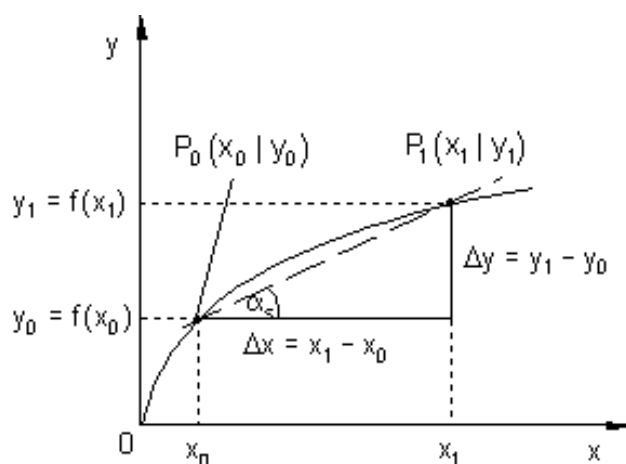




شميرپوهنه د بنوونځي لپاره (رياضي په درې برخو کې)



دریمه برخه

لیکونکی: پروفیسر برینکمن (له برینکمن ن ج څخه)

ژباړی: ډاکټر ماخان (میری) شینواری

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت -
په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: شميرپوهنه دښوونځي لپاره

ليکونکى: پروفيسور برينکمن
ژباړى : ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينواري

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړۍ
خپړندوى: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

چاپ چارې دانش خپړندويي ټولنې تخنيکي څانگه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپړندويي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

د خپرنډوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تر اوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادلو ته وړاندې کړي دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحادیې له خوا د ډاکټر ماخان شینواري تر اوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

د ژباړې مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندی، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانستان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوي ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلي ډاکتر سردار ګانیه وال، ښاغلي ډاکتر مانوګل ګانیه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحی او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپړۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار ۲۰۱۲ ز ک

نيوليک

درېمه برخه:

الف	د ژباړې سريزه
۱	مشتق
۱	...پيل او بنسټونه
۱	جگيدنه او تانجنت
۱۲	دفرنشلوېش او مشتق
۶۵	د دفرنشل لارې يا قاعدې
۸۴	د جگو درجو مشتق (ابلايتونگنه)
۸۹	تانجنت او نورمال يا ولاړه
۹۱	د يوې تابع د استعمال بيلگه...
۹۴	په ت وليد کې د مشتق استعمال
۹۷	د الجبري توابعو مشتق
۱۰۳	د مشتق استعمال په طبيعي علومو کې
۱۳۹	ټولگه:
۱۴۱	د سيکانت جگوالي او تانجنت جگوالي
۱۴۵	مونوټوني – يا يوغريزوالي
۱۴۵	د يو غريزوالي خويونه

۱۵۰	افراطي ارزبنتونه
۱۵۵	اورونتيکی او زينتيکی
۱۶۴	د گرو يا منخنيو خبرې اترې يا بحث نرخشميرنه د مشتق استعمال په حيث
۲۹۳	مشقشميرنه د تولگي کار چمتوالي لپاره
۳۲۳	اتيگرالشميرنه
۳۲۳	پيل راوړنې
۳۲۵	سطحه شميرنه او بنسټ يا لومړنۍ تابع
۳۲۸	ناتاکلی انتيگرال
۳۳۳	د نامعلوم انتيگرال څخه و معلوم امتيگرال ته
۳۳۷	د انتيگرېشن پوله بدلون
۳۴۴	له دوه گرافونو څخه رابندي سطحې شميرنه
۳۵۶	انتیگزرال د منځ ا رزبنت په حيث
۳۶۰	اناليز ۲
۳۶۰	اکسپوننشل توابع او e - توابع
۳۷۸	د اکس توابعو استعمال
۳۸۶	محور غوڅتکي او اکس. مساوات
۳۸۹	د توان او لوکارېتم توابع
۳۹۰	د اکسپوننشل توابعو لپار د حل لاري

- د e - توابعو مشتق د ضرب او حُنزيري قانون سره ۴۰۴
- د e – تابع انتيگريشن يا گډونه ۴۱۶
- د بدلون سره ټاکلی انتيگريال ۴۱۸
- ناتاکلی انتيگريال ۴۲۶
- د مشتق او انتيگريال ششميرني سره مخامخ کول ۵۵۴
- ناپربکيدنوالی يا متماديت، ۵۶۷
- ناپربکيدنوالی يا متماديت، ۵۶۷
- مشتقوړوالی(رابيليدوړوالی) ۵۶۹
- انتیگرالوړوالی: ۵۷۲
- د ټاکلو انتيگرالونو حل د بدلون له لارې: ۵۷۶
- ټوټه انتيگرالونه (يا دضربونوانتيگريال) ۵۷۸

.
. .
. .
. .
. .
. .
. .
. .

الف

د ژباړې سرريزه

گرانو هيوادوالو او د شميرپوهنې مينه والو!

د ا څو كاله د مخه د ځنو شميرپوهنيزو كلمو په لټه كې د برينكمن د ن ج سره مخامخ شوم. دا چې دې ليكنې ښه خوندويونه يا متن درلود او زيات تمرينونه د حل سره، نو ما وپتيله، چې دا به پښتو ته اړوم. دا يوه ډېره ښه ليكنه ده، چې زده كوونكي ښوونكي او داسې لږ د شميرپوهنې سره بلد ميندې او پلرونه ترې گټه اخستلی شي. په دې ليكنه كې هر څه خورا ښه روښانه شوي دي او په مختلفو بيلگو سمبال دي د حلونو يا اوبيونو سره، چې لوستنه يې هر د شميرپوهنې مينه وال لپاره د پيرځويني وړ بولم.

ككتاب په درې برخو كې چاپيږي، چې هره برخه يې يوه خپلواكه او د يوې ځانگړې برخې خوندويونه لري. زه په دې باور لرم، چې د شميرپوهنې مينه وال دا كار داسې لږ په غور وگوري، نو زر به ورسره مينه پيدا كړي.

دا كتابونه هم د هغو ۲۵ رياضي كتابونو لړۍ ده، چې ما چاپ ته چمتو كړي دي، خو نه پوهيږم، چې څو دا نور به ترې كله چاپ شي. كه څه پاتې شو، نو هغه به د دې كتابونو سره ن ج ته پورته كړم.

گرانو لوستونكو!

دا زموږ د هيواد اړتيا لپاره په پوهنيزه اړخ كې په سره تيره اوبه تويول دي. دا كتابونو، چې كوم چې چاپيږي د زر دانو يا پنځه سوه څخه به نه اوږي، نو د يوه پنځوس ميلیونه كمو زيات ولس لپاره زردا نې چې چاپيږي، دا خو اصلاً په شمير كې نه راځي، خو دا به په خروار گڼو.

په لومړي كتاببرخه كې ځمكچپوهنه يا هندسه ورسره مل ده او په دويمه كتاببرخه كې مې وكتور شميرنه ورسره زياته كړې.

ب

دریمه کتاببرخه مشتق او انتیگرال ته ځانگړې شوې.

گرانو لوستونکو!

د برینکمن د لیکنو لړۍ د شمیرپوهنې په څانگه کې د ښوونځیو لپاره نوره هم پسې غزېدلې، چې ما هغه د گرانو لوستونکو لپاره رازباړلې.

دا احصایه یا ستاتیستیک دی او د احتمالي شمیرنه ده. دا دواړه کتابونه، چې دلته یې تاسو ته ژباړه وړاندې کېږي، هم په زیاتو تمرینونو، اود دوی په اوبیونو یا حلونو سره سمبال ده.

زما په اند، داسې لیکنه په پښتو کې د لومړي ځل لپاره کېږي، چې نومه ونې به دلته هم څه ناڅه گرانو لوستونکو ته نابلدي وي، خو پرې پوهیدنه شونې ده. هر څه په روښانه توگه ورکړل شوي.

گرانو هیوادوالو!

داچې ما یوځای یا نوره هم ښه په یوه وار ډېر کار را ونیوه، نو هرومرو به ناتیکاوي زما له خوا په کې رامنځ ته شوې وي، خو دا به داسې ناتیکاوي نه وي، چې شمیرپوهنیزې ستونځې رامنځ ته کړي. له دې امله له ستاسو څخه زما په ستونځو پوهیدلو له امله زیاته مننه.

په دې هیله، چې زما په غوښتنو او ستونځو به و پوهیږي په دې لیکنو او ژباړه کې ما ته هیڅ مادي گټه نه شته. دا دې په ما زموږ د بې وزلي ولس د ډېر مصرف(لگښت) په هکله د یوې کوچنۍ پیرزوينې په حیث وړاندې وي

مننه:

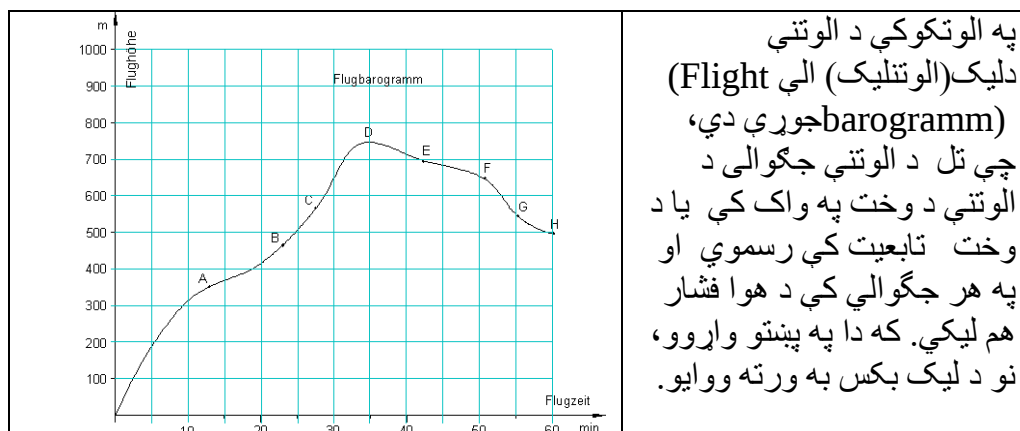
له هر څه د مخه د دې لکچرونو لیکنو لیکونکو شمیرپوهانو یعنې ستر پروفیسور بریکمن څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه بهیې زموږ ولس هم گټه پورته کړي.

دفرنځيالشميرنه (مشتق يا رابيليدنه)

ننوتنه او بنسټونه

جگيدنه او تانجنت:

په يوه ټکي کې د تابع د گراف ميل (جگيدنه)



په پورته گراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونو جگوالی ښوول شوی.

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جگوالی زیات دی؟
 -ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د
 ارزښت له مخې جگوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

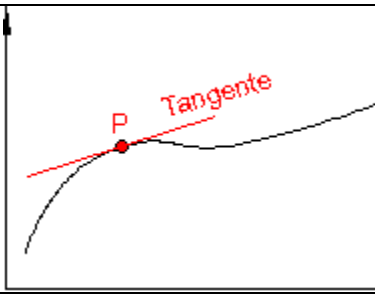
-ایا د یوې کرښې او منحنی جگوالی هر چیرته توپیر لري او که نه؟

لاس ته راوړنه :

۱ - گورو، چې په یوه منحنی کې د گراف جگوالی هر چیرته برابر نه دی، نو له دې امله
 باید ټکی په گوته کړو، چې هلته میل څیرل کیږي.

۲ - په لاندې بیلگه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده) کرښې میل هر چیرته برابر
 دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جگوالی څخه غږیږو.

برښي چې لاندې پیژند یا تعریف هوښیارانه یا عاقلانه دی:

	پیژند (تعریف): د یوې تابع گراف میل (جگوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د گراف سره برابر دی
--	---

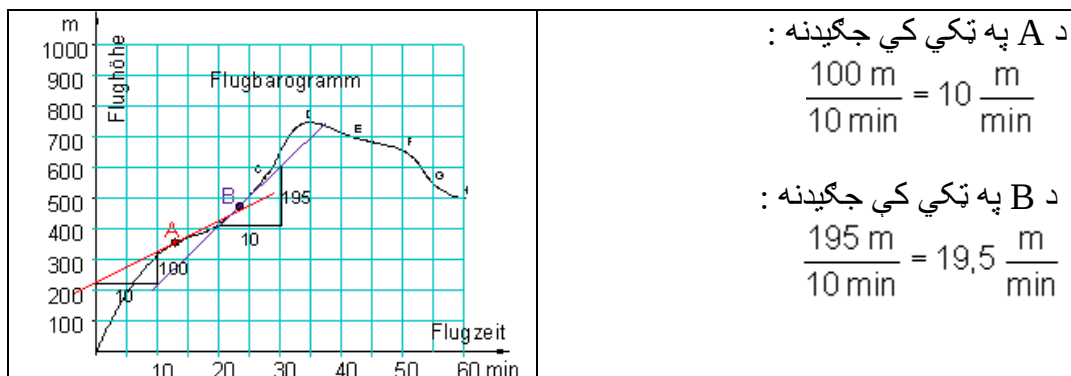
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي (ماس) په چاپیریال
 کې د امکاناتو سره سم د مماس ټکي ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه گراف میل (جگیدنه) د یوې کرښې میل
 دی.

د گراف د جگیدني ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو،
 چې گراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جگیدني مثلث په مرسته جگیدنه په شل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا راییلیدنه)



زموږ د بیلګې لپاره میل یا جگیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

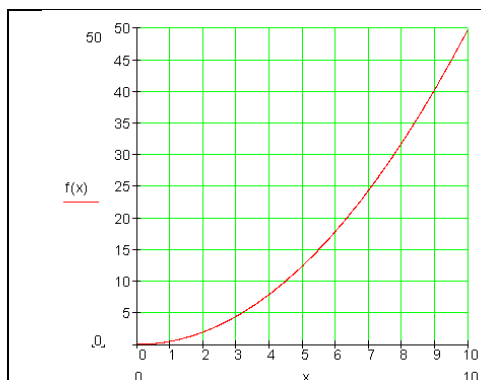
د A په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 12,5 min ، د میل یا جگیدني چټکتیا (سرعت) نږدې $10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ ده

د B په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 23,0 min ، د جگیدني چټکتیا (سرعت) نږدې $19,5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د گراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی یا بسیا نه کوي.

په یوه ټکي کې د تابع دگراف میل (جگیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګادی د تمخای څخه له خوزېدو (حرکت) وروسته خپله چټکتیا (سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي. وهلي لار (د تمخای څخه لږوالی) تل زیاتیږي. د تمخای څخه لږوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .



دا عمل د لاندې تابع مساوات له لارې لیکلی شو.

دلته د x وخت د ثانیه او د s لار د متر لپاره لیکو

$$s = f(x) = 0,5x^2$$

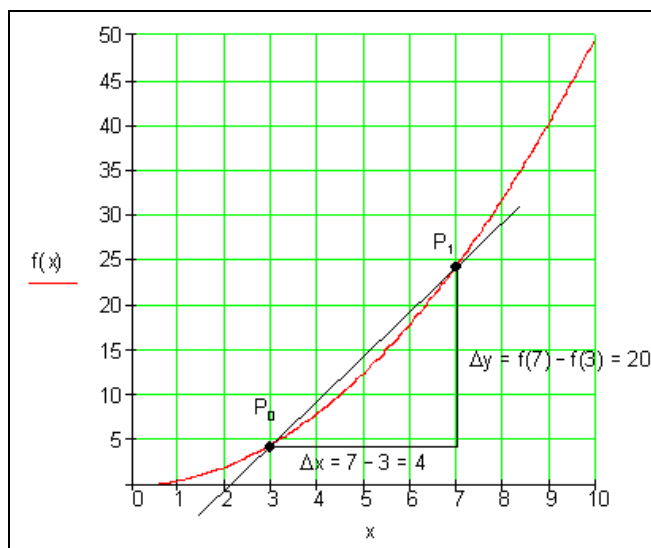
مخامخ: د تابع گراف

اوس باید منځنۍ ارزښت (منځنۍ جگوالی) **Averagerat of change** د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانټ انځور او د هغې جگوالی شمیرو.

اوس دې د تغیر ارزښت (منځنۍ جگوالی) د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جگوالی څومره دی؟



د منځنۍ جگوالی داسې مخ ته بوزی، چې د P_0 او P_1 ترمنځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې P_1 ته P_0 په لور وخوژیږي.

د ۳- می او ۷- می دقیقې ترمنځ منځنۍ تغیر ارزښت (جگوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳- می او ۴- می دقیقې ترمنځ منځنۍ تغیر ارزښت (منځنۍ جگوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4,5}{4 - 3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنزدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3; x]$	$[3; 4]$	$[3; 3,1]$	$[3; 3,01]$	$[3; 3,001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په گوته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت (جگیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیر ارزښت (لحظوي جگیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.

که موږ فیزیکی لویي (واحدونه یا یوونونه) په خپله بیلګه کې وکاروو، نو د تغیر ارزښت (جگوالی) لپاره m/s باور لري. دا د چټکتیا لپاره یوون (واحد) دی

دا په دې مانا دی، چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په گوته کوي.

لحظوي یا سترګو رپ تغیر ارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3; \Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت (جگوالی)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3 + \Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} \\ &= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x\end{aligned}$$

دا $3 + 0,5\Delta x$ د منځنی تغیر ارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅيږي یا لارشي يعنې ($\Delta x \rightarrow 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3 + 0,5\Delta x$ د 3 په لور ځي یا هڅيږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترگو رپ) تغیر ارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو: د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $3 + 0,5\Delta x \rightarrow 3$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + 0,5\Delta x) = 3 \quad \text{یا}$$

پوښتنې

- 1 - کیمیاوي تعامل د مختلفې چټکتیا سره صورت نیسي. د بیلګې په توګه که ځینک د مالګې په تیزابو کې وچول شي، نو هایدروجن تری تری راوځي یا رامنځ ته کيږي لاندې جدول د هایدروجن سټ یا مقدار ورکوي، چې د وخت په واک کې دی یا تابع دي.

وخت په S	2	4	6	8	10	12
د اوبو سټ یا مقدار په ملي لیټر ml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

الف- د دې لپاره یو دیاگرام وکارئ.

ب - د هایدروجن تولید په هکله څه وینا کیدای شی؟

پ - په لاندې انټروالونو کې د تغیر ارزښت وشمیرئ.

$$[2; 4]; [4; 8]; [8; 12]$$

دویم - د $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ تغیر ارزښت په انټروالونو

$$[1; 1.5]; [-4; -2.5]; [2; t]$$

د $t \neq 2; [3; 3+h]$ او $h > 0$ سره وشمیرئ.

دریم - تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ ورکړ شوي

الف - د $f(x)$ منځنۍ تغیر ارزښت په انټروال $I = [2; 5]$ وشمیري.

ب - د $s(x)$ سیکانټ مساوات په $P(2 | f(2))$ او $Q(5 | f(5))$ کې وټاکئ.

پ - د $f(x)$ لحضوي تغیر ارزښت د $x = 2$ په ځای کې وشمیرئ.

ت - د $f(x)$ او $s(x)$ گرافونه په وضعیه قیمتسیستم کې وکارئ

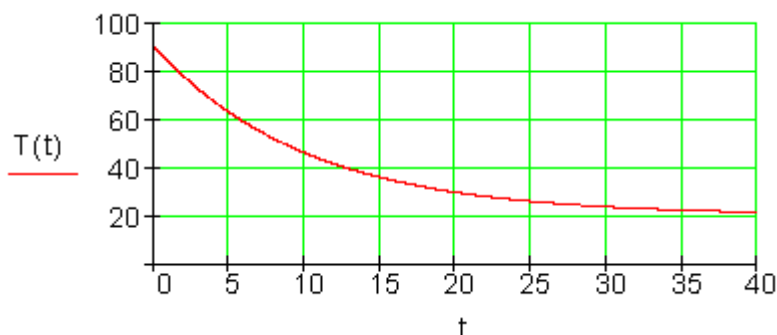
څلورم - یو جسم په ازاده غورځولو کې داسې حرکت کوي، چې په t وخت کې $S(t) = 5t^2$ لار وهي (S په متر او t دقیقه).

پنځم - یو تولید له خپل جمتوالي وخت څخه وروسته سیري.

تمپراتور (تودوخې) $T(t) = 20 + 70e^{-0.1t}; t \geq 0$ (t په دقیقو، $T(t)$ په څلزیوس درجې)

د سړیدو مخته تگ وشمیرئ.

څیره د تابع $T(t)$ گراف بنایي.



الف – له کوم حرارت څخه مخ ته ځو؟

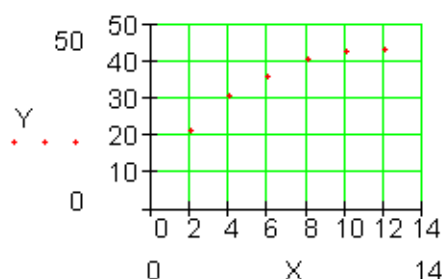
ب – فیریني کوم حرارت لري، که یخه شي؟

پ – په کوم وخت کې چټکتیا(سرعت) ، د هغې سره چې فیریني یخیري ، خورا لویه ده.

ت _ په لومړیو لسو دقیقو کې د منځني تودوخې تغیر وشمیرئ.

مفصل حلونه

دلومړي مفصل حل الف –



ب – د هایدروجن تولید د وخت به واحد کې تل کمیري پ - تغیر اړینت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[2; 4]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30,5 - 21}{4 - 2} = 4,75$$

$$[4; 8]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40,5 - 30,5}{8 - 4} = 2,5$$

$$[8; 12]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{43 - 40,5}{12 - 9} = 0,625$$

	$[2; 4]$	$[4; 8]$	$[8; 12]$
$\frac{ml}{s}$	4,75	2,5	0,625

دویم - د منځنۍ تغیر اړیکه $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

$$[1; 1,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,5) - f(1)}{1,5 - 1} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$$[-4; -2,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2,5) - f(-4)}{-2,5 - (-4)} = \frac{\frac{81}{16} - 9}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{-\frac{21}{8}}}$$

$$[2; t]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{\frac{1}{4}t^2 - t + 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 + 1\right)}{t - 2} = \frac{\frac{1}{4}t^2 - t + 1}{t - 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(t^2 - 4t + 4)}{t - 2} = \frac{\frac{1}{4}(t - 2)^2}{t - 2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}(t - 2) \text{ für } t \neq 2}}$$

$$[3; 3+h]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h) - f(3)}{3+h-3} = \frac{\frac{1}{4}(3+h)^2 - (3+h) + 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot 3^2 - 3 + 1\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(9+6h+h^2) - 3 - h + 1 - \frac{9}{4} + 3 - 1}{h} = \frac{\frac{1}{4}h + \frac{1}{4}h^2}{h} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h}}$$

دریم : الف $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ منځنی تغیر ارزښت به $[2; 5]$ کې دی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$$

$$f(5) = \frac{3}{4} \cdot 25 - 3 \cdot 5 = 3,75 \quad f(2) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -3 \quad \Delta x = 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3,75 - (-3)}{3} = \frac{6,75}{3} = \underline{\underline{2,25}}$$

ب - د $s(x)$ سیکانت مساوات چې له P او Q ټکو تیریري، ټیک همداسې شمیرل کیري، لکه کرښه چې له دوه ټکو تیریري.

$P(2; -3)$ له امله د $P(2; f(2))$ لاس ته راځي

$Q(5; 3,75)$ له امله د $Q(5; f(5))$ لاس ته راځي

وگورئ: $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 2,25$ د $s(x) = a_1 \cdot x + a_0$ سره د a پوښتنبرځه هم

$$\Rightarrow s(x) = 2,25x + a_0$$

$$P(2 | -3) : s(2) = -3 \Leftrightarrow 2,25 \cdot 2 + a_0 = -3 \Leftrightarrow a_0 = -7,5$$

$$\Rightarrow s(x) = 2,25x - 7,5$$

د تانجنت جگوالی

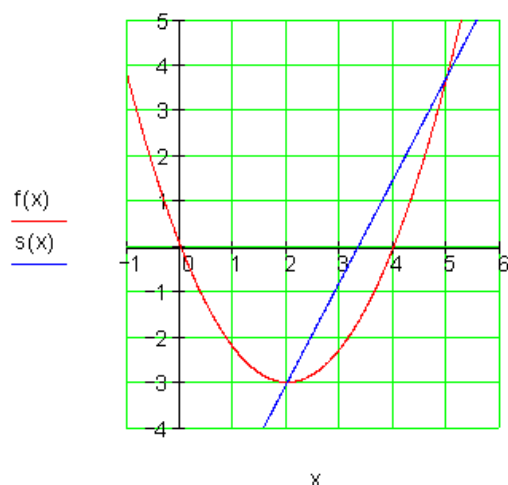
پ- لحضوي تغیر ارزښت د $x = 2$ په ځای کې:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2 - 3(2+\Delta x) + 3}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{3}{4}[4+4\Delta x+(\Delta x)^2] - 6 - 3\Delta x + 3}{\Delta x} = \frac{3+3\Delta x + \frac{3}{4}(\Delta x)^2 - 6 - 3\Delta x + 3}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{3}{4}\Delta x\end{aligned}$$

منځنۍ تغیر ارزښت په انټروال $[2; \Delta x]$ کې.

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ لپاره دى: } \frac{3}{4}\Delta x \rightarrow 0$$

د $f(x)$ لحضوي تغیر ارزښت د $x = 2$ په ځای کې 0 دی



ت-

څلورم - لحضوي جټکتیا یا سرعت د لحضوي تغیر ارزښت سره په یوه معنا دی.

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره صدق کوي: $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره صدق کوي. $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره صدق کوي. $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$

پنځم – الف- پیلټودوخي کیدی شي له 90°C گراف څخه ولوستل شي.

ب- تابع ارزښت اسپیټوتیکي د ارزښت 20°C په لور هڅیږي یا ځي.

پ-د سړیدني چټکتیا په پیل کې خ وړا لویه وي.

$$[0; 10]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10) - T(0)}{10 - 0} \quad \text{ت-}$$

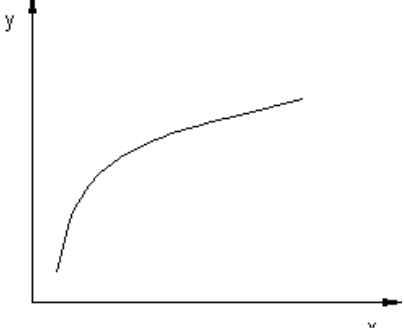
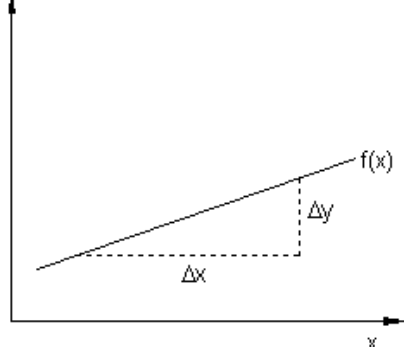
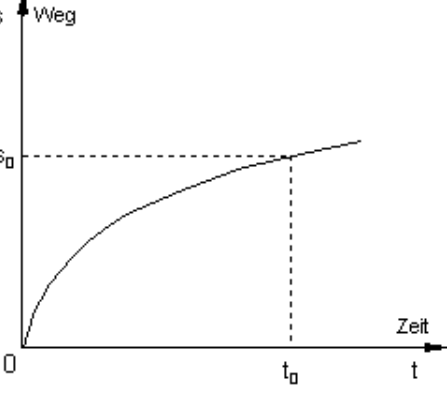
$$\text{د سره} \quad T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} \approx 45,75 \quad \text{und} \quad T(0) = 20 + 70 \cdot \underbrace{e^{-0,1 \cdot 0}}_1 = 90$$

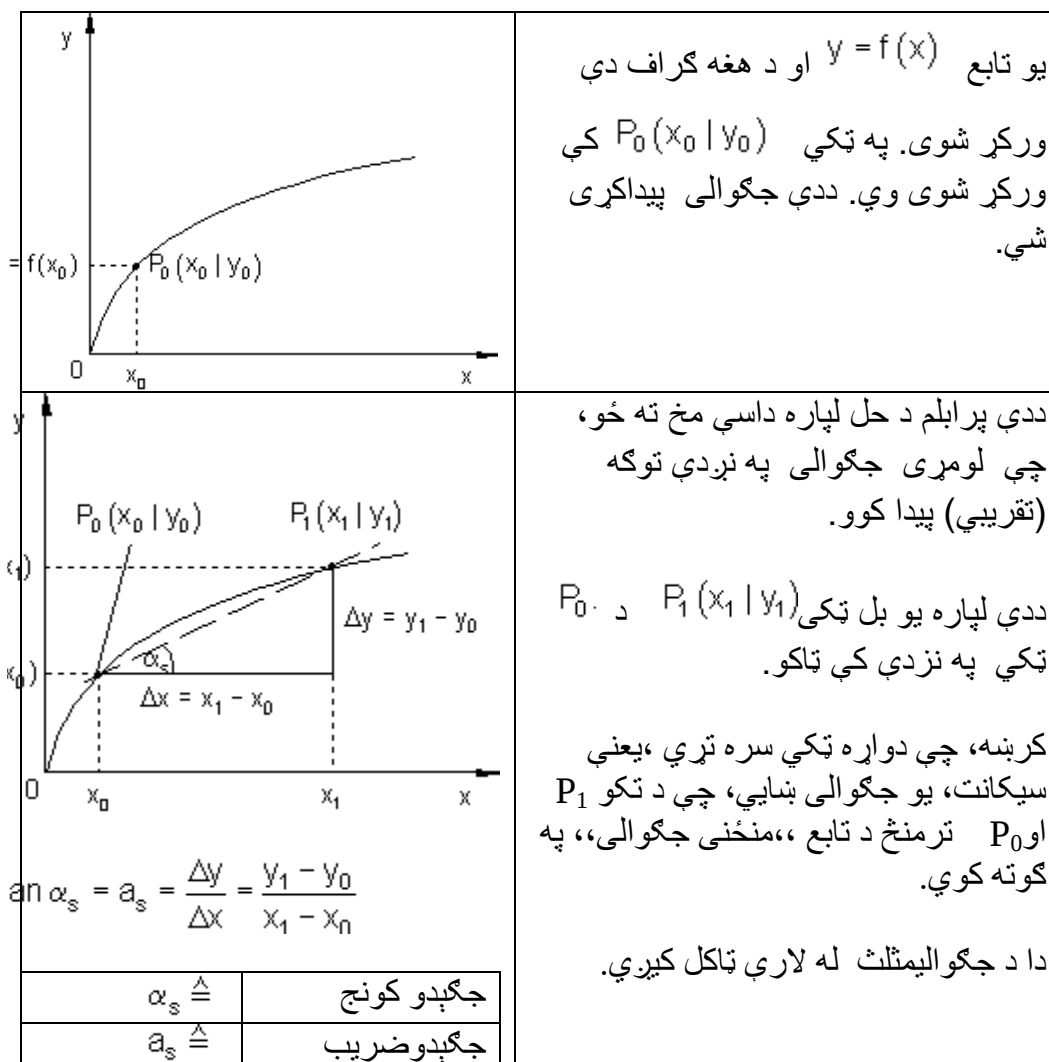
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}} \quad \text{کیري:}$$

کمیزه یا منفي مځنځبڼه په دې معنا ده، چې تغیر قیمت منفي دی، د فیریني تودوخي کمیږي.

