\alpha]$ د α پسې خورا کوچنی عدد په ګوته کوي.

د ټولیزې ښوونې روښانهونه یا تشریح:

$\pi = 3,1415\dots$ ، تعریف کړئ، $a_0 = [\pi] = 3$ ، $\alpha_1 = \pi - [\pi]$ جوړ کړئ او $a_1 = [10a_1] = [1,415\dots] = 1$ تعریف کړئ،

ګڼونپوهنه

$$\alpha_2 = 10\alpha_1 - [10\alpha_1] = 0,415\dots$$

$$a_2 = [10\alpha_2] = 4$$

توليز : دې $\alpha \in \mathbb{R}^+, g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ په خوښه وي. اندوکتیو جوړکړئ:

$$\alpha_1 = \alpha - [\alpha], \dots, \alpha_{i+1} = g\alpha_i - [g\alpha_i], \quad (7.4)$$

او له دې سره تعريف کړئ

$$a_0 = [\alpha], \dots, a_i = [g\alpha_i]. \quad (7.5)$$

باور لري: $0 \leq a_i \leq g \quad \forall i > 0$ ، ځکه چې

$$0 \leq \alpha_i = g\alpha_{i-1} - [g\alpha_{i-1}] < 1 \xrightarrow{g \geq 0} 0 \leq g\alpha_i \leq g \Rightarrow \quad (7.6)$$

$$\Rightarrow 0 \leq [g\alpha_i] = a_i < g. \quad (7.7)$$

باور لري

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha - [\alpha] = \alpha - a_0 &\Rightarrow \alpha = a_0 + \alpha_1 \\ \alpha_2 = g\alpha_1 - [g\alpha_1] &\Rightarrow \alpha_2 = g\alpha_1 - a_1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 g^{-1} + \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = a_0 + a_1 g^{-1} + \alpha_2 g^{-1}. \quad (7.8)$$

و بنایي:

$$\alpha = a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + \alpha_{n+1} g^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n = 1 :$$

$$\alpha = a_0 + a_1 g^{-1} + \alpha_2 g^{-1}$$

پورته لور ته واز دی

$$n \rightarrow n + 1 :$$

$$\alpha_{n+2} = g\alpha_{n+1} - [g\alpha_{n+1}] = g\alpha_{n+1} - a_{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} = a_{n+1}g^{-1} + \alpha_{n+2}g^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + \alpha_{n+1} g^{-n} = \quad (7.9)$$

$$= a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + (a_{n+1} g^{-1} + \alpha_{n+2} g^{-1}) g^{-n} = \quad (7.10)$$

$$= a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + a_{n+1} g^{-(n+1)} + \alpha_{n+2} g^{-(n+1)} \quad (7.11)$$

$\Rightarrow$

چې د $n + 1$ لپاره هم ټيک دی.

ناپای لړۍ تخیرني لاندې نیسو: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$ د همدا اوس تعریف تعریف شوو سره.

وښایی: دا لړۍ د α په لور ځي یا α ته کونورګنت کیږي.

ګڼونپوهنه

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}. \quad (7.12)$$

n - مه ټوټه - يا پارشل جمعه (زياتون)

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} \quad (7.13)$$

$$s_n = \alpha - \alpha_{n+1} g^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

پوره کوي

د $0 \leq \alpha_{n+1} < 1$ او د $g^{-n} > 0$ ($g > 0$) له امله باور لري

$$0 \leq \alpha_{n+1} g^{-n} < g^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad (7.14)$$

له دې سره لرو: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} g^{-n}) = 0$ دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - s_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$$

مطلق د $\sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$ ، دا په دې معنا، چې

α په لور هڅيږي.
يو اځنوالی (يو اځيوالی):

ستون لري د $\alpha \notin \mathbb{Q}$ نيسوچي،

(7.15)

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i g^{-i},$$

سره، چیرته چې $a_i \neq b_i$ د یوه i لپاره، وي دې i_0 خورا کوچنی عدد د $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ سره. بې له ټولیز محدودیت دې $a_{i_0} > b_{i_0}$ وی.

یعنې

(7.16)

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{i_0-1} = b_{i_0-1},$$

او لاس ته راځي $\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i g^{-i}$ ، له دې سره (د ټولیز پولې ته تلنې له امله کیدې شي سره راټول شي)

$$0 = \sum_{i=i_0}^{\infty} (a_i - b_i) g^{-i} = \quad (7.17)$$

$$= \underbrace{(a_{i_0} - b_{i_0})}_{\geq 1} g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \underbrace{(a_i - b_i)}_{\leq 1-g+1} g^{-i} \geq g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (-g+1) \quad (7.18)$$

$$= g^{-i_0} + (-g+1) \sum_{i=i_0+1}^{\infty} g^{-i} = g^{-i_0} + (-g+1) g^{-i_0+1} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} g^{-i}}_{= \frac{2}{-1+g}} \quad (7.19)$$

$$= g^{-i_0} - (g-1) g^{-i_0-1} \frac{g}{g-1} = g^{-i_0} - g^{-i_0} = 0. \quad (7.20)$$

له دې سره باید په دې تخمین کې هر چیرته برابر والی باور ولري، نو له دې لاس ته راځي:

کنونپوهنه

$$a_{i_0} - b_{i_0} = 1 \wedge a_i - b_i = -(g-1) \quad \forall i > i_0, \quad (7.21)$$

دا په دې معنا، چې

$$b_{i_0} = a_{i_0} - 1 \wedge b_i - a_i = g - 1 \quad \forall i > i_0. \quad (7.22)$$

$$b_i = g - 1 \quad \forall i > i_0 \quad \text{او} \quad a_i = 0$$

باور لري:

$$\begin{aligned} & \text{نيسو چې } 0 < a_i, \text{ نو د } b_i \leq g - 1 \text{ سره لاس ته راځي، چې} \\ & b_i - a_i < g - 1 \text{ -تضاد!} \end{aligned}$$

له دې سره ټول زيتوني يا د جمعې اجزاي د α په انځورونه کې د $i > i_0$ سره
صفر دي، دا په دې معنا، چې

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \dots + a_{i_0} g^{-i_0} = a_0 + \frac{a_1}{g} + \dots + \quad (7.23)$$

تضاد دی! نو: α فقط يوه g -اديکي وده لري. $\square$

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$$

يادونه 7.1.2: دی $g = 10$ (لسميز سيستم)، نو سړی د لپاره ليکي هم

$$a_0, a_1 a_2 \dots \quad 0 \leq a_i < 10 \quad \forall i \geq 1. \quad (7.24)$$

کورولار 7.1.3: $\alpha > 0$ يو راشنل عدد دی، نو α خورا زيات دوه g -اديکي
انځورونې، داسې په نامه

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i g^{-i}, \quad (7.25)$$

د کوم سره چې

$$a_i = 0 \quad \forall i > i_0 \quad .1$$

$$b_i = g - 1 \quad \forall i > i_0 \quad , \quad b_{i_0} = a_{i_0} - 1 \quad .2$$

کله $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ دوه g -ادیکي انځورونه لري؟

پېژند(تعریف) 7.1.4: سری وایي، $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{a}{b}$ یو پای انځورونه لري، که وي

$$\alpha = \frac{a}{b} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}, \quad (7.26)$$

$$a_i = 0 \quad \forall i > i_0 \quad \left(\frac{a}{b} = a_0 + a_1 g^{-1} + \dots + a_{i_0} g^{-i_0} \right)$$

د کڼم سره چې

7.1.5: کورولار $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ ټیک دوه مختلف g -ادیکي ودې لري، که $\frac{a}{b}$ یو یواځنی انځورونه ولري.

ښوونه :

($\Rightarrow$)

$\alpha = \frac{a}{b}$ دوه انځورونې لري، نو له دوي څخه یو د [7.1.3](#) له مخې پای دی.

$(\Leftarrow)$

$$\alpha = \sum_{i=0}^{i_0} a_i g^{-i}$$

وي دي يوه پای انځورونه، نو باور لري

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i g^{-i} + a_{i_0} g^{-i_0} = \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i g^{-i} + (a_{i_0} - 1) g^{-i_0} + g^{-i_0} = (7.27)$$

$$= \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i g^{-i} + (a_{i_0} - 1) g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (g-1) g^{-i}, \quad (7.28)$$

دا چې

$$-g^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (g-1) g^{-i} = -g^{-i_0} + (g-1) g^{-(i_0+1)} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} g^{-i}}_{\rightarrow \frac{g}{g-1}} = (7.29)$$

$$= -g^{-i_0} + (g-1) g^{-(i_0+1)} \frac{g}{g-1} = (7.30)$$

$$= -g^{-i_0} + g^{-i_0} = 0. \quad (7.31)$$

نو له دې سره يوه 2-مه g-اديکي انځورونه لري. $\square$

کوم $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ یوه پای g – ادیکي انځورونه لري؟

جمله 7.1.6: که $\alpha \in \mathbb{Q}^+, \alpha = \frac{a}{b}$ وي د $a, b \in \mathbb{N}$ او $\text{ggT}(a, b) = 1$ سره،

نو α ټیک هلته یو پای (او له دې سره 2 مختلف) g – ادیکي وده لري، که هر د مخرج لومړنی پروېشوني بنسټ وېشي.

ښوونه:

($\Rightarrow$)

وي دې

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=0}^n a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n}, \quad (7.32)$$

نو باور لري

$$\frac{a g^n}{b} = a_0 g^n + a_1 g^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}, \quad (7.33)$$

له دې سره $b \mid a g^n$. وي دې p په خوښه د b لومړنی پروېشونی، نو $p \mid a g^n$.
لاس ته راځي، د 3.1.5 له مخې لاس ته راځي $p \mid a \vee p \mid g^n$ ، باور لري $p \nmid a$.
خکه چې پرته له دې به $\text{ggT}(a, b) \geq p > 1$ – تضاد وي.

له دې سره لاس ته راځي $p \mid g^n$ ، دا چې $p \in \mathbb{P}$ د 3.1.5 سره لاس ته راځي $p \mid g$.

($\Leftarrow$)

وي دې

$$b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} \quad (7.34)$$

د ماتلاندې يا مخرج په لومړني ضريبونو ټوټه کونه، نو $p_i \mid b$ باور لري ، نو د وړاند
نيونې له مخې $p_i \mid g \quad \forall i = 1, \dots, k$ له دې سره $p_i^{\alpha_i} \mid g^{\alpha_i} \quad (i = 1, \dots, k)$
وي دې $m := \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. نو باور لري .

$$p^{\alpha_i} \mid g^m \quad (i = 1, \dots, k), \quad (7.35)$$

دا چې $m \geq \alpha_i$.

د $\text{ggT}(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}) = 1 \quad \forall i \neq j$ له امله باور لري

$$\text{kgV}(p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = b; \quad (7.36)$$

د تمريني بېلګې 24 له مخې باور لري: $b \mid g^m$. له دې سره دې $\frac{a}{b}g^m \in \mathbb{N}$ او وي دې

$$\frac{a}{b}g^m = a_0 + a_1g + \cdots + a_ng^n \quad (7.37)$$

g -اديکي وده، د کوم سره چې $0 \leq a_i < g \quad \forall i \geq 1$.

له دې لاس ته راځي:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{g^m} + \frac{a_1}{g^{m-1}} + \cdots + \frac{a_n}{g^{m-n}} = a_0 g^{-m} + a_1 g^{-m+1} + \cdots + a_n g^{n-m}, \quad (7.38)$$

دا په دې معنا، چې $\frac{a}{b}$ یوه پای g - ادیکي وده لري. $\square$

لاس ته راوړنه 7.1.7: وي دې

$$g = 10, \alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \text{ggT}(a, b) = 1, b > 0$$

دا چې لومړنۍ پروپشوني همداسې لري، باید مخرج د لپاره وي، له دې سره شرایط پوره دي. له دې سره په ل

دا چې $g = 10$ فقط لومړنۍ پروپشوني همداسې $p = 2$ لري، باید د

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ لپاره مخرج (ماتلاندې) $b = 2^\alpha 5^\beta$ وي، د دې لپاره چې شرایط پوره شي. له دې سره په لسميز کې باور لري:

$$\alpha = \frac{a}{b}, \text{ggT}(a, b) = 1$$

که یو پای (او له دې سره دوه مختلف) انځورونه ولری $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow b = 2^\alpha 5^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$$

له دې سره هم: $\exists p : p \mid b$ او $p \nmid 10 \Rightarrow$ (له دې لاس ته راځي) چې فقط یوه لسميزه انځورونه شتون لري.

بیلگه:

لومړۍ: $\alpha = \frac{287}{100} \in \mathbb{Q}^+$ ، د $b = 2^2 5^2$ له امله α یوه پای او له دې سره دوه لسميز انځورونه لري:

$$\alpha = 2.870000 \dots = 2.869999 \dots$$

دویم: $\alpha = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}^+$ ، دا چې $b = 3^1$ د $2^\alpha 5^\beta$ په بڼه نه دی، نو α فقط یوه لسمیزه انځورونه لري. یا د وېشنې له لارې، یا د [7.1.1](#) د بنوونې سره سم (α_i, a_i) :

$$\alpha = 1.6666 \dots$$

دریم: $\alpha = 1 \in \mathbb{Q}^+$ د $\alpha = \frac{1}{1}$ او $\text{ggT}(1, 1) = 1$ له امله لاس ته راځي چې $\alpha = 1$ یو پای او له دې سره دوه مختلف لسمیز انځورونه لري ($\alpha = \frac{3}{3}$) اجازه نه لري، ځکه چې $(\text{ggT}(a, b) \neq 1 \dots)$:

$$\alpha = 1.0000 \dots = 0.9999 \dots$$

$$0.999 \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 9 \left[\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^i}_{\rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}} - 1 \right] = \quad (7.39)$$

$$= 9 \left[\frac{10}{9} - 1 \right] = 10 - 9 = 1. \quad (7.40)$$

پریودیکي وده

د یوه حقیقي عدد په لسمیزه وده کې کله کله ځنې عددونه منظم منځ ته راځي، لکه $\alpha = 1.70714285714285 \dots$ ،

پوښتنه: کوم حقیقي اعداد دا خویونه لري؟

پېژند (تعريف) 7.2.1: د يوه حقيقي عدد $\alpha > 0$ يوه g -اديکي يا g -ايزه وده

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = a_0 + a_1 \frac{1}{g} + a_2 \frac{1}{g^2} + \dots \quad (7.41)$$

تل بيرته راګرځيدونې يا پريوديکي بلل کيږي، که $n, e \in \mathbb{N}$ شتون ولري د لا ندي سره

$$a_{n+i} = a_{n+e+i} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.42)$$

که n مينيمال يا خورا کوچنی ټاکلی وي، نو $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ ترمخ پريود يا - راګرځيدنه بلل کيږي او $n-1$ د هغه اوږدوالی، که $n=1$ وي (داپه دې معنا، چې $\frac{1}{g}$ ترمخ پريود)، نو وده سوچه پريودیک بلل کيږي.

که e خورا کوچنی ټاکلی وي، نو $a_n a_{n+1} \dots a_{n+e-1}$ تلبيرونه راګرځيدونې بلل کيږي او e د هغه اوږدوالی.