کمښت وېش (تفاضلوېش) او مشتق یا رابیلیدنه

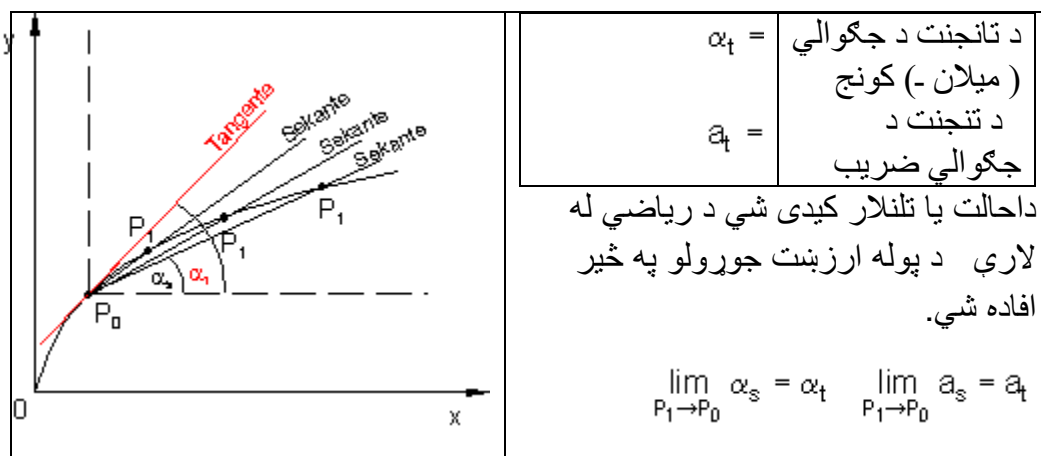
د غوڅووني (تقاطع) جگوالي څخه د تانجنت جگوالي ته

	یو تابع $y = f(x)$ او اړونده گراف دې ورکړ شوی وي. که د تابع جگیدني حالت په پام کې ونیسو، نو گورو چې د تابع جگیدنه په نږدې ټولو ټکو کې توپیر لري.				
	یوه ثابته جگېدنه، لکه په کرېښ یا لاینیز تابع $f(x) = a_1x + a_0$ کې د $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$				
	په زیاتو وختونو اړینه ده، چې د تغیر حالت (د جگېدني حالت) کې د تابع د تلنې حالت وڅېړو. نو له دې امله لحظوي چټکتیا (همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دیاگرام کې وڅېړو. د مشتق شمېرنې په مرسته دا پرابلم حل کېدی شي.				
<table border="1" data-bbox="211 1499 692 1671"> <tr> <td>$t_0 \hat{=}$</td> <td>په پام کې نیولی سترگو رپ</td> </tr> <tr> <td>$s_0 \hat{=}$</td> <td>تر دې سترگو رپ پورې وهلي لار</td> </tr> </table>	$t_0 \hat{=}$	په پام کې نیولی سترگو رپ	$s_0 \hat{=}$	تر دې سترگو رپ پورې وهلي لار	د یوه تابع د جگیدني ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.
$t_0 \hat{=}$	په پام کې نیولی سترگو رپ				
$s_0 \hat{=}$	تر دې سترگو رپ پورې وهلي لار				



که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدې کې وټاکو یا ځای په ځای کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جگوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کرنښه منځ ته راځي، چې د تابع گراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جگېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د گراف جگېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.



کمښتویش (تفاضلوېش (Difference quotient) او مشتق

د سیکانت جگیدنه (منځنی تغیر ارزښت)

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

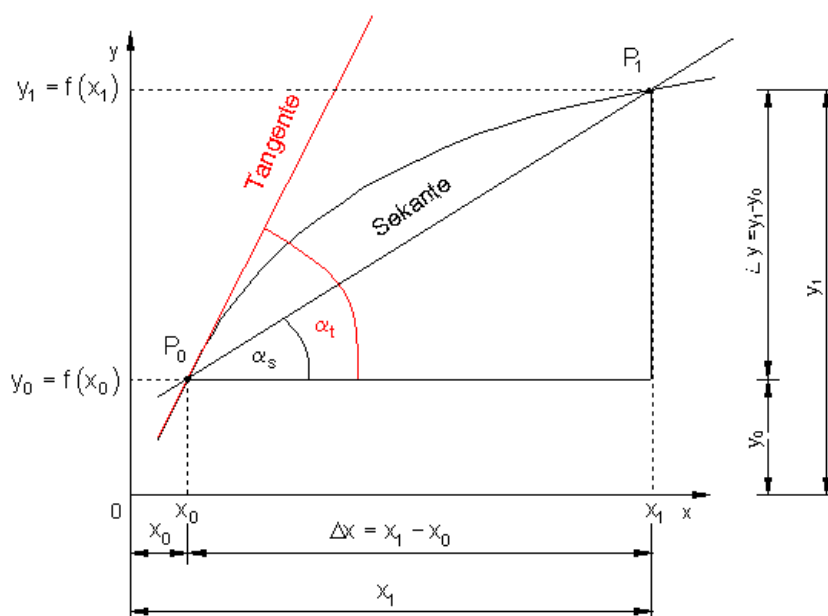
$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د تنجنت جگیدني سره د پوله ارزښت (حد) له لارې لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي - د سترگو رپ تغیر ارزښت دی

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{یا لاندې}$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیړنې لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.
د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پیژند (تعریف):

دفرنخیالوېش (کمېنتوېش)



د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بلل کیږي

تعریف (پیژند):

د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه د x_0 په ځای کې د تانجنټ جگیدنه ورکوي، چې د تابع گراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرگ د تابع د گراف جگیدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جگیدنه هم بولي.

تانجنټ جگیدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې



د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلگې څخه کار اخلو

بیلگه:

تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوي وي.

غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانگړې توگه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړۍ کمښتویش (د تفاضل وېش) پیداوو.

$x = x_0 :$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$
---	---

اوس د لیمیت د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړۍ مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري. (لاندې تکرار شوې)

اوس د لیمیت د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

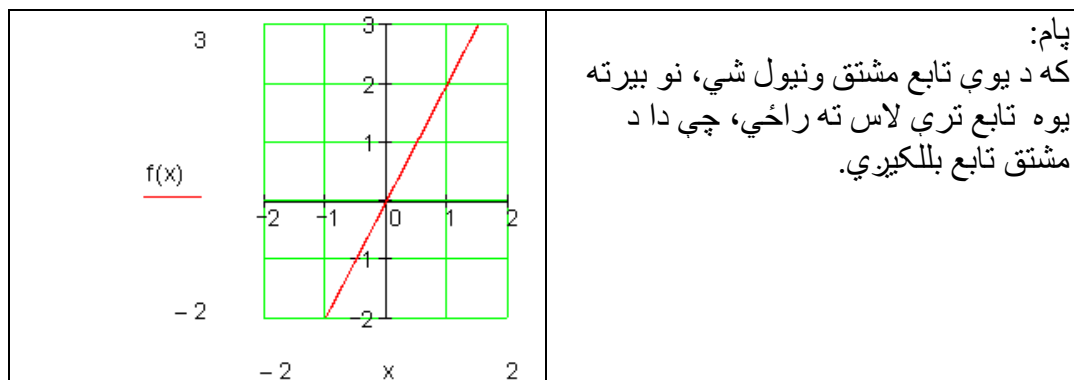
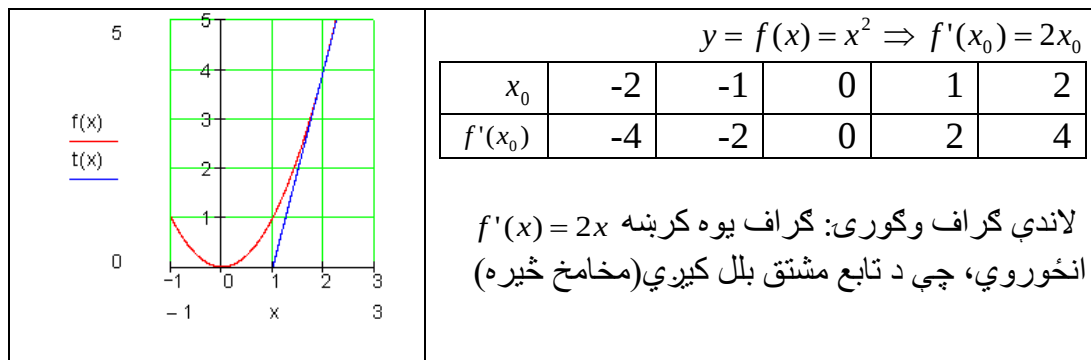
نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړۍ مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یا لاس ته راوړنه یې کیدۍ شي، د تابع د گراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2 | 4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جگیدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلگه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:



د مشتق تابع:

د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کيږي.

بېلگه:

د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: گران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق گراف وروسته له حله رسم کړي.

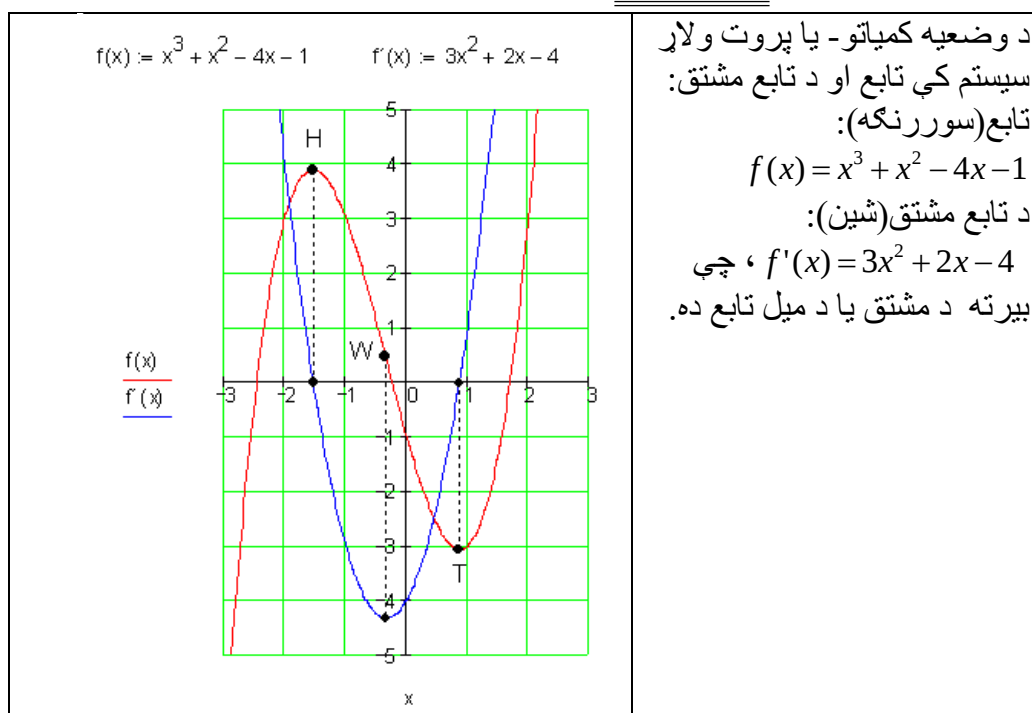
موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2
 \end{aligned}$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د تابع $f(x) = x^3$ مشتق دی په خای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$



بیلگه ۳:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ورکړ شوي تابع}$$

غوښتونۍ: د x_0 په ځای کې د مشتق تابع

$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{x_0}{x_0(x_0 + \Delta x)} - \frac{(x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \end{aligned}$
---	---

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ځای کې مشتق دی

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{د مشتق تابع ده:}$$

بېلگه ۴: یوه تابع $f(x) = \sqrt{x}$ دې ورکړ شوي وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad
 \begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$ دی.

د $\underline{\underline{f(x) = x^q}}$ ډول توابعو مشتق د $\underline{\underline{q \in \mathbb{Q}}}$ سره.

د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

تابع

د مشتق تابع

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = 1$$

$$f'(x) = 1 \cdot x^0$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2 \cdot x$$

$$f'(x) = 2 \cdot x^1$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = -x^{-2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري:

د توان قانون بی له بنوونی

لومړی: زاړه ضریبونه د ضریب یا فاکتور په حیث د x کین لور (په غربي ادبیاتو کې ورته وایي: ترمخ) ته ولیکي

دویم: نوی اکسپوننت هغه زور اکسپوننت دی، چې ۱ ترې کم شوی وي.

بیلگه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

مور اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیرني لاندې نیسو.

بیلگه ۱:

د یوې ثابتې مشتق:

مور دالاندې تابع لرو، چې ارزښت یې یو ثابت دی

$$y = f(x) = c = \text{Const}$$

نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلگه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي (کرنیزه) تابع لرو.د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلگه ۳:

د $y=f(x)=c \cdot u(x)$ ډوله تابع مشتق د c ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د (ثابتې c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c \cdot u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0) = c u(x_0)$ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{c}_{\substack{c \\ c}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$
---	---

بیلګه :

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

پیژند (تعریف): دفرنخیاډلوېش

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

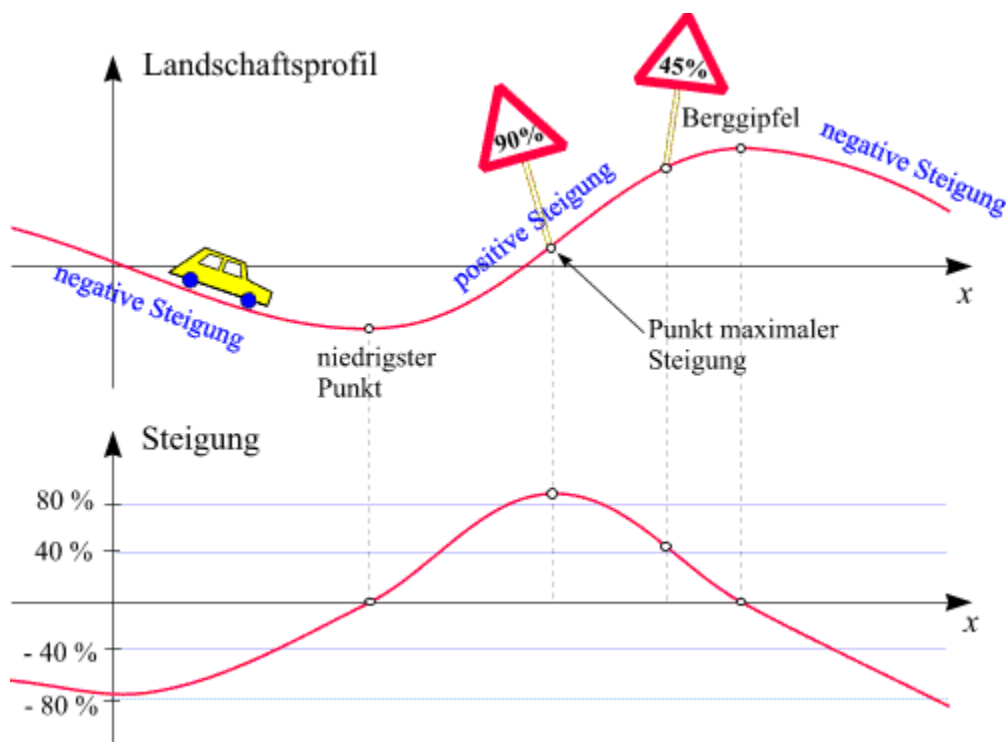
په بیدیا کې جګوالی

د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټیري یا کښته پورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

په لاندې څیره کې د لغاتونو په ترتیب ژباړه: د بیدیا جوړښت، منفي یا کمیزه جګیدنه، خورا ټیټ ټکی، زیاتیزه یا مثبت جګیدنه، د خورا جګي جګیدني ټکی، د غره څوکه، منفي جګیدنه.

پسې لاندې څیره کې: جګیدنه

د سرک کښته یا لاندي لور ته د ځانگړي دیاگرام سره د سرک جگیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحنی ورکوي.



دیاگرامونه په کره توږه وگورئ او وڅېړئ، چې د دویمې منحنی خویونه د لومړۍ منحنی له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جگیدني ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ټا پراته ټول ځغلي او په همدې توږه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.

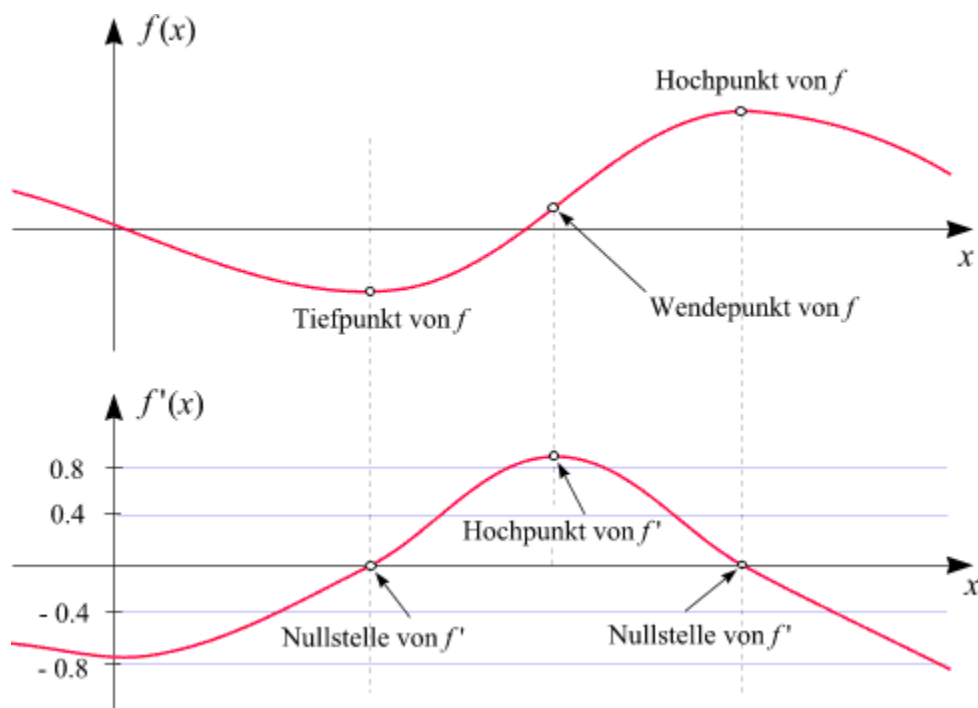
دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبت جگیدنه یو بل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جگیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلگه کې 90%).

همدې ته ورته په دویمه منحنی (کږې) کې یو ه څوکه لري، مگر دا په دې بیدیا کې هغه ستره،، څوکه،، نه ده، مگر که څوک غواړي، نو یوه د،، جگیدني څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحنی په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول په لاندې شکلونو کې ښایو او سره پرتله کوو:

(دالماني پښتو ژباړه له پورته کښته لور له کین وښي لو رته: د f خورا جگ- یاماکسیمال ټکی، د f خورا ټیټټکی، د f اوړون- یا د انعطاف ټکی، د f' خورا جگ ټکی، د f' صفرځای د f' صفرځای)



لومړۍ منحنی د $f(x)$ گراف دی، دویمه منحنی یا کږه د مشتق تابع $f'(x)$ گراف دی.

دا دواړه گرافونه بیا هم ټیک وگورۍ او وهڅیرۍ، چې وپوهیرۍ، چې دا یو د پیل سره په هره برخه کې څنګه یو د بل سره اړیکې لري.

د $f(x)$ گراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې $f(x)$ مینیمال - یا خورا ټیټ ټکی په بل کې $f(x)$ ماکسیمال - یا خورا جګ ټکی دی. په دې ځایونو کې $f(x)$ صفرځایونه لري. هغه ټکی چې هلته د $f(x)$ گراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي. دا چې په دې ټکي کې د $f(x)$ مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې $0,9$)، دا د $f'(x)$ عظمي نقطه (خورا جګ ټکی) ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځای له لاندې منحنی څخه ښه څرګندېږي، نسبت و پورته منحنی ته.

دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولی شو یا ګومان راوړی شو: که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لاس روړی شو.

دا موږ ته د ماکسیمیا او مینیمیا (د خورا جګ او خورا ټیټ ارزښت) په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادېږي) او په دې هکله چې گراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

په کواوردینات سیستم (پروت — ولاړ-) کې تابع

او د تابع مشتق

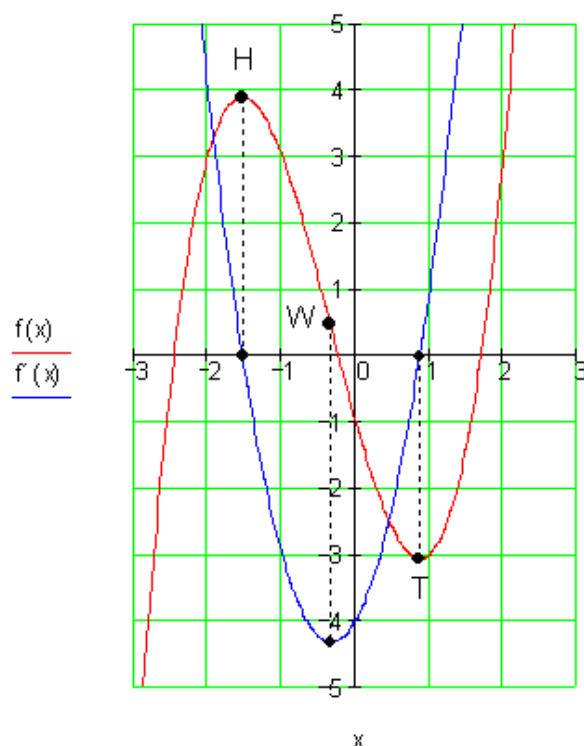
$$\text{تابع: } f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad \text{مشتق: } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږ دا د مشتق تابع یا د جګېدنې (میلان) تابع بولو

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۲۹

$$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$$



د دواړو توابعو گراف په يوه قميتي وضعيه (پروت ولاړ سيستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع $f(x)$ يو جگ ټکی (H) همداسې ټيټ ټکی (T) لري گراف د مشتق تابع x -محور کې غوڅوي، په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع $f(x)$ پروت يا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د $f(x)$ جگیدنه صفر ده.

د مشتق تابع $f'(x)$ هلته مينيموم لري، چيرته چې د $f(x)$ جگیدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قيمت له مخې خورا لويه ده.

پوښتنې II:

لومړۍ - د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ او $x=u$ په ځایونو کې وشمیرئ

الف - $f(x) = x^2 + 3$ ب - $f(x) = \frac{2}{x}$ پ - $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ت - $f(x) = \sqrt{x}$

دویم - مشتق یې وشمیرئ

الف - $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$ ب - $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$

پ - $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$ ت - $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2}$

ب - $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$ ث - $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2$

دریم - مشتق یې وشمیرئ:

الف - $f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$ ب - $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right)$

پ - $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ت - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

ب - $f(x) = 6x + \frac{5}{x}$ ث - $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}$

څلورم - مشتق یې وشمیرئ:

الف - $f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$ ب - $f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x$

پ - $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$ ت - $f_t(x) = \frac{1}{2t}(x^2 - t)^2$

ټ - $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$ ټ - $f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$

ج - $A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$ ح - $A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1)$

پنځم - د $f(x)$ جگوالی د $x = -3$ په ځای کې وشمیری او د $f(x)$ قاطع یا غوڅتکي د x - محور سره وشمیری .

الف - $f(x) = 3x^2 - 5$ ب - $f(x) = 4x - \frac{1}{x}$

شپږم - مشتق یې وشمیری:

الف - $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ب - $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ پ - $f(x) = x + 1$

ت - $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4$ ټ - $f(x) = 5b; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ټ - $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

ج - $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ ح - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

خ - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7$ ځ - $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8$

مفصل حلونه

لومړی -

الف -

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 + 3 - (2^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \frac{4 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 4 - 3}{\Delta x} = \frac{4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (4 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4 + \Delta x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$\begin{aligned} x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta x)^2 + 3 - (u^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \frac{u^2 + 2u \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - u^2 - 3}{\Delta x} = \frac{2u \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (2u + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2u + \Delta x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\begin{aligned} x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{2}{2}}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{1 \cdot (2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{2 - 1 \cdot (2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 - 2 - \Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\frac{\Delta x}{1} (2+\Delta x)} = \frac{-1}{2+\Delta x} \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{2+\Delta x} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

:

:

$$\begin{aligned}
 x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{u + \Delta x} - \frac{2}{u}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u}{u \cdot (u + \Delta x)} - \frac{2 \cdot (u + \Delta x)}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot (u + \Delta x)}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot u - 2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}} \\
 &= \frac{-2 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot u \cdot (u + \Delta x)} = \frac{-2}{u \cdot (u + \Delta x)} = \frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x} \\
 f'(u) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x} \right) = \underline{\underline{-\frac{2}{u^2}}}
 \end{aligned}$$

پـ

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
 x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2 + \Delta x + 1} - \frac{1}{2 + 1}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\frac{1}{3 + \Delta x} - \frac{1}{3}}{\Delta x} = \frac{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot (3 + \Delta x)} - \frac{1 \cdot (3 + \Delta x)}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot (3 + \Delta x)}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{3 - 3 - \Delta x}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{3 \cdot (3 + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}} = \frac{-1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot 3 \cdot (3 + \Delta x)} = \frac{-1}{3 \cdot (3 + \Delta x)}
 \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{3(3 + \Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{u + \Delta x + 1} - \frac{1}{u + 1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot (u+1)}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)} - \frac{1 \cdot (u+\Delta x+1)}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot (u+1) - 1 \cdot (u+\Delta x+1)}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u+1-u-\Delta x-1}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(u+1) \cdot (u+\Delta x+1)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \frac{\frac{-1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (u+1) \cdot (u+\Delta x+1)}}{\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \frac{-1}{(u+1)(u+1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u+1)^2}}}$$

تـ.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2+\Delta x} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{2+\Delta x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})}{\Delta x \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{2+\Delta x-2}{\Delta x \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})} = \frac{1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x} + \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

$$\begin{aligned} x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u+\Delta x} - \sqrt{u}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{u+\Delta x} - \sqrt{u}) \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})}{\Delta x \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})} \\ &= \frac{u+\Delta x-u}{\Delta x \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})} = \frac{1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u})} = \frac{1}{\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u}} \end{aligned}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{u+\Delta x} + \sqrt{u}} \right) = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{u}}}}$$

دویم - مفصل حلونه

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2} \quad \text{پ -}$$

$$s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2} \Rightarrow s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3} \quad \text{ت -}$$

ب -

$$f(x) = -(x-6)^2(x+1) = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 4x \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16} \quad \text{دریم - الف -}$$

$$f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 4 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = 6x + \frac{5}{x} = 6x + 5x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 6 - 5x^{-2} = 6 - \frac{5}{x^2} \quad \text{ث -}$$

ج --

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} = x^3 - 2x^2 + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - x^{-2} = 3x^2 - 4x - \frac{1}{x^2}$$

څلورم - مفصل حلونه

$$f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2 \Rightarrow f'_t(x) = 2tx^3 - 6tx^2$$

الف -

$$f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x \Rightarrow f'_k(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + k+1$$

ب -

$$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3 \Rightarrow f'_a(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$$

پ -

$$f_t(x) = \frac{1}{2t}(x^2 - t)^2 = \frac{1}{2t}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}t \Rightarrow f'_t(x) = \frac{2}{t}x^3 - 2x$$

ت -

$$f(t) = 5t^3 - 2t + 5 \Rightarrow f'(t) = 15t^2 - 2$$

ب -

$$f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z \Rightarrow f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1$$

ث -

$$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1 \Rightarrow A'(u) = u + 5$$

ج -

$$A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u \Rightarrow A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}$$

چ -

پنځم - مفصل حلونه

الف -

$$f(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(-3) = 6 \cdot (-3) = \underline{\underline{-18}}$$

د $f(x)$ صفرخایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \pm 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$$

ب -

$$f(x) = 4x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-3) = 4 + \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{37}{9}}}$$

د $f(x)$ صفرخایونه :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2} = 4 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

شپږم - مفصل حلونه

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 3 \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1 \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{3} \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = 5b; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \text{ټ -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3} \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 4 \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{4} \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = x + 3 \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x + 5 \quad \text{خ -}$$

پوښتنی :

مشتق شمیرنه III

اول- مشتق یی ونیسی

$$f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{10} \quad \text{ب -} \quad f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 7 \quad \text{ت -} \quad f(x) = x^3 - x^2 + x + 1 \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi \quad \text{ث -} \quad f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{چ -} \quad f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7 \quad \text{خ -} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x \quad \text{ح -}$$

دویم - مشتق یې ونیسئ

الف - $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ ب - $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ ت - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

ټ - $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1$ ث - $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7$

ج - $f(x) = 1$ چ - $f(x) = 0$

ح - $f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2$ خ - $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4$

دریم - مشتق یې ونیسئ

الف - $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2} \cdot x$ ب - $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 1$

پ - $f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1$ ت - $f(x) = 3,5x^2 - 1,5x + 2$

ټ - $f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 1$ ث - $f(x) = 3,1x^2 + \frac{7}{2}x - 7$

ج - $f(x) = 1,5x^3 - 2,5x^2 + 1$ چ - $f(x) = -2,5x^3 + 1,5x^2 - 1$

ح - $f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x$ خ - $f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b$

ځ - ځ

څلورم - مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف - } f(x) = x^{-1} \text{ ب - } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{پ - } f(x) = \frac{2}{3x} + 2 \text{ ت - } f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2$$

$$\text{ث - } f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \text{ ج - } f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{د - } f(x) = x^{\frac{1}{4}} \text{ ه - } f(x) = \sqrt{x} \text{ و - } f(x) = \sqrt{x^3} \text{ ز - } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

خوابونه

مشتق شمیرنه III

مفصل حلونه:

لومړی:

$$\text{الف - } f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{5}x - \frac{3}{4}$$

$$\text{ب - } f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{10} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6}{7}x + \frac{4}{9}$$

$$\text{پ - } f(x) = x^3 - x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\text{ت - } f(x) = -x^3 + x^2 - x + 7 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 4x - 1 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 3x + 2 \quad \text{ث.}$$

$$f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2\pi x + b \quad \text{ج.}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \text{چ.}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{2}{\pi}x + \alpha \quad \text{ح.}$$

$$f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7 \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 \quad \text{خ.}$$

دویم:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 3 \quad \text{الف.}$$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 6x - 2 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + x - 1 \quad \text{پ.}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + x^2 - x \quad \text{ت.}$$

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x \quad \text{ث.}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 + \frac{10}{7}x \quad \text{ث.}$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^5 - 16x^3 + 4x \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 1 \quad \text{خ -}$$

دریم:

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow f'(x) = 4x^2 + 3x + \sqrt{2} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3\sqrt{3} \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{\pi}x^2 + \frac{2}{3}x \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = 3,5x^2 - 1,5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 7x - 1,5 \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 1 \Rightarrow f'(x) = x - 2,5 \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = 3,1x^2 + \frac{7}{2}x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6,2x + 3,5 \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = 1,5x^3 - 2,5x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4,5x^2 - 5x \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = -2,5x^3 + 1,5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -7,5x^2 + 3x \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3tx^2 + 4x - 4 \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b \Rightarrow f'(x) = 14,4x - 8,2 \quad \text{خ -}$$

څلورم:

$$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \frac{2}{3x} + 2 = \frac{2}{3}x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2} \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x^{-3} - 3x^{-2} \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = x^{-3} - 2x^{-2} \quad \text{ټ -}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \quad \text{خ -}$$

پوښتنې

مشتقشمیرنه **IV**

لومړۍ: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف - } f(x) = 4x^2 - 3x + 2 \quad \text{ب - } f(x) = -2x^2 + 6x - 4$$

$$\text{پ - } f(x) = 2x^3 - x^2 + 1 \quad \text{ت - } f(x) = -7x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$\text{ث - } f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad \text{ډ - } f(x) = 1 - x^3$$

$$\text{ج - } f(x) = 1 - x^4 \quad \text{چ - } f(x) = 2x^2 - x^4$$

$$\text{ح - } f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \quad \text{خ - } f(x) = -3x^7 + 1$$

دویم: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف - } f(x) = a + 3bx^2 \quad \text{ب - } f(x) = 3x^7 - 0,5x^3$$

$$\text{پ - } f(x) = 0,125x^8 - 30x^4 \quad \text{ت - } f(x) = 0,01ax^{12} - 0,5bx^8$$

$$\text{ث - } f(x) = 3ax^5 - 0,5bx^4 \quad \text{ډ - } f(x) = 0,25x^8 + 0,5x^{10}$$

$$\text{ج - } f(x) = 0,25ax^4 + 0,5bx^5 \quad \text{چ - } f(x) = 0,5bx^6 + 0,2ax^5$$

$$\text{ح - } f(x) = -0,5x^5 \quad \text{خ - } f(x) = 0,5x^3 + 3x^2$$

دریم: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف- } f(x) = -3x^7 + 2x \quad \text{ب- } f(x) = 0,5x^3 + 2x$$

$$\text{پ- } f(x) = 2x^3 - 3x^2 \quad \text{ت- } f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{ث- } f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \text{ج- } f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$$

$$\text{د- } f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2 \quad \text{ه- } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$\text{و- } f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \quad \text{ز- } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$$

څلورم: مشتق یې ونیسئ

$$\text{الف- } f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \quad \text{ب- } f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2$$

$$\text{پ- } f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \quad \text{ت- } f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9$$

$$\text{ث- } f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \quad \text{ج- } f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$\text{د- } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3 \quad \text{ه- } f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$$

$$\text{و- } f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 \quad \text{ز- } f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5x$$

حلونه

مشتق شمیرنه IV

مفصل حلونه:

لومړی:

$$\text{الف. } f(x) = 4x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x - 3$$

$$\text{ب. } f(x) = -2x^2 + 6x - 4 \Rightarrow f'(x) = -4x + 6$$

$$\text{پ. } f(x) = 2x^3 - x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 2x$$

$$\text{ت. } f(x) = -7x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -21x^2 + 4x - 1$$

$$\text{ث. } f(x) = (x^2 - 3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$\text{ج. } f(x) = 1 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2$$

$$\text{چ. } f(x) = 1 - x^4 \Rightarrow f'(x) = -4x^3$$

$$\text{ح. } f(x) = 2x^2 - x^4 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 4x$$

$$\text{خ. } f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 6x$$

$$\text{دویم: } f(x) = -3x^7 + 1 \Rightarrow f'(x) = -21x^6$$

دویم:

$$\text{الف. } f(x) = a + 3bx^2 \Rightarrow f'(x) = 6bx$$

$$\text{ب. } f(x) = 3x^7 - 0,5x^3 \Rightarrow f'(x) = 21x^6 - 1,5x^2$$

$$\text{پ. } f(x) = 0,125x^8 - 30x^4 \Rightarrow f'(x) = x^7 - 120x^3$$

$$\text{ت. } f(x) = 0,01ax^{12} - 0,5bx^8 \Rightarrow f'(x) = 0,12ax^{11} - 4bx^7$$

$$f(x) = 3ax^5 - 0,5bx^4 \Rightarrow f'(x) = 15ax^4 - 2bx^3 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = 0,25x^8 + 0,5x^{10} \Rightarrow f'(x) = 5x^9 + 2x^7 \quad \text{ث.}$$

$$f(x) = 0,25ax^4 + 0,5bx^5 \Rightarrow f'(x) = 2,5bx^4 + ax^3 = \text{ج}$$

$$f(x) = 0,5bx^6 + 0,2ax^5 \Rightarrow f'(x) = 3bx^5 + ax^4 \quad \text{چ.}$$

$$f(x) = -0,5x^5 \Rightarrow f'(x) = -2,5x^4 \quad \text{ح.}$$

$$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 6x = \text{خ}$$

دریم:

$$f(x) = -3x^7 + 2x \Rightarrow f'(x) = -21x^6 + 2 \quad \text{الف.}$$

$$f(x) = 0,5x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 2 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x \quad \text{پ.}$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \quad \text{ت.}$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{ث.}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 2x \quad \text{ث.}$$

$$f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2x = \text{ج}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = x - 2 \quad \text{ج -}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}x \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 3 = \text{خ}$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} \quad \text{څلورم: الف -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} \quad \text{پ - / ت -}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 \quad \text{ن -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \quad \text{ث -}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 1 = \text{ج}$$

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8 \quad \text{چ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \quad \text{ح -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = x^3 + 4x^2 + 5 = \text{خ}$$

پوښتنې

مشتقشمیرنه VI

لومړۍ: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف- $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ ب- $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

پ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$ ت- $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$

ټ- $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$ ث- $f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$

دویم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف- $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$ ب- $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-2)^2$

پ- $f(x) = \frac{1}{16}(x^3+x-1)$ ت- $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right)$

ټ- $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ث- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

دریم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف- $f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$ ب- $f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x$

پ- $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$ ت- $f(x) = \frac{1}{2k}(x^2 - k)^2$

ټ- $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$ ث- $f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$

څلورم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

$$\text{الف-} \quad A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1 \quad \text{ب-} \quad A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1)$$

$$\text{پ-} \quad f(x) = 2\pi x^5 - 7x^3 + \frac{3}{\pi} \quad \text{ت-} \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

$$\text{ث-} \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \quad \text{ج-} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\text{د-} \quad f(x) = \frac{(x^2 + 4x + 4)^2}{x + 2} \quad \text{ه-} \quad f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3}$$

پځم: نلاندې تابع ورکړ شوي:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2; x \in \mathbb{R}$$

الف- د $f(x)$ تابع جگوالی د x_0 په ځای کې وښایی د $x_0 \in [-4; -1; 0; 1,5; 3]$ سره

ب- تابع $f(x)$ په کوم ټکي کې د 3 جگوالي سره تانجنت لري؟

پ- د $f(x)$ په $(2 | f(2))$ ټکي باندې د تانجنت مساوات وښایی

ت- د $f(x)$ په $(2 | f(2))$ ټکي باندې د نورمال یا عمود مساوات وښایی

ث- تانجنت او نورمال یا عمود په وضعیهقیمتسیستم کې رسم کړی.

$$\text{ث-} \quad \alpha(x) = t \cdot f(x); t \in \mathbb{R}^*$$

د x محور په S_1 او S_2 کې غوڅوي (قطع کوي)

د t د کومو ارزښتونو لپاره تانجنت په S_1 او S_2 یو بل سره عمود دي؟

حلونه

مشتقشمیرنه VI

نتیجی:

لومری-

الف -

$$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \quad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6 \\ f'''(x) = 120x - 24$$

$$\text{ب - } f'(x) = -4x^3 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x$$

$$\text{پ - } f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \quad f''(x) = -24x^2 + 6 \quad f'''(x) = -48x$$

$$\text{ت - } f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \quad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \quad f'''(x) = 12x - 6$$

$$\text{ث - } f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2} \quad f''(x) = \frac{3}{16}x \quad f'''(x) = \frac{3}{16}$$

$$\text{ث - } f'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \quad f''(x) = -\frac{5}{3} \quad f'''(x) = 0$$

دویم:

$$\text{الف - } f'(x) = -3x^2 + 22x - 24 \quad f''(x) = -6x + 22 \quad f'''(x) = -6$$

$$\text{ب - } f'(x) = 2x^3 - 4x \quad f''(x) = 6x^2 - 4 \quad f'''(x) = 12x$$

$$f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16} \quad f''(x) = \frac{3}{8}x \quad f'''(x) = \frac{3}{8} \quad \text{پ-}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 4 \quad f''(x) = 6x - 3 \quad f'''(x) = 6 \quad \text{ت-}$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \quad f''(x) = 12ax^2 + 2b \quad f'''(x) = 24ax \quad \text{ث-}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \quad f'''(x) = 6a \quad \text{ث-}$$

دریم:

$$f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \quad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \quad f'''(x) = 12kx - 12k \quad \text{الف-}$$

$$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + k + 1 \quad f''(x) = \frac{6}{k}x + 2k \quad f'''(x) = \frac{6}{k} \quad \text{ب-}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2} \quad f''(x) = \frac{3}{2}x + 2a \quad f'''(x) = \frac{3}{2} \quad \text{پ-}$$

$$f'(x) = \frac{2}{k}x^3 - 2x \quad f''(x) = \frac{6}{k}x^2 - 2 \quad f'''(x) = \frac{12}{k}x \quad \text{ت-}$$

$$f'(t) = 15t^2 - 2 \quad f''(t) = 30t \quad f'''(t) = 30 \quad \text{ث-}$$

$$f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1 \quad f''(z) = -9z + 5 \quad f'''(z) = -9 \quad \text{ث-}$$

خلورم:

$$A'(u) = u + 5 \quad A''(u) = 1 \quad A'''(u) = 0 \quad \text{الف-}$$

$$A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2} \quad A''(u) = 3u \quad A'''(u) = 3 \quad \text{ب-}$$

پ-

$$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \quad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \quad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$$

$$f'(x) = 1 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ت -}$$

$$f'(x) = 1 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ب -}$$

$$f'(x) = 1 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ث -}$$

$$f'(x) = 2 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{ج =}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 \quad f''(x) = 6x + 12 \quad f'''(x) = 6 \quad \text{چ -}$$

پنجم:

الف-

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

x	-4	-1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب - د $P(-2; -5)$ په ټکي کې د $f(x)$ تانجنت جگوالی 3 لري.پ- په $f(x)$ باندې د تانجنت مساوات په ټکي $(2 | f(2))$ کې: $t(x) = x + 1$ ت - په ټکي $(2 | f(2))$ کې په $f(x)$ باندې د عمود مساوات: $n(x) = -x + 5$ ب - ث - د $t_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$ لپاره تانجنټونه په ټکو S_1 او S_2 کې یو په بل عموددي.

مفصل حل:

لومړی: الف-

$$f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$$

$$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x^1 - 2 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{20x^3 - 12x^2 + 6x - 2}}$$

$$f''(x) = 20 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x^1 + 6 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{60x^2 - 24x + 6}}$$

$$f'''(x) = 60 \cdot 2x^1 - 24 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{120x - 24}}$$

$$f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2) \quad \text{ب -}$$

اول- حل د ضرب له لارې (د بېنوم دریمه جمله)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دویم - د ضرب د قانون له مخې حل (مفصل)

$$f(x) = \underbrace{(a^2 + x^2)}_u \underbrace{(a^2 - x^2)}_v \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' = 2x \cdot (a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x) \\ &= 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$$

$$f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \quad f''(x) = -24x^2 + 6 \quad f'''(x) = -48x \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$$

$$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \quad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \quad f'''(x) = 12x - 6 \quad \text{ت -}$$

ث -

$$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{32} \cdot 3x^2 + \frac{3}{2} \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{32} \cdot 2x^1 + 0 = \underline{\underline{\frac{3}{16}x}} \quad f'''(x) = \frac{3}{16} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

ث -

$$f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \quad f''(x) = -\frac{5}{3} \quad f'''(x) = 0$$

دویم: الف- $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$

- حل د ضربولو له لاری

$$f(x) = -(x^2 - 12x + 36)(x+1) = -[x^3 + x^2 - 12x^2 - 12x + 36x + 36]$$

$$= -[x^3 - 11x^2 + 24x + 36] = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36$$

$$f'(x) = \underline{\underline{-3x^2 + 22x - 24}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-6x + 22}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-6}}$$

دوي - حل د ځنډیري قانون له مخي.

$$f(x) = -\underbrace{(x-6)^2}_u \underbrace{(x+1)}_v \quad u' = 2(x-6) \cdot 1 = 2x - 12 \quad v' = 1$$

$$f'(x) = -[u'v + uv'] = -[(2x-12)(x+1) + (x-6)^2 \cdot 1] =$$

$$-[2x^2 + 2x - 12x - 12 + x^2 - 12x + 36] = -[3x^2 - 22x + 24] = -3x^2 + 22x - 24$$

$$\Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-6x + 22}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-6}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 \quad \text{ب -}$$

اول - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = \frac{1}{2} \underbrace{(x^2 - 2)^2}_{2. \text{ bin. Formel}} = \frac{1}{2}(x^4 - 4x^2 + 4) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$f'(x) = \underline{\underline{2x^3 - 4x}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{6x^2 - 4}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{12x}}$$

یادونه: په پورته کې 2.bin.Formel د دویم بینوم فرمول په معنا دی.

دویم-د ځنډیري قانون سره حل:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2(x^2 - 2) \cdot 2x = 2x(x^2 - 2) = \underline{\underline{2x^3 - 4x}}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{6x^2 - 4}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{12x}}$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(3x^2 + 1) = \underline{\underline{\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}}} \quad f''(x) = \underline{\underline{\frac{3}{8}x}} \quad f'''(x) = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

ت -

$$f(x) = x \left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4 \right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$$

$$f'(x) = \underline{\underline{3x^2 - 3x - 4}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{6x - 3}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{6}}$$

دلته به د ضرب قانون استعمال لږ غزېدلی وی.

ب –

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \quad f''(x) = 12ax^2 + 2b \quad f'''(x) = 24ax$$

ث –

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \quad f'''(x) = 6a$$

دریم: الف-

$$f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$$

$$f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \quad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \quad f'''(x) = 12kx - 12k$$

ب –

$$f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + \underbrace{(k+1)}_{\text{Konstante}} x$$

$$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + (k+1) \cdot 1 = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + \underbrace{k+1}_{\text{Konstante}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6}{k}x + 2k \Rightarrow f'''(x) = \frac{6}{k}$$

یادونه: دلته او په لاندې حل کې Konstante د ثابتې په معنا دی.

پ-

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{\text{Konstante}} x - 3$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{3}{2}x + 2a \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2k}(x^2 - k)^2 \quad \text{ت.}$$

اول - د ضرب له لاری حل (د بینوم دویم فرمول)

$$f(x) = \frac{1}{2k}(x^2 - k)^2 = \frac{1}{2k}(x^4 - 2kx^2 + k^2) = \frac{1}{2k}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}k$$

$$f'(x) = \frac{2}{k}x^3 - 2x \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{k}x^2 - 2 \Rightarrow f'''(x) = \frac{12}{k}x$$

دویم : د ځنډیري قانون له مخې (ساده دی)

$$f'(x) = \frac{1}{2k} \cdot 2(x^2 - k) \cdot 2x = \frac{2}{k}x(x^2 - k) = \frac{2}{k}x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6}{k}x^2 - 2 \Rightarrow f'''(x) = \frac{12}{k}x$$

$$f(t) = 5t^3 - 2t + 5$$

$$f'(t) = 15t^2 - 2 \quad f''(t) = 30t \quad f'''(t) = 30 \quad \text{ت.}$$

$$f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$$

$$f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1 \quad f''(z) = -9z + 5 \quad f'''(z) = -9 \quad \text{ت.}$$

څلورم:

$$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$$

$$A'(u) = u + 5 \quad A''(u) = 1 \quad A'''(u) = 0 \quad \text{الف-}$$

ب -

$$A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u$$

$$A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow A''(u) = \underline{\underline{3u}} \Rightarrow A'''(u) = \underline{\underline{3}}$$

دلته به د ضرب قانون لږ غزېدلی وی.

پ-

$$f(x) = 2\pi x^5 - 7x^3 + \frac{3}{\pi}$$

$$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \quad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \quad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \quad \text{ت -}$$

اول- د تابع ترم د ترم بڼه بدلون له لارې ساده کونه:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x + 1)}{x + 1} = x + 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

دویم - د وېش قانون استعمال (زیات وخت نیسي)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

د $u = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 2$ سره

او $y' = 1$ $v = x + 1 \Rightarrow v' = 1$ همداسې له $v^2 = (x + 1)^2$ څخه لرو:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0$$

د وېش قانون دې فقط په هغه حالتونو کې اسمعمال شي، که تابعترم په بله لار نه شي ساده کیدی.

ب. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-1)}{x-1} = x - 1$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0$$

د وېش قانون باندې صرف د نظر کړي.

ث. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0$$

د ویش قانون باندې صرف نظر کیري.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} = \text{ج}$$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} = \frac{(2x + 3)(2x + 3)}{2x + 3} = 2x + 3$$

$$f'(x) = 2 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0$$

د ویش له قانون څخه تیرپرو

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4x + 4)^2}{x + 2} - \text{چ}$$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4x + 4)^2}{x + 2} = \frac{[(x + 2)^2]^2}{x + 2} = \frac{(x + 2)^4}{x + 2} = (x + 2)^3$$

دویم – ځنډیري قانون استعمال کړی:

$$f'(x) = 3(x + 2)^2 \cdot 1 = 3(x^2 + 4x + 4) = \underline{\underline{3x^2 + 12x + 12}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x + 12 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

د ویش قانون باندې صرف نظر کیري.

پنځم:

الف-

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

$$f'(-4) = 2 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = 2 + 2 = 4$$

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$$

$$f'(3) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2 - 1,5 = 0,5$$

$$f'(-1) = 2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$f'(1,5) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 = 2 - 0,75 = 1,25$$

x	-4	-1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

ب -

د تانجنت جگیدنه به x_0 کې ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2 | -5)$ په ټکي کې په $f(x)$ باندې تانجنت ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2 | f(2))$$

پ -

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لرو:

$$t(x) = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x + 1}}$$

ت -

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2 | f(2))$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

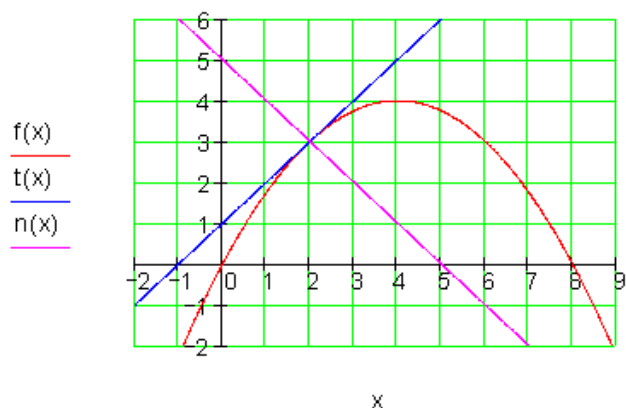
د $x_0 = 2$ سره لرو:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$

ب -



$$g(x) = t \cdot f(x) = 2tx - \frac{1}{4}tx^2 \quad \text{ث -}$$

د $g(x)$ صفرخایونه:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2tx - \frac{1}{4}tx^2 = 0 \Leftrightarrow x \left(2t - \frac{1}{4}tx \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$$

$$2t - \frac{1}{4}tx = 0 \mid -2t \Leftrightarrow -\frac{1}{4}tx = -2t \mid : \left(-\frac{1}{4}t \right) \Leftrightarrow x_2 = 8 \Rightarrow S_2(8|0)$$

د S_1 او S_2 عمودوالی په دې معنا دی چې:

$g'(0)$ د $S1(0,0)$ په ټکي کې د $t1(x)$ تانجنت جگوالی دی. د تانجنت $t2(x)$ جگوالی په ټکي $S2(8,0)$ کې دې هغه $t1(x)$ ته عمود وي. د دې لپاره باید صدق وکړي:

$$g'(8) = -1/g'(0) \quad (1)$$

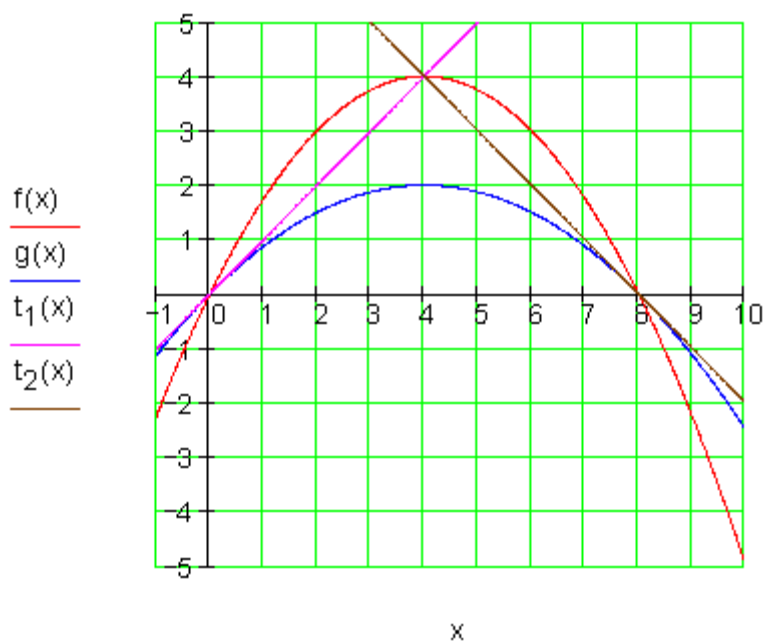
$$g'(x) = 2t - \frac{1}{2}tx \Rightarrow g'(8) = 2t - \frac{1}{2}t \cdot 8 = 2t - 4t = -2t$$

$$g'(0) = 2t \quad \text{همداسې}$$

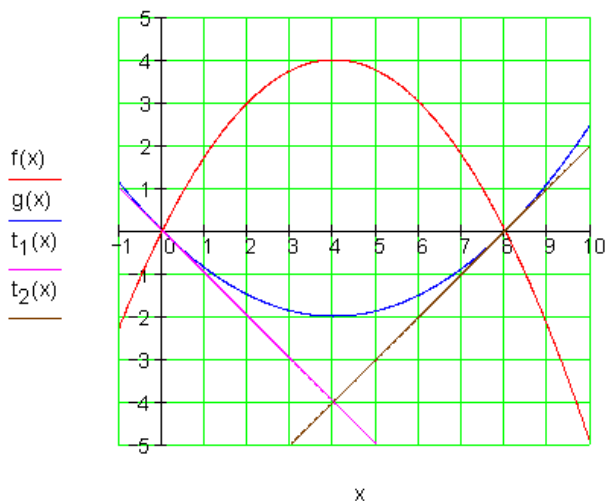
په (1) کې ځای په ځای کړی

$$-2t = -\frac{1}{2t} \mid \cdot 2t \Leftrightarrow -4t^2 = -1 \mid : (-4) \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{t_{1/2} = \pm \frac{1}{2}}}$$

د $t=1/2$ لپاره صدق کوي.