د $g = 10$: لپاره سومبول يا نخښ:

$$\alpha = a_0. \underbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}_{\text{Vorperiode}} \underbrace{a_n a_{n+1} \dots a_{n+e-1}}_{\text{Periode}} \underbrace{a_{n+e} \dots a_{n+e-1}}_{=a_n} \dots \underbrace{a_{n+2e-1} \dots}_{=a_{n+e-1}} \dots \quad (7.43)$$

بيلګه 7.2.2:

د الماني پښتو: اوږدوال Länge ;

تل بيرته راګرځيدنه، له مخه تل بيرته راګرځيدنه = periode ; Vor periode

کنونپوهنه

$$\alpha = 1.\overbrace{714285}^{\text{Länge 2}} \overbrace{70}^{\text{Periode}} \overbrace{\dots}^{\text{Länge 6714285...}}$$

Vorperiode

1.

$$2. \quad \alpha = 2.87000\dots = 2.86999\dots$$

له مخ پرېود 87 نسبت 86 ته، اوږدوالی 2، پرېود 0، نسبت 9 ته، اوږدوالی 1

جمله 7.2.3: یو مثبت (زیاتیز) عدد α د یوه $g \geq 2$ لپاره (او له دې سره د $g \geq 2$ لپاره) ټیک هلته یو پرېودیکی g -ایزه وده لري، که α راشنل وي.

بنوونه:

 $(\Leftarrow)$

وي وي $\alpha = \frac{a}{b}, \text{ggT}(a, b) = 1, b > 0$ او $g \geq 2$. لکه د [7.1.1](#) په بنوونه کې وي دې

$$\alpha_1 = \alpha - [\alpha],$$

$$\alpha_0 = [\alpha],$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{i+1} = g\alpha_i - [g\alpha_i],$$

$$a_i = [g\alpha_i].$$

$$b\alpha_i \in \mathbb{Z} \quad \text{وښايئ:}$$

$$i = 1 :$$

$$b\alpha_1 = b(\alpha - [\alpha]) = b\alpha - b[\alpha] = b \cdot \frac{a}{b} - \underbrace{\left[\frac{a}{b}\right]}_{\in \mathbb{Z}} \cdot b \in \mathbb{Z}.$$

$$i \rightarrow i + 1 :$$

$$b\alpha_{i+1} = b(g\alpha_i - [g\alpha_i]) = \underbrace{(b\alpha_i)}_{\text{Ind.VS:} \in \mathbb{Z}} g - b \underbrace{[g\alpha_i]}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

$$b_i \equiv g^{i-1}b_1(b) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{، وښايئ:} \quad b_i := b\alpha_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{پېژند (تعريف)}$$

$$i = 1 :$$

$$g^{1-1}b_1 = b_1 \equiv b_1(b).$$

$$i \rightarrow i + 1 :$$

$b_{i+1} =$ $b\alpha_{i+1} = b(g\alpha_i - \underbrace{[g\alpha_i]}_{=a_i}) = \underbrace{(b\alpha_i)}_{=b_i} g - \underbrace{ba_i}_{\equiv 0(b)} \equiv g^{i-1}b_1g$	(7.44)
---	----------

$= g^i b_1.$	(7.45)
--------------	--------

د $0 \leq \alpha_i < 1$ له امله باور لري

$$0 \leq b\alpha_i = b_i < b \quad (b > 0) \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad (7.46)$$

نو فقط پای دېر $b_i, i \in \mathbb{N}$ شته دی، له دې سره باید د دوي ترمنځ برابري منځ ته راشي، دا په دې معنا، چې $\exists n, e \in \mathbb{N}$ د $b_n = b_{n+e}$ سره. پورته لور ته $(i = n)$ باور لري:

$$g^{n-1}b_1 \equiv b_n = b_{n+e} \equiv b_1 g^{n+e-1}(b), \quad (7.47)$$

د g^i سره د ضرب له لارې ($i \in \mathbb{N}$) په خوښه لاس ته راځي:

$$g^{n-1+i}b_1 \equiv g^{n-1+e+i}b_1(b), \quad (7.48)$$

دا په دې معنا، چې دپورته لور ته: $b_{n+i} \equiv b_{n+e+i}$ ، يعني $b \mid b_{n+e+i} - b_{n+i}$.

د $0 \leq b_{n+i} < b$ او $0 \leq b_{n+e+i} < b$ له امله کمښت $< b$ دی، له دې سره لاس ته راځي

$$b_{n+e+i} = b_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad (7.49)$$

د $b_n = b_{n+e}$ له امله (پورته) باور لري $b_{n+e+i} = b_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$.
له دې سره:

$$b\alpha_{n+e+i} = b\alpha_{n+i} \quad (b \neq 0) \quad (7.50)$$

او

$$g\alpha_{n+e+i} = g\alpha_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, \quad [g\alpha_{n+e+i}] = [g\alpha_{n+i}] \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, \quad (7.51)$$

$$a_{n+e+i} = a_{n+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

نو

له دې سره د $\alpha = \frac{a}{b}$ - ایزه وده تل بیرته راګرځیدونې ده. g

($\Rightarrow$)

وي دې $\alpha > 0$ حقيقي د پریودیګي ودې سره، داپه دې معنا، چې $n, e \in \mathbb{N}$ شتون لري د

$$a_{n+e+k} = a_{n+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

سره؟

$$a_{n+e+k} = a_{n+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0;$$

بنوول کیږي: $\alpha \in \mathbb{Q}$:

کنونپوهنه

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} = a_0 + a_1 g^{-1} + \cdots + a_n g^{-n} + a_{n+1} g^{-(n+1)} + \cdots + \quad (7.52)$$

$$+ a_{n+e-1} g^{-(n+e-1)} + \underbrace{a_{n+e}}_{=a_n} g^{-(n+e)} + \underbrace{a_{n+e+1}}_{=a_{n+1}} g^{-(n+e+1)} + \cdots + \quad (7.53)$$

$$+ \underbrace{a_{n+2e-1}}_{=a_{n+e-1}} g^{-(n+2e-1)} + \cdots = \quad (7.54)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} + a_n g^{-n} \underbrace{(1 + g^{-e} + g^{-2e} + \cdots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} (g^{-e})^k \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{g^e}} = \frac{g^e}{g^e-1}} + \cdots + \quad (7.55)$$

$$a_{n+e-1} g^{-(n+e-1)} \underbrace{(1 + g^{-e} + g^{-2e} + \cdots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} (g^{-e})^k \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{g^e}} = \frac{g^e}{g^e-1}} = \quad (7.56)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i} + \frac{g^e}{g^e-1} (a_n g^{-n} + \cdots + a_{n+e-1} g^{-(n+e-1)}) \in \mathbb{Q}. \quad (7.57)$$

بیلګه 7.2.4: $g = 10, \alpha = 0.1342\overline{158}$ ، داچې دا یوه پریودیګي لسمیزه وده ده، لاس ته راځي: α یو راشنل عدد دی، کوم؟

د $n = 4, e = 4$ ، د ترمخپریود اوږدوالی: $\Rightarrow n - 1 = 3$ د [7.2.3](#) د بنوونې له مخې:

$$\alpha = \frac{134}{1000} + \frac{10^4}{10^4 - 1} \left(2 \cdot \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + 5 \cdot \frac{1}{10^6} + 8 \cdot \frac{1}{10^7} \right) = \dots = (7.5)$$

ځانگړی حالت: سوچه پریودیکی وده

پوښتنه: کله د $\alpha \in \mathbb{R}^+$ g —ایزه وده سوچه —پریودیکی ده؟

د 7.2.3 له مخې باید α راشنل وي، د $g = 10$ لپاره هر $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ د

$$\alpha = a_0.\overline{a_1 a_2 \dots a_e} \quad (7.59)$$

سره غواړو پیداکړو.

جمله 7.2.5: که $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ وي د $ggT(a, b) = 1, b > 0$ سره، نو د g —

ایزه وده ټیک هلته سوچه پریودیکی ده، که $ggT(b, g) = 1$ وي. که دا حالت وي، نو

د e پریودیکی اوږدوالی د $\bar{g} \in \mathbb{Z}_b^*$ د نظم سره برابر دی (دا په دې معنا، چې د خورا

کوچني طبیعي کڼ k سره برابر دی، د $\bar{g}^k = \bar{1} \in \mathbb{Z}_b^*$ سره).

بنسونه:

($\Rightarrow$)

وي دې $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+, ggT(a, b) = 1, b > 0$ د سوچه-پریودیکی g —ایزه وي سره، دا

په دې معنا، چې په $a_{n+i} = a_{n+e+i} \quad \forall i \geq 0$ کې $n = 1$ دی، که e خورا کوچنی یا مینیمال وي.

د [7.2.3](#) بنوونې له مخې باور لري

$$g^{n+e-1}b_1 \equiv g^{n-1}b_1(b), \quad (7.60)$$

نو د $n = 1$ له امله $g^e b_1 \equiv b_1(b)$ دی.

$$\text{ggT}(b, b_1) = 1$$

وښايي:

نیسو چې $\exists p \in \mathbb{P}$ د لاندې سره

$$p \mid b, p \mid b_1 \stackrel{7.1.1}{=} b\alpha_1 = b \left(\frac{a}{b} - \underbrace{\left[\frac{a}{b} \right]}_{\in \mathbb{N}} \right) = a - b \underbrace{\left[\frac{a}{b} \right]}_{\in \mathbb{N}},$$

له دې سره لاس ته راځي $p \mid a$ - تضاد و $\text{ggT}(a, p) = 1$ ته.

له دې سره د $g^e b_1 \equiv b_1(b)$ څخه د [4.1.5\(5\)](#) له مخې لاس ته راځي

$$g^e \equiv 1(b). \quad (7.61)$$

وښايي: $\text{ggT}(b, g) = 1$. نیسو چې $\exists p \in \mathbb{P}$ د $p \mid b, p \mid g$ سره، نو باور لري

$$p \mid b, p \mid g^e = 1 + tb \ (t \in \mathbb{N}), \quad (7.62)$$

نو هم $p \mid 1$ - تضاد.

وي دې $\frac{a}{b}$ سوچه پريوديکي، نو وښايئ $e = \text{ord } \bar{g}$ په $(\mathbb{Z}_b^*, \cdot)$ کې. پورته لور ته باور لري:

$$g^e \equiv 1(b) \wedge \text{ggT}(b, g) = 1; \quad (7.63)$$

دا په دې معنا، چې $\bar{g} \in \mathbb{Z}_b^*$ او $\bar{g}^e = \bar{1}$ په $(\mathbb{Z}_b^*, \cdot)$ کې دي. يعنې $\text{ord } \bar{g} \leq e$) د پيژند له مخې خورا کوچنی طبيعي عدد k دی د $\bar{g}^k = \bar{1}$ سره.

وي دې $\text{ord } \bar{g} = k$ ، نو په $(\mathbb{Z}_b^*, \cdot)$ کې باور لري $\bar{g}^k = \bar{1}$ ، دا په دې معنا، چې $g^{k+i} \equiv g^i(b) \forall i \geq 0$ او $g^k \equiv 1(b)$ له دې سره هم $\forall i \geq 0$ باور لري د b_1 سره د [7.2.3](#) بنووني له مخې. له دې بنووني لاس ته راځي:

$$b_{k+i+1} \equiv b_{k+i}(b), \quad (7.64)$$

نو $b_{k+i+1} = b_{k+i}$ ، او

$$a_{1+k+i} = a_{1+i} \forall i \geq 0. \quad (7.65)$$

دا چې e د $a_{1+e+i} = a_{1+i} \forall i \geq 0$ ($n = 1$) سره خورا کوچنی ده، لاس ته راځي $e \leq k = \text{ord } \bar{g}$. له دې امله په $(\mathbb{Z}_b^*, \cdot)$ کې باور لري $e = k = \text{ord } \bar{g}$.

(⇐)

وي دي $ggT(b, g) = 1$ ، د ښوولو دی: د $\frac{a}{b}$ -ایزه وده سوچه پریودیګ ده.

دا چې $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ د [7.2.3](#) له مخې یو پریودیګي اونځورونه شتون لري، یعنې د لاندې سره:

$$g^{n-1}b_1 \equiv g^{n+e-1}(b). \quad (7.66)$$

دا چې $ggT(b, g) = 1$ ، نو $ggT(b, g^{n-1}) = 1$ هم شتون لري، یعنې دپورته

کونګروانځ څخه لاس ته راځي $b_1 \equiv g^e b_1(b)$. یعنې د ټولو

$$i \geq 0: g^i b_1 \equiv g^{e+i} b_1(b)$$

لپاره، نو د جملې [7.2.3](#) د ښوونې له مخې لرو:

$$b_{i+1} \equiv b_{e+i+1}(b) \quad \text{، له دې سره} \quad b_{i+1} = b_{e+i+1} \quad \forall i \geq 0$$

دا په دې معنا، چې د $\frac{a}{b}$ -ایز یا g -ایدیګي انځورونه $a_{1+i} = a_{1+e+i} \quad \forall i \geq 0$

پریودیګي ده د $n = 1$ سره، یعنې سوچه تل بیرته راګرځیدونې یا پریودیګي. $\square$

یادونه 7.2.6: ایا د $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ -ایزه وده د $ggT(a, b) = 1, b > 0$ سره،

سوچه پریودیګي ده، او هم د پریود اوږدوالی د ماتلاندې یا مخرج b په واک کې دی!

بیلګه 7.2.7:

$$g = 10, \alpha = \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}^+ \quad 1.$$

دا چې $ggT(3, 7) = 1$ د [7.2.5](#) له مخې باور لري: $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ سوچه پریودیګي لسمیزه

وده لري ($\text{ggT}(7, 10) = 1$)، د کوم سره چې د بريود اوږدوالی $e = \text{ord } \overline{10}$ په $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ کې دی:

$$10^1 \not\equiv 1(7), 10^2 \not\equiv 1(7), \dots, 10^6 \equiv 1(7)$$

(د لومړي ځل لپاره)....

. $e = 6$ also $\Rightarrow \text{ord } \overline{10} = 6$

$$\left(\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}\right)$$

$$g = 10, \alpha = \frac{15}{7} \in \mathbb{Q}^+ \quad 2.$$

$$\text{ggT}(15, 7) = 1$$

سوچه پريوديکي د $e = \text{ord } \overline{10} = 6$ سره.

$$\left(\frac{15}{7} = 2.\overline{142857}\right)$$

ټوليز حالت: نه سوچه - پريوديکي وده

جمله 7.2.8: وي دې $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+, \text{ggT}(a, b) = 1, b > 0$ دی.

$$g = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad (7.67)$$

د بنسټ $g \geq 2$ په لومړنيو ضريبونو ټوټه کونه او

$$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \cdot t \quad (7.68)$$

کنونپوهنه

(د همغه p_i سره!) د $ggT(g, t) = 1$ سره، نو د ترمخ پریود اوږدوالی $n-1$

(په g -ایز دوه کې خورا کوچنی طبیعي عدد γ دی، د کوم لپاره چې $\frac{b}{t} \mid g^\gamma$ دی، او د $\bar{g}$ پریود اوږدوالی د پریود د نظم سره برابر دی په $(\mathbb{Z}_t^*, \cdot)$ کې.

بیلګه 7.2.9: $g = 10, \frac{a}{b} = \frac{239}{140} \in \mathbb{Q}^+$ ، لسمیزه وده سوچه پریودیک نه ده، ځکه

$$ggT(b, g) = ggT(140, 10) \neq 1$$

چې

د پریود اوږدوالی:

$$\left. \begin{array}{l} g = 10 = 2 \cdot 5 \\ b = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{array} \right\} \Rightarrow t = 7, \frac{b}{t} = \frac{140}{7} = 20$$

$$20 \nmid 10^1, 20 \mid 10^2 = 100 \Rightarrow \gamma = 2.$$

د پریود اوږدوالی:

$e = \text{ord } \bar{g}$ په $(\mathbb{Z}_t^*, \cdot)$ کې: $e = \text{ord } \overline{10}$ په $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ کې، پورته لور ته لاس ته راځي $e = 6$.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = a_0. \underbrace{a_1 a_2}_{\text{Vorperiode}} \overbrace{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}^{\text{Periode}}; \quad \frac{239}{140} = 1.70\overline{714285}$$

n-te Potenzreste

په ځانګړي حالت بېرته اړول

دلته $x^n \equiv a(m)$ په

$x^n \equiv a(p^\alpha)$	(8.2)
--------------------------	-------

بیره اړول کيږي د $\text{ggT}(a, p) = 1$ سره (يعني په $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot)$ کې شميرنه).