د $t = -1/2$ لپاره صدق کوي:



III.3.1 مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعی یا زیاتون قاعده):

که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعی څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعی څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{f'(x) = u'(x) + v'(x)}}$$

بیلگه:

د دې ورکړې $f(x) = 5x^2 + 3x$ ، $u(x) = 5x^2$ ، $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشمیرئ. بنوونه:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 + 3x & u(x) &= 5x^2 & v(x) &= 3x \\ \Rightarrow u'(x) &= 10x & v'(x) &= 3 \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}} \end{aligned}$$

د جمعي قاعده ټولزه کونه: که چیرې $f_1, f_2, \dots, f_n$ توابع او $k_1, k_2, \dots, k_n$ ثابت عددونه وي نو لرو (بې له بنوونې):

$$\begin{aligned} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\ = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x) \end{aligned}$$

قضيه (د ضرب قاعده):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښايو:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

بنوونه:
$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

د مناسب فورم- يا بڼه بدلون يعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$ ورزياتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

له پورته څخه لاس راځي يعنې د دواړو لورو ليميت نيسو يا پوله ټاکو:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
 \end{aligned}$$

بیلگه:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \cdot x^3 \quad u(x) = x^2 \quad v(x) = x^3 \\
 \Rightarrow u'(x) &= 2x \quad v'(x) = 3x^2 \\
 f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = \underline{\underline{5x^4}}
 \end{aligned}$$

بیلگه:

که $g(x) = x^2 - 1$ او $h(x) = \sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x) = g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توگه مخ ته خو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, \quad f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښايو (ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښايو او دویمه لار دې گران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right]
 \end{aligned}$$

غواړو $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\
 &= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
 \end{aligned}$$

یعني لرو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

دویمه لار:

د $\frac{1}{g(x)}$ مشتق غواړو پیدا کړو او ښایوچي دی:

$$(f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = - \frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (*)$$

که $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$(f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{-\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f'(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو، نو له پورته

ښوونې، د (*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \left[f(x) \frac{1}{g(x)} \right]'$$

$$= f(x) \left(\frac{1}{g(x)} \right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x) \left(\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \right) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

یا په لنډه توګه دا لاندې:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad u(x) = x \quad v(x) = x+2$$

$$\Rightarrow u'(x) = 1 \quad v'(x) = 1 \quad [v(x)]^2 = (x+2)^2$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(x+2)^2}}}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x^3}{x^4} \quad u(x) = 2x^2 + x^3 \quad v(x) = x^4$$

$$\Rightarrow u'(x) = 4x + 3x^2 \quad v'(x) = 4x^3 \quad [v(x)]^2 = x^8$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(4x + 3x^2) \cdot x^4 - (2x^2 + x^3) \cdot 4x^3}{x^8} \\ &= \frac{4x^5 + 3x^6 - 8x^5 - 4x^6}{x^8} = \frac{-x^6 - 4x^5}{x^8} = \frac{-x^5(x+4)}{x^8} = \underline{\underline{-\frac{x+4}{x^3}}} \end{aligned}$$

بیلگه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

$$g'(x) = 2x$$

وضع شي نو لرو:

$$h'(x) = 2x$$

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2-4]^2} \\ &= \frac{-8x}{[x^2-4]^2} \end{aligned}$$

دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رایلیدنه)

۷۱

تولگه:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	کمښتوېش: (د سیکانت جگیدنه یا منحنی تغیر ارزښت)
$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	دفرنشلوېش (د تانجنت جگیدنه یا لحضوي تغیر ارزښت)
$f(x) = c \cdot u(x)$ د c ثابت ټي سره $f'(x) = c \cdot u'(x)$ یا لنډ: $f' = c \cdot u'$	د ثابتي یا تل همغې قانون
$f(x) = u(x) + v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ یا لنډ: $f' = u' + v'$	د جمعې- یا زیاتون قانون
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ یا په لنډه بڼه: $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$	د ضرب – یا حل قانون
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ یا په لنډه بڼه: $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	د وېش قانون
$f(x) = f[z(x)]$ $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$ د باندنی مشتق د نننی مشتق	زنخیري قانون:

دنورو پسی توابعو مشتق:

مشتق تابع مساوات	تابع مساوات
$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x)$

بیلگه:

$$f(x) = x \cdot e^x \quad \text{د ضرب قانون:} \quad u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{د} \quad u = x; u' = 1; v = e^x; v' = e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$$

سره.

$$f(x) = 3 \ln x \quad \text{ثابتي دقانون:} \quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad \text{د ضرب قانون:} \quad u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{د}$$

$$u = x^2; u' = 2x; v = \ln x; v' = \frac{1}{x}$$

سره

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = (2 \ln x + 1)x$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{زنخیری قانون:} \quad f'(x) = f'(z) \cdot z'$$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}$$

$$u(x) = 3 \cos(x) \quad v(x) = -2 \sin(x) \quad f(x) = 3 \cos(x) - 2 \sin(x) \quad \text{د جمعې قانونو:}$$

$$\Rightarrow u'(x) = -3 \sin(x) \quad v'(x) = -2 \cos(x)$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = -3 \sin(x) - 2 \cos(x)$$

3.III : د مشتقشمیرني قوانین

پوښتنې

مشتقشمیرنه **V**

لومړۍ: مشتق یې ونیسئ:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 \quad \text{ب -} \quad f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4 \quad \text{ت -} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3 \quad \text{ث -} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \quad \text{ج -} \quad f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \quad \text{ج =}$$

$$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{خ =} \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5 \quad \text{ح -}$$

دویم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتقواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

الف- $f(x) = 4x^3$ ب- $f(x) = 3e^x$ پ- $f(x) = 5\ln x$

ت- $f(x) = x^2 + x$ ب- $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ث- $f(x) = 4x^5 - 2\ln x + 3e^x$

ج = $f(x) = x \cdot e^x$ چ- $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ ح- $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1)$

دریم: د لاندی توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتقواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

الف- $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ب- $f(x) = \frac{x}{x+1}$ پ- $f(x) = \frac{(x+1) \cdot e^x}{x}$

ت- $f(x) = (x+1)^2$ ب- $f(x) = (x^2 + 1)^2$ ث- $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

ج = $f(x) = 2ax^3 - 4bx$ چ- $f(x) = e^{ax}$ ح- $f(x) = e^{-(x-2)}$

خلورم: د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کړئ:

الف- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$ ب- $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x}$

پ- $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3}$ ت- $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

ب- $f(x) = (a^2 + x)^2$ ث- $f(x) = (2x^3 - 3)^2$

پنځم: د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کړئ:

الف- $f(x) = (x + e^x) \cdot \ln x$ ب- $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

پ- $f(x) = (x+1) \cdot e^{(x+1)}$ ت- $f(x) = a\ln x - be^x - 3x^2$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \quad \text{ث}$$

شپږم: د لاندې توابعو دریواړه مشتق ونئسئ

$$\text{الف-} \quad f(x) = 3x + 4 \quad \text{ب-} \quad f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$$

$$\text{پ-} \quad f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \text{ت-} \quad f(x) = (2x + 1)^3$$

$$\text{ج-} \quad f(x) = x - x^4 + 3 + x \quad \text{ث-} \quad f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$$

$$\text{چ-} \quad f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \quad \text{ج-} \quad f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

مفصل حلونه

مشتقشمیرنه V

یادونه: په لاندې کې (Sr) د جمعي قانون (Pr) د ضرب قانون، Kettenregel ځنډیري قانون (Kr) د ثابتې قانون (Qr) د وېش قانون په معنا دي

لورمړی:

$$\text{الف-} \quad f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\text{ب-} \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 2x$$

$$\text{پ-} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$$

$$f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 + 12x \quad \text{ت.}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 2 \quad \text{ث.}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2} = \text{ج}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \quad \text{چ.}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 2x - 1 \quad \text{ح.}$$

$$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12}x^3 - x = \text{خ}$$

دویم:

$$\text{الف. } f(x) = 4x^3 \quad \text{د ثابتې قانون} \quad f'(x) = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = \underline{\underline{12x^2}} \quad (\text{Kr})$$

$$\text{ب. } f(x) = 3 \cdot e^x \quad (\text{Kr}) \quad f'(x) = 3 \cdot (e^x)' = \underline{\underline{3e^x}}$$

$$\text{پ. } f(x) = 3 \cdot \ln(x) \quad (\text{Kr}) \quad f'(x) = 3 \cdot [\ln(x)]' = 3 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$$

$$\text{ت. } f(x) = x^2 + x \quad \text{د جمعې قانون:} \quad f'(x) = \underline{\underline{2x+1}}$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \quad (\text{Sr/Kr}) \quad f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 - 6x}} \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = 4x^5 - 2 \cdot \ln(x) + 3 \cdot e^x$$

$$(\text{Sr/Kr}) \quad f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot e^x = \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}} \quad \text{ث -}$$

$$\text{ج} = f(x) = x \cdot e^x \quad \text{د ضرب قانون} \quad u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{د} \quad u = x; u' = 1; v = e^x; v' = e^x$$

سره

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

$$\text{چ -} \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (\text{Pr ضرب قانون}) \quad u'v + uv' \quad \text{د} \quad u = x^2; u' = 2x; v = \ln x; v' = 1/x$$

سره.

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) \quad (\text{Pr}): u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{mit } u = x^2; u' = 2x; v = \ln(x); v' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = \underline{\underline{(2 \ln x + 1)x}}$$

$$\text{ح -} \quad f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1) \quad (\text{Pr/Sr}): u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{د}$$

$$\text{د} \quad u = x^3; u' = 3x^2; v = x^2 - 1; v' = 2x \quad \text{سره}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - 1) + x^3 \cdot 2x = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 = \underline{\underline{5x^4 - 3x^2}}$$

دریم: الف-د لاندې پښتو:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{د وېش قانون:} \quad \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\text{د} \quad u = x+1; u' = 1; v = x; v' = 1; v^2 = x^2 \quad \text{سره}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad (\text{Qr/Sr}): \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u = x; u' = 1; v = x+1; v' = 1; v^2 = (x+1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(x+1)^2}}}$$

پ- د... سره

$$f(x) = \frac{(x+1)e^x}{x} \quad (\text{Qr/Pr/Sr}): \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u = (x+1)e^x; u' = e^x + (x+1)e^x; v = x; v' = 1; v^2 = x^2$$

$$f'(x) = \frac{[e^x + (x+1)e^x] \cdot x - (x+1)e^x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{xe^x + x^2e^x + xe^x - xe^x - e^x}{x^2} = \underline{\underline{\frac{(x^2 + x - 1)e^x}{x^2}}}$$

ت -

$$f'(x) = f'(z) \cdot z' \quad \text{ځنډيري قانون:} \quad f(x) = (x+1)^2$$

$$z = x+1 \Rightarrow z' = 1 \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

$$f'(x) = 2(x+1) \cdot 1 = \underline{\underline{2(x+1)}}$$

$$f(x) = (x^2+1)^2 \quad \text{ث -}$$

خُنزیري قانون: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = x^2 + 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

$$f'(x) = 2(x^2 + 1) \cdot 2x = 4x(x^2 + 1) = \underline{\underline{4x^3 + 4x}}$$

ث - $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ خُنزیري قانون $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

ج $f(x) = 2ax^3 - 4bx$ (Sr/Kr) $\Rightarrow f(x) = 2 \cdot 3ax^2 - 4b = \underline{\underline{6ax^2 - 4b}}$

چ - $f(x) = e^{ax}$ خُنزیري قانون: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = ax \Rightarrow z' = a \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \Rightarrow f'(x) = e^{ax} \cdot a = \underline{\underline{ae^{ax}}}$$

ح -

خُنزیري قانون: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$ $f(x) = e^{-(x-2)}$

$$z = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow z' = -1 \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-(x-2)} \cdot (-1) = \underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$$

څلورم:

الف - $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{9x^2 - 4x + 1}}$

ب - $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x = \underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_u \cdot \underbrace{e^x}_v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د $u = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ او $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$ سره لرو:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + x^{\frac{5}{2}} \cdot e^x = \underline{\underline{\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)e^x}}$$

پ- $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{4}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \Rightarrow f'(x) = 1$

ت- $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = 2x-1 \Rightarrow u' = 2$ او $v = x+2 \Rightarrow v' = 1$ سره لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{5}{(x+2)^2}}}$$

ث- $f(x) = (a^2 + x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(a^2 + x) \cdot 1 = \underline{\underline{2(a^2 + x)}}$

ث -

$$f(x) = (2x^3 - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(2x^3 - 3) \cdot 6x^2 = 12x^2(2x^3 - 3) = \underline{\underline{24x^5 - 36x^2}}$$

پنځم:

الف-

$$f(x) = \underbrace{(x + e^x)}_u \cdot \underbrace{\ln(x)}_v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

د $u = x + e^x \Rightarrow u' = 1 + e^x$ او $v = \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$ سره کیږي یا لرو:

$$f'(x) = (1 + e^x) \cdot \ln(x) + (x + e^x) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + \ln x \cdot e^x + 1 + \frac{e^x}{x}$$

ب -

زنځیري قانون $f'(x) = f'(z) \cdot z'$ $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

$$z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = \ln(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

پ- $f(x) = (x+1) \cdot e^{(x+1)} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د $u = (x+1) \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{(x+1)} \Rightarrow v' = e^{(x+1)}$ سره

$$f'(x) = 1 \cdot e^{(x+1)} + (x+1) e^{(x+1)} = [1 + (x+1)] e^{(x+1)} = \underline{(x+2) e^{(x+1)}}$$

ت - $f(x) = a \cdot \ln(x) - b \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{x} - be^x - 6x$

ټ - $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = (x+1)^2 \Rightarrow u' = 2(x+1)$ او $v = (x-1)^2 \Rightarrow v' = 2(x-1)$ او

د سره لرو: $v^2 = (x-1)^4$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2(x+1) \cdot (x-1)^2 - (x+1)^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\
 &= \frac{(x-1) [2(x+1)(x-1) - 2(x+1)^2]}{(x-1)^4} = \frac{2(x+1)(x-1) - 2(x+1)^2}{(x-1)^3} \\
 &= \frac{2(x^2-1) - 2(x+1)^2}{(x-1)^3} = \frac{2x^2-2-2x^2-4x-2}{(x-1)^3} = \frac{-4x-4}{(x-1)^3} = \underline{\underline{-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}}}
 \end{aligned}$$

ث -

$$f(x) = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3+x}{3-x}\right)'$$

د ځنډیري قانون له مخي منځشمیرنه:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad u = 3+x \Rightarrow u' = 1; v = 3-x \Rightarrow v' = -1; v^2 = (3-x)^2$$

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)' = \frac{1 \cdot (3-x) - (3+x) \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{3-x+3+x}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{6}{(3-x)^2} = \frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (3-x)^2} = \frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}} (3+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}} (3+x)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{3}{(3-x)[(3-x)(3+x)]^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{3}{(3-x)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}}}
 \end{aligned}$$

شپږم:

$$f(x) = 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{الف-}$$

$$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 = 5x^3 - 3x - 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = 15x^2 - 3 \quad f''(x) = 30x \quad f'''(x) = 30 \quad \text{ب-}$$

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \quad f''(x) = 18x + 4 \quad f'''(x) = 18 \quad \text{پ-}$$

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = 24x^2 + 24x + 6$$

$$f''(x) = 48x + 24 \quad f'''(x) = 48 \quad \text{ت-}$$

$$f(x) = x - x^4 + 3 + x = -x^4 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 2 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x \quad \text{ټ-}$$

ث -

$$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 = x^4 - 9x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 9 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f'''(x) = 24x$$

ج- ثابت یا تل همغه = konstant

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a+b+c^3-1}_{\text{Konstante}}$$

$$f''(x) = -6cx \quad f'''(x) = -6c$$

چ -

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \quad f''(x) = 24x - 4 \quad f'''(x) = 24$$

د جگو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي. د $f''(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f'''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادېږي.

بیلگه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

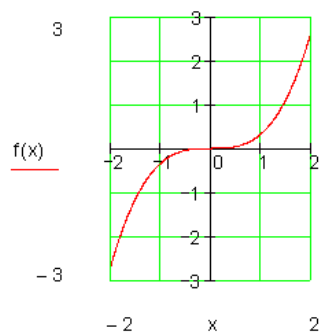
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونيول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$

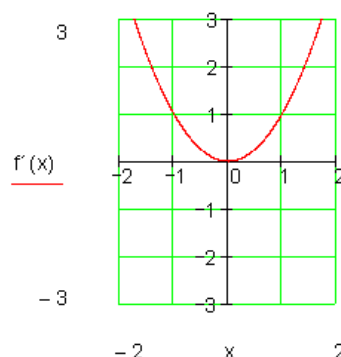
د تابع گراف:

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

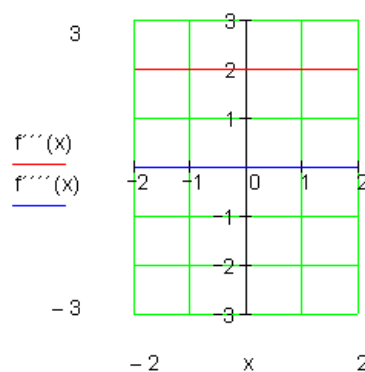
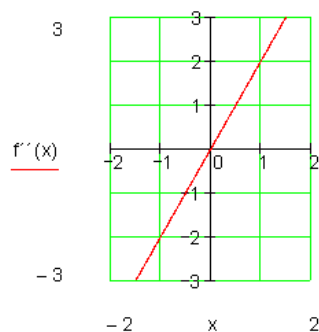


$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$



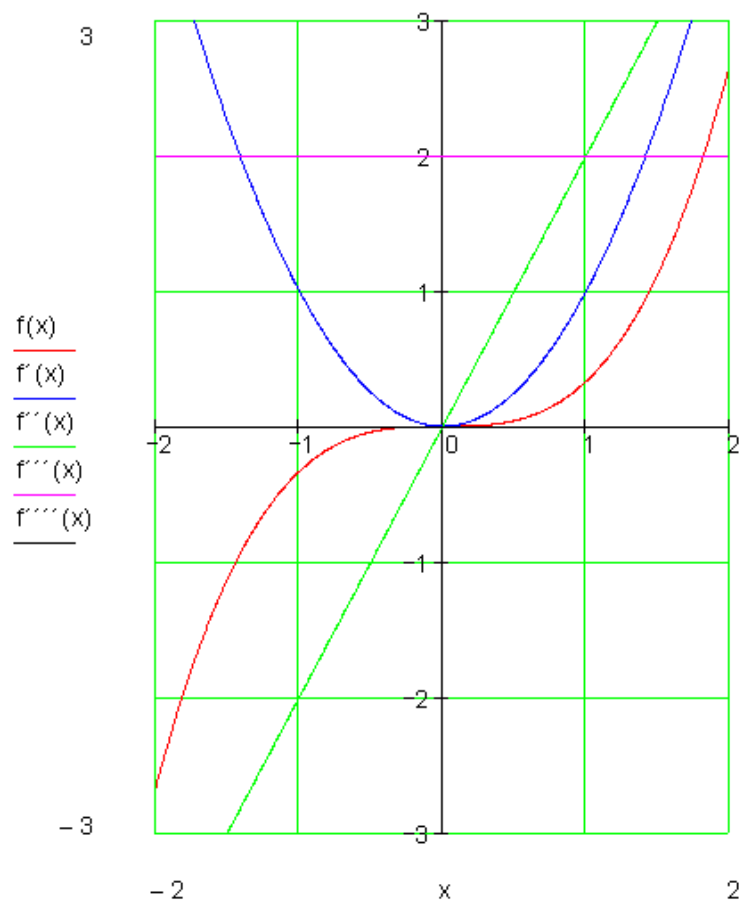
$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$



د ټولو توابعو گراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې (دا گراف د لاندې بیلګې پسې دی)

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ $f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$ $f''(x) = 24x - 4$ $f'''(x) = 24$	بیلګې: اول:
---	--------------------



دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده:

د $f(x)$ دویم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f'''(x)$ مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوشه ویاند – یا راشنل تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تانجنت او عمود

د تانجنت جګیدنه

بیلګه:

تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 | f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

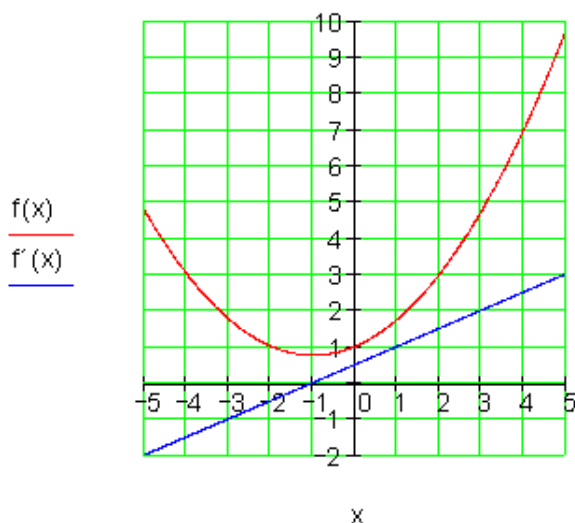
ارزښتجدول:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
$f'(x)$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرتکی دی: $S(-1, 0.75)$
د $x = -1$ ارزښت لپاره $f'(-1) = 0$ د ميل تابع ارزښت دی:
دا دا معنی لري، چې په ککرتکي کې د $f'(x)$ ميل صفر دی.
تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت (افقي) ځغلي؛ يعنې د $-x$ محور سره غبرگ ځغلي.

گرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \quad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



بيلگه:

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \text{ تابع لرو:}$$

تانجنت دې پيدا کړی شي، چې د $f(x)$ گراف د $P(-2, f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2 \\
 t(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
 f'(x_0) f'(-2) &= 24 - 28 + 1 = -3 \\
 f(x_0) &= f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3 \\
 \Rightarrow t(x) &= -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}
 \end{aligned}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع گراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

$t(x) = \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}_{\text{جانجنت مساوات جگیدنه}}$	$n(x) = -\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{عمود مساوات جگیدنه}}}(x - x_0) + f(x_0); \quad f'(x_0) \neq 0$
---	--

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ گراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ گراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي. د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \quad (1) \quad \text{د } m_t = f'(x_0) \text{ سره لیکو:}$$

دا چې $P(x_0, f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لږ:

$$\begin{aligned}
 t(x) &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\
 &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)
 \end{aligned}$$

عمود (نورمال):

د منحنی سره په هماغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي. د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

بيلگه:

$$د \quad f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \quad \text{تابع لرو.}$$

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پيدا کړئ:

حل: په لاندې توگه د تابع مشتق نيسو او گراف يې (څېره لاندې کښل شوي) کارو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad \text{لرو:}$$

د تانجنت ميل په ټکي x_0 کې د ميل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2, -5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad , P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x + 1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad P(2 | f(2))$$

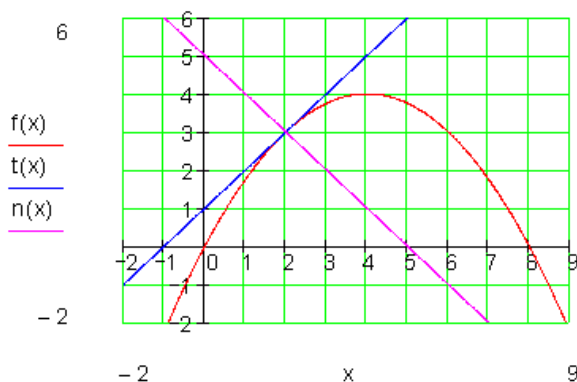
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راځوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

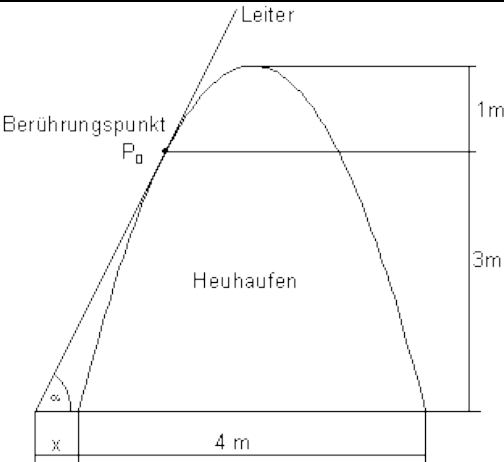
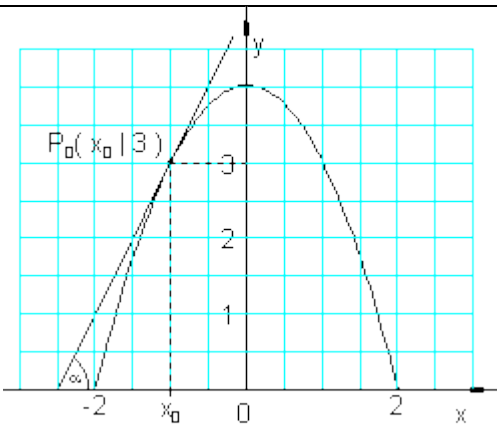
$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$



د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :

له ځمکې څخه د وینو په توپۍ یوه زینه ایښول کیږي. دا زینه په درې متره جگوالي توپۍ لمسوي.

	د وښو توپۍ دې د یوه کینکودي پارابول څیره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جگوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کیردو، چې د وښو توپۍ سره تانجنت جوړ کړي. په کومه زاویه (کونج) باید دا زینه کینول شي؟ د وښو توپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زینه کینول شي؟
	موږ د y محور داسې کارو، چې د پارابول له ککړې (څوکې) څخه تېرېږي. پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري: $f(x) = a_2 x^2 + 4$ $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$ $\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$ موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو: $f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$ $\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$

شمیرنه :

د نورو شمیرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه توپۍ په $P_0(-1, 3)$ ټکي کې لمسوي. موږ په $P_0(-1, 3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$d \quad f'(x) = -2x \quad \text{سره لاس ته راځي}$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

$$\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63,4^\circ}} \quad \text{جوړه زاویه:}$$

د زینې او د وینو توپي تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای تر منځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

د x ارزښتونو $-2,5$ او -2 تر منځ واټن $0,5$ دی.

زینه د وینو د توپي له پینو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لگښت کیري، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لگښت تابع وایو او په $K(x)$ سره ښایو.

څنگه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لگښت را ټیټ کړو؟

د لگښت تابع $K(x)$ د تولید سټ (ډېری) او ټول لگښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاوخوا کې زیات شي، نو لگښت هم د ΔK په شاوخوا کې زیاتېږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لگښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره (منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لگښت بلل کېږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کېږي، داپه دې معني، چې د لگښت د تابع K مشتق.

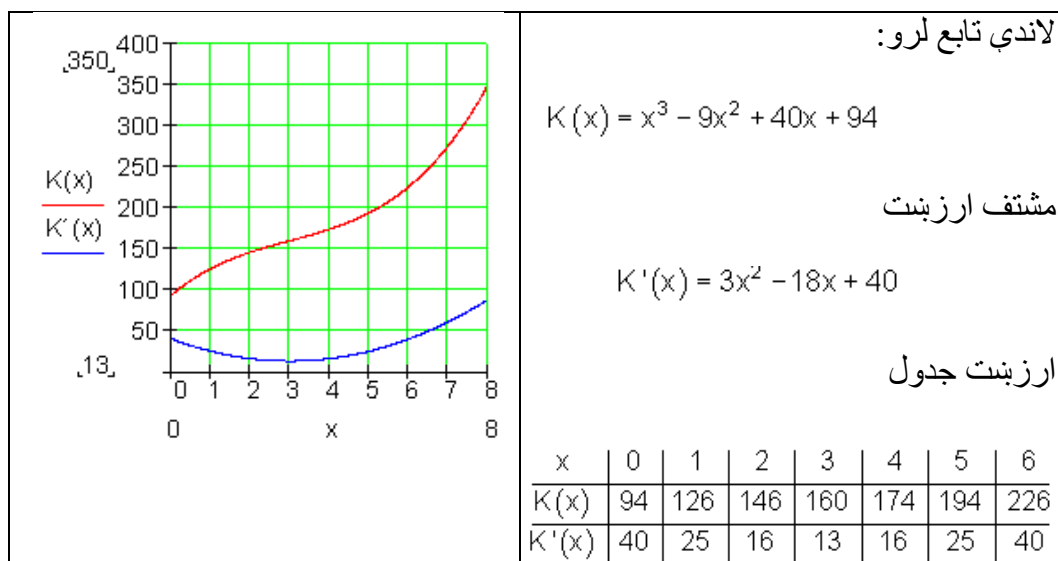
پېژند : د لگښتتابع $K(x)$ مشتق د مشتق ارزښت $K'(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله لگشت $K'(x)$ هم بولو.

بیلگه: د لگښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکي، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکارې او په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې گراف وکارې.

پوله ارزښت د $I = [0 ; 6]$ لپاره په ۱ پل (قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لگښتزاټوالی و ټاکي:



خوړا کم د لگښت زیاتوالی (لگښت جگړېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره (خوکه) کې پروت دی،
یعنې هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

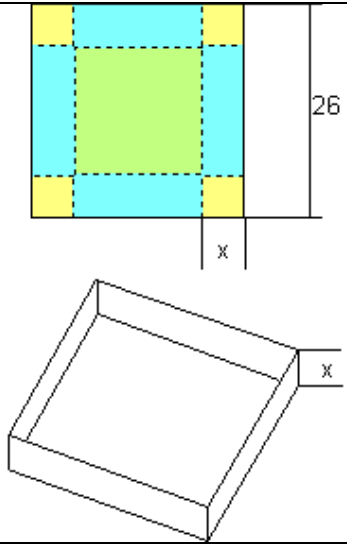
$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

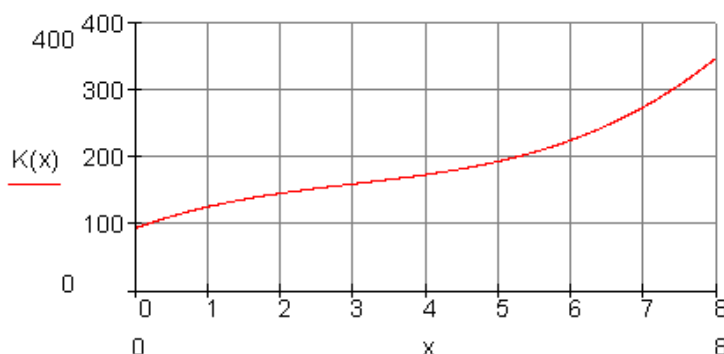
همدا نتیجه موږ د $K'(x)$ لپاره جدول څخه هم لوستلی شوه.

نتیجه په دې معنا ده: کوچنی نرخ جگړوالی د یوه $x = 3$ مقدار څخه لاس ته راوړو، دا
هلته 13 GE / ME دی.

	د دي، مربع کارتون (د کلک کاغذ څخه جوړ) څخه، چې ۲۶ سانتيمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جگوالی لري. الف: د یوه تابع ترم وټاکي، چې د بکس حجم (ډکي) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښايي. ب – گراف وکارۍ او په نږدې توگه يې ماگسيما(خورا جگ) حجم و ټاکي.
---	--

- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو گڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې $x = 1$ د ۱۰۰ ناروغانو معنی او $y = 1$ دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.).

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف : د مصرف تابع په خپله کتابچه کې ولیکي.

ب : د لگښت تابع مشتق د مشتق لگښت (-مصرف) یا دحدمصرف په نامه یادېږي. تاسو د لگښت زیاتیدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کې تشریح کړی. (د $K(x)$ جگیدونه). $K'(x)$ وټاکي او گراف يې په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کې انځور کړی

پ : د ناروغانو د کوم تعداد سره د لگښت زیاتوال خورا کم دی؟ دا قیمتونه وشمیری.

د الجبري توابعو مشتق

د الجبري او نورو توابعو بېژندونه:

1- یو بنسټیز تابع الجبري بلل کېږي، که د ترتیب قانون یې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي، په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري عملی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) چې مخرج یې صفر نه وي (توانکونه او جذرنيونه) د توان-اوربيني اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي (کارول شوي وي).

2- نالجبري توابع ترانسخندنت بلل کېږي، لکه اکسپوننشل-ولوگاریمی- او د زاویو توابع.

3- یو الجبري تابع راشنل بللکیري، که د ترتیب قانون یې د یو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای پیرې راشنل د شمېر عملی ((جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) چې مخرج یې صفر نه وي (توانکونه او جذرنيونه) د توان-اوربيني اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي (کارول شوي وي).

بیلگه:

د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ورکړ شوی په x_0 کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع په گوته کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$
---	--

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ د تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق دی.

د تیرو درسونو پر بنسټ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $f(x) = x^q$; $q \in Q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کيږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

$f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q \cdot x^{q-1}$ $q \in Q$ سره	د توان (پونټخ) قانون بې له ښوونې: 1- مختلې اکسپوننت د متحولې x تر مخ د فاکتور په څېر لیکل کېږي. 2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.
---	---

بیلگه: د $f(x) = \frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

بیلگه:

د $f(x) = 3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

بیلگه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x = 2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 2u + \Delta x$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

بیلگه:

د تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ مشتق د $x = 2$ په ځای کې پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

$$x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u+1)^2}}}$$

بيلگه 2:

(توان) (Potence) مشتق، چي طبيعي جگ عدد يا اکسپوننت لري:
مورد د $y(f(x) = x^n$, $1, 2, 3, \dots$ تابع لرو او غواړو مشتق يې پيداکړو:
ښوونه: موږ په لاندې توگه مخ ته ځو.

د بېنوم جملې په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باور لري.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(x_0^n + nx_0^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x_0^n \right) \\ &= nx_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \end{aligned}$$

د $h \rightarrow 0$ لپاره تابع $y = x^n$ د x_0 په هر ځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بېلگې بل ډول بنوونه دي د پوښتنې په څېر وي.

د زنځيري توابعو مشتق

د u تابع کېدې شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع (ځنځيرونې قاعده)، پېژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره گډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره لیکو: $u \circ v(x) = u(v(x))$ ، که د f تابع د $y = f(x) = u(z)$ سره او $z = v(x)$ وي.

اوس د $x = x_0$ ځای کې د $y = f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقووالي څيرو:

$$f(x) = f[g(x)] \\ \Rightarrow f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$$

دنننې مشتق د باندنې مشتق (دادې ورپورته شي)

ددې لپاره نيسو چې:

1- د $g(x)$ دنننې تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتق ور ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيريال کې متمادي (نه پريکيدونکې) وي.

موږ لرو: $g(x+h) - g(x_0) > 0$ د $h > 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0 + h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k > 0$ د $h > 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ د باندنې تابع په $z = z_0$ کې د مشتق قابليت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمښتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه (فورم) یې هم بدله شي :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \\ &= \frac{f(z_0 + k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}\end{aligned}$$

که $h > 0$ لاره شي (همداسې $k > 0$ خواته ځي) نو دا اړیکې مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} ; \dots (*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای (فیکس) ځای $x = x_0$ لپار بیرته x نیسو، نو کیدی شي چې (*) فرمول په لاندې لند ډول ورکړ شي او د $z = g(x)$ ، $y = (z)$ لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} ; \dots (**)$$

په پام کې دي وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z = g(x)$ په ځای کې باید ترتیب (تنظیم) شي.

دا (*) فرمول ځنځيري قاعده (لار، قانون) بلل کېږي او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دي. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې بنی خوا د کینې خوا سره د فورمال dz زیاتیدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

جمله :

زنځيري قاعده

دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۱۰۳

لرو : $f(z) = f(g(x))$ ، نود $z = g(x)$ تابع په x او د $y = f(z)$ تابع په $z = g(x)$ کې د مشتق قابلیت لري یا مشتقور دی، نو ترلی ورکړ شوی د $y = f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابلیت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{df}{dg} = \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(fog)'(x) = f(g(x))'$$

لند:

بېلگه:

د $f(x) = (x^2 + 2)^2$ مشتق ونیسئ.

$$f(x) = (x^2 + 2)^2$$

Substitution بدلون $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$

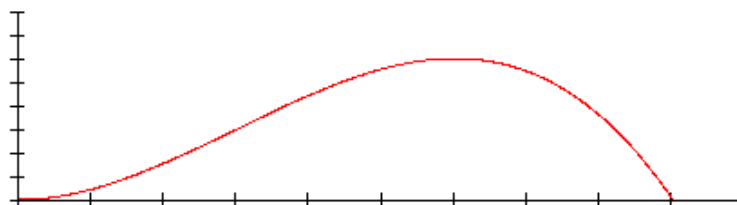
$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) = 2z \cdot 2x = 2(x^2 + 2) \cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 8x}}$$

د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کيږي، چې د یوې متحولې (اوښتونې) x په واک کې وي.

په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیړو، چې د وخت په واک کې وي وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلي لار (دا وروسته روښانه کيږي)



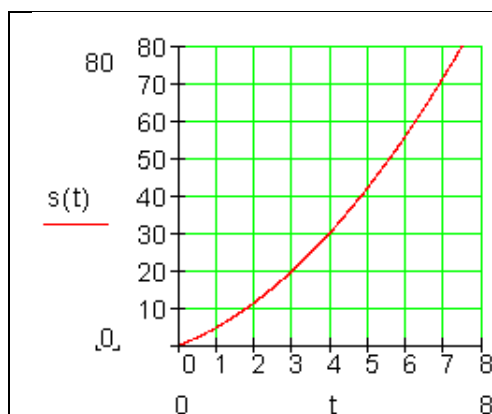
فعاليت:

گران زده کوونکي دي د فزيک د درسونو له مخي د چټکتيا او بيړي تعريفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتيا او بيړي فرمولونه دي وليکي.

بيلگه:

د يوه په برابر ډوله بيړه (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنۍ سرعت) $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ او $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$ بيړي (تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$



حل: د پورته ورکړ شوي د v_0 ارزښت

لپاره باور لري: $S(t) = 0,9t^2 + 4t$

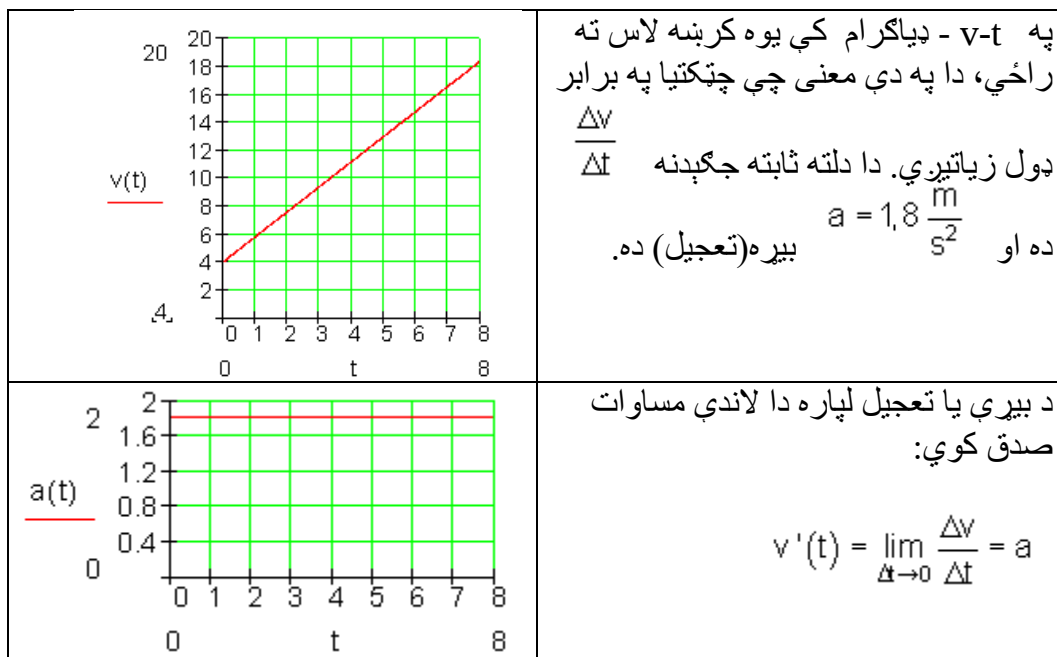
(s په (ثانيه) ، $s(t)$ په m (متر))

منځنۍ چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (ده)
لحظوي (سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$v = s'(t) = 1,8t + 4$$

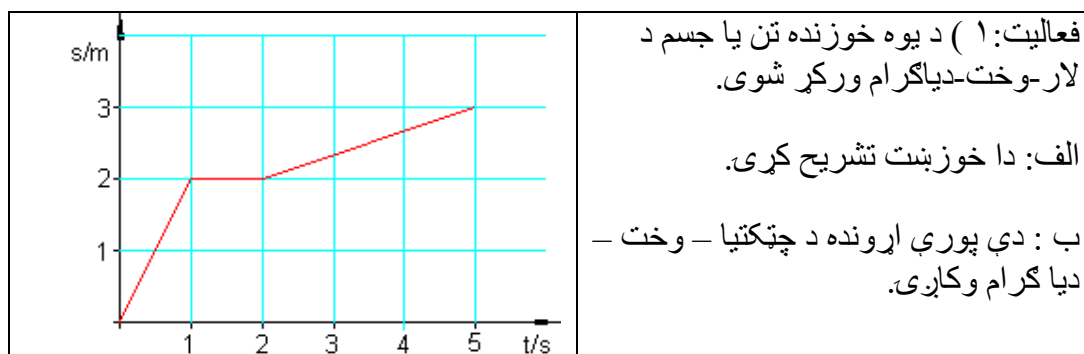
ده:



پام : د یوه برابر ډوله په بیرته (تجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$\left| s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \right| \quad \boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0} \quad \boxed{a(t) = v'(t) = a}$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t) = s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$ هم لیکو.

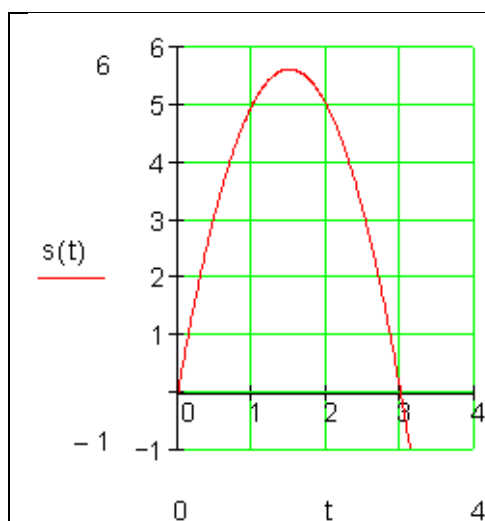


(۲) يوه تيره د پيل چټکتيا $v_0 = 7 \frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاره) پورته غورځول کيږي. د لار-وخت-قانون دی:

$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

د $g = 10 \frac{m}{s^2}$ (را ټولي (گردي شوې) سره.

(الف) د کوم وخت وروسته د تيرې چټکتيا (سرعت) صفر دی؟
(ب) خورا جگ د ميل جگوالی وشميرئ.



(۳) تابع د يوه خوزبنت د لار-وخت-دیاگرام بڼايي.

(الف) د ورځني ژوند څخه يوه بيلگه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټيک وي.

د منحنی تلنه د $t > 3$ لپاره فزيکي څه مفهوم لري؟

(ب) د خوزبنت لپاره د لار-وخت-دیاگرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ

(پ) د اړونده بيړې - وخت-دیاگرام وکارئ او دا تشریح کړئ.

يوه منفي چټکتيا (سرعت) څه معنا لري؟

(۴) يو تن (جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي، چې د t وخت کې $S(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1; 2; 3$ کې لحظوي چټکتيا (سرعت) وښايئ.

۴ - حل:

لحظوي جټکتیا د سملاسي تغیر ارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1 + \Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

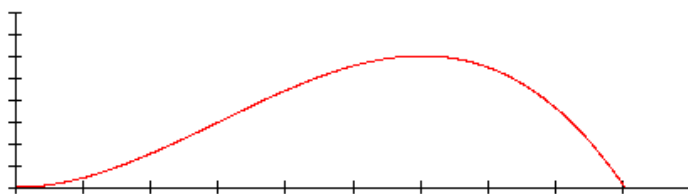
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$
 $\Delta x \rightarrow 0$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$

تمرین: لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$; $x > 0$ تابع گراف او په ورنږدې توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنی (کزه) ښايي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف: توپ کوم خورا جگ (ماکسیمال) جگوالی لري او د و هلتيکي (شوت شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ و هلتيکي (شوت شوي ټکي) څخه توپ څومره لري بيرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ و هني ځای څخه ۹ متره لري او ۲ متره جگ دی. ايا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین (د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لږهوالي دا ازاده شوت وهل شوی دی؟

تانجنت او نورمال.

تمرينونه III :

د $f(x)$ گراف تانجنت په ټکي $(x_0, f(x_0))$ کې:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \quad -1$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \quad -2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \quad -3$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \quad -4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \quad -5$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \quad -6$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \quad -7$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \quad -8$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \quad -9$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \quad -10$$

حلونه

تمرینونه مشتقشمېرنه III

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې:

لومړۍ:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|2) \quad t(x) = -3x + 8$$

دویم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0\left(2 \mid \frac{11}{4} = 2,75\right) \quad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

دریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \Rightarrow P_0(-1 \mid 7) \quad t(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

څلورم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 \mid 2) \quad t(x) = 9x - 7$$

پنځم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \mid \frac{1}{2} = 0,5\right) \quad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$

شپږم:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{8}\right) \quad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

اوم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3 \mid -1) \quad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \quad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

نههم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0 \mid 4) \quad t(x) = -4x + 4$$

لسم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 \mid 0) \quad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$

مفصل حلونه 1

لومړی:

شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

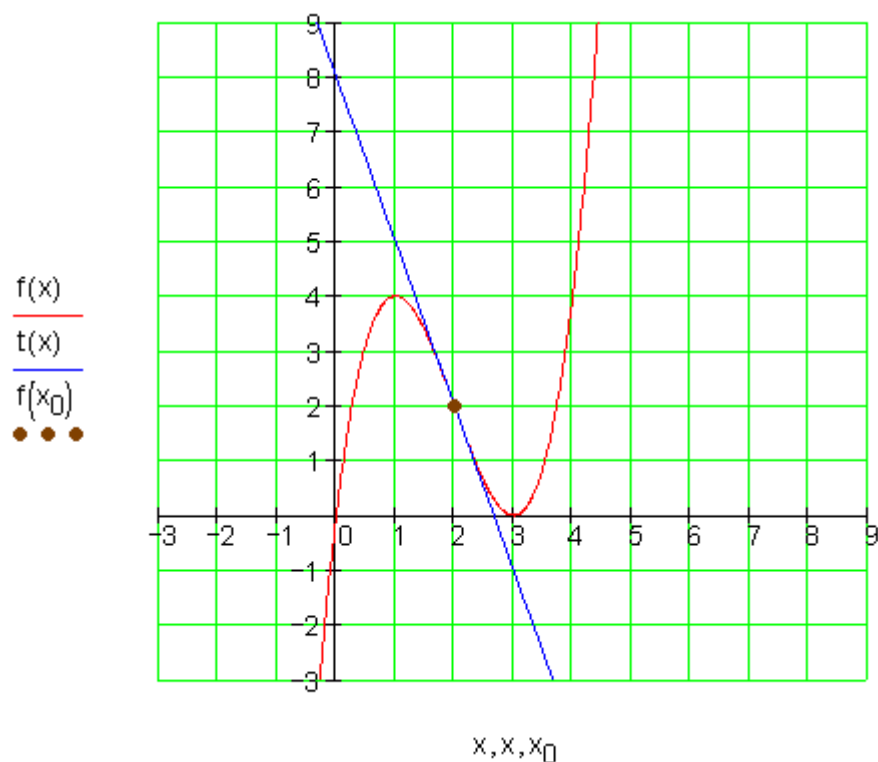
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$$

$$f(x_0) = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow P_0(2 | 2)$$

$$t(x) = -3(x - 2) + 2 = -3x + 6 + 2 = -3x + 8$$

گرافونه

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2 | 2) \quad t(x) = -3x + 8$$



دویم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{4} \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{9}{2} \cdot 2 + \frac{15}{4} = \frac{12}{4} - \frac{36}{4} + \frac{15}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{9}{4} \cdot 4 + \frac{15}{4} \cdot 2 + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} - \frac{36}{4} + \frac{30}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow$$

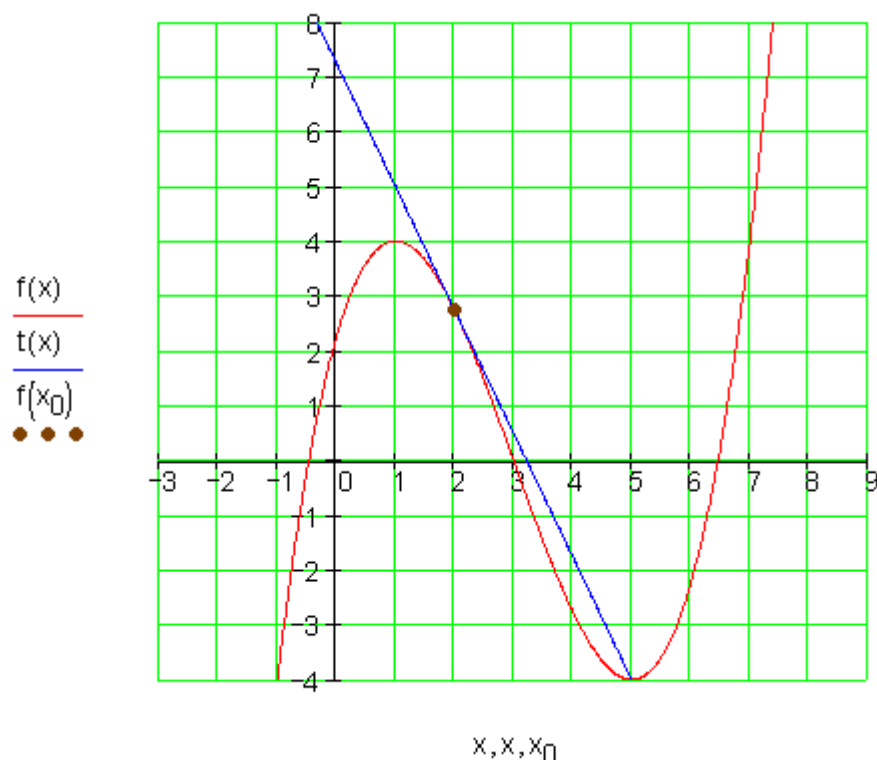
$$\Rightarrow P_0 \left(2 \mid \frac{11}{4} = 2,75 \right)$$

$$t(x) = -\frac{9}{4}(x-2) + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4} + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \quad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \left(2 \mid \frac{11}{4} = 2,75 \right) \quad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$



دریم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

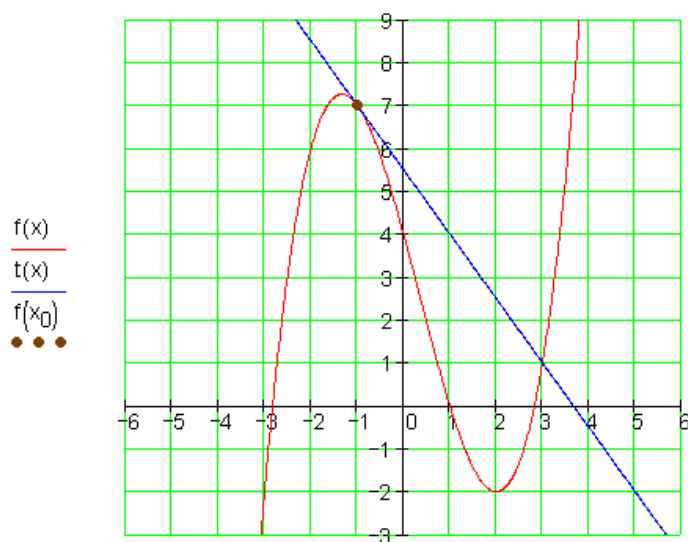
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(-1) = \frac{3}{2} + 1 - 4 = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} - \frac{8}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{2} + \frac{8}{2} = 7 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(-1|7)}}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x+1) + 7 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{14}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = -1 \Rightarrow P_0(-1|7) \quad t(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$



$$\frac{f(x)}{t(x)}$$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

• • •

 x, x, x_0

څلورم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

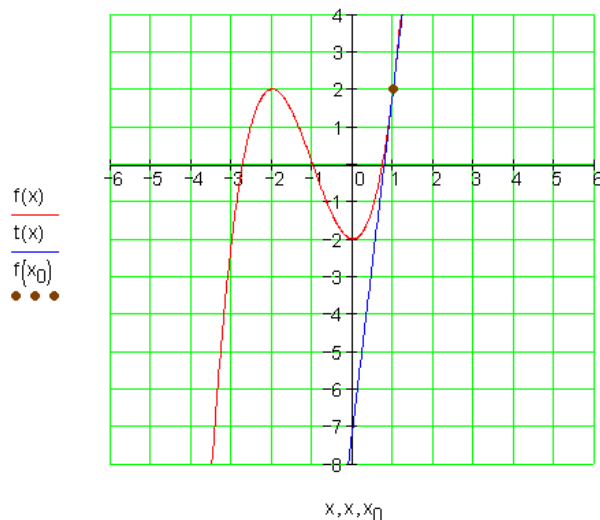
$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 + 6 = 9$$

$$f(x_0) = f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 = 1 + 3 - 2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|2)}}$$

$$t(x) = 9(x-1) + 2 = 9x - 9 + 2 = \underline{\underline{9x - 7}}$$

ګراف

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|2) \quad t(x) = 9x - 7$$



پنځم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

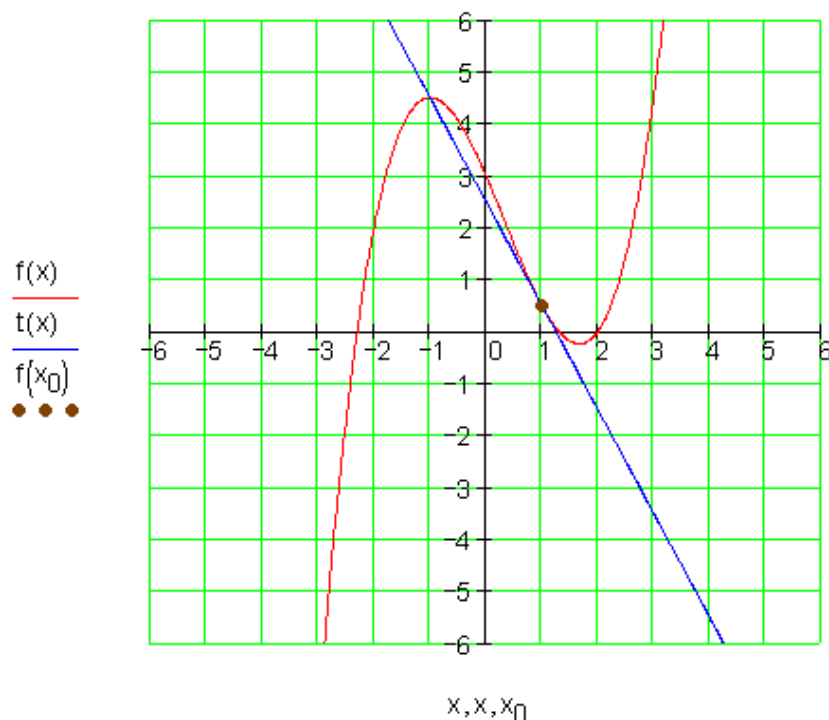
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -2$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -2(x - 1) + \frac{1}{2} = -2x + 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-2x + \frac{5}{2}}}$$

ګراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \mid \frac{1}{2} = 0,5\right) \quad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$



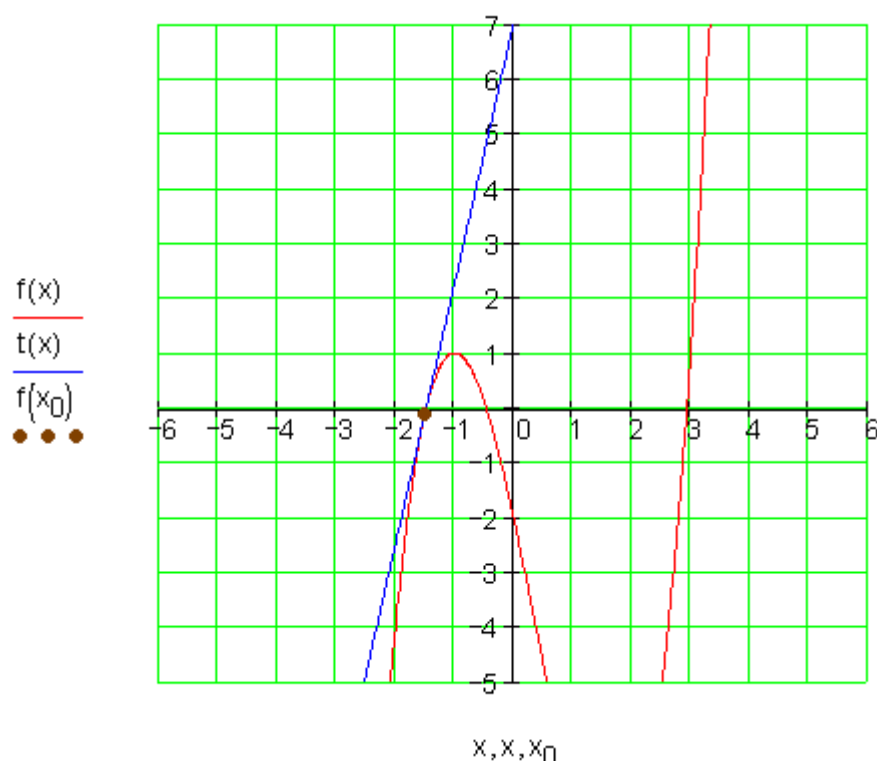
شمیرنه: شمیرنه:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
 f'(x) &= 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow f'(x_0) = f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{27}{4} + \frac{12}{4} - \frac{20}{4} = \frac{19}{4} \\
 f(x_0) &= f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{15}{2} - 2 = -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{60}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{8}\right) \\
 t(x) &= \frac{19}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{57}{8} - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{56}{8} = \frac{19}{4}x + 7
 \end{aligned}$$