ليما 8.1.2: $x^2 \equiv a(m)$ د $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}$ سره ټيک هلته حولور ده، که

$$x^2 \equiv a(p_i^{\alpha_i}) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (8.3)$$

حولور وي (برخه 5 وگورئ)

ليما 8.1.3: $x^n \equiv a(p^\alpha), p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}$ د $a = p^k a'$ لپاره د $\text{ggT}(p, a') = 1$ سره ټيک هلته حولور ده، که $n \mid k$ او $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ حولور وي $(0 \leq a < p^\alpha)$.

بنسونه:

$(\Rightarrow)$

$x_0 \in \mathbb{Z}$ دې د $x^n \equiv a(p^\alpha)$ حل وي، نو باور لري:

$$x_0^n \equiv a(p^\alpha), \quad (8.4)$$

ګڼونپوهنه

دا په دې معنا، چې $x_0^n = a + rp^\alpha$ دی د یوه $r \in \mathbb{Z}$ لپاره.

وي دې $x_0 = p^\beta s$ د $\text{ggT}(p, s) = 1$ ($\beta \in \mathbb{N}_0$) سره، نو باور لري:

$$x_0^n = (p^\beta s)^n = p^{n\beta} s^n = a + rp^\alpha = p^k a' + rp^\alpha. \quad (8.5)$$

د $a = p^k a' < p^\alpha$ له امله باور لري: $k < \alpha$ ($a' > 0$)، یعنې $p^k \mid p^\alpha$ ، له دې سره دپورته لور ته:

$$p^{n\beta-k} s^n = a' + rp^{\alpha-k}; \quad (8.6)$$

له دې سره باور لري: $p^k \mid p^{n\beta} s^n$ د $\text{ggT}(p, s) = 1$ له امله هم $\text{ggT}(p^k, s^n) = 1$ دي، یعنې د [2.2.11](#) سره لاس ته راځي: $p^k \mid p^{n\beta}$ ، یعنې $k \leq n\beta$.

که $k < n\beta$ وي، نو $n\beta - k > 0$ به وی او د

$$p^{n\beta-k} s^n = a' + rp^{\alpha-k} \quad (8.7)$$

له مخې به مو لروډی: $p \mid a'$ او $\text{ggT}(p, a') \neq 1$ چې تضاد دی.

له دې سره: $k = n\beta$ او $n \mid k$ ، پسي لاس ته راځي:

$$s^n = a' + rp^{\alpha-k}, \quad (8.8)$$

دا په دې معنا، چې $s^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ او $s \in \mathbb{Z}$ د $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ یو حل دی.

$(\Leftarrow)$

وي دي $x_0 \in \mathbb{Z}$ د $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ حل د $n \mid k$ او د $\text{ggT}(a', p) = 1$ سره، نو باور لري $x_0^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ ، يعنې، $x_0^n p^k \equiv a' p^k (p^\alpha)$ هم. د $n \mid k$ له امله باور لري $k = nt$ د يوه $t \in \mathbb{N}$ لپاره.

$$x_0^n p^{nt} \equiv a(p^\alpha) \Rightarrow (x_0 p^t)^n \equiv a(p^\alpha), \quad (8.9)$$

له دې سره $s = x_0 p^t \in \mathbb{Z}$ د کونګروانت $x^n \equiv a(p^\alpha)$ يو حل دی. $\square$

يادونه 8.1.4: له دې سره د $x^n \equiv a'(p^{\alpha-k})$ له حل x_0 څخه د $\text{ggT}(a', p) = 1$

سره د $x^n \equiv a(p^\alpha)$ هر حل x_1 شميرل کیدی شي:

$$x_1 = x_0 p^t, \quad (8.10)$$

د کوم سره چې $k = nt$ باور لري.

لاس ته راوړنه 8.1.5: د مسألې $x^n \equiv a(p^\alpha)$ سره سرې کړی شي ځان په حالت

$\text{ggT}(a, p) = 1$ محدود کړي ($\Rightarrow \text{ggT}(a, p^\alpha) = 1$)، دا په دې معنا، چې سرې کړی شي په $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot)$ کې شميرنه وکړي ($\bar{a} \in \mathbb{Z}_{p^\alpha}^*$).

ليما 8.1.6: x_0 د $x^n \equiv a(p^\alpha)$ حل دی د $\text{ggT}(a, p) = 1$ سره، نو

$\text{ggT}(x_0, p) = 1$ هم باور لري (دا په دې معنا، چې $\bar{x}_0^n = \bar{a} \in \mathbb{Z}_m^* \Rightarrow \bar{x}_0 \in \mathbb{Z}_m^*$).

ښوونه: د $x_0^n \equiv a(p^\alpha)$ له امله باور لري $p^\alpha \mid x_0^n - a$ ، دا په دې معنا، چې

$$x_0^n - a = tp^\alpha \quad (t \in \mathbb{N}) \Rightarrow a = x_0^n - tp^\alpha. \quad (8.11)$$

نیسو چې $\exists q \in \mathbb{P}$ د $q \mid x_0, q \mid p$ سره، نو $q = p$ او $q = p \mid a$ لرو له دې لرو: تضاد دی.

له دې سره موږ سرچینه ییزه مسأله په $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot)$ کې شمیرنه باندې بیرته وړوله.

پیژند(تعریف) 8.1.7: و ی د $\text{ggT}(a, m) = 1$ د $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}$ سره، نو

$a \in \mathbb{Z}$ یو n -م توان مودولو m بلل کیږي، که $x^n \equiv a(m)$ حل وړ وي. (دا په دې معنا، چې $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ د یوه توکي $\bar{x}_0 \in \mathbb{Z}_m^*$ n -م توان دی).

بیلګه 8.1.8: $m = 6, a = 0, 1, 3, 4$ دویمتوانپاتې $\text{mod } 6$ دی، $a = 2, 5$ د دویم توانپاتې $\text{mod } 6$ نه دی (پورته وګورئ).

پسې: هر $a \in \mathbb{Z}$ دریم توانپاتې $\text{mod } 6$ دی (پورته وګورئ)

د $x^n \equiv a(p^\alpha), \text{ggT}(a, p) = 1$ د حل لپاره تګلار

لومړی: ټولیز د الجبري کونګروانت لپاره له برخې 5 څخه (مفصل)

دویم: که د داسې په نامه اندکسجدول لهماځي یوه ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$ شتون ولري. پام دې وي: د گاوس 6.2.15 له مخې، د هر لومړني عدد $p \neq 2$ او هر $\alpha \in \mathbb{N}$ لپاره

یوه ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$ شتون لري، ورپسې د 2 او $4 = 2^2$ ته، مګر نه د 2^α لپاره د $\alpha \geq 3$ سره، د دې لپاره: ځانله پام په کار ی

پېژند 8.1.9: $m \in \mathbb{N}$ دې داسې وي، چې $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ څيوکليکي يا تل بيرته راګرځيدونى دى، دا په دې معنا، چې ساده ريښه شتون $(\exists)$ لري، دا په دې معنا، چې $\bar{g}$ توليدوي $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ او دى

$$\mathbb{Z}_m^* = \{\bar{g}, \bar{g}^2, \dots, \bar{g}^{\varphi(m)}\}. \quad (8.12)$$

که $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ په خوښه وي، نو خورا کوچنى طبيعي عدد k يا 0 بلل کيږي، چې د هغې لپاره $\bar{a} = \bar{g}^k$ د a ايندکس دى نسبت g ته، سومبولیک: $I_g(a)$. يادونه 8.1.10: $I_g(a)$ يواځنى ټاکلى دى، ځکه چې

$$\mathbb{Z}_m^* = \{\bar{g}, \bar{g}^2, \dots, \bar{g}^{\varphi(m)}\} \quad (8.13)$$

او د دوي څخه ټول توکي مختلف دي: ټيک يو ځل رامنځ ته کيږي. د $\bar{a} = \bar{g}^{I_g(a)}$ ايندکى جدول د هر $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ لپاره (څيوکليکي وړاندنيونه) $I_g(a) \in \mathbb{N}_0$ راکوي.

بيلګه 8.1.11: $m = 14 = 2 \cdot 7$ ، د ګاوس 6.2.15 له مخې $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ له دې امله څيوکليکي دى، يعنې يوه ساده ريښه $\text{mod } 14$ شتون لري.

$g = 3$ يوه ساده ريښه $\text{mod } 7$ ده، ځکه چې

$$\mathbb{Z}_7^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} \quad (8.14)$$

او $\bar{3} = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{2}, \bar{3}^3 = \bar{6}, \bar{3}^4 = \bar{4}, \bar{3}^5 = \bar{5}, \bar{3}^6 = \bar{1}$ ، داپه دې معنا، چې $\bar{3}$ $\mathbb{Z}_7^*$ توليدوي،

ګڼونپوهنه

دا چې g ناجوره يا طاق دی، د [6.2.12](#) د ښوونې له مخې ترې لاس ته راځي: $g = 3$ هم ساده ریښه $\text{mod } 14$ دی.

$$\mathbb{Z}_{14}^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}\} \quad (8.15)$$

$$(\varphi(14) = \varphi(2 \cdot 7) = \varphi(2)\varphi(7) = 1 \cdot 6 = 6)$$

د $\bar{3} \in \mathbb{Z}_{14}^* : \bar{3} = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{9}, \bar{3}^3 = \bar{13}, \bar{3}^4 = \bar{11}, \bar{3}^5 = \bar{5}, \bar{3}^6 = \bar{1}$ ټول.

له دې سره لاندې ایندکس جدول راځوي:

$\bar{a}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{11}$	$\bar{13}$
$I_g(a)$	0	1	5	2	4	3

(8.16)

ليما 8.1.12: وي دې g ساده ریښه $\text{mod } m$ ، نو باور لري:

$$g^i \equiv g^j(m) \Leftrightarrow i \equiv j(\varphi(m))$$

لومړی:

دويم: $a, b \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$ دي، نو باور لري:

$$I_g(ab) \equiv I_g(a) + I_g(b)(\varphi(m)). \quad (8.17)$$

ښوونه:

لومړی: $(\Rightarrow)$ (لاس ته راځي)

وي دې $g^i \equiv g^j(m)$ د $i > j$ لپاره، نو په $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ کې $\bar{g}^i = \bar{g}^j$ باور لري،
يعنې د $\bar{g}^{-j} \in \mathbb{Z}_m^*$ سره د ضرب له مخې لرو:

$$\bar{g}^{i-j} = \bar{1}. \quad (8.18)$$

دا چې $\bar{g}$ د $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ ګروپ توليدوي، $\text{ord } \bar{g} = \varphi(m)$ دی. د [6.2.7](#) له مخې لاس ته راځي

$$\varphi(m) \mid i - j, \quad (8.19)$$

داپه دې معنا، چې $i \equiv j(\varphi(m))$.

($\Leftarrow$)

برعکس دې $i \equiv j(\varphi(m))$ وي، نو باور لري

$$\varphi(m) \mid i - j \Rightarrow i - j = t\varphi(m) \quad t \in \mathbb{Z}; \quad (8.20)$$

يعنې $i = j + t\varphi(m)$ او:

$$\bar{g}^i = \bar{g}^{j+t\varphi(m)} = \bar{g}^j (\bar{g}^{\varphi(m)})^t = \bar{g}^j, \quad (8.21)$$

دا په دې معنا، چې $\bar{g}^i = \bar{g}^j$ او له دې سره $g^i \equiv g^j(m)$.

ګڼونپوهنه

لومړۍ: د $\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$ له امله باور لري: $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ يعنې

$\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{Z}_m^*$ ، يعنې $I_g(ab)$ او باور لري

$$\bar{g}^{I_g(ab)} = \bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b} = \bar{g}^{I_g(a)+I_g(b)}, \quad (8.22)$$

دويم يعنې $\overline{g^{I_g(ab)}} = \overline{g^{I_g(a)+I_g(b)}}$ ، له دې سره

$$g^{I_g(ab)} \equiv g^{I_g(a)+I_g(b)}(m) \stackrel{1}{\Rightarrow} I_g(ab) \equiv I_g(a) + I_g(b)(\varphi(m)). \quad (8.23)$$

ترې لاس ته راوړنه 8.1.13: وي دې $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ د

$\text{ggT}(a_i, m) = 1$ ($i = 1, \dots, k$) سره او g دې يوه ساده ريښه $\text{mod } m$ وي، نو د ايندکشن سره لاس ته راځي:

$$I_g(a_1 \cdots a_k) \equiv I_g(a_1) + \cdots + I_g(a_k)(\varphi(m)). \quad (8.24)$$

په ځانګړې توګه دې وي $a_i = a$ ($i = 1, \dots, k$) ، نو لاس ته راځي

$$I_g(a^k) \equiv kI_g(a)(\varphi(m)). \quad (8.25)$$

دا خويونه د هغه ورسره بلد لوګارېتم سره ورته دی، چې په انالیز کې څیرل شوي.

له دې امله I_g د اعدادو تيوريکي لوګارېتم بلل کېږي.

د حل ساده متودونه Einfache Lösungsmethode

ځانگړی حالت

له دې سره د ځنو الجبري کونگروانتونو د حل ساده امکانات شته، که یوه ساده ریښه شتون ولري:

$$g \text{ سره او } \alpha) \text{ ورکړل شوي: } \text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1 \text{ د } ax \equiv b(m)$$

ساده ریښه $\text{mod } n$ ده. په $\mathbb{Z}_m^*$ کې حل کوو $\overline{ax} = \overline{b}$ ، یعنې:

$$\overline{g}^{I_g(ax)} = \overline{g}^{I_g(b)} \Leftrightarrow g^{I_g(ax)} \equiv g^{I_g(b)}(m) \quad (8.26)$$

$$\stackrel{8.1,12}{\Leftrightarrow} I_g(ax) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.27)$$

$$\Leftrightarrow I_g(a) + I_g(x) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.28)$$

$$\Leftrightarrow I_g(x) \equiv I_g(b) - I_g(a)(\varphi(m)). \quad (8.29)$$

دې له ایندکس جدول څخه وټاکل شي. x د دې کرښیز مساوات حل وي، نو $I_g(x)$ که

لیم 8.2.1: $3x \equiv 5(14); \text{ggT}(3, 14) = \text{ggT}(5, 14) = 1, g = 3$
ساده ریښه $\text{mod } 14$ ده، حل کوو:

$I_3(x) \equiv I_3(5) - I_3(3)(6).$	(8.30)
-------------------------------------	--------

$$I_3(x) \equiv 5 - 1 = 4(6) \Rightarrow I_3(x) = 4$$

(0 ≥ کوچنی حل)

$$\Rightarrow x = \overline{11}$$

β)

$ax^n \equiv b(m)$ ورکړل شوي د $\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$ سره او g ساده

رېښه $\text{mod } m$ ده. د حل دی: $\overline{ax^n} = \overline{b}$ په $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ کې، یعنې

$$\overline{g}^{I_g(ax^n)} = \overline{g}^{I_g(b)} \Leftrightarrow g^{I_g(ax^n)} \equiv g^{I_g(b)}(m) \quad (8.31)$$

$$\Leftrightarrow I_g(ax^n) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.32)$$

$$\Leftrightarrow I_g(a) + I_g(x^n) \equiv I_g(b)(\varphi(m)) \quad (8.33)$$

$$\Leftrightarrow nI_g(x) \equiv I_g(b) - I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.34)$$

له دې لاس ته راځي: په نامعلومه $I_g(x)$ کې د دې کرښیز کونګروانت په حل بیرته اړوو، که دا حل ور وي، نو $I_g(x)$ د اندکس جدول کې پیدا کړئ او اړونده $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m^*$ وټاکئ.