کراف

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{8}\right) \quad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

:

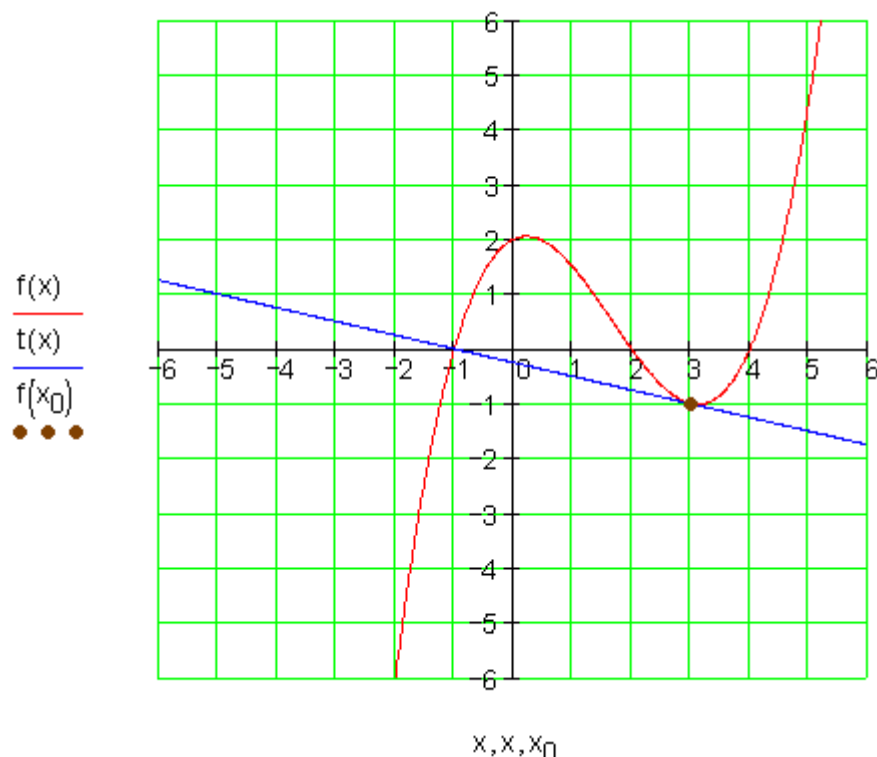


اووم: شمیرنه:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
 f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(3) = \frac{27}{4} - \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{4} - \frac{30}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4} \\
 f(x_0) &= f(3) = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{6}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{4}{4} - 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(3|-1)}} \\
 t(x) &= -\frac{1}{4}(x-3) - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}}
 \end{aligned}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \quad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3|-1) \quad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$



اتم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

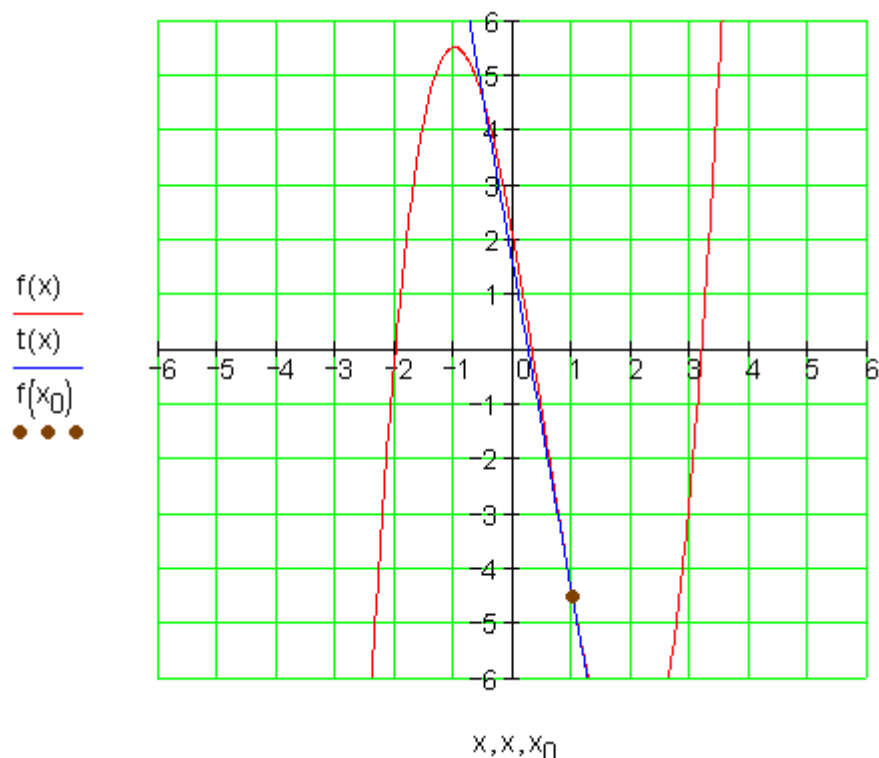
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$$

$$f(x_0) = f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 + 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow P_0 \left(1 \mid -\frac{9}{2} \right)$$

$$t(x) = -6(x - 1) - \frac{9}{2} = -6x + 6 - \frac{9}{2} = -6x + \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = -6x + \frac{3}{2}$$

کراف

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0 \left(1 \mid -\frac{9}{2} = -4,5 \right) \quad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$



نهم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

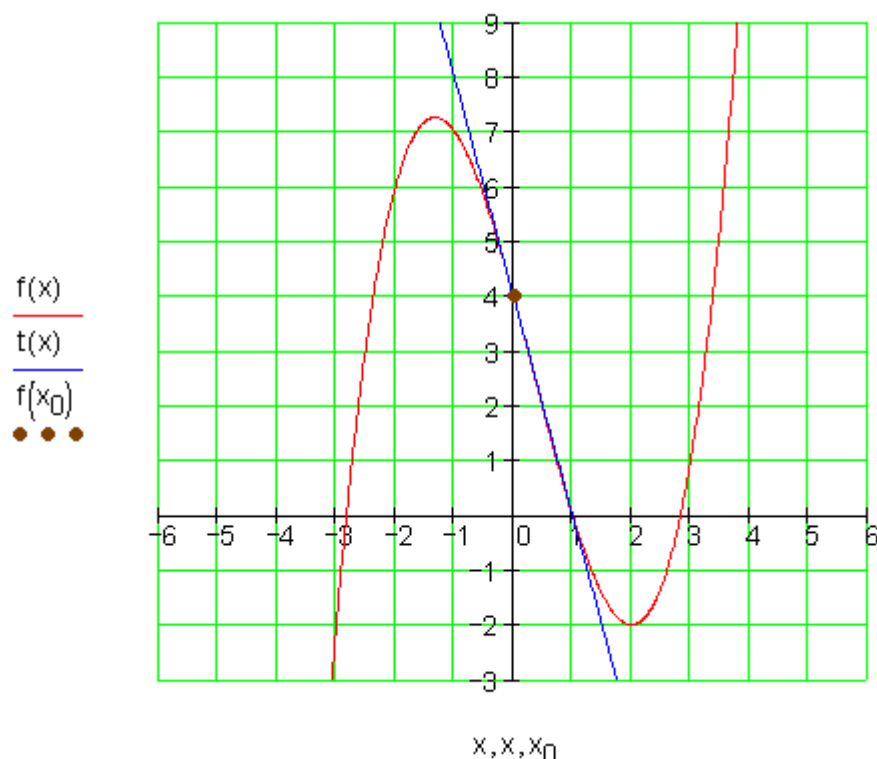
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -4$$

$$f(x_0) = f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0|4)}}$$

$$t(x) = -4(x - 0) + 4 = \underline{\underline{-4x + 4}}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0|4) \quad t(x) = -4x + 4$$



لسم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \quad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 1 - \frac{2}{3} - 4 = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$$

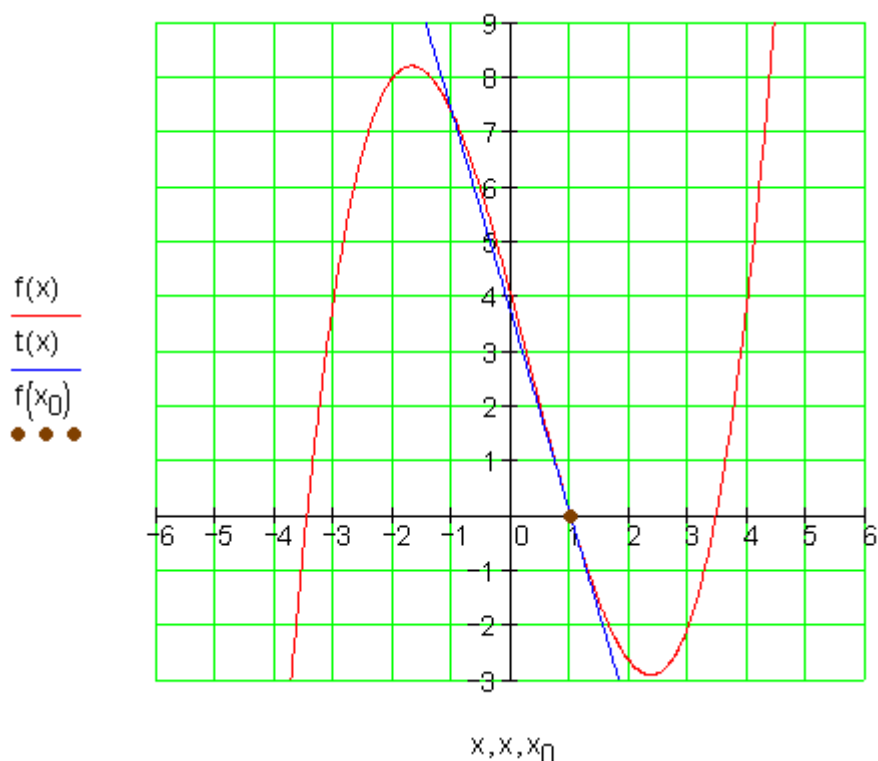
$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 4 + 4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{12}{3} + \frac{12}{3} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|0)}}$$

$$t(x) = -\frac{11}{3}(x - 1) + 0 = \underline{\underline{-\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}}}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \quad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|0) \quad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$

.



مشتق شمېرنه VII

لومړۍ: ورکړ شوي تابع: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; x \in \mathbb{R}$

الف- $f(x)$ په کوم ځای کې جگېدنه 2 لري؟

ب- د $f(x)$ جگېدنه په $x = 1,5$ ځای کې 0,25 ده.

د همدې جگېدنې سره بې له شمېرنې بل ځای ورکړی.

د خپل گومان په هکله دلیل راوړی

پ- $f(x)$ په کومو ټکو کې پروت يا افقي تانجنت لري؟ مساوات يې ورکړی.

ت - په سرچینه کې په $f(x)$ باندې تانجنت وټاکي

ټ - په $f(x)$ باندې تانجنت د $P(u | f(u))$ په ټکي کې وټاکي

ث - کومه کرښه $f(x)$ په $N(3 | 0)$ ټکي کې عمود غوڅوي؟

دویم: - $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوي

الف - کرکتریسټیکي یا خوییز ټکي و ټاکي او اړونده تانجنت یې ورکړي.

ب- په $f(x)$ باندې تانجنت په $x = 1$ او $x = -1$ د y - محوڅ غوڅوي یا قطع کوي د دې پوښتنې دلیل راوړي؟

دریم - $f(x) = -x^4 + 2x^3; x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوي

الف - $f(x)$ د x محور سره او د ټکو په هکله چې هلته افقي تانجنت لري مطالعه کړي.

ب- $t(x)$ په $f(x)$ د $P(1 | f(1))$ په ټکي تانجنت دی.

د تانجنت مساوات وټاکي. د $t(x)$ غوڅتکي د $f(x)$ سره وټاکي.

پ - په کومو ټکو کې $f(x)$ د $1/8$ جگیدني سره عمود لري؟ د عمود مساوات ورکړي.

څلور - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x; x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوي ده.

الف- $f(x)$ په کرښیزو ضریبونو تجزیه کړي او گراف یې وکاري.

ب - په $f(x)$ باندې تانجنتونو مساوات په $x = 2$ کې وټاکي او دا تانجنت د الف په وضعیه قیمتسیستم کې رسم کړي..

پ - ټکي $P(u | f(u))$ داسې وټاکي، چې په P د $f(x)$ په تانجنت د $f(x)$ په سرچیني تانجنت سره غبرگ یعنې موازي وي.

ت - په کوم ځای کې $f(x)$ خورا کوچنی تانجنت لری؟

پنځم- یوه تیغه د $v_0 = 7 \text{ m/s}$ پیل جکتیا یا سرعت سره عمود پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت دیاگرام دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ سره.

الف- په کوم وخت t کې د تیغې جگوالی صفر دی؟

ب- د جگپښې ماکسیمال جگوالی وشمېری.

حلونه

مشتقشمیرنه VII

نتیجې او مفصل حلونه

مفصل حلونه:

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad \text{الف -}$$

جگوالی په x_0 کې ارزښت 2 لری

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{x_{01/2} = \pm 3}$$

$F(x)$ تابع د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځایونو کې جگپښه 2 لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محور سیومتري دی.

له $f'(1,5)=0,25$ څخه $f'(-0,25)=-0,25$ لاس ته راځي.

$$f(x) \text{ د } x_{1/2} = \pm 1,5 \text{ په ځای کې } -0,25 \text{ جگیدنه لري.}$$

په $f(x)$ یو پروت یا افقي تانجنت په ټکو کې پروت دی، چې هلته جگوالی صفر وي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right); Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

تانجنتونه کرښې دي، د x - محور سره غبرګې ځلي.

$$t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad \text{ت -}$$

په سرچینه کې د تانجنت مساوات: $x_0 = 0$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1; f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

ټ -

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات د $P(u;f(u))$ په ټکي کې.

$$t(x) = f'(u)(x-u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1; f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3}}$$

ث – کرښه، چې $f(x)$ په $N(3 | 0)$ کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

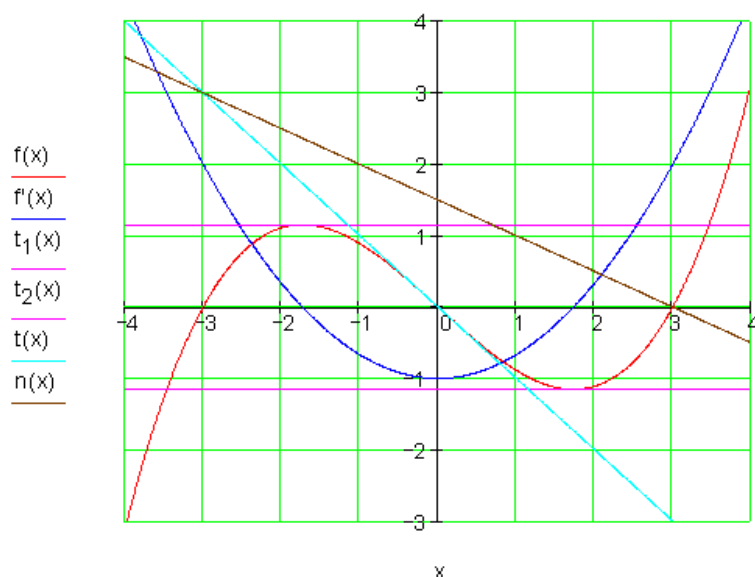
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1; N(3 | 0) \Rightarrow x_0 = 3$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2}; f(x_0) = f(3) = 0$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{2}(x-3) + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

Die Graphen: گراف :



دویم: الف- کرکتریسټیک یا خوي ټاکونکي ټکي صفرخایونه دي، چې په دې ټکو کې د تانجنټونو جگوالی دی، په هغو یا کومو کې چې پروت یا افقي تانجنټ شته وي.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1 = 0 \quad \text{صفرخایونه:}$$

بي- یا دوه مربعیز مساوات.

د په ځای ایښوونې Substitution له لارې حل یا اوبیونه:

$$x^2 = z \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 4; z_2 = -1$$

د 22 لپاره حل نه شته.

$$z_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2|0); P_{x2}(-2|0)}}$$

$$f'(2) = 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{5}}; f'(-2) = (-2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2) = -8 + 3 = \underline{\underline{-5}}$$

د پروت تانجنټ سره ټکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$P_2(0|-1); P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}|-\frac{25}{16}\right); P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}|-\frac{25}{16}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

تانجنت په $x = 1$ او $x = -1$ کې.

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$t_1(x) = f'(1)(x - 1) + f(1); t_2(x) = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

د ټکي سیومتری له امله

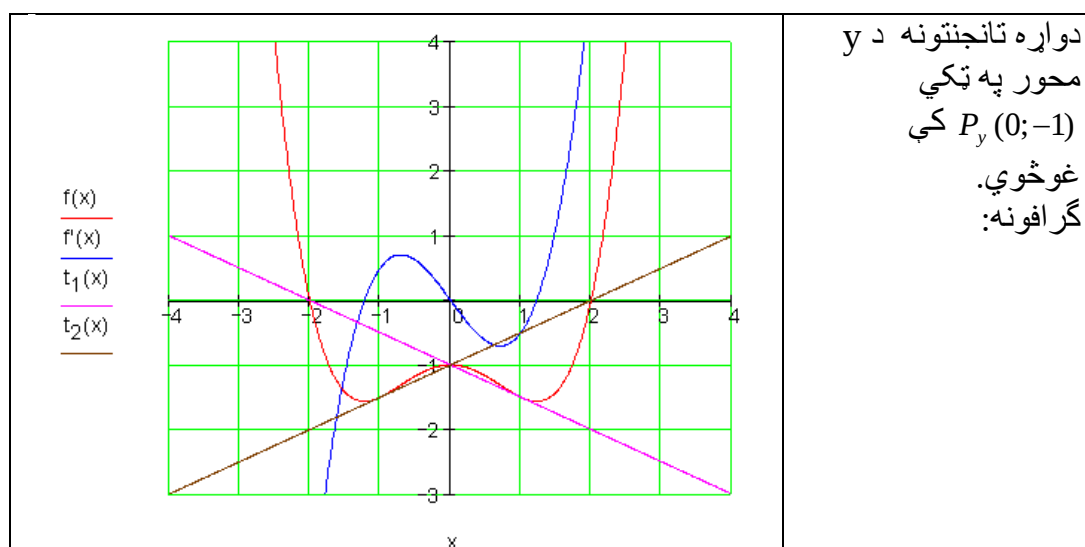
$$f'(1) = -\frac{1}{2}; f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{2}$$

د محور سیومتری له امله

$$f(1) = -\frac{3}{2}; f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2}$$

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$t_2(x) = \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x - 1$$



$$\text{دریم: الف-} \quad f(x) = -x^4 + 2x^3; f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$

$$\text{صفرخایونه:} \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0; x_4 = 2$$

$$\frac{P_{x4}(2|0)}{\quad} \text{ دریواره صفرخای او } \frac{P_{x1/2/3}(0|0)}{\quad}$$

پروت یا افقی تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} \Rightarrow \frac{P_{1/2}(0|0); P_3\left(\frac{3}{2} | \frac{27}{16}\right)}{\quad}$$

ب -

$$f(x) = -x^4 + 2x^3; f'(x) = -4x^3 + 6x^2; P(1|f(1))$$

په $f(x)$ تانجنت د $x_0 = 1$ ټکي کې د $f'(1) = 2$ او $f(1) = 1$ سره.

$$\text{له دې لاس ته راځي:} \quad t(x) = 2x - 1$$

د $t(x)$ غوڅټکی د $f(x)$ سره

$$f(x) = t(x) \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$$

د $P(1;1)$ سره ځای په ځای کونې یا ایښوونې سره ډبل صفرخایونه

$$\therefore x_{1/2} = 1 \Rightarrow (x-1)^4 = x^2 - 2x + 1$$

پولینوموېش:

$$\begin{aligned} & (-x^4 + 2x^3 - 2x + 1) : (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 1 \\ & \underline{-(-x^4 + 2x^3 - x^2)} \qquad \qquad \qquad -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3/4} = \pm 1}} \\ & \qquad \qquad \qquad x^2 - 2x + 1 \\ & \qquad \qquad \qquad \underline{-(x^2 - 2x + 1)} \end{aligned}$$

$F(-1) = -3 \Rightarrow Q(-1; -3)$ د $t(x)$ د fx سره یو بل غوڅتکی دی.

پ-

$$f(x) = -x^4 + 2x^3; f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د عمود جگوالی دی:

$$\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = -8 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = -8 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 + 8 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{د} \quad -4x^3 + 6x^2 + 8 = 0 \quad \text{یو حل دی (د ازمایښت له لارې پیدا شوی)}$$

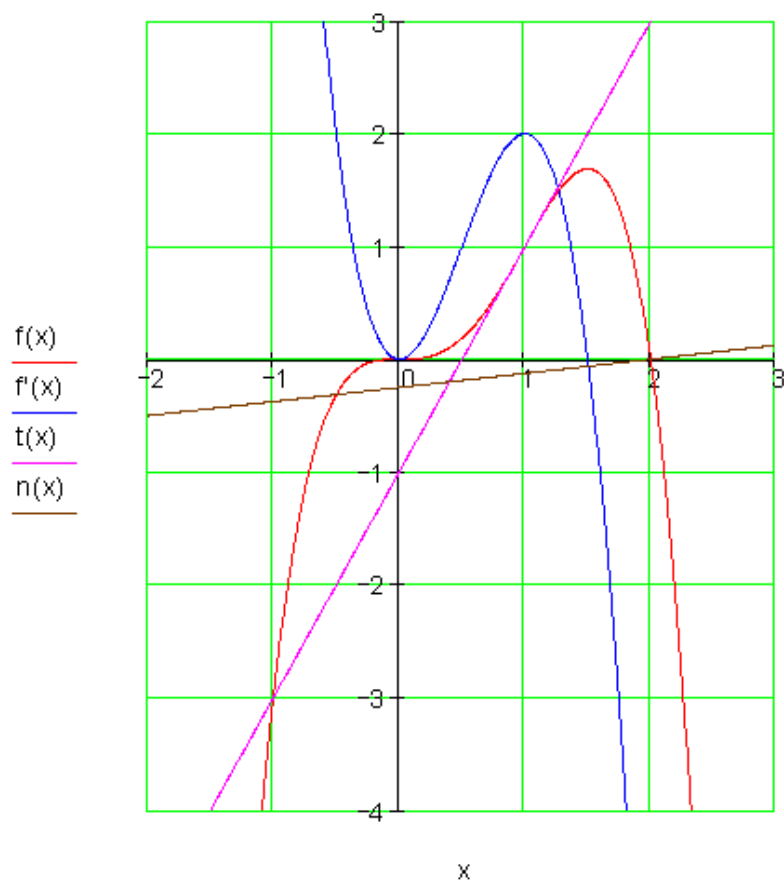
هورنر Horner

$$\begin{array}{cccc|l} -4 & 6 & 0 & 8 & -4x^2 - 2x - 4 = 0 \\ x = 2 & \underline{-8} & \underline{-4} & \underline{-8} & \Rightarrow p = \frac{1}{2}; q = 1 \Rightarrow D < 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & \end{array}$$

بل حل نه شته.

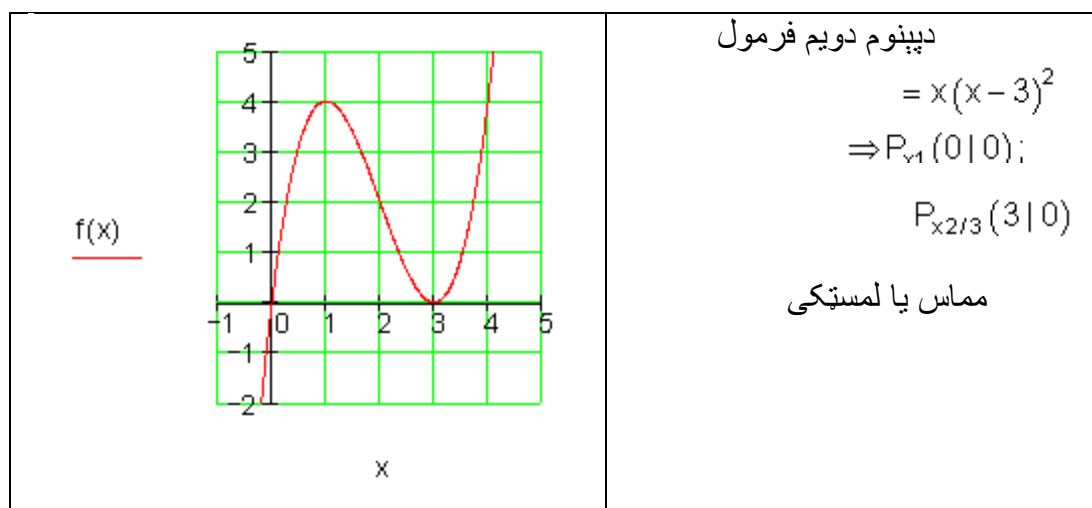
$$x = 2 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow n(x) = \frac{1}{8}(x-2) + \underbrace{f(2)}_0 \Rightarrow n(x) = \underline{\underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}}$$

کرافونه:

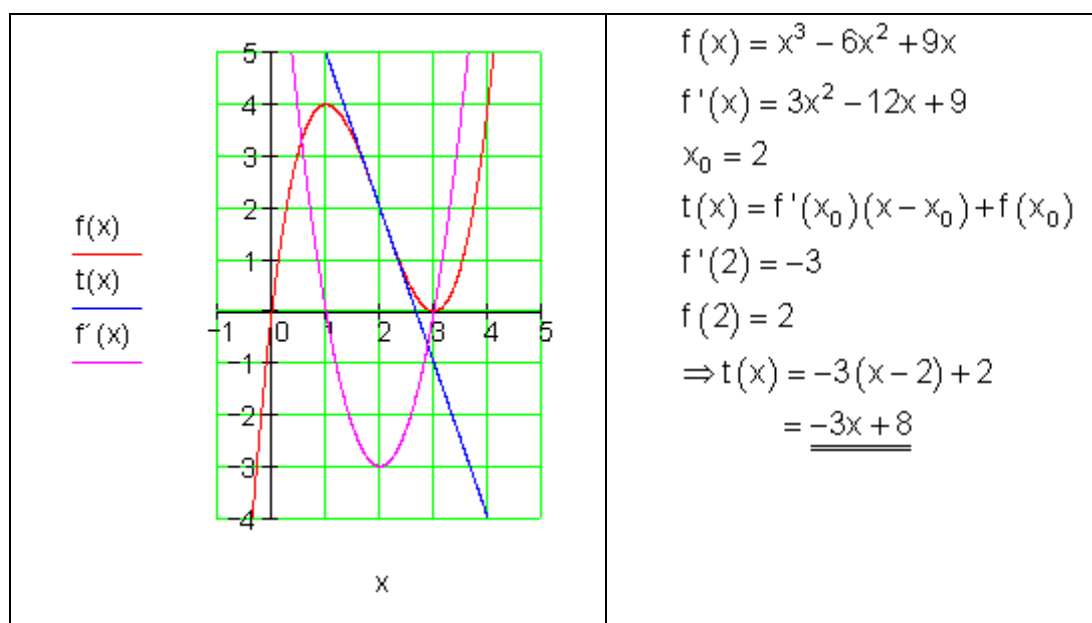


څلورم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ &= x \underbrace{(x^2 - 6x + 9)}_{\text{الف}} \end{aligned}$$



ب-



پ -

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x; f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

تانجنت په سرچینه کې $f'(0) = 9$ جگوالی لري.

دې سره غبرگ هر تانجنت همدا یا برابر جگوالی لري پس هر په $P(u; f(u))$ ټکي همز

$$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0; u_2 = 4$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|0)}}$$

$$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4|4)}}$$

ت -

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x; f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f'(x)$ د $f(x)$ جگېدنه ده، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د هغه مینیموم د هغه غوڅټکی یا د تقاطع ټکی دی، هلته $f'(x)$ یو پروت یا افقي تانجنت لري.

$$\text{شرطونه: } f''(x) = 0$$

$$F''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

د $x = 2$ په ځای کې $f(x)$ خورا کمه جگېدنه لري.

$$f(2) = 2 \Rightarrow$$

په $P(2;2)$ ځای کې $f(x)$ خورا کمه جگېدنه لري.

هغه هلته ارزښت $f(2) = -3$ لري.

پنځم:

$$\text{الف - د } s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad v_0 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{سر ه}$$

$$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0,7 \text{ s}$$

وروسته له 0,7S نتيجه $v(t)=0$ سرعت لري

ب - د ميلان يا جگپښي خورا لوي يا ماكسيمال جگوالی

كښته لور ته وتز پارابول دی، چې ككړتكي يا رآس يې د غورځوني ماكسيمال جگوالی وركوي.

د ككړتكي يا رآس شرطونه: $t = 0,7 \text{ s} \Leftrightarrow s'(t) = v(t) = 0$ د دې لپاره پرڅه الف وكورئ.

خورا لوي جگوالی: $s(0,7) = 2,45$

خورا لوي يا ماكسيمال جگوالی 2,45 m دی.

پوښتنې

مشتقشمېرنه VIII

اول - د يوې فابريکې ټول مصرف د 10 ME ماكسيمال توليد په $K(x)$ سره ښايو. د يوه ME د خرڅلاو نرخ 28 GE دی.

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

الف - د نرختابع مشتق وشمېرئ. (مشتقارزښت تابع يا پوله نرخ تابع) او گراف يې وکارئ. گراف يې تشرېح کړئ.

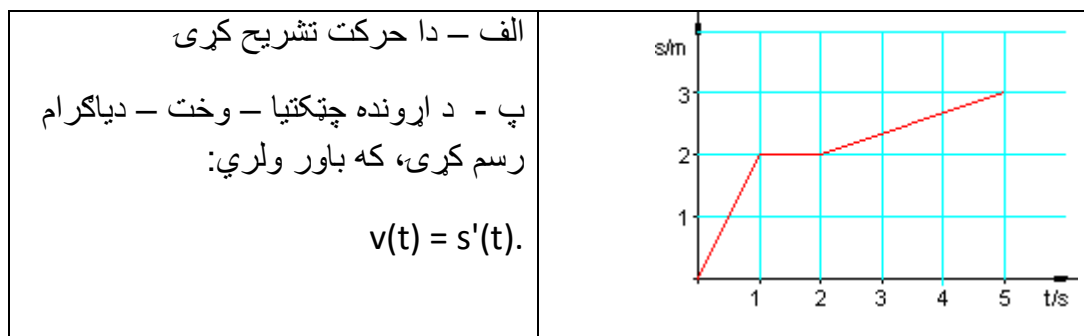
ب - مينيمال يا خورا کم د مشتقلگښت وشمېرئ.

پ - وښايئ، چې د هر توليد ډبرې يا سټ مشتقنرخ يا مشتقلگښت مثبت دی.

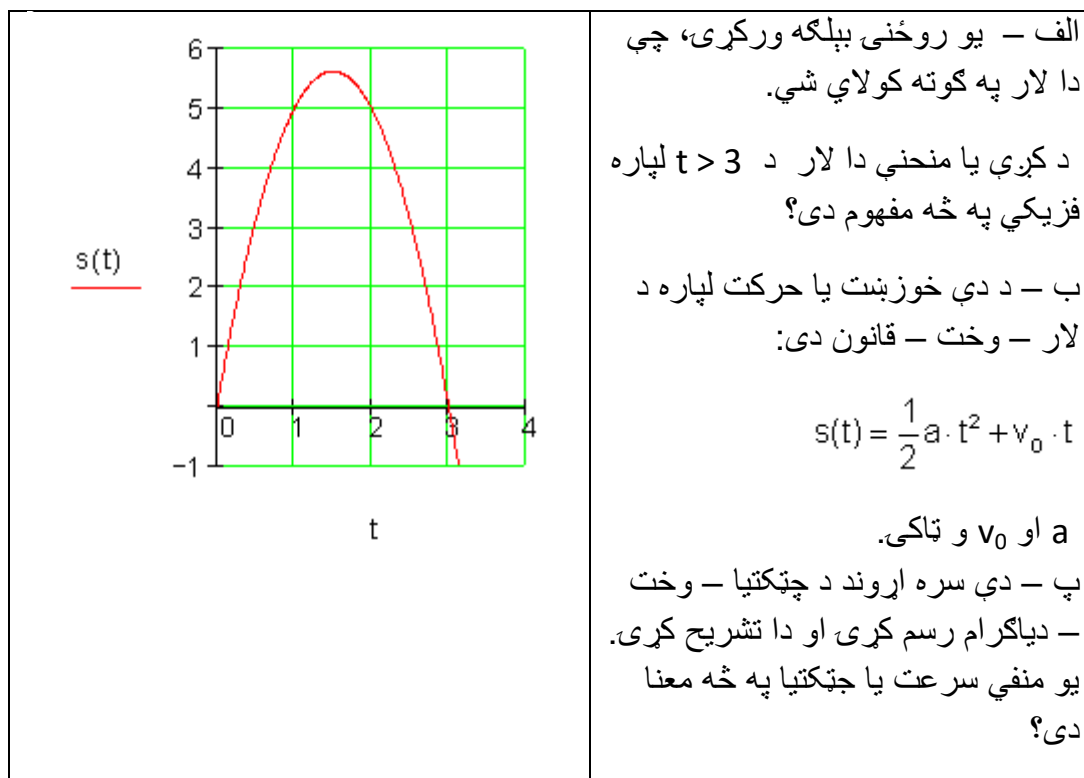
ت - په کومه ورشو کې گټې فکر وشي؟

ټ - په کومه ورشو کې ګټه زیاتیري؟

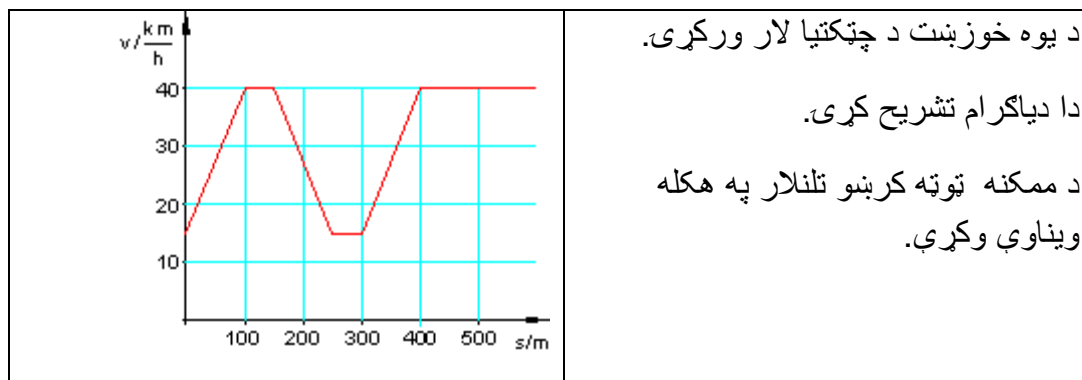
دویم - د یوه خوزنده جسم یا تن د لار - وخت - دیاګرام $s(t)$ ورکړی



دریم - تابع د یوه خوزبنت یا حرکت لار د لار - وخت دیاګرام کې ښایي.



څلورم:



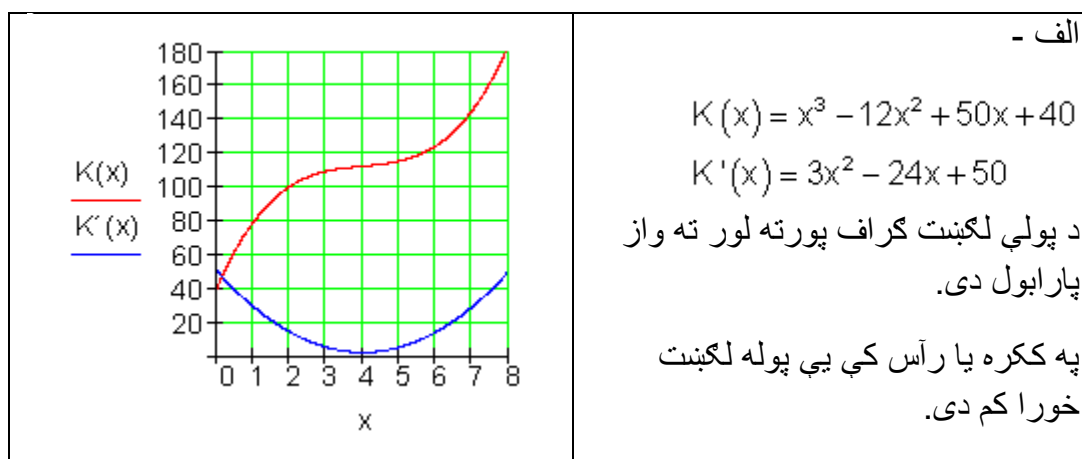
حلونه

مشتقشمیرنه VIII

مفصل ځوابونه:

لومړۍ:

الف-



ب - د خورا کم مشتقلگښت لپاره شرطونه : $K''(x) = 0$

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$$

$$K''(x) = 6x - 24$$

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$K'(4) = 2$$

له دې لاس ته راځي: د یوه 4ME (څلور ډېری یا سټ واحدونه) تولید مشتقلگښت د 2GE/ME سره خورا کم دی.

پ –

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50 \quad \text{د} \quad K'(4) = 2 \quad \text{لپاره مثبت دی.}$$

که له نیوني یا فرضیې سره سم $x \in \mathbb{R}_+$ مثبت وي، د صفرځاي د لرلو اجازه نه شته.

موږ $K'(x)$ په صفرځایونو څېړو:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$

$$\Rightarrow p = -8; q = \frac{50}{3}; D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

له دې لاس ته راځي چې حل یا اوبی نه شته.

مشتقلگښت د هر تولید لپاره مثبت دی.

څه چې د ښوولو وو.

ت – د لاس ته راوړنې (یعنې هر څه چې پلورل شوي وي) تابع: $E(x) = 28x$ (له پوښتنې کولو لاس ته راځي).

د گټې تابع: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

گټه هلته کیږي، چې د گټې تابع مثبت ارزښت لري.

ازمایو:

$G(5) = 25$; $G(4) = 0$ ، پس د $G(x)$ صفرځای $x_1 = 4$ دی.

هورنر:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 12 & -22 & -40 \\ x=4 & \underline{-4} & \underline{32} & \underline{40} \\ -1 & 8 & 10 & 0 \end{array} \Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0$$

$$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9,1}}$$

د $\underline{\underline{4 \leq x \leq 9,1}}$ لپاره فابریکه په گټه کار کوي.

ب- د کټي زیاتیدل څکه، چې $G(x)$ مثبتنه جگپښه لري او $G(x) > 0$ دی.

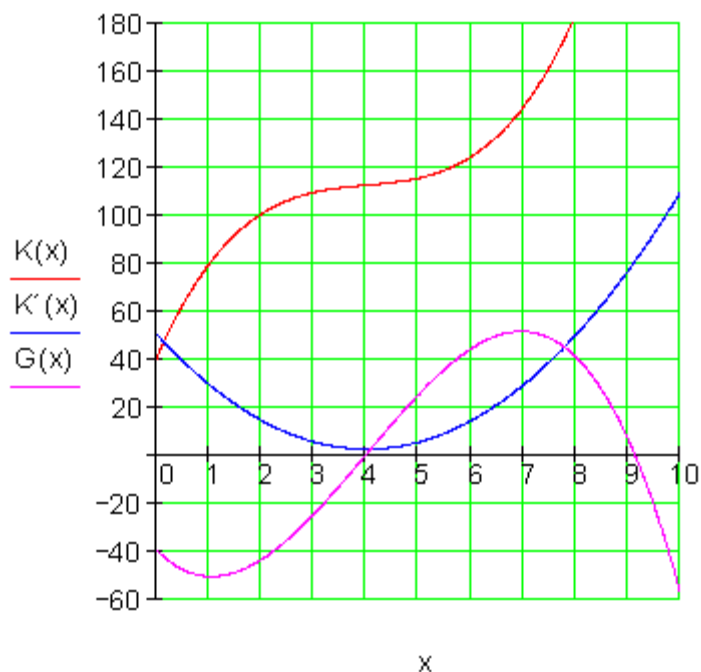
یعنې: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

$$x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}}; 4 + \sqrt{\frac{26}{3}} \right] \text{ د } G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0 \text{ لپاره یا}$$

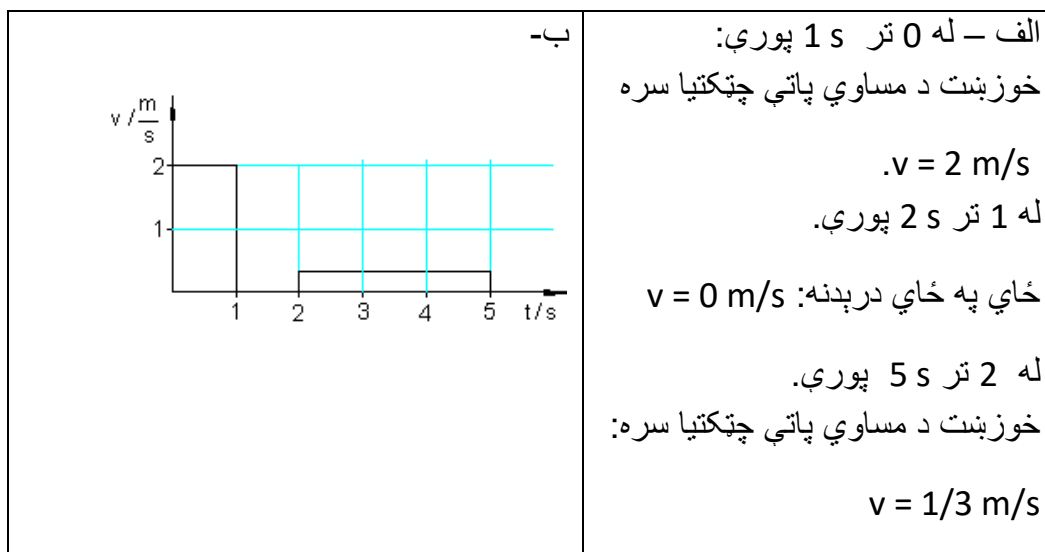
$$x \in [1,05; 6,9]$$

$$: \underline{\underline{[4; 9,1] \cap [1,05; 6,9] = [4; 6,9]}}$$

گرافونه:



دویم:



دریم: الف - یو شی عمود پورته لور ته غورځول کیږي. د $t > 3$ لپاره $s < 0$ دی، دا په دې معنا چې دا شی د غورځول ځای څخه لاندې یا کښته دی.

ب - $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ د خوزبنت مساوات.

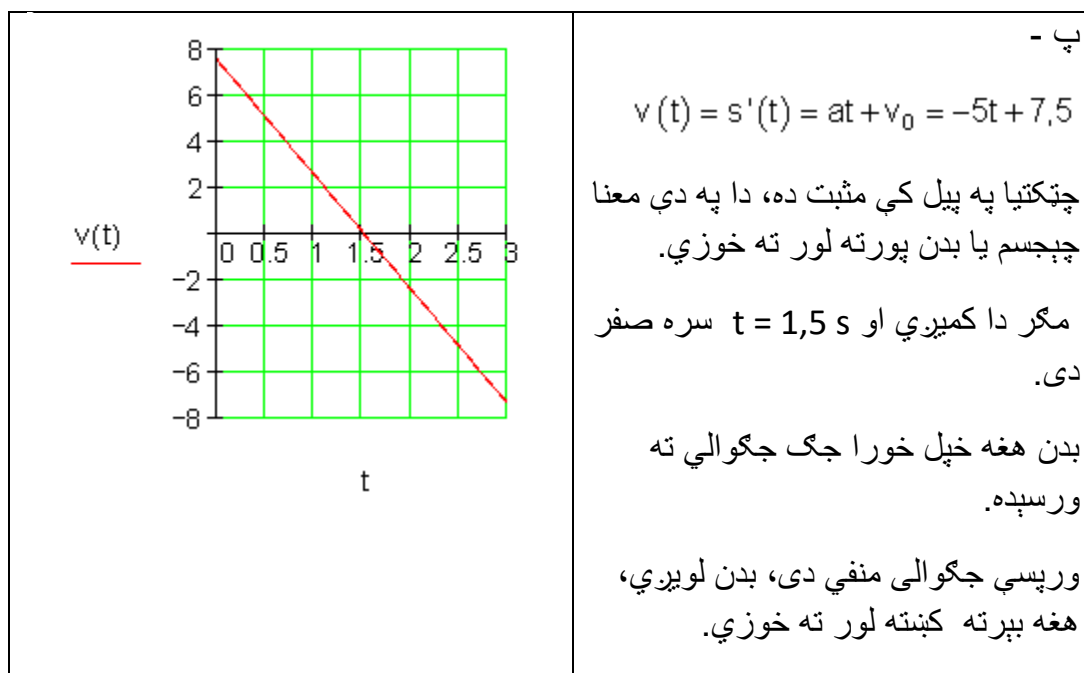
د a او v_0 د خوزبنا لپاره د گراف له دوه ټکو څخه کار اخلو.

$$P_1(1|5): s(1) = \frac{1}{2}a + v_0 = 5$$

$$P_2(3|0): s(3) = \frac{9}{2}a + 3v_0 = 0$$

$$a = -5; v_0 = 7,5$$

$a < 0$ په دې معنا، چې دا يو ځنډشوی حرکت دی.



څلورم:

0 - 100 m: چټکتيا زياتيري.

100 - 150 m: چټکتيا برابره پتيري 40 km/h.

150 - 200 m: [ټکتيا کميري.

250 - 300 m چټکتیا برابره پاتیري.. 15 km/h :

300 - 400 m چټکتیا زیاتیري.

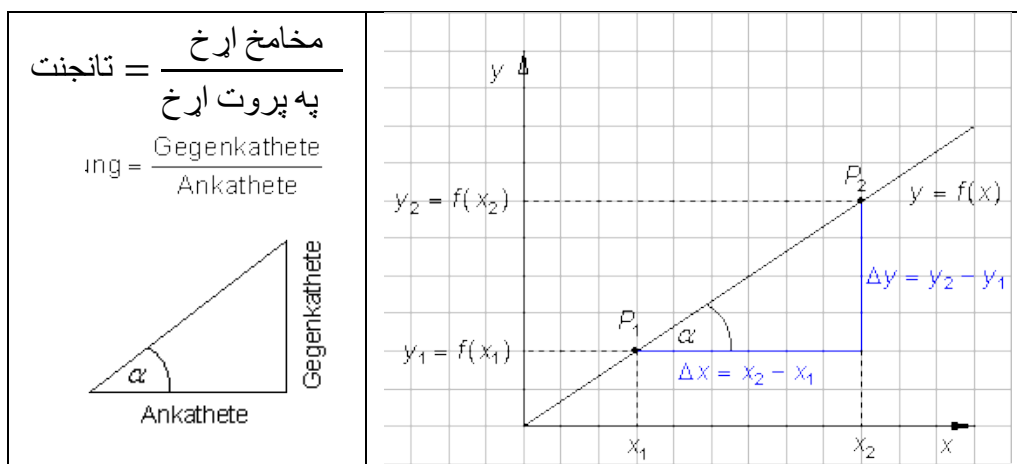
له 400 m وروسته چټکتیا ثابته پاتیري. 40 km/h.

روښانه ونه: په کښته لوېدلي سرک په تعجیل یا په بیره کیري، پسې سرک هوار دی.

ورپسې سرک مایل په غره پورته کیري چټکتیا تر 15 km/h پورې کمیري. پسې کښته لویږي، چې سرعت یا چټکتیا بیرته زیاتیري. له دې وروسته هغه خورا جگه د 40 km/h چټکتیا یا سرعت ساتلې پاتیري په دا پسې لږ پاتې کرښه باندې.

ټولګه :

د کرښې جګیدنه:



د کرښې لپاره د جګیدنې فرمول

$$\text{جګیدنه} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{یا} \quad \text{جګیدنه} = \frac{\text{مخامخ اړخ}}{\text{په پروت اړخ}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بیلگه:

ټکی $P_0(2|3)$ او $P_1(5|7)$ په کرښه پراته دي

د $x_0 = 2$ او $f(x_0) = f(2) = 3$ سره

همداسې $x_1 = 5$ او $f(x_1) = f(5) = 7$ د کرښې جگیدنه ده:

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{7 - 3}{5 - 2} = \frac{4}{3} = \underline{\underline{جگیدنه}}$$

د یوې کرښې جگیدنه

موږ لروده: $\Delta x = x_1 - x_0$

موږ دا مساوات په x_1 پسې بڼه بدلوو

$$\Delta x = x_1 - x_0 \mid + x_0 \Leftrightarrow \Delta x + x_0 = x_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = x_0 + \Delta x}}$$

اوس د جگیدنې فرمول کې لیکو:

د $f(x_1)$ په ځای $f(x_0 + \Delta x)$ د $x_1 - x_0$ په ځای Δx

له دې سره د جگیدنې فرمول دا بڼه لري:

$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \underline{\underline{جگیدنه}}$$

دا فرمول کمښت وېش دفرنسوېش بولو.

موږ د دې فرمول باوریوالی د پورته تمرین سره ازمايو.

دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه) ۱۴۱

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 2 = 3 \quad \text{او} \quad P_1(5|7) \quad x_0 = 2 \quad \text{او} \quad P_0(2|3)$$

جگیدنه =

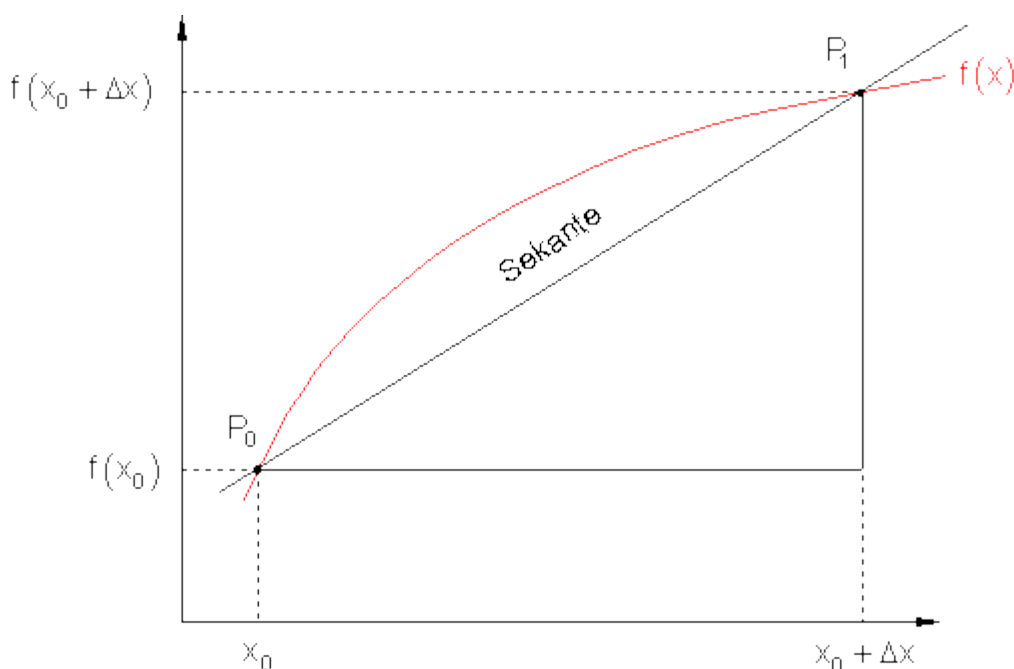
$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+3) - f(2)}{3} = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{7 - 3}{3} = \frac{4}{3}$$

د یوې کرښې باوریوالی کیدی شي هم د کمښتوېش سره وټاکل شي.

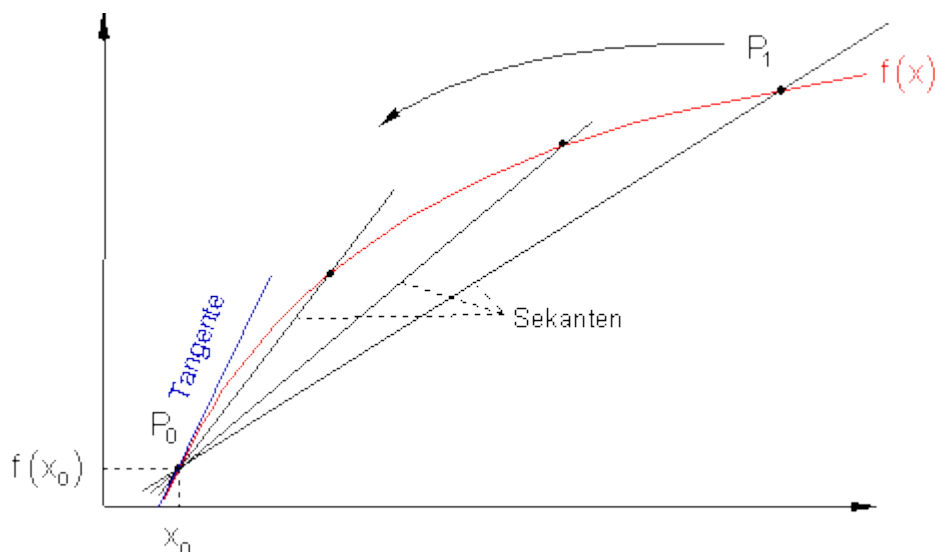
د سیکانت جگیدنه او د تانجنت جگیدنه

پراېلم: د یوه په خوښه تابع $f(x)$ په ټکي P_0 کې د گراف جگیدنه څومره لویه ده؟

د سیکانت یا ټوټهوونې جگیدنه د P_0 او P_1 ترمنځ منځنۍ جگیدنه.



د سیکانت سره څه پېښیږي، که موږ ټکی P_1 تل پسې د ټکي P_0 په لور و خوزوو یا بوزو؟



سیکانت یا غوڅوونې تل د $f(x)$ گراف ته ور نږدې کیږي.

که P_1 په P_0 ولویږي یا پریوځي، نوره نو بیا سیکانت یا غوڅوونې نه شته. دا بیا تانجنت شوی دی.

تانجنت یوه کرېنه ده، چې د $f(x)$ گراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تعریف یا پېژند له مخې د یوه د گراف جگیدنه په ټکي P_0 کې د تانجنت د جگوالي سره برابره ده.

کمېنتوېش، دفرنشلوېش، مشتق او د جگیدني تابع

د دې لپاره چې د یوه گراف $f(x)$ د x_0 په ځای کې یعنې په ټکي $(x_0 | f(x_0))$ کې وشمیرو، کیدی شي دسیکانتجگیدني فرمول لپاره دا ،، دلتا،، تل کوچنی شي، کوم چې

دفرنځيال شميرنه (مشتق يا رابيليدنه)

۱۴۳

د ټکي P_1 راکښنه د P_0 په لور راکوي يا په گوته کوي.

$$\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{د سيکانت جگيدنه (کمښتوېش)}$$

د گراف $f(x)$ جگيدنه د x_0 په ځای کې د پوله جوړونې له لارې راکوي يعنې

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{دفرنځيالوېش})$$

پوله ارزښت په دې معنا، چې x دلتا، د صفر په لور هڅيږي، يعنې په خوښه کوچنۍ کيږي، بې له دې چې ټيک صفر شي. ک د x دلتا، لپاره ارزښت صفر ايښول شوی وی، نو به و يوه نه تعريف شوي افاده او بينه لاس ته راوړي وی.

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0)}{0} = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{0} = \frac{0}{0}$$

تعريف نه

په ياد ولره: دفرنځيالوېش

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} := f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

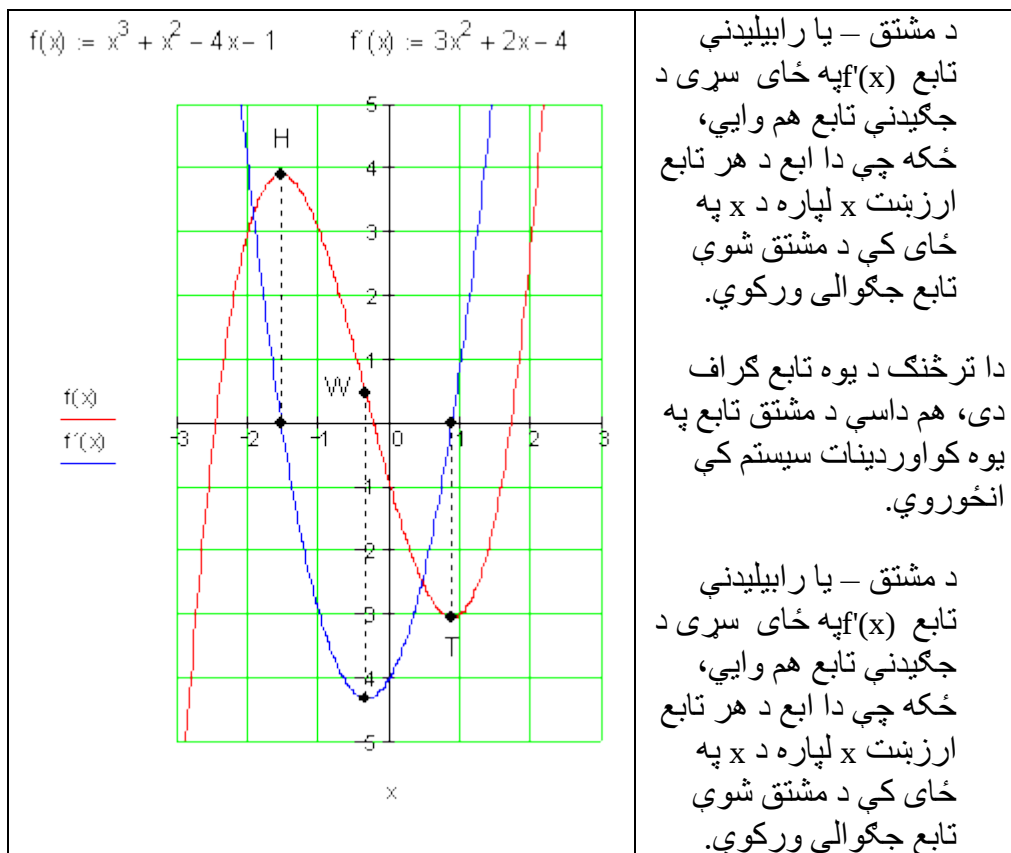
د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق يا رابيليدنه بلل کيږي او د x_0 په ځای کې د $f(x)$ جگيدنې لپاره يوه کچه ونه ده

د مشتق بيلگه:

تابع $y=f(x)=x^2$ لرو، غواړو د $x=x_0$ په ځای کې مشتق پيدا کړو

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = \underline{\underline{2x_0}}
 \end{aligned}$$

دا چې د $f(x) = x^2$ لپاره $x = x_0$ په خوښه ټاکل کیدی شي، د دې تابع لپاره باور لري: (د مشتق-یا رابیلیدني تابع) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$



دا پورته ترڅنگ د یوه تابع گراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواور دینات سیستم کې انځوروي

پام ولره:

په افراطي ځایونو (جگټکو، ټیټ ټکو) کې د مشتق تابع هر ځل ارزښت صفر لري. په اوږونټکو – یا انعطاف ټکو کې (W) د مشتق تابع یو افراطي ځای لري.