بیلګه 8.2.2:

$$5x^2 \equiv 9(14), \text{ggT}(5, 14) = \text{ggT}(9, 14) = 1, g = 3$$

ساده رېښه $\text{mod } 14$ دی، له دې سره حل کوو:

$$2I_3(x) \equiv I_3(9) - I_3(5)(6) \Rightarrow 2I_3(x) \equiv 2 - 5 = -3(6). \quad (8.35)$$

د $ggT(2, 6) = 2 \nmid -3$ له امله حل نه شته، او لهدې سره د پیل یا سرچینیز کونګروانت $5x^2 \equiv 9(14)$ حل هم نه شته.

$$5x^3 \equiv 9(14), ggT(5, 14) = ggT(9, 14) = 1, g = 3$$

ساده ریښه $\bmod 14$ ده، د حل دی:

$$3I_3(x) \equiv I_3(9) - I_3(5) = 2 - 5 = -3(6). \quad (8.36)$$

د $ggT(3, 6) = 3 \mid -3$ له امله یو حل شتون لري (حتا 3 انګروانت حلونه):

$$I_3(x) = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{3} \\ \overline{5} \\ \overline{13} \end{cases} \quad (8.37)$$

د $\overline{x}$ په حیث

γ)

$$ggT(a, m) = ggT(b, m) = ggT(c, m) = 1 \quad a \cdot b^x \equiv c(m) \quad \text{ورکړ شوي د}$$

سره او g ساده ریښه $\bmod m$ ده. د حل ده: $\overline{a} \cdot \overline{b}^x = \overline{c}$ په $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ کې. یعنې:

کنونپوهنه

$$\bar{g}^{I_g(ab^x)} = \bar{g}^{I_g(c)} \Leftrightarrow g^{I_g(ab^x)}(m) \equiv g^{I_g(c)}(m) \quad (8.38)$$

$$\stackrel{8.1,12}{\Leftrightarrow} I_g(a) + xI_g(b) \equiv I_g(c)(\varphi(m)), \quad (8.39)$$

دا په دې معن، چې باتې دی په x کې یو کرښیز کونګروانت حل کړو.

بیلګه 8.2.3:

$$3 \cdot 5^x \equiv 11(14) \text{ ggT}(3, 14) = \text{ggT}(5, 14) = \text{ggT}(11, 14) = 1, g = 3$$

ساده ریښه دی، له دې سره حل کوو:

$$\underbrace{I_3(3)}_{=1} + x \underbrace{I_3(5)}_{=5} \equiv \underbrace{I_3(11)}_{=4} \underbrace{(6)}_{=\varphi(14)}, \quad (8.40)$$

دا په دې معنا، چې $5x \equiv 3(6)$ ، یعنې حل کوو ، $5x \equiv 15(6)$ ، له دې سره
 $x \equiv 3(6)$ ، دا په دې معنا، چې $x_0 = 3$.

ترې لاس ته راتلنه 8.2.4 : $x^n \equiv a(m)$ د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره او g ساده ریښه $\text{mod } m$ حلور ده....

$$\dots \Leftrightarrow \bar{g}^{I_g(x^n)} = \bar{g}^{I_g(a)} \quad (Z_m^*, \cdot) \quad \text{په کې} \quad (8.41)$$

$$\stackrel{8.1,12}{\Leftrightarrow} I_g(x^n) \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.42)$$

$$\Leftrightarrow nI_g(x) \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.43)$$

$$\stackrel{5.1.1}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(n, \varphi(m)) \mid I_g(a). \quad (8.44)$$

داچې سړۍ پورته لور ته په $m = p^\alpha, p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}$ او په $\text{ggT}(a, m) = 1$

ځان محدودولی شي، نو ټول حالتون پرته له $m = 2^k$ څخه د $k \geq 3$ سره رانیول

شوي یا رانغاړل شوي دي (پرته [6.1.10](#): د $p^\alpha, p \neq 2, \alpha \in \mathbb{N}$ لپاره په خوښه

$(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \cdot)$ ځیکلیکي دی، دا په دې معنا، چې یوه ساده ریښه $\text{mod } p^\alpha$ شتون ري). دا په جمله [8.2.7](#) کې په ځانله ډول څیړل کیږي. د $n - m$ توان لپاره یوه بله قضیه لاندې نتیجه انځوروي:

جمله: $m \in \mathbb{N}$ دې د $\mathbb{Z}_m^*$ سره ځیکلیکي وي. $a \in \mathbb{Z}$ د

$\text{ggT}(a, m) = 1$ سره ټیک هلته $n - m$ توان $\text{mod } m$ دی، که د

$d := \text{ggT}(n, \varphi(m))$ سره باور ولري:

$$a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv 1(m). \quad (8.45)$$

نو د $x^n \equiv a(m)$ د $\text{mod } m$ انګونګروانت حلونو ګڼون یا تعداد d دی.

ښوونه:

($\Rightarrow$)

کنونپوهنه

$$a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv (x_0^n)^{\frac{\varphi(m)}{d}} = \left(x_0^{\varphi(m)}\right)^{\frac{n}{d}} = 1^{\frac{n}{d}} = 1(m). \quad (8.46)$$

$$(\Leftarrow)$$

وي دې $a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv 1(m)$ ، دا چې $\mathbb{Z}_m^*$ څپوکلیکي دی یوه ساده ریښه $g \bmod m$ شتون لري. یعنې

$\bar{a} = \bar{g}^{I_g(a)},$	(8.47)
-------------------------------	--------

دا په دې معنا، چې $a \equiv g^{I_g(a)}(m)$ او

$1 \equiv a^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv \left(g^{I_g(a)}\right)^{\frac{\varphi(m)}{d}} = g^{\frac{\varphi(m)I_g(a)}{d}}(m),$	(8.48)
--	--------

$$\bar{1} = \bar{g}^{\frac{\varphi(m)I_g(a)}{d}}$$

دا په دې معنا، چې د [6.2.7](#) له مخې لاس ته راځي.

$$\underbrace{\text{ord}(\bar{g})}_{=\varphi(m)} \mid \frac{\varphi(m)I_g(a)}{d}, \quad (8.49)$$

$$d\varphi(m) \mid \varphi(m)I_g(a) \Rightarrow d \mid I_g(a)$$

دا په دې معنا، چې

له دې سره د [5.1.1](#) له مخې کرښیز کونگروانت

$$ny \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.50)$$

حلوړ دی، یعنې $a \in \mathbb{Z}$ -مه ریښه ده.

پسې د [5.1.1](#) له مخې باور لري: دا کرښیز کونګروانت $d \bmod \varphi(m)$ انګونګروانت حلونه لري. د $y_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره د

$$ny_0 \equiv I_g(a)(\varphi(m)) \quad (8.51)$$

سره ټیک یو $x_0 \in \mathbb{Z}$ شتون لري د $x_0^n \equiv a(m)$ سره، ځکه چې:

له $y_0 = I_g(x_0) = I_g(x_1)$ لاس ته راځي

$$\overline{x_1} = \overline{g^{I_g(x_1)}} = \overline{g^{I_g(x_0)}} = \overline{x_0}, \quad (8.52)$$

یعنې ټیک یو $\overline{x_0} \in \mathbb{Z}_m^*$ شتون لري.

له دې سره $x^n \equiv a(m)$ هم ټیک $d = \text{ggT}(n, \varphi(m)) \bmod m$ انګونګروانت حلونه لري. $\square$

بیلګه 8.2.6: وي دې $x^5 \equiv 7(25)$ حلور، دا په دې معنا، چې:

ایا $a = 7$ پنځه توان $\bmod 25$ دی؟

د گاوس له مخې: $a = 7, n = 5, m = 25 = 5^2$ $\mathbb{Z}_{5^2}^*$ ځیوکلېکي د

$$\varphi(m) = \varphi(25) = 20$$

$$\Rightarrow d := \text{ggT}(n, \varphi(m)) = \text{ggT}(5, 20) = 5 \quad (8.53)$$

$$\Rightarrow a^{\frac{\varphi(m)}{d}} = 7^{\frac{20}{5}} = 7^4 \equiv (-1)^2(25) = 1(25), \quad (8.54)$$

دا په دې معنا، چې 7 پنځم توان $\text{mod } 25$ دی.

ټول حلونه د د ساده ریښې $g = 2$ او اندکس جدول له مخې لاس ته راځي

$$\Rightarrow 5 \text{ mod } 25$$

انګونګوانت حلونه 2, 7, 12, 17, 22 .

د $x^n \equiv a(2^k), k \geq 3$ لپاره د حل متودونه په پای کې لکه نور چې ویلي مو وو د

$$m = 2^k, k \geq 3,$$

حالت $\mathbb{Z}_{2^k}^*$ د نه ځیکلیکي، سره ځانونه په کار اچوو:

جمله 8.2.7: وي دې $k \geq 3, a \in \mathbb{Z}$ ، د $\text{ggT}(a, 2^k) = 1$ سره ټیک هلته n —م توان $\text{mod } 2^k$ دی، که د $d = \text{ggT}(n, 2^{k-2})$ لپاره باور ولري:

$$1. \quad a^{\frac{2k-2}{d}} \equiv 1(2^k),$$

$$2. \quad a \equiv 1(4) \text{ یا } n \text{ ناجوره یا طاق دی.}$$

3.

د $x^n \equiv a(m) \text{ mod } 2^k$ انګوروانتو حلونو ګڼ،ن(تعداد) نو بیا 1 دی د n ناجوره یا طاق لپاره، او $2d$ د جوړه n لپاره.

د $x^n \equiv a(2^k)$ حل (نو) پیدا کول له بنوونې 8.2.7 څخه:

$\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2^k}$ په لاندې بڼه

$$\bar{a} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.55)$$

په یواځني ډول د 6.2.16 له مخې انځور کړئ، راوړو

$$nx \equiv j(2) \text{ همداسې } nx \equiv l(2^{k-2}); \quad (8.56)$$

کرنیز کونګروانت دي، که α د $nx \equiv j(2)$ راکم شوی حل وي او β د $nx \equiv l(2^{k-2})$ راکم شوی حل، نو دی

$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^{\alpha} 5^{\beta}}$	(8.57)
--	--------

د $x^n \equiv a(2^k)$ حل دی. له دې سره سرې ټول حلونه لاس ته راوړي.

بیلګه 8.2.8 :

$$x^3 \equiv 9(32) : N = 3, a = 9, m = 2^5 (k = 5) \quad 1.$$

و ښایي: $a = 9$. توانپاتي $\text{mod } 32$ دی (راوړو: $\mathbb{Z}_{32}^*$ د ګاوس له مخې څیوکلکي نه دی، ځکه چې $k \geq 3, p = 2$) د 8.2.7 سره سم:

$$d = \text{ggT}(n, 2^{k-2}) = \text{ggT}(3, 8) = 1 \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$a^{\frac{2^k-2}{d}} = 9^{2^{5-2}} = (9^4)^2 = (81^2)^2 \equiv 1(32), \quad (8.59)$$

۳. 9 نو درې توانپاتي دی

حل: د $n = 3$ ناجوره يا طاق له امله فقط يو انکونگروانت $\text{mod } 32$ حلونه لري، د [8.2.7](#) بنووني سره سم:

$$\bar{a} = \bar{9} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.60)$$

: $\text{mod } 324$.

$$5^0 \equiv 1, 5^1 \equiv 5, 5^2 \equiv -7, 5^3 \equiv -3, 5^4 \equiv -15, 5^5 \equiv -11, 5^6 \equiv 9(32),$$

4. يعنې $j = 0, l = 6 \leq 2^{k-2} = 8$ ، له دې سره $\bar{9} = \overline{(-1)^0 5^6}$ ، د حل دي: $nx \equiv j(2)$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 0(2)$ ، دا په دې معنا، چې $\alpha = 0$ (راکم شوي)، $nx \equiv l(2^{k-2})$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 6(8)$ ، دا په دې معنا، چې $\beta = 2 \Rightarrow$ له دې لاس ته راځي يوگونی حل $\text{mod } 32$ دی.

$$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^\alpha 5^\beta} = \overline{25}. \quad (8.61)$$

$$x^4 \equiv 177(224) : n = 4, a = 177, m = 224 = 7 \cdot 2^5,$$

$$\text{ggT}(177, 224) = 1$$

له دې جلا تر راوړو: $x^4 \equiv 177(7)$ او $x^4 \equiv 177(2^5)$

$$x^4 \equiv 177(7)$$

د 8.2.5 له مخې څيړکليکي دي، د $x^4 \equiv 2(7) : n = 4, a = 2, p = 7$ د گاوس له مخې څيړکليکي دي، د 8.2.5 سره سم:

$$\varphi(7) = 6, d = \text{ggT}(n, \varphi(7)) = 2; a^{\frac{\varphi(7)}{2}} = 8 \equiv 1(7) \Rightarrow \quad (8.62)$$

د 8.2.5 له مخې باور لري 2 د 4-م توان د سره اينکونگروانت حلونه دي

$$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5 \quad x^4 \equiv 177(2^5)$$

$$\Rightarrow x^4 \equiv 17(2^5) : n = 4$$

$$17^{\frac{2^3}{4}} = 17^2 \equiv 1(32), a = 17 \equiv 1(4) \quad \text{جوړه مگر}$$

او همداسې د 8.2.7 له مخې: 17 د 4-م توان mod 32 دی د $8 \bmod 32$ سره

اينکونگروانت حلونه $y_1, y_2, \dots, y_8$ دي.

$$\overline{a} = \overline{(-1)^j 5^l} \quad nx \equiv j(2) \quad \text{د سره سم او کرښيزکوگروانت همداسې}$$

$$nx \equiv l(2^{k-2}) \Rightarrow \quad \text{څخه لاس ته راځي ټول } \alpha, \quad \text{څخه لاس ته راځي } \beta \Rightarrow$$

$$\overline{y} = \overline{(-1)^{\alpha} 5^{\beta}} \quad \text{ټول} \quad (.)$$

د حينايبې پاتې جملې سره سم:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv x_i(7), \\ x \equiv y_s(32) \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, s = 1, \dots, 8, \quad (8.63)$$

يعنې 16 سيستمي له دې لاس ته راځي 16 حلونه.

څلوریز پاتې (که غواړئ: مربع باقیمانده) Quadratische Reste

ځانګړی حالت

موږ اوس یو ځانګړی حالت رااخلو، او د هده حلوروالی ټیک تر څیرنې لاندې نیسو:

$n = 2$ دا په دې معنا، چې

$$x^2 \equiv a(m) \quad (9.1)$$

د څیرنې دی. د دې د حلوروالي لپاره ساده قضیې تر څیرنې لاندې نیول زموږ موخه ده.

پیژند 9.1.1: $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, m) = 1$ مربعیز توانپاتې $\text{mod } m$ بلل

کیري، او هم لنډ مربعیز پاتې، که $x^2 \equiv a(m)$ حلور وي.

دا لاندې د $m = 2$ لپاره باور لري:

لیما یا جملګی 9.1.2: وي دې $\text{ggT}(a, m) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$ سره

ناجوړه (طاق)، دا په دې معنا، چې $2n + 1$. نو باور لري:

هر ناجوړه عدد

$$x_0 = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (9.2)$$

حلور $\text{mod } 2$ دی.

بنسونه: $x_0^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1(2) (\equiv 2n + 1 \equiv a(2))$.

د عمومي قضیې 8.2.5 (هله $n \in \mathbb{N}$ په خوښه)، ځیکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونکی حالت له مخې:

جمله 9.1.3: وي دې $a \in \mathbb{Z}, m \geq 3, m \in \mathbb{N}$ د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره ټيک هلته مربع پاتي $\text{mod } m$ دی، که

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1(m); \quad (9.3)$$

د $x^2 \equiv a(m)$ د حلونو تعداد يا ګڼون 2 وي.

ښوونه: ځکه چې $d = \text{ggT}(2, \varphi(m))$ او دا چې $\varphi(m)$ د $m \geq 3$ لپاره دی تل جوړه دی، نو د [8.2.5](#) له مخې باور لري،:

لومړی: که د m د په لومړني ضریب تجزیه کې یو ناجوړه (طاق) p_i رامنځ ته شي، نو $p_i - 1$ جوړه يا جفت دی او له دې امله $\varphi(m) \equiv 0(2)$ دی.

دویم: که نه، نو بیا ۲-م توان دی، یعنې $\varphi(m) = \frac{m}{2}$ جوړه دی.

$$(m = 2^\alpha \text{ د } \alpha \geq 2 \text{ سره، ځکه چې } m \geq 3)$$

جملې ۹.۱.۴: (اویلر)

د $x^n \equiv a(2^k), k \geq 3$ لپاره د حل متودونه

په پای کې لکه نور چې ویلي مو وو د

$$m = 2^k, k \geq 3,$$

حالت $\mathbb{Z}_{2^k}^*$ د نه ځیکلیکي، سره ځانونه په کار اچوو:

جمله 8.2.7: وي دې $a \in \mathbb{Z}, k \geq 3$ ، د $\text{ggT}(a, 2^k) = 1$ سره ټيک هلته $n -$ م توان $\text{mod } 2^k$ دی، که د $d = \text{ggT}(n, 2^{k-2})$ لپاره باور ولري:

$$a^{\frac{2^k-2}{d}} \equiv 1(2^k) \quad .4$$

5. $a \equiv 1(4)$ يا n ناجوره يا طاق دی.

6.

د $x^n \equiv a(m) \pmod{2^k}$ انګوروانتو حلونو ګڼ، n (تعداد) نو بيا 1 دی د n ناجوره يا طاق لپاره، او $2d$ د جوړه n لپاره.

د $x^n \equiv a(2^k)$ د حل (نو) پيداګول له بنووني 8.2.7 څخه:

$$\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2^k}$$

په لاندې بڼه

$$\bar{a} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.55)$$

په يواځني ډول د 6.2.16 له مخې انځور کړئ، راوړو

$nx \equiv j(2) \pmod{2^{k-2}} \text{ همداسې؛ } nx \equiv l(2^{k-2})$	(8.56)
---	--------

کرښیز کونګروانت دي، که α د $nx \equiv j(2)$ راکم شوی حل وي او β د $nx \equiv l(2^{k-2})$ راکم شوی حل، نو دی

$$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^\alpha 5^\beta} \quad (8.57)$$

د $x^n \equiv a(2^k)$ حل دی. له دې سره سرې ټول حلونه لاس ته راوړي.

بیلګه 8.2.8:

$$x^3 \equiv 9(32) : N = 3, a = 9, m = 2^5 (k = 5)$$

2.

و ښایي: $a = 9$. توانپاتي $\pmod{32}$ دی (راوړو: $\mathbb{Z}_{32}^*$ د ګاوس له مخې څیوکلکي نه دی، ځکه چې $k \geq 3, p = 2$) د 8.2.7 سره سم:

$$d = \text{ggT}(n, 2^{k-2}) = \text{ggT}(3, 8) = 1 \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$a^{\frac{2^k-2}{d}} = 9^{2^{5-2}} = (9^4)^2 = (81^2)^2 \equiv 1(32), \quad (8.59)$$

۳. 9 نو درې توانپاتې دی
حل: د $n = 3$ ناجوړه یا طاق له امله فقط یو انکونگروانت $\text{mod } 32$ حلونه لري: د [8.2.7](#) بنوونې سره سم:

$$\bar{a} = \bar{9} = \overline{(-1)^j 5^l}, \quad j \in \{0, 1\}, l \in \{1, \dots, 2^{k-2}\} \quad (8.60)$$

: $\text{mod } 32$.

$$5^0 \equiv 1, 5^1 \equiv 5, 5^2 \equiv -7, 5^3 \equiv -3, 5^4 \equiv -15, 5^5 \equiv -11, 5^6 \equiv 9(32),$$

4. یعنې $j = 0, l = 6 \leq 2^{k-2} = 8$ ، له دې سره $\bar{9} = \overline{(-1)^0 5^6}$ ، د حل دي:
 $nx \equiv j(2)$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 0(2)$ ، دا په دې معنا، چې $\alpha = 0$ (راکم شوي)، $nx \equiv l(2^{k-2})$ ، دا په دې معنا، چې $3x \equiv 6(8)$ ، دا په دې معنا، چې $\beta = 2 \Rightarrow$ له دې لاس ته راځي یوگونی حل $\text{mod } 32$ دی.

$$\bar{x}_0 = \overline{(-1)^{\alpha} 5^{\beta}} = \bar{25}. \quad (8.61)$$

$$x^4 \equiv 177(224) : n = 4, a = 177, m = 224 = 7 \cdot 2^5, \\ \text{ggT}(177, 224) = 1$$

$$x^4 \equiv 177(7) \text{ او } x^4 \equiv 177(2^5) \\ x^4 \equiv 177(7)$$

$\Rightarrow x^4 \equiv 2(7) : n = 4, a = 2, p = 7$ ؛ د گاوس له مخې څیوکلکي دي، د [8.2.5](#) سره سم:

$$\varphi(7) = 6, d = \text{ggT}(n, \varphi(7)) = 2; a^{\frac{\varphi(7)}{2}} = 8 \equiv 1(7) \Rightarrow \quad (8.62)$$

د [8.2.5](#) له مخې باور لري د 2 د 4-م توان د سره اینکونگروانت حلونه دی

$$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$$

$$x^4 \equiv 177(2^5)$$

$$\Rightarrow x^4 \equiv 17(2^5) : n = 4$$

$$17^{\frac{2^3}{4}} = 17^2 \equiv 1(32) \quad a = 17 \equiv 1(4)$$

جوره مگر ،

او همداسې د [8.2.7](#) له مخې : 17 د 4-م توان $\text{mod } 32$ دی د $8 \text{ mod } 32$ سره
اینګونګروانت حلونه $y_1, y_2, \dots, y_8$ دي.

$$\bar{a} = \overline{(-1)^{j5^l}} \quad nx \equiv j(2) \quad \text{کرښیزکوګروانت همداسې}$$

(د) سره سم او

$$nx \equiv l(2^{k-2}) \Rightarrow \quad \beta \Rightarrow \quad \text{څخه لاس ته راځي ټول } \alpha, \text{ ټول } \beta \text{ څخه لاس ته راځي}$$

$$\bar{y} = \overline{(-1)^{\alpha 5^\beta}} \quad \text{ټول (.)}$$

د چینایي پاتې جملې سره سم:

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv x_i(7), \\ x &\equiv y_s(32) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, s = 1, \dots, 8, \quad (8:63)$$

یعنې 16 سیستمې له دې لاس ته راځي 16 حلونه.

څلوریز پاتې (که غواړئ: مربع باقیمانده)

ځانګړی حالت

مور اوس یو ځانګړی حالت راځلو، او د هده حلوروالی ټیک تر څیرني لاندې نیسو:

$n = 2$ دا په دې معنا، چې

$$x^2 \equiv a(m) \quad (9.1)$$

د څيړنې دې. د دې د حلونو لپاره ساده قضیې تر څيړنې لاندې نيول زموږ موخه ده.

پېژند 9.1.1: $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, m) = 1$ مربعیز توانپاتې $\text{mod } m$ بلل

کيږي، او هم لنډ مربعیز پاتې، که $x^2 \equiv a(m)$ حل وړ وي.

دا لاندې د $m = 2$ لپاره باور لري:

ليما يا جملگي 9.1.2: وي دې $a \in \mathbb{Z}$ د $\text{ggT}(a, m) = 1 \Rightarrow a$ سره

ناجوړه (طاق)، دا په دې معنا، چې $2n + 1$ نو باور لري:

هر ناجوړه عدد

$$x_0 = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (9.2)$$

حلونو $\text{mod } 2$ دې.

ښوونه: $x_0^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1(2) (\equiv 2n + 1 \equiv a(2))$.

د عمومي قضیې 8.2.5 (هلته $n \in \mathbb{N}$ په خوښه)، ځيکليکي يا تل بيرته راگرځيدونکي حالت له مخې:

جمله 9.1.3: وي دې $m \in \mathbb{N}, m \geq 3; a \in \mathbb{Z}$ د $\text{ggT}(a, m) = 1$ سره ټيک هلته مربع پاتې $\text{mod } m$ دې، که

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1(m); \quad (9.3)$$

د $x^2 \equiv a(m)$ د حلونو تعداد يا گڼون 2 وي.

ښوونه: ځکه چې $d = \text{ggT}(2, \varphi(m))$ او دا چې $\varphi(m)$ د $m \geq 3$ لپاره دې تل جوړه دې، نو د 8.2.5 له مخې باور لري:

ګڼونپوهنه

لومړۍ: که د m په لومنیو ضربیتجزیه کې یو ناجوره p_i منځ ته راشي، نو $p_i - 1$ جوړه دی او له دې امله $\varphi(m) \equiv 0(2)$ ،

دویم: که نه، نو یو 2 -م توان دی، یعنې $\varphi(m) = \frac{m}{2}$ ، جوړه.

($m = 2^\alpha$ د $\alpha \geq 2$ سره ځکه چې $m \geq 3$)

کورولار ۹ . ۱ . ۴ (اویلر) (Euler) : وي دې $p > 2$ لومړنی عدد، $a \in \mathbb{Z}$ د

$\text{ggT}(a, p) = 1$ (خوړا غټ پروېشوی یا بزرګترین قاسم مشترک) سره ټیک هلته

مربعیز باقي یا پاتې $\text{mod } p$ دی، که

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p). \quad (9:4)$$

ښوونه: د ګاوس [6.2.15](#) له مخ او د $p \neq 2$ له امله $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ تل بیرته راګرځیدنې یا ځیکلیکي دی.

جملګی ۹ . ۱ . ۵ - وي دې $p > 2$ یو لومړنی عدد، $a \in \mathbb{Z}$ له $\text{ggT}(a, p) = 1$

سره ټیک هلته مربع باقي یا پاتې $\text{mod } p^\alpha \forall \alpha \in \mathbb{N}$ دی، که a مربع باقي $\text{mod } p$ وي

ښوونه:

$(\Rightarrow)$

ساده دی.

$(\Leftarrow)$

جمله ۹. ۱۶: وي دي $a \in \mathbb{Z}$ ناجوره، نو کونګروانځ يا ورته والی $x^2 \equiv a(2^k)$ دی

لومړۍ د $k = 1$ لپاره تل حلور دی او ټيک يو حل لري.

دويم - د $k \geq 3$ لپاره حلور دی، د 4 حلونو سره، که $a \equiv 1(8)$ وي، پرته له ې نه.

بنسونه: لومړۍ پورته وګوري: $m = 2 = 2^1$ ، دا چې ټول ناجوره ګڼونه يا اعداد $\bmod 2$ دي، نو ټيک يو حل شتون لري.

دويم: د ګاوس 6.2.15 له مخې، $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ تلبيړته راګرځيدونی يا ځيکليکي دی، يعنې د $a \in \mathbb{Z}$ له مخې: $9.1.3$ له مخې: ناجوره مربع پاتې $\bmod 4 \dots$ دی.

(9.9)	$\dots \Leftrightarrow a^{\frac{\varphi(4)}{2}} \equiv 1(4) \Leftrightarrow a^{\frac{2}{2}} \equiv 1(4) \Leftrightarrow a \equiv 1(4).$
-------	---

دريم: په همدې ترتيب د 9.1.3 پسي: د $x^2 \equiv a(4)$ د حلونو ګڼون يا تعداد 2 دی.

. وي دي $m = 2^k, k \geq 3$ حلور، نو دی

(9.10)	$x_0^2 \equiv a(2^k)$
--------	-----------------------

څلورم- د يوه $x_0 \in \mathbb{Z}$ لپاره، له دې سره $x_0^2 \equiv a(8)$ ، ځکه چې $8 \mid 2^k (k \geq 3)$

، پسي د 8.1.6 له مخې باور لري: خورا غټ ګډ پروېشونی)

بزرګترین مقسوم عليه) $\text{ggT}(x_0, 2^k) = 1$ ، نوله دې سره

$\text{ggT}(x_0, 8) = 1 (8 \mid 2^k, k \geq 3)$ $x_0 \in \mathbb{Z}$. دا په دې معنا، چې نسبت و 8 ته

نسي لومړنی عدد دی، يعنې: $x_0 = 1, 3, 5, 7(8)$ ، له دې سره $x_0^2 \equiv 1(8)$.

په ټوليزه توګه:

$a \equiv x_0^2 \equiv 1(8).$	(9.11)
-------------------------------	--------

پنځم- وي دې په څټ يا برعکس $a \equiv 1(8)$ ، يعني هم ، $a \equiv 1(4)$ ، پسي باور لري

$a^{2^k-3} \equiv 1(2^k) \ (k \geq 3).$	(9.12)
---	--------

شپږم- ايندکشن: د نيوني يا قرضيې له مخي.

نيسو چي د لپاره سم دی، د لپاره باور لري:

$a^{2^{k+1}-3} =$ $\left(a^{2^k-3}\right)^2 = (1 + t2^k)^2 = 1 + 2t2^k + t^22^{2k} = 1 + s2^{k+1} \equiv$ $\equiv 1(2^{k+1}).$	(9.13) (9.14)
--	-----------------------------

$$(d = \text{ggT}(2, 2^{k-2}) = 2) \quad a \equiv 1(4)$$

اوم- له دې سره لرو او

$a^{\frac{2^k-2}{d}} = a^{2^k-3} \equiv 1(2^k);$	(9.15)
--	--------

اتم- نو د [8.2.7](#) له مخي لرو، چي $a \in \mathbb{Z}$ مربع پاتي يا باقي $\text{mod } 2^k$ دی. له دې سره $2d = 4$ حلونه باور لري. $\square$

بيلګه ۹ . ۱ . ۷ : ايا $x^2 \equiv 110(211)$ حلور دی؟ $(\Leftrightarrow 110 \text{ مربع پاتي } \text{mod } 211)$ دی؟

دا چې 211 یو لومړنی ګڼ یا عدد دی، او $\text{ggT}(110, 211) = 1$ د اویلر 9.1.4 پسي بار لري، ټيک هلته حلور دی، که وي:

$a^{\frac{p-1}{2}} = 110^{105} \equiv 1(211)$	(9.16)
---	--------

- ډیر کار غواړي!

Legendre-Symbol (1752-1833) لژندر-سومبول:

د $x^2 \equiv a(m), \text{ggT}(a, m) = 1$ د حلوروالي لپاره نوې لار.

پیژند یا تعریف ۹ . ۲ . ۱ : (لژندر سیمبول 9.1): وي دي $p > 2$ یو لومړنی ګڼ یا عدد،

$a \in \mathbb{Z}$ د لژندر سومبول له مخې مربع پاتې د دي لاندې له لاري تعریف دی:

$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$	a مربع باقي mod p دی. $P a$ انه مربع باقي mod p دی.	(9.17)
---	---	--------

ساده خویونه:

جملگی ۹ . ۲ . ۲ : که $a \equiv a'(p)$ وي، باور لري

$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a'}{p}\right).$	(9.18)
---	--------

بڼوونه:

$\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \pmod{p}$	(9.19)
$\Leftrightarrow x^2 \equiv a(p)$	(9.20)
$\Leftrightarrow x^2 \equiv a'(p)$	(9.21)
$\Leftrightarrow \left(\frac{a'}{p}\right) = 1.$	(9.22)

جملگی ۹. ۳ - وېش له باقي يا پاتې سره:

$a = p \cdot s + r$	(9.23)
---------------------	--------

د $0 \leq r < p$ سره، له دي امله دی $a = ps + r \equiv r(p)$ ، نو د [9.2.2](#) پسي:

$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) \dots$	(9.24)
لنډونه	

جمله ۹. ۲. ۴: وي دي $p > 2$ يو لومړنی عدد او $a \in \mathbb{Z}$ د خورا غټ ګډ پروېشونی $\text{ggT}(a, p) = 1$ سره، نو باور لري

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (p).$	(9.25)
--	--------

بنوونه:

- که $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ وي، نو a مربع پاتي $\text{mod } p$ دی او د [9.1.4](#) پسي يا له $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p)$

مخي: ، له دې سره دی

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (p).$	(9.26)
--	--------

- که $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ وي، نو a مربع باقي $\text{mod } p$ نه دی او د [9.1.4](#) له مخي يا $a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \not\equiv 0(p)$ $a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1(p)$

پسي: ، دا په دې معنا، چې د [6.1.18](#) له مخي باور لري

$a^{p-1} \equiv 1(p),$	(9.27)
------------------------	--------

نو $a^{p-1} - 1 \equiv 0(p)$ ، د اسي چې په بدن (انگریزي يي فيلد) $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ کې p لومړنی گڼي يا عدد) باور لري:

$\bar{0} = \overline{a^{p-1} - 1} = \overline{(a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)} = \underbrace{\overline{a^{\frac{p-1}{2}} - 1}}_{\neq \bar{0}} \overline{a^{\frac{p-1}{2}} + 1};$	(9.28)
---	--------

دا چې بدن صفر نه لري، لرو

$\overline{a^{\frac{p-1}{2}} + 1} = \bar{0}.$	(9.29)
---	--------

له دې سره $a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0(p)$ او $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ، دا په دې معنا، چې

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (p).$	(9.30)
--	--------

کورولار ۹.۲.۵: $p > 2$ دې لومړني عدد وي او $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ د خ غ ګ
 $(i = 1, \dots, n) \text{ ggT}(a_i, p) = 1$
 یعنې سره، نو باور لري

$\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{p}\right) = \left(\frac{a_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{a_n}{p}\right).$	(9.31)
---	--------

ښوونه: $\text{ggT}(a_1 \cdots a_n, p) = 1$ ، ځکه چې پرته له دې به $p \mid a_1 \cdots a_n$ ، داسې
 چې د یوه $1 \leq i \leq n$ لپاره د [3.1.5](#) له مخې $p \mid a_i$ لرو. — تضاد یا مخمخوالی! له دې
 سره $\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{p}\right)$ تعریف دی.

$\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{p}\right) \equiv (a_1 \cdots a_n)^{\frac{p-1}{2}} = a_1^{\frac{p-1}{2}} \cdots a_n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{a_n}{p}\right) (p).$	(9.32)
---	--------

له دې امله p کمښت وېشي، یعنې $p \mid (\pm 1) - (\pm 1)$. دا کمښت صفر دی، که دواړه
 ± 2 عددونه برابر وي، او پرته له دې.
 له $p > 2$ امله باور لري: $p \nmid \pm 2 \Rightarrow$ یعنې لاس ته راځي کمښت $= 0$ لاس ته راځي
 (9.26). □

لاس ته راوړنه ۹.۲.۶:

لومړۍ- $a \in \mathbb{Z} (a \neq 0)$ دې د $a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$
 په لومړنیو ضربونو توټه
 کونه یا تجزیه وي. نو د [9.2.5](#) له مخې باور لري:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{\pm 1}{p}\right) \left(\frac{p_1^{\alpha_1}}{p}\right) \cdots \left(\frac{p_k^{\alpha_k}}{p}\right), \quad (9.33)$$

دویم: نو شمیرو: $\left(\frac{-1}{p}\right)$ او $\left(\frac{q^2}{p}\right)$ د خ غ پ (قاسم بزرګ مشبرګ)
 $\text{ggT}(p, q^2) = 1$ سره، دا په دې معنا، چې $p \neq q$.

دریم: $1 = \left(\frac{q^2}{p}\right)$ ، ځکه چې $x^2 \equiv q^2(p)$ د حل په حیث $x_0 = q$ لري، دا په دې
 معنا، چې q^2 تل مربع باقي $\text{mod } p$ دی.

څلورم: ځانګړی حالت: $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ ($1 = 1^2 \Rightarrow$) مو غوښتنه یا ثبوت دی.

پنځم: له ی امله فقط د شمیرلو لپاره: $\left(\frac{-1}{p}\right)$ او $\left(\frac{q}{p}\right)$ د $p \neq q$ سر لومړنی عدد 2
 < دی، ځکه چې

$$\left(\frac{q^{2k}}{p}\right) = \left(\frac{(q^k)^2}{p}\right) = 1. \quad (9.34)$$

کورولار یا جملګۍ ۹ . ۲ . ۷ : وي دې $p > 2$ لومړنی عدد، نو باور لري:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

لومړۍ: -1 ټیک هلته مربع باقي $\text{mod } p$ دی، که $p \equiv 1(4)$ وي.

ښوونه:

لومړۍ: د له مخې باور لري:

$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (p);$	(9.35)
--	--------

دویم: نو p کمښت یا تفریق وېشي، دا 0 یا ± 2 دی. د $p > 2$ له امله دی

$p \nmid \pm 2 \Rightarrow$ (له دې لاس ته راځي)

$\Rightarrow$ کمښت = 0

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$	(9.36)
---	--------

دویم: مربع پاتې دی

$\dots \stackrel{1.}{\Leftrightarrow} \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$	(9.37)
$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2}$ جوړه	(9.38)
$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2k \ (k \in \mathbb{N})$	(9.39)
$\Leftrightarrow p-1 = 4k$	(9.40)
$\Leftrightarrow p = 4k + 1$	(9.41)
$\Leftrightarrow p \equiv 1(4).$	(9.42)

لاندې جمله د ډیرینلټ د جملې څوکه انځوروي، چې نوره غواړو وښايو:

جمله ۹ . ۲ . ۸ : د $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) ټولې ناپايې دي لومړني ګڼونه شتون لري. بنوونه: ناسيده، نيسو چې د دي ټولې پای ډېر ګڼونه شتون لري:

$p_1, \dots, p_n$ وي دي.

$N := (2p_1 \cdots p_n)^2 + 1,$	(9.43)
---------------------------------	----------

نو باور ري: $N = 2m + 1$ ، يعنې ناجوره، ا په دي معنا، چې $2 \nmid N$.
د $N > 1$ له امله يو لومړنی عدد p د $p \mid N$ شتون لري، دا په دي معنا، چې $N \equiv 0(p)$ نو: .

$(2p_1 \cdots p_n)^2 \equiv -1(p).$	(9.44)
-------------------------------------	----------

دا په دي معنا چې $-1 \pmod p$ مربع پاتي يا باقي دی. د [9.2.7](#) له مخي لرو يا لاس ته راځي:

$p \equiv 1(4),$	(9.45)
------------------	----------

دا په دي معنا چې $p = 4k + 1$. د نيوني يا فرضيې له مخو لاس ته راځي: $p = p_i$ $1 \leq i \leq n$ د يوه لپاره. له دي امله باور لري

$p \mid (2p_1 \cdots p_n)^2;$	(9.46)
-------------------------------	----------

د $p \mid N$ له امله لاس ته راځي:

$p \mid N - (2p_1 \cdots p_n)^2 = 1,$	(9.47)
---------------------------------------	----------

نو $p \leq 1$ - تضاد يا ردونه. $\square$

د ګاوس لیمایا جملگی

جمله ۹، ۲، ۹: (د ګاوس جمله ګی) وي دي $p > 2$ لومړنی عدد، $a \in \mathbb{Z}$ د خورا
 غټ ګډ پروېشوني (بزرګترین مقسوم علیه مشترک) $\text{ggT}(a, p) = 1$ سره.

جوړووو: $1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, \frac{p-1}{2} \cdot a$ او د p له لارې باقي سره د وېش له لارې د
 اړونده پاتې سره، نو باور لري

$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{n(a)},$	(9.48)
---	--------

چیرته چې $n(a)$ سره د پاتې یا باقي ګڼون یا تعداد په نڅېنه کېږي، چې له $\frac{p}{2}$ لوی دي.
 بڼونه: د $i = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ لپاره دي وي:

$ia = pq_i + t_i \quad 0 \leq t_i < p$	(9.49)
--	--------

(د پاتې سره وېش). نو $t_i \neq 0 \forall i$ باور لري، پرته له دې $ia = pq_i$ ، یعنې $p \mid ia$ ،
 داسې چې (د 3.1.5 له مخې): $p \mid i$ یا $p \mid a$ ، دا چې $\text{ggT}(a, p) = 1$ (خ غ ګ)،
 باید باور ولري $(\Rightarrow p \leq i)$ ، د $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2} < p$ له مخې یو مخامخوالی یا
 تضاد لاس ته راځي!
 په ځانګړي ډول باور لري:

$t_i \equiv ia(p) \quad \forall i = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}.$	(9.50)
--	--------

کنونپوهنه

وي دي $r_1, \dots, r_{n(a)}$ پورتنۍ پاتې له $\frac{p}{2} < t_i < p, s_1, \dots, s_k$ سره پاتې له
 $1 \leq t_i \leq \frac{p-1}{2}$ سره دا په دي معنا، چې $1 \leq t_i \leq \frac{p-1}{2}$ (ناجوړه!) p

$\Rightarrow n(a) + k = \frac{p-1}{2}.$	(9.51)
---	--------

وښايي: $r_1, \dots, r_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$ ټول سره توپير لري.

نيسو $t_i = t_j$ د $i > j$ لپاره، نو

$ia - ja = pq_i - pq_j = p(q_i - q_j);$	(9.52)
---	--------

$q_i - q_j = 0$ دی، نو $ia - ja = 0$ ، دا په دي معنا چې $(i - j)a = 0$ ، يعنې $i = j$ ($a \neq 0$)
 -تضاد يا مخامخوالی!

دی ، نو $q_i - q_j \neq 0$ ، $p \mid (i - j)a$ ، د [3.1.5](#) له مخې لاس ته راځي $p \mid i - j$ يا
 $p \mid a$ ، $\text{ggT}(p, a) = 1$ (خ غ ک) له امله لرو $p \mid i - j$ - تضاد يا مخامخوالی!
) له کوم به چې $0 \leq i - j < \frac{p-1}{2} < p$ ، له کوم به چې $i - j = 0$ لاس ته راغلی وی.

جوړ کړی

$\alpha_i = p - r_i \quad (i = 1, \dots, n(a)),$	(9.53)
--	--------

نو ټول $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}$ مختلف يا نابرابر دي (ټول $r_1, \dots, r_{n(a)}$ مختلف دي).
 پسي لرو $\alpha_i \neq s_j \quad \forall i, j$ ځکه چې :

$\alpha_i = p - r_i = s_j \Rightarrow r_i + s_j = p \equiv 0(p)$	(9.54)
--	--------

i, j $\Rightarrow ia + ja \equiv 0(p) \ (t_i \equiv ia(p) \ \forall i)$ $\Rightarrow p \mid (i+j)a \stackrel{3.1.5}{\Leftrightarrow} p \mid i+j \ (ggT(a, p) = 1);$	(9.55) (9.56)
---	-------------------

د $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$ له امله باور لري: $1 \leq i+j \leq p-1 < p$ -تضاد!

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$	(9.57)
---	--------

ټول مختلف دي يا توپیر لري.

د $0 < \alpha_i \leq \frac{p-1}{2}$ باور لري: ، ځکه چې

$\frac{p}{2} < r_i < p \Rightarrow -p < -r_i < -\frac{p}{2} \Rightarrow 0 < p - r_i = \alpha_i < \frac{p}{2};$	(9.58)
$0 < s_j < \frac{p-1}{2}$	(9.59)

د پیژند له مخې باور لري.

له دې سره هم

$1 \leq s_j \leq \frac{p-1}{2}; \quad 1 \leq \alpha_i \leq \frac{p-1}{2}$ او	(9.60)
---	--------

دا چې

$n(a) + k = \frac{p-1}{2}$	(9.61)
----------------------------	--------

(ټول باقي يا پاتې توپیر لري) $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$ ټیک $\frac{p-1}{2}$ طبعی اعداد دي د 1 او $\frac{p-1}{2}$ ترمنځ. له دې سره: ټیک اعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_{n(a)}, s_1, \dots, s_k$ دي. له دې لاس ته راځي:

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{n(a)} s_1 \cdots s_k = 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2} = \left(\frac{p-1}{2} \right)! \quad (9.62)$$

$$\Rightarrow (p - r_1) \cdots (p - r_{n(a)}) s_1 \cdots s_k = \left(\frac{p-1}{2} \right)! \quad (9.63)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} r_1 \cdots r_{n(a)} s_1 \cdots s_k \equiv \left(\frac{p-1}{2} \right)! (p) \quad (9.64)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} t_1 \cdots t_{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{p-1}{2} \right)! (p) \quad (9.65)$$

$$(d \text{ } r_i, s_j \text{ له تعريف څخه}) \quad (9.66)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} 1 \cdot a \cdots \left(\frac{p-1}{2} \right) \cdot a \equiv \left(\frac{p-1}{2} \right)! (p) \quad (9.67)$$

$$(d \text{ تعريف له مخې: } ia = pq_i + t_i \equiv t_i(p)) \quad (9.68)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} a^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2} \right)! \equiv \left(\frac{p-1}{2} \right)! (p). \quad (9.69)$$

باور لري $\text{ggT}((\frac{p-1}{2})!, p) = 1$ ، ځکه چې پرته له دې به وی

$$p \parallel \left(\frac{p-1}{2}\right)! = 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2}, \quad (9.70)$$

یعني د [3.1.5](#) له مخې:

$$\exists k : 1 \leq k \leq \frac{p-1}{2} < l : p \mid k \quad \text{! تضاد} \quad (9.71)$$

$$\Rightarrow (-1)^{n(a)} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(p) \quad (9.72)$$

$$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{n(a)}(p) \quad (9.73)$$

$$\stackrel{9.2.4}{\Leftrightarrow} \left(\frac{a}{p}\right) \equiv (-1)^{n(a)}(p) \quad (9.74)$$

$$\Rightarrow p \in \{0, \pm 2\} \text{ د کمنېټ وېشي } \quad (9.75)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{کمنېټ باید صفر} \\ (p > 2, p \nmid 2!) \text{ وي} \end{array} \quad (9.76)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{n(a)}. \quad (9.77)$$

بیلګه 9.2.10 . ایا 7 څلورۍ پاتې یا مربع باقي $\text{mod } 13$ دی؟

$p = 13, a = 7, \text{ggT}(a, p) = 1$ خورا غټ ګډ پروېشونی)؛ جوړ کړی :
 $1 \cdot 7, \dots, 6 \cdot 7$

د 13 له لارې په وېش کې پاتې :

$t_1 = 7, t_2 = 1, t_3 = 8, t_4 = 2, t_5 = 9, t_6 = 3;$	(9.78)
---	--------

د دې پاتو ګڼون يا تعداد $n(7)$ له $\frac{13}{2}$ لوي دي ، دا په دې معنا، چې $7 \geq 3$ برابر دی. له دې امله

$\left(\frac{7}{13}\right) = (-1)^3 = -1,$	(9.79)
--	--------

دا په دې معنا، چې $a = 7$ مربع - يا څلورۍ پاتې $\bmod 13$ نه دی.

د $\left(\frac{q}{p}\right)$ شميرنه:

د $\left(\frac{q}{p}\right)$ شميرنې ته، د له ۲ لوي p, q مختلفو لومړنيو ګڼونو سره.

جمله $11 : 2 : 9 : p, q$ مختلف لومړني ګڼونه دي، $p > 2$ ، نو باور لري:

1. $q = 2$:

$$\left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}}, \quad (9.80)$$

2. $q > 2$:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right]}. \quad (9.81)$$

دریم: $[x]$ د x پسې کوچنی عدد یا ګڼ په نڅېنه کوي)
 ښوونه: د [9.2.9](#) ښوونې ته ورته (ټاکو $a = q$) باور لري:

$$iq = pq_i + t_i \quad (i = 1, \dots, \frac{p-1}{2}), \quad 0 < t_i < p, \quad q_i = \left[\frac{iq}{p} \right]. \quad (9.82)$$

جوړ کړی:

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} iq = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (pq_i + t_i) = p \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} t_i, \quad (9.83)$$

له دې سره:

$$q \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i}_{=\frac{1}{2}(\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2})} = q \frac{p^2 - 1}{8} = p \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] + \sum_{i=1}^{n(q)} r_i + \sum_{i=1}^k s_i \quad (9.84)$$

($r_i \dots$ پاتې (باقي) $> \frac{p}{2}$ ، $s_i \dots$ پاتې $\leq \frac{p}{2}$). د [9.2.9](#) ښوونې له مخې باور لري:

$$\left\{ 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right\} = \{p - r_1, \dots, p - r_{n(q)}, s_1, \dots, s_k\}; \quad (9.85)$$

نو باور لري:

$$\frac{p^2 - 1}{8} = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i = \sum_{i=1}^{n(q)} (p - r_i) + \sum_{i=1}^k s_i = p \cdot n(q) - \sum_{i=1}^{n(q)} r_i + \sum_{i=1}^k s_i \quad (9.86)$$

د (9.64) او (9.66) کموڼ (تفریق) له لارې:

$$(q-1) \frac{p^2 - 1}{8} = p \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] - p \cdot n(q) + 2 \sum_{i=1}^{n(q)} r_i. \quad (9.87)$$

له دې سره $\text{mod } 2$:

$$(q-1) \frac{p^2 - 1}{8} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] - n(q)(2). \quad (9.88)$$

- که $q > 2$ وي، نو q ناجوړه (طاق) دی، یعنې $q-1$ جوړه (جفت)، نو $q-1 \equiv 0(2)$ له دې سره:

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] - n(q)(2) \Rightarrow n(q) \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right] (2). \quad (9.89)$$

- د 9.2.9 له مخې لرو یا لاس ته راځي:

$$\left(\frac{q}{p} \right) = (-1)^{n(q)} = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p} \right]}. \quad (9.90)$$

- که $q = 2$ وي، نو $q - 1 = 1$ ، او د $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$ لپاره باور لري:

$$0 < \frac{2}{p} \leq \frac{2i}{p} \leq \frac{p-1}{p} < 1, \quad (9.91)$$

- نو $\left[\frac{2i}{p}\right] = 0$ د $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$ لپاره، له دې سره پاتيري

$$\frac{p^2 - 1}{8} \equiv -n(q)(2) \Rightarrow n(q) \equiv \frac{p^2 - 1}{8}(2). \quad (9.92)$$

د [9.2.9](#) له مخې لاس ته راځي:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{n(q)} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}. \quad (9.93)$$

جمله ګوتي 9.2.12: وي دې $p > 2$ يو لومړني ګڼ، نو باور لري: 2 ټيک څلورۍ پاتي يا مربع باقي ده، که $p = 8k \pm 1 (k \in \mathbb{Z})$ وي.

بڼونه: 2 څلورۍ پاتي

$$\text{mod } p \Leftrightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = 1 \quad (9.94)$$

$$\stackrel{9.2.11}{\Leftrightarrow} (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1 \quad (9.95)$$

کنونپوهنه

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - 1}{8} \quad (9.96)$$

جوړه دی

$$\Leftrightarrow \frac{p^2 - 1}{8} = 2n \quad n \in \mathbb{N} \quad (9.97)$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 1 = 16n. \quad (9.98)$$

د $p > 2$ لومړنی ګڼ $\bmod 8$ لاندې بڼه لري

$$8k \pm 1, 8k \pm 2, 8k \pm 3, 8k \pm 4 \quad (9.99)$$

$$\Rightarrow 8k \pm 1, 8k \pm 3 \Rightarrow p \text{ لومړنی ګڼ نا جوړه ګڼ}$$

$$p = 8k \pm 3 \Rightarrow \text{که وی}$$

$$p^2 - 1 = 64k^2 \pm 48k + 9 - 1 \equiv 8(16) \not\equiv 0(16), \quad (9.100)$$

$$p^2 - 1 \neq 16n \quad \text{تضاد یا په څټوالي}$$

دا په دې معنا، چې

په څټ یا برعکس:

$$p = 8k \pm 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 64k^2 \pm 16k + 1 - 1 \equiv 0(16), \quad (9.101)$$

دا په دې معنا، چې $p^2 - 1 = 16n$. له دې سره

$$p^2 - 1 = 16n \Leftrightarrow p = 8k \pm 1. \quad (9.102)$$

د Legendre-Symbol لپاره د څلورۍ – يا مربع ريځيپروسيتي قانون reciprocity law

جمله 9.2.13 : (مربع ريځيپروسيتي): وي دې p, q لومړني ګڼونه، ≥ 2 دواړه ، نو

$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}.$	(9.103)
---	-----------

ښوونه: وي دې

$$M := \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} \right\}, \quad (9.104)$$

نو M ټيک $\frac{p-1}{2} \frac{p-1}{2}$ توکي لري. راوړو

$$M_1 = \{(i, j) \in M \mid qi > pj\}, \quad (9.105)$$

$$M_2 = \{(i, j) \in M \mid qi < pj\}. \quad (9.106)$$

کنونپوهنه

باور لري $qi = pj$ ، لاس ته راځي، $p \mid qi$ ، يعني $p \mid i$ ($\text{ggT}(p, q) = 1$) -
تضاد يا مخمخوالی و ته له دې سره: $1 < i \leq \frac{p-1}{2} < p$

$$M = M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2 = \emptyset. \quad (9.107)$$

وښايي:

$$M_1 = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j < \frac{qi}{p} \right\}, \quad (9.108)$$

$$M_2 = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i < \frac{pj}{q}, 1 \leq j \leq \frac{q-1}{2} \right\}. \quad (9.109)$$

- د M_1 لپاره: د هر څه د مخه يا لومړی باور لري $M_1 \subseteq \{\dots\}$ ، ځکه چې

$$(i, j) \in M_1 \Rightarrow qi > pj \Rightarrow 1 \leq j < \frac{qi}{p}. \quad (9.110)$$

- په څټ يا برعکس: $\{\dots\} \subseteq M_1$ ، ځکه چې

$$1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}, 1 \leq j < \frac{qi}{p} \Rightarrow \frac{qi}{p} \leq \frac{q}{p} \frac{p-1}{2} - \frac{q}{2} \frac{p-1}{p} < \frac{q}{2} \quad (9.111)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{qi}{p} \right] \leq \left[\frac{q}{2} \right] \leq \frac{q-1}{2}, \quad (9.112)$$

$$1 \leq j < \frac{qi}{p} \Rightarrow 1 \leq j \leq \left[\frac{qi}{p} \right] \leq \frac{q-1}{2}, \quad (9.113)$$

- دا په دې معنا، چې $(i, j) \in M$. بالاخره: $(i, j) \in M_1$ ، ځکه چې

$$1 \leq j < \frac{qi}{p} \Rightarrow pj < qi. \quad (9.114)$$

- ورته د M_2 لپاره. ګڼل یې: د هر لپاره توکي شتون لري، له دې سره باور لري

$$M_1 \text{ ټیک } \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p} \right] \text{ توکي لري} \quad (9.115)$$

ورته

$$M_2 \text{ ټیک } \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q} \right] \text{ توکي لري} \quad (9.116)$$

نو $M = M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ټیک

$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p} \right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q} \right] = \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$	(9.117)
---	-----------

توکي لري. د [9.2.11](#) له مخې باور لري:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right]} (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right]} = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right]} = \quad (9.11)$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}. \quad (9.11)$$

جمله ګی 9.2.14: p, q مختلف > 2 لومړني ګڼونه یا اعداد دي، نو باور لري

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \quad (9.120)$$

ټيک هلته، که $p \equiv 1(4)$ یا $q \equiv 1(4)$ یا دواړه وي.

ښوونه: د [9.2.13](#) له مخې یا پسي:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}. \quad (9.121)$$

د $\left(\frac{q}{p}\right) = \pm 1$ سره د ضرب له لارې لاس ته راوړو:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{q}{p}\right) = 1 &\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) \\ \left(\frac{q}{p}\right) = -1 &\Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) (-1)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) \quad (9.12)$$

له دې سره:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2} \text{ جوړه} \quad (9.12 \quad 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} \vee \frac{q-1}{2} \text{ يا دواړه جوړه دي} \quad (9.12 \quad 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2n \vee \frac{q-1}{2} = 2m \Leftrightarrow p-1 = 4n, q-1 = 4m \quad (9.12 \quad 5)$$

$$\Leftrightarrow p \equiv 1(4) \vee q \equiv 1(4) \vee \text{دواړه.} \quad (9.12 \quad 6)$$

بيلګه 9.2.15 : ايا $a = -21$ څلورۍ پاتې يا مربع باقي $\bmod 61$ دي؟

$$x^2 \equiv -21(61) \quad (\text{دا په دې معنا چې اوبیور يا حلور دی؟})$$

$$p = 61 \in \mathbb{P}, \text{ggT}(-21, 61) = 1 \quad \text{له دې سره میژندر:}$$

$$\left(\frac{-21}{61}\right) = \left(\frac{(-1) \cdot 3 \cdot 7}{61}\right) \stackrel{9.2.5}{=} \left(\frac{-1}{61}\right) \left(\frac{3}{61}\right) \left(\frac{7}{61}\right) \stackrel{9.2.7}{=} 1 \left(\frac{3}{61}\right) \stackrel{9.12}{=} \left(\frac{3}{7}\right) \quad (9.12 \quad 7)$$

$$\stackrel{9.2.1}{=} \left(\frac{61}{3}\right) \left(\frac{7}{61}\right) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{7}{61}\right) = 1 \left(\frac{7}{61}\right) = \left(\frac{7}{61}\right) \quad (9.12 \quad 8)$$

$$\stackrel{Red.}{\equiv} \left(\frac{5}{7}\right) \stackrel{9.2.14}{\equiv} \left(\frac{7}{5}\right) \stackrel{Red.}{\equiv} \left(\frac{2}{5}\right) \stackrel{9.2.12}{\equiv} -1 \quad (9.12)$$

9)

$\Rightarrow -21$ څلورۍ پاتې $\text{mod } 61$ نه دي.

$$x^2 \equiv a(m)$$

پام يا يادونه 9.2.16: ، چيرته چې m لومړنی گڼ نه دی، نو ليزندر

سومبول تعريف ده دی يا پي‌اند نه لري، مگر: وي دي
لومړنيو ضربيونو يا ځله وونو ټوټه کيدنه. نو باور لري:

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

د m په

$a \text{ mod } m \dots$ مربع باقي دی.

$$\dots \Leftrightarrow x^2 \equiv a(m) \quad (9.130)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \equiv a(p_i^{\alpha_i}) \quad i = 1, \dots, k \quad (9.131)$$

$$\stackrel{9.1.5}{\Leftrightarrow} x^2 \equiv a(p_i) \quad i = 1, \dots, k \quad (9.132)$$

$$\Leftrightarrow a \text{ څلورۍ پاتې } \text{mod } p_i \quad i = 1, \dots, k \quad (9.133)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{p_i}\right) = 1 \quad i = 1, \dots, k. \quad (9.134)$$

جاکوبي سومبول Jacobi-Symbol

په لاندې کې د $x^2 \equiv a(m)$ د اوبی یا حل د پرېکړې لپاره یو بل امکان څیړو، مګر د لږ واړه بندیز سره:

پیژند 9.3.1: (جاکوب [9.2](#) سومبول): m دې یو ناجوره طبیعي ګڼ وي،
 $m = p_1 \cdots p_k$ چیرته چې $p_1, \dots, p_k$ نه اړین مختلف طبیعي لومړني ګڼونه دي.
 $\text{ggT}(a, m) = 1$ دی د $a \in \mathbb{Z}$ سره، نو څلورۍ یامربع باقي د جاکوب له مخې په لاندې توګه تعریف دی

$\left(\frac{a}{m}\right) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a}{p_i}\right)_L$	(9.135)
---	---------

او $\left(\frac{a}{1}\right) = 1$ [\[9.3\]](#)

یادونه 9.3.2: زیات وخت دا سومبول د کمیزو یا منفي ګڼونو $m < 0$ لپاره هم تعریفیږي:

$\left(\frac{a}{m}\right) := \left(\frac{a}{ m }\right).$	(9.136)
---	---------

دا موږ نه پریردو، د دې لارې لاندې ترې لاس ته راتلنه په روښانه توګه ساده لاس ته راوړل کیږي.

یادونه 9.3.3

کنونپوهنه

لومړی . $m \in \mathbb{N}$ جوړه دی، نو نو د $x^2 \equiv a(m)$ اوبیوروالي - یا د حلوروالي پرابلم په یوه ناجوړه مودل بیرته اړوو، ځکه چې: $m = 2^\alpha n$ د ناجوړه n سره (تل شونی دی)، نو باور لري:

$x^2 \equiv a(m) \Leftrightarrow x^2 \equiv a(2^\alpha) \quad \text{او} \quad x^2 \equiv a(n)$	(9.137)
--	---------

دویم. دلته $x^2 \equiv a(2^\alpha)$ له 9.1.6 سره پای شو او n ناجوړه دی

دریم: د پیژند یا تعریف له مخې دی

$\left(\frac{a}{p_i}\right)_L = \pm 1, \quad \text{ځکه چې} \quad \left(\frac{a}{m}\right)_J = \pm 1,$	(9.138)
---	---------

څلورم: $\left(\frac{a}{m}\right)_J = -1$ دی، نو a څلوری پاتې یا مربع باقي $\bmod m$ نه ده، ځکه چې د تعریف له مخې:

$-1 = \left(\frac{a}{m}\right)_J = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a}{p_i}\right)_L,$	(9.139)
---	---------

پنځم: ینې لږ تر لږه $\left(\frac{a}{p_i}\right)_L = -1$ یو دی، دا په دې معنا، چې د دې i لپاره a څلوری پاتې $\bmod p_i$ نه دی. له دې سره a هم مربع باقي $\bmod m$ نه دی.

$$\left(x_0^2 \equiv a(m) \stackrel{p_i|m}{\Rightarrow} x_0^2 \equiv a(p_i) \right)$$

شپږم: $\left(\frac{a}{p_i} \right)_L = -1$ دی، نو a نه اړيک یو مربع باقي $\bmod p_i$ دی (کیدی شي وي، مگر باید نه دی، چې وي).

بیلگه: $\left(\frac{2}{15} \right)$ جاکوبي- سومیل دی ($15 \in \mathbb{N}$ ناچوره (طاق) $(2, 15) = 1$)، د تعریف له مخې:

$\left(\frac{2}{15} \right) = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{5} \right),$	(9.140)
--	---------

له دې سره د [9.2.12](#) له مخې باور لري: $\left(\frac{2}{3} \right) = -1$ ځکه چې

$$3 \neq 8k \pm 1, \left(\frac{2}{5} \right) = -1 \quad 5 \neq 8k \pm 1$$

ځکه چې

یعنې:

$\left(\frac{2}{15} \right) = (-1)(-1) = 1,$	(9.141)
---	---------

مگر 2 مربع باقي $\bmod 15$ نه دی. له دې امله په لومړنیو ضریبونو تجزیه.....

لومړی: $a \equiv a'(m)$ دی، نو باور لري

(9.142)	$\left(\frac{a}{m}\right)_J = \left(\frac{a'}{m}\right)_J.$
---------	---

دويم: جمله ګۍ 9.2.5 ته ورته د لیجنډر-سومبول لپاره او هم د جاکوبي سومبول لپاره باور لري

(9.143)	$\left(\frac{ab}{m}\right)_J = \left(\frac{a}{m}\right)_J \left(\frac{b}{m}\right)_J.$
---------	--

څلورم: پسي باور لري:

(9.144)	$\left(\frac{a}{m_1 m_2}\right)_J = \left(\frac{a}{m_1}\right)_J \left(\frac{a}{m_2}\right)_J.$
---------	---

يادونه: که په راتلونکي کې د سومبول ډول غوره وي، نو د $\left(\frac{a}{p}\right)_L$ سره د لیجنډر-

سومبول او له $\left(\frac{a}{p}\right)_J$ سره د جاکوبي سومبول سره توپيروي. دا پورته تعريف له دې امله وايي، چې جاکوبي سومبول د لیجنډر - سومبول ضرب دی.

ځانګړي حالتونه: $a = -1, a = 2$

لیجنډر ته ورته: د $a = -1$ همداسې د $a = 2$ لپاره جاکوبي-سومبول را اخلو:

ليما يا وړه جمله : $m = m_1 \cdots m_k \in \mathbb{N}$ ناجوړه دی، نو باور لري:
لومړی:

$\frac{m-1}{2} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i-1}{2} (2),$	(9.145)
--	---------

دویم:

$\frac{m^2-1}{8} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2-1}{8} (2).$	(9.146)
--	---------

ښوونه : دا چې m ناجوړه دی، باید هر m_i هم ناجوړه وي ($\Rightarrow \frac{m_i-1}{2} \in \mathbb{N}$)

لومړی $\frac{m-1}{2} \in \mathbb{N}, \frac{m_i-1}{2} \in \mathbb{N}$ ، ایندکشن:

: $k = 1$

دلته نه ښوول کيږي.

: $k \rightarrow k+1$

وې دي $m = m_1 \cdots m_k m_{k+1} \in \mathbb{N}$ ناجوړه، نو هر m_i ناجوړه دی، او هم
 $2 \mid m_{k+1} - 1$ ناجوړه دی او همداسې $2 \mid m_{k+1} - 1$ هم، نو په ټوليزه توګه دا
 ضرب په 4 وېشور دی

$(m_1 \cdots m_k - 1)(m_{k+1} - 1) =$	(9.147)
---------------------------------------	---------

$= \underbrace{m_1 \cdots m_k m_{k+1}}_{=m} - m_1 \cdots m_k - m_{k+1} + 1;$	
--	--

له دې امله: $(4) m - 1 \equiv m_1 \cdots m_k - 1 + m_{k+1} - 1$ ، کين او ښي لور ته

جوړه ګڼ ځای دی، د $\text{ggT}(4, 2) = 2$ له امله د (5) [4.1.5](#) له مخې لاس ته راځي:

$\frac{m-1}{2} \equiv \frac{m_1 \cdots m_k - 1}{2} + \frac{m_{k+1} - 1}{2} (2).$	(9.148)
--	---------

د ایندکشن پسي لرو:

$\frac{m-1}{2} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i - 1}{2} + \frac{m_{k+1} - 1}{2} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{m_i - 1}{2} (2).$	(9.149)
---	---------

وښايي: که $a \in \mathbb{N}$ ناجوړه وي، نو $8 \mid a^2 - 1$ باور لري:

$a = 2t + 1 \Rightarrow$	
$a^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4t(t+1) + 1$	(9.150)
$\Rightarrow a^2 - 1 = 4t(t+1),$	(9.151)

جوړه دی، دا په دې معنا، چې ضريب يا ځله وونی 2 لري. $t+1$ يا t جبرته جي يا t له دې سره باور لري

$8 \mid a^2 - 1 \left(\Rightarrow \frac{m_i^2 - 1}{8} \in \mathbb{N} \right).$	(9.152)
---	---------

۱ - ایندکشن:

۲ - $k = 1$:

۳ - دلته هم نه بنوول کيږي

 $k \rightarrow k+1$:

۴ - وي دي $m = m_1 \cdots m_k m_{k+1} \in \mathbb{N}$ ، ناجوره، نو ټول m_i ناجوره دي او $m_1 \cdots m_k$ هم، نو

$8 \mid m_{k+1}^2 - 1.$ او $8 \mid m_1^2 \cdots m_k^2 - 1$	(9.153)
--	---------

۵ - له دي سره $m_1^2 \cdots m_k^2 - 1 \equiv 0(8), m_{k+1}^2 - 1 \equiv 0(8)$ ، يعني د [4.1.5](#) له مخي

$(m_1^2 \cdots m_k^2 - 1)(m_{k+1}^2 - 1) \equiv 0(64).$	(9.154)
---	---------

۶ - دا په دي معنا، چې $64 \mid m_1^2 \cdots m_k^2 m_{k+1}^2 - m_1^2 \cdots m_k^2 + 1 - m_{k+1}^2$ ، نو

$m_1^2 \cdots m_k^2 m_{k+1}^2 - 1 \equiv m_1^2 \cdots m_k^2 - 1 + m_{k+1}^2 - 1(64),$	(9.155)
---	---------

۷ - نو:

$\frac{m^2 - 1}{8} \equiv \frac{m_1^2 \cdots m_k^2 - 1}{8} + \frac{m_{k+1}^2 - 1}{8}(8),$	(9.156)
---	---------

۸ - دا په دې معنا، چې د ایندکشن له مخې:

$\frac{m^2 - 1}{8} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2 - 1}{8} + \frac{m_{k+1}^2 - 1}{8} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{m_i^2 - 1}{8} \pmod{8}.$	(9.157)
--	---------

د دې پرېکړې لپاره چې ایا -1 یا 2 څلورۍ پاتې (مربعباقي) دی که نه:

جمله : وي دې $m \in \mathbb{N}$ ناجوره، نو باور لري:

$\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}},$	۱ - (9.158)
$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$	۲ - (9.158)

ښوونه: وي دې $m = p_1 \cdots p_k$ ناجوره، $p_i \in \mathbb{P}$ ، ټول p_i ناجوره، یعنې > 2

۱ -

$\left(\frac{-1}{m}\right) \stackrel{Def.}{=} \prod_{i=1}^k \left(\frac{-1}{p_i}\right)_L \stackrel{9.2.7}{=} \prod_{i=1}^k (-1)^{\frac{p_i-1}{2}} = (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{p_i-1}{2}}.$	(9.160)
--	---------

۲ - دا چې د(1) [9.3.5](#) له مخې باور لري:

$\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} \equiv \frac{m-1}{2} (2) \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} = \frac{m-1}{2} + 2t \quad (t \in \mathbb{N}),$	(9.161)
---	---------

۳ - او $(-1)^{2t} = 1$ ، لاس ته راځي:

$(-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}.$	(9.162)
---	---------

۴ -

$\left(\frac{2}{m} \right) \stackrel{Def.}{=} \prod_{i=1}^k \left(\frac{2}{p_i} \right)_L \stackrel{9.2.11}{=} \prod_{i=1}^k (-1)^{\frac{p_i^2 - 1}{2}} = (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{p_i^2 - 1}{2}} \stackrel{9.3.5(2)}{=} \prod_{i=1}^k (-1)^{\frac{m^2 - 1}{2}} \stackrel{9.3.5(2)}{=} (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{m^2 - 1}{2}}.$	(9.163)
$\prod_{i=1}^k \left(\frac{2}{p_i} \right)_L \stackrel{9.2.11}{=} \prod_{i=1}^k (-1)^{\frac{p_i^2 - 1}{2}} = (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{p_i^2 - 1}{2}} \stackrel{9.3.5(2)}{=} \prod_{i=1}^k (-1)^{\frac{m^2 - 1}{2}} \stackrel{9.3.5(2)}{=} (-1)^{\sum_{i=1}^k \frac{m^2 - 1}{2}}.$	(9.164)

د جاکوبي-سومبول لپاره څلورۍ - يا مربع رځپېروسيتي قانون

ليجنډر- سومبول ته ورته د جاکوبپ-سومبول لپاره هم مربع رځپېروختي قانون) باور لري:

جمله : (مربع رځپېروختي قانون) وې دي $m, n \in \mathbb{N}$ د ناجوره(طاق)
 $ggT(m, n) = 1, m, n$
 (خورا غټ گډ پروېشونی) سره، نو با وړ لري:

$\left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}}$	(9.165)
--	---------

بنسونه: وي دي p_i ، $m = p_1 \cdots p_k$, $p_i \in \mathbb{P}$ نه په اړينه توګه مختلف،
 q_j ، $n = q_1 \cdots q_s$, $q_j \in \mathbb{P}$ نه په اړينه توګه مختلف. د $\text{ggT}(m, n) = 1$ له
 امله باور لري: $\text{ggT}(p_i, q_j) = 1, p_i, q_j > 2 \forall i, j$. پسي

$\left(\frac{n}{m}\right) \stackrel{Def.}{=} \prod_{j=1}^s \left(\frac{m}{q_j}\right)_L = \prod_{i=1}^s \left(\frac{p_1 \cdots p_k}{q_j}\right) \stackrel{9.2.5}{=} \prod_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{p_i}{q_j}\right)\right);$	(9.166)
$\left(\frac{n}{m}\right) \stackrel{Def.}{=} \prod_{i=1}^k \left(\frac{n}{p_i}\right)_L = \prod_{i=1}^k \left(\frac{q_1 \cdots q_s}{p_i}\right) \stackrel{9.2.5}{=} \prod_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^s \left(\frac{q_j}{p_i}\right)\right);$	(9.167)

نو:

$\left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) =$	
---	--

$\prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^k \left[\binom{p_i}{q_j} \binom{q_j}{p_i} \right] \stackrel{9.2.13}{=} \prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^k \left[(-1)^{\frac{p_i-1}{2} \frac{q_j-1}{2}} \right] =$	(9.168)
$= (-1)^{\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i-1}{2} \right) \left(\sum_{j=1}^s \frac{q_j-1}{2} \right)}.$	(9.169)

دا چې باور لري:

$\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} \equiv \frac{m - 1}{2} (2),$ او $\sum_{j=1}^s \frac{q_j - 1}{2} \equiv \frac{n - 1}{2} (2)$	(9.170)
--	---------

پسې لاس ته راځي

$\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i - 1}{2} \right) \left(\sum_{j=1}^s \frac{q_j - 1}{2} \right) \stackrel{9.3.5(1)}{=} \left(\frac{m - 1}{2} + 2t \right) \left(\frac{n - 1}{2} + 2n \right) =$	(9.168)
$= \frac{m - 1}{2} \frac{n - 1}{2} + 2v.$	(9.169)

$$x^2 \equiv -8(15) \quad \text{۱- اښور يا حل وړ دی؟}$$

$$a = -8 \quad \text{مربعپاتي mod 15 دی؟}$$

$$m = -8 < 0, n = 15 \notin \mathbb{P}, \text{ggT}(-8, 15) = 1, 15$$

ناجوړه له دې لاس ته راځي جاکوبي

$\left(\frac{-8}{15}\right)_J =$	
$\left(\frac{-1}{15}\right) \left(\frac{8}{15}\right) \stackrel{9.3.6}{=} (-1) \left(\frac{8}{15}\right) = (-1) \underbrace{\left(\frac{4}{15}\right) \left(\frac{2}{15}\right)}_{=1} \stackrel{9.3.6}{=}$	(9.178)
$\stackrel{9.3.6}{=} (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$	(9.179)

$$-2 \text{ (لرو چې)} \Rightarrow -8 \text{ مربع باقي mod 15 نه دی.}$$

$$x^2 \equiv 59(125) \quad \text{۳- اښور يا حل وړ دی؟}$$

$$\text{ggT}(59, 125) = 1, a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$$

، دواړه ناجوړه، جاکوبي:

$\left(\frac{59}{125}\right)_J \stackrel{9.3.7}{=}$	
---	--

$\left(\frac{125}{59}\right) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{7}{59}\right) \stackrel{9.3.7}{=} - \left(\frac{59}{7}\right) \stackrel{Red.}{=} - \left(\frac{3}{7}\right) \stackrel{9.3.7}{=} \left(\frac{7}{3}\right) =$	(9.180)
$= \left(\frac{1}{3}\right) = 1 \dots$ وینا نه شته	(9.180)

۴ - مګر (تل کیري): $m = 125 = 5^3$ ، یعنی $p_1 = 5$ ، وشمیره:

$\left(\frac{59}{5}\right)_L = \left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2^2}{5}\right) = 1$	(9.182)
---	---------

۵ - $59 \stackrel{9.1.5}{\Rightarrow}$ مربع باقي $\text{mod } 125$ دي.

۶ - ایا $x^2 \equiv 15(67)$ اوبیور یا حلور دی؟ (دا په دې معنا، چې $a = 15$ څلوری - یا مربع پاتي $\text{mod } 67$ دی؟)

$$\left(\frac{15}{67}\right) \stackrel{9.3.7}{=} \left(\frac{67}{15}\right) (-1) \stackrel{Red.}{=} (-1) \left(\frac{7}{15}\right) \stackrel{9.3.7}{=} (-1) \left(\frac{15}{7}\right) (-1) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{1}{7}\right) = 1.$$

مګر دا چې $\left(\frac{15}{67}\right)$ یو لیجنډر - سومبول دی، لاس ته رځي: 15 مربع باقي $\text{mod } 67$ دی.

۷ - ایا $x^2 \equiv 67(77)$ اوبیور دی؟

نسبي لومړنی، ناجوره، $77 \notin \mathbb{P} \Rightarrow$ لاس ته راځي جاکوبي $77 \notin \mathbb{P} \Rightarrow$

$\left(\frac{67}{77}\right) \stackrel{9.3.7}{=} \left(\frac{77}{67}\right) (-1)^{gerade} = \left(\frac{77}{67}\right) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{10}{67}\right).$	(9.184)
---	---------

۸ - جوړه دی، $\notin \mathbb{P} \Rightarrow$

نه 9.2.13 او نه 9.3.7 استعمال وړ د کارونې وړ دی! له دې لاس ته راځي:

په لومړنيو گڼونو ټوټه کونه:

$\left(\frac{10}{67}\right)_L = \left(\frac{2}{67}\right) \left(\frac{5}{67}\right) = (-1)(-1) = 1 \dots$	(9.185)
وینا نه ده!	
$67 \not\equiv \pm 1(8); \quad \left(\frac{2}{67}\right)_L \stackrel{9.2.12}{=} -1,$	(9.186)
$\left(\frac{5}{67}\right)_L \stackrel{9.2.13}{=} \left(\frac{67}{5}\right) \stackrel{Red.}{=} \left(\frac{2}{5}\right) \stackrel{9.2.12}{=} -1,$	
$5 \not\equiv \pm 1(8).$	(9.187)

۹ - مگر د پیژند له مخې:

$\left(\frac{67}{77}\right) = \left(\frac{67}{7}\right) \left(\frac{67}{11}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{1}{11}\right) = 1 \cdot 1.$	(9.188)
---	---------

۱۰ - دا چې دواړه (!) لیجنر - سومبولونه برابر 1 دي، لاس ته راځي، چې 67 مربع باقي mod 77 دی.

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابر وړ (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا

ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينګمن ليکنې چې له پرينګمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک
- ۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک
- ۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزی ۲
- ۸ - کرښيز الجبر
- ۹ - د شميرپوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولګه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenberg ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه يې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې يې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیري.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپريري:

د ګروپونو تيوري

- د بنسټونو لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

	ماخان په اولني نوم ميري شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شينواریو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي. د هسکې مینې د لومړنۍ ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).
---	---

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش وينا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز کې دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميري. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه ساينکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library