یو غریزوالي

د یو غریزوالي خوښه:

یو غریزې توابع (Monotony (یوناني: یو غریز، برابر ډوله)

جگیدونکې (متزايد)، ټیټیدونکې (متناقص) توابع (جگ-ټیټیدونکې توابع)

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینټروال کې $f(x_1) \geq f(x_2)$ وي، نو تابع په دې اینټروال کې مونوټون جگیدونکې (- ټیټیدونکې) بلل کېږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ یا $f(x_1) > f(x_2)$ کره یا ټینګه مونوټون جگیدونکې (همغریز ټیټیدونکې) بلل کېږي.

لاندې قواعد، چې له همغریزوالي په لاس راځي، د همغریزوالي حالت لپاره ګټور دي.

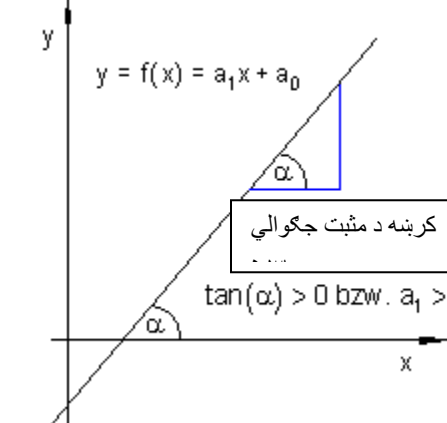
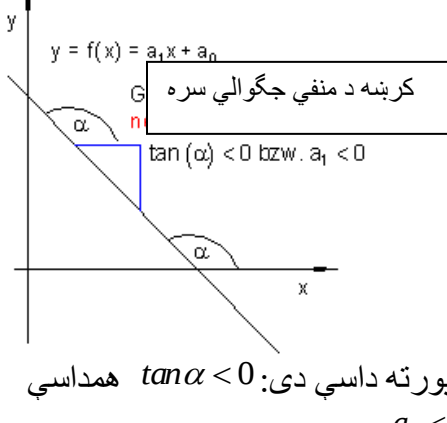
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو (ساحه) D کې مونوټون جگیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوټون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یو غریزوالی (یکواخت) Monotony جکتیټوالی، د جکتیټوالی جملې

	دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز (خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسؤل یې ثابته جگېدنه یا ثابت میل $a_1 = \tan(\alpha)$ دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د -محور ترمنځ زاویه (کونج) ده. په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره $a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan \alpha > 0$
 داپورته داسې دی: $\tan \alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$	که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې ($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جگړي. دا دا معنی لري، چې د جگېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جگړي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جگړې سره: $\tan \alpha < 0$ همداسې ($\Leftrightarrow$) $a_1 < 0$

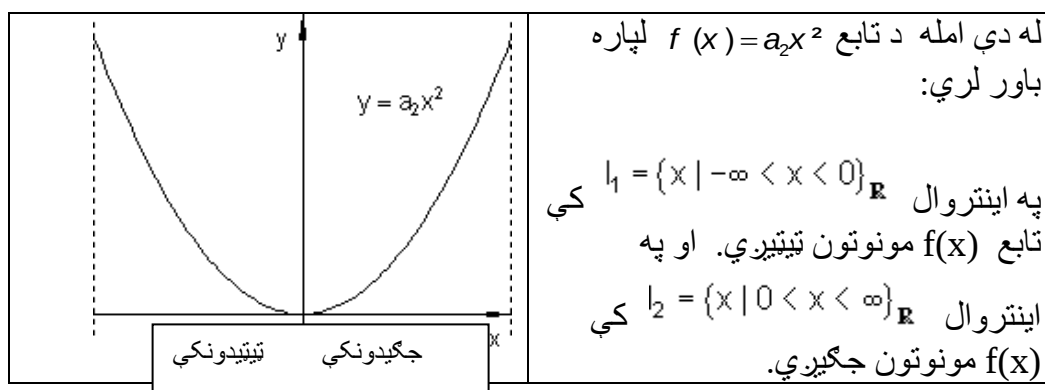
که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې

$a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټېږي یا لوړيږي. دا په دې معنی، چې د جگړدونکي x سره د تابع

ارزښت $f(x)$ کوچنی کيږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جگ-ټیټیدونکې تابع) غږیزو او له یوه مونوتون جگیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې همغږیز یا مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کېږي، چې د منحنیو تلنه راځي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت ایښول کېدی شي.



لکه د کرښې په ګراف کې، چې جگیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جگیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنی له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جگیدنه $0 <$ ← منحنی مونوتون جگيږي

د تانجنت جگیدنه $0 >$ ← منحنی مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جگیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کېږي.

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتوني قضیه په لاندې ډول فرمولوو.

قضیه: د $f(x)$ تابع دې په اینټروال I کې مشتقور وي.

۱ که د $f(x)$ تابع په اینټروال I کې همغږیز – یا مونوتون جگیدونکې وي، نو باور لري: $f''(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره

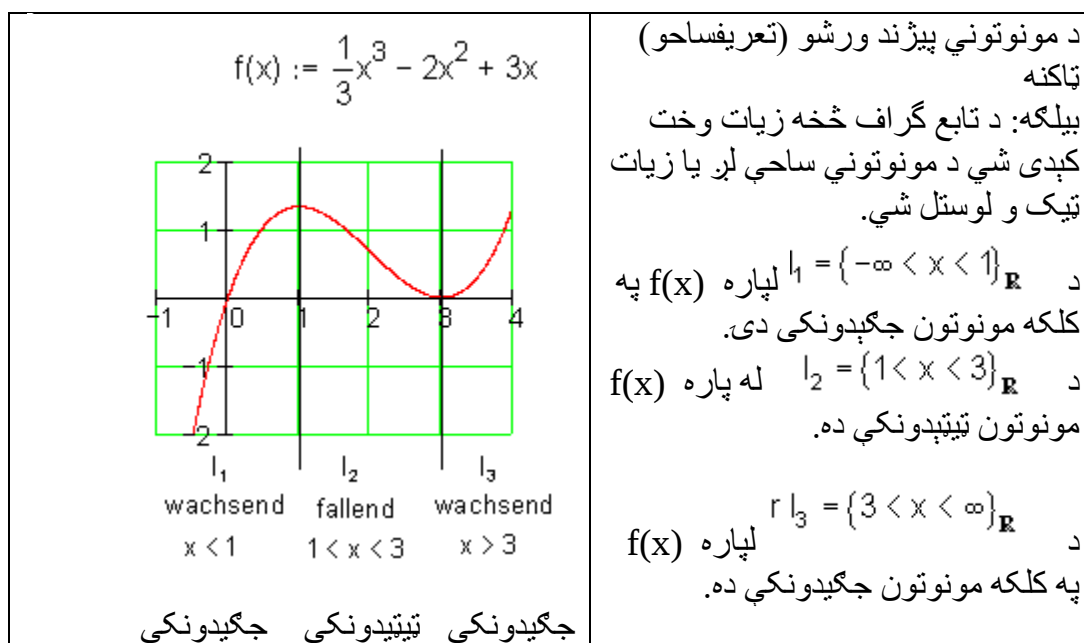
که $f(x)$ په اینتروال I کې مونوټون ټیټیډونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

۲. که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې مونوټون جگیدونکې ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې مونوټون ټیټیډونکې ده.

۳. که $f'(x) > 0$ وي، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه مونوټون جگیدونکې ده.

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه مونوټون ټیټیډونکې ده.



باور لري: $f'(x) > 0$ لاس ته راځي: کره مونوټون جگیدونکې

$f'(x) < 0$: لاس ته راځي: کره مونوتون ټيټيدونکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

لومړی پل: نا مساوات $f'(x) > 0$ همداسې نامسات $f'(x) < 0$: حل کوو

دویم پل: د $f'(x)$ توتوته کوته په کرښیزو ضربونو یا فاکتورونو

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

دریم پل: د مخنځیني جدول.

د دوه ضریبونو ضرب ټیک هلته زیاتیز یا مثبت دی، که دوره ضریبونه همغه یا برابره مخ نخشه ولري.

یو د دوه ضریبونو ضرب ټیک هلته کمیز یا منفي دی، که دواړه ضریبونه مختلفي مخنځېولري.

Bereich	$x = 1$		$x = 3$	
	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$	
$x - 1$	-	+	+	
$x - 3$	-	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend	

$f(x)$ جگیدونکی ټيټيدونکی جگیدونکی کره یو غریز

بیلگه: دا لاندې گراف لرو

د مشتق شمیرنې له لارې موږ هڅیږو، چې دا ستونځې حل (اوبې کړو) کړو.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د افراطي ټکي (ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د

$f''(x)$ مخ نښه $(+ , -)$ ، په دې پریکړه کوي چې ایا یو ټیټ ټکی (اصغري ټکی) او که جگ ټکی (اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادونې اړینې یا ضرور دي:

۱- دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته

د $y = f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوي وي، د غاړو (څنډو) او د هغو ځایونو له پاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق نه وي، ځانگړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲- شرایط چې $f'(x) = 0$ وي (مشتقو تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط).

۳- شرایط $f'(x) = 0$ او $f''(x) \neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کیدونکی دی او نه ضروري

بیلگه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع گراف وکارئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل:

گراف: گراف دې د گرانو لوستونکو د کور کار وي؟

د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x=0$ په ځای کې خورا ټیټ ټکی (اصغري- لري).

د انحراف ټکي له پاره اړيکین شرطونه:

۱ - د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفر ځای لري، یعنې دلته یو بحراني ټکي پروت دی.

۲ - د تابع دویم مشتق: $f''(x) = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکي مخ ته لرو.

بیلگه: د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټیټ ټکي لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شني څخه لاندې پېژند ته راځو:

پېژند: د $x = x_0$ په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوي تابع یو نسبي جگټکی په همدې ډل نسبي ټیټ ټکي لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) > f(x_0)$$

جمله : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتقور تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (یادونه ۲ دې مقایسه شي): چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې یواکستريموم ولري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتقور تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له بنی لور انحنا یا کوږوالی اوله کین لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کې د مشتقور تابع f دویم مشتق $f'' > 0$ وي، نو په دې اینتروال کې گراف کین کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع گراف بنی کوږ یا بنی انحنا لري.

دوه څیرې (د لاندې بېلگې څیره و باسی ؟-)

بیلگه:

ټول گونگتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو (ساحه) کې کینکورډی (کینه انحنای لري) (ننوتی یا مقعر دی) او په کومه ورشو کې بنی کورډی (بنی انحنای لري) (محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > 2/3 \Rightarrow 6x - 4 > 0$ لپاره کین کوروال (کینه انحنای (ننوتی یا مقعر)

د $x < 2/3 \Rightarrow 6x - 4 < 0$ لپاره بنی کوروالی (بنی انحنای (وتلی یا محدب))

بیلگه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ گراف یو های پارربول دی. د های پارربول کومه ځانگه کینه کړه ده یا کینه انحنای لري (مقعر)، او کومه یوه یی بنی کوروالی - یا بنی انحنای لري (محدب)؟

$$\text{دویم مشتق: } f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}; f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارربول ځانگه بنی کوروالی یا انحنای لري (وتلی یا محدب).

د لپاره $x > -2$ د مخرج او همداسې ټول کسر (مات) مثبت دی.

های بارابول کینکور دی یا کینه انحنای لری (ننوتی یا مقعر).

بېلگه :

د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوروالی (انحنای) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & g'(x) &= \frac{\sqrt{x^3}}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} & g'' &= \frac{3}{4\sqrt{x}} \end{aligned}$$

دویم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده گراف بنی کوروالی یا انحنای لری، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده گراف کین کور دی یا کینه انحنای لری. اړونده گراف یو کین کوروالی یا کینه انحنای لری، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي (اړونټکي)

یادونه: ولې اړونټکي؟

وبه گورو، چې په دې ټکي کې گراف خپله لور اړوي، نو

موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې : که د x_0 ځای کې دا لاندې ولرو

$$f''(x) = 0$$

$f'''(x) > 0$ ، نو یو بنی-کین- انعطاف ټکی (اړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو يو کين - بنی - د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د انعطاف ټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا بنی - کين - او که کين- بنی - انعطاف ټکی (اورونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

-شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړین یا ضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مگر اورونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

-شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطاف ټکي لپاره پوره کیدونکي دي. گورو

چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځای کی یو انعطاف ټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0$$

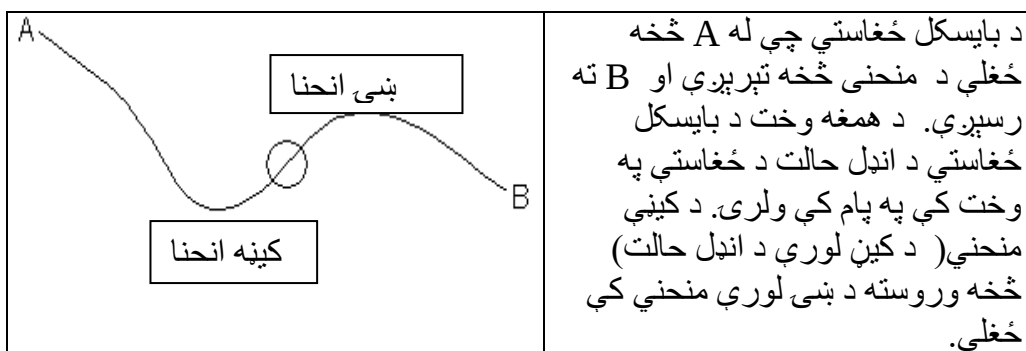
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(x) = 0$$

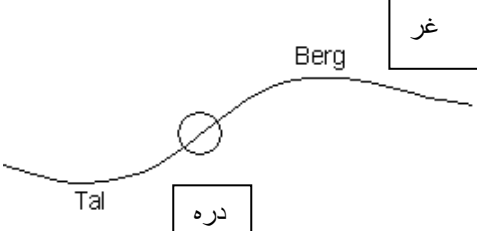
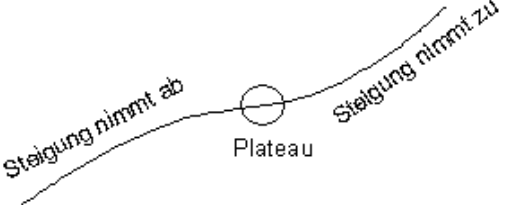
گورو چی دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفر څخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړنې او د کلمي روښانه ونې:

د دې کلمي د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:



د کینې- او بنی منحنی (کږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي (عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کینې لوري و بنی لوري ته. دا د کینې او بنی منحنی ترمنځ اوریدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کیږي.

	تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جگېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جگېږي، بیا په دې پسې جگوالی بېرته کمېږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چیرته په غونډۍ پورته صفرا ارزښت ته رسیږي. یو چیرته په لار جگېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.
 له کینې و بنې لور ته: جگېدنه کمېږي، هواره، جگېدنه زیاتېږي	د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دیاگرام څخه یې رانیسو: په غره د بایسکل ځغاستمیل یا جگېدنه لومړی کمېږي، چې له سره بېرته جگه شي. ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جگوالي سره (یوه نسبتاً هواره). دې نسبتاً هوار ځای کې د توتې کرښې جگېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوږونټکی (د انعطاف ټکی) پروت دی.

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جگوالی تابع دی، چې له گراف څخه یې جگوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوی یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همغسې ده، لکه د پیل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلي. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چې یو لړ جملې د بحراني (جگ - ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کې سره را غونډې شي.

پېژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتقور تابع $y = f(x)$ یو کین- بنی- انعطافټکی په همدې ډول بنی- کین- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگټکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتقور تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲ دې پرته شي): چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$ دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲۰ . ۱۲ : (د اوږونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرته شي): چیرته چې $f''(x) \neq 0$ وي، نو هلته نه شي کیدی چې اوږونټکي موجود وي. مگر چیرته چې $f''(x) = 0$ وي، اوږونټکی شته کېدلی شي، خو اړین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰، ۱۳:

(د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه) که په $x = x_0$ کی دریوار مشتقور تابع $y = f(x)$ لپاره وي:

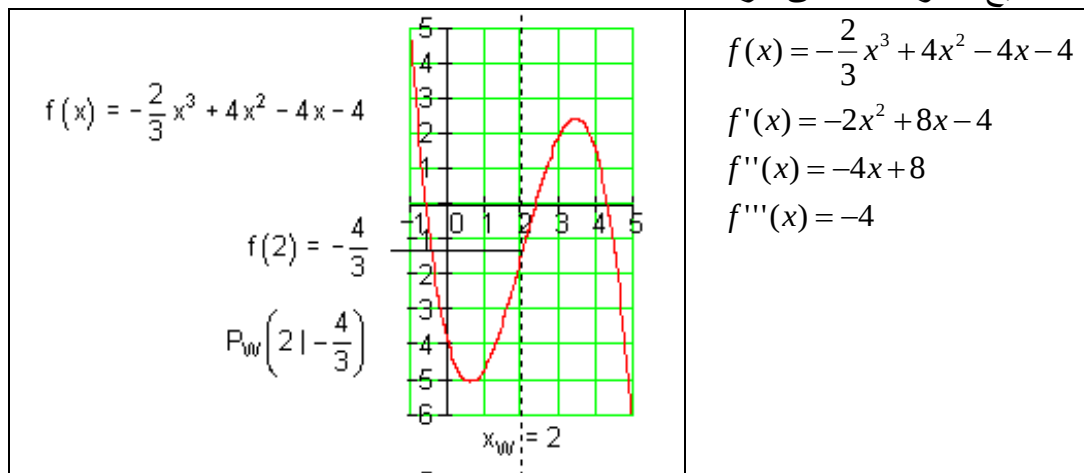
$$f''(x) = 0, \text{ او } f'''(x) \neq 0,$$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کین-بني - انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو بنی-کین-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

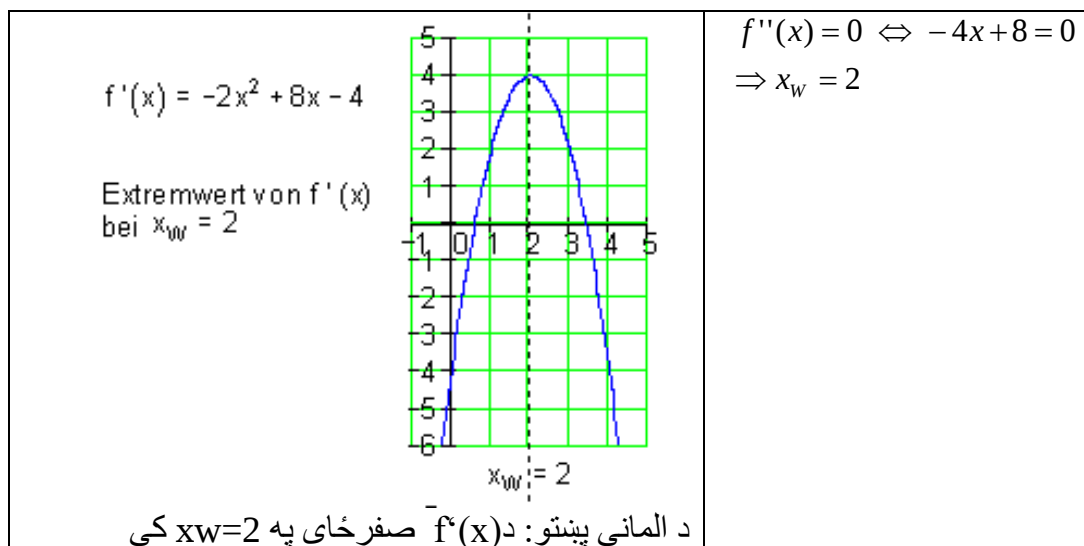
شننیزه یا تحلیلي بیلگه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف - یا اوړون ټکی په نښه کوو.

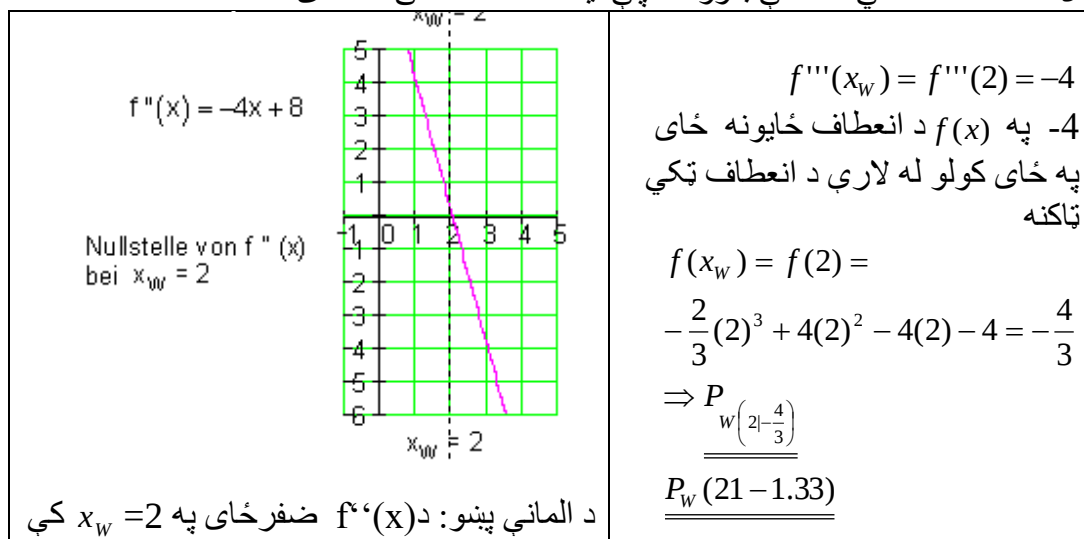
1- تابع مساوات د مشتق سره



2- دویم مشتق صفر کری.



3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چي ایا د انعطاف ټکي شته دی؟



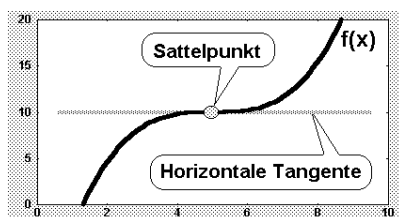
پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ گراف کړیږي.

په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کړونې (انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی، چې $f(x)$ کین لور ته کړیږي (انحنا لري) دی.

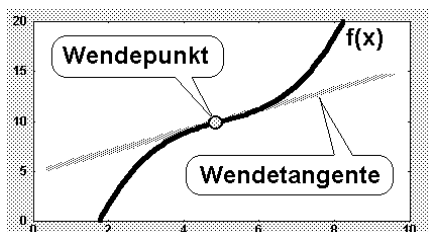
$f''(x) < 0$ په دې معني، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کړیږي (انحنا کوي)

یو زینتکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

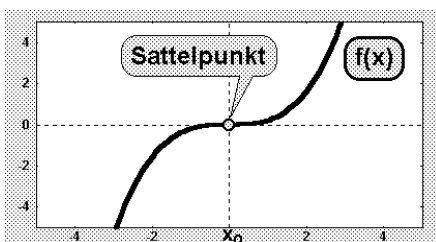


پېژند:

د زینتکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي) لاندې د انعطافاتي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافاتي چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافاتي ورکړ شوی وي. دا یو مائل (نه افقي) تانجنت لري

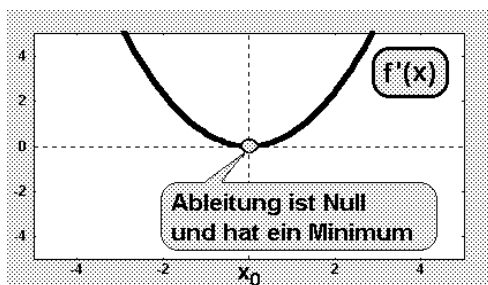


توضیح:

اوس فکر کوو، چې یو زینتکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینتکی له بني – و کینه انحناء و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کميږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگيږي.

یو زینتکی (د بني – کین – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکي (بڼی-کین-بدلون) $f'(x_0) = 0$

دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنای، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کیدونکي قضیه ومیندل شوه:

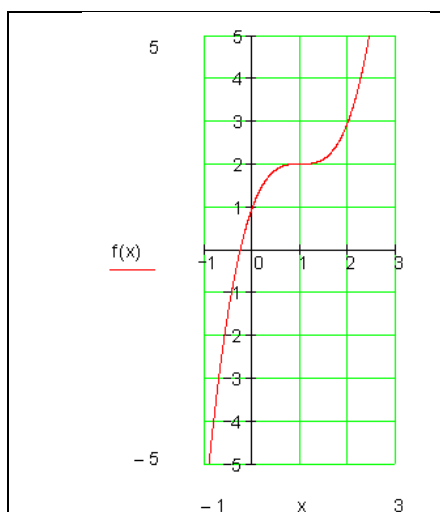
د زینتکي لپاره جمله (خوې ټاکنه) (د بڼی-کین-انعطاف سره)

الف: د x_0 ځای لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0) = 0$

ب: د x_0 په ځای کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم

مشتق صفر دی، یعنې $f''(x) = 0$ دوم مشتق مخنښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.

بل بدیل (د گرانو دوستانو وړاندیز)



زینتکي:

د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینتکي دی. دا د

انعطاف ټکی دی د صفر جگیدني سره که د کین

لور ورتزدي شو فکر کيږي، چې، نسبي جگتکي

مو مخ ته پروت دی

که څوک د بڼی لور ورتزدي شي فکر کوي، چې

یو نسبي ټیټتکي مخ ته لرو.

اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څیړو:

دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه) ۶۳

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $f''(x) = 6x - 6$ $f'''(x) = 6$	مشتق:
--	-------

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

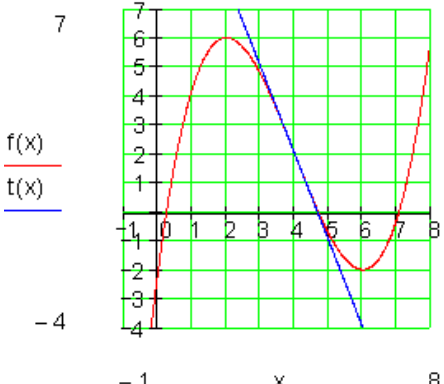
$x=1$ د سره زینتکی	$x=1$ د سره د انعطاف تکی	$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$
--------------------	-----------------------------	---

د انعطاف تکی لپاره شرایط پوره دي. دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف تکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف تکی همغه زینتکی دی.

د انعطاف تکی پیداکونه:

د تابع گراف باندې انعطاف تکی کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم

همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دگراف په یوه تکی کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کیږي.

 د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په تکی $P_w(4, 2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري: $t(x) = -3x + 14$	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$ $f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$ $f''(x_w) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$ د $f'''(x_w) = \frac{3}{2} \neq 0$ او $x_w = 4$ $f(x_w) = f(4) = 2 \Rightarrow P_w(4 2)$ مساوات لپاره باور لري. د x_w لپاره د تانجنت مساوات $t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$
--	--

	$f'(x_w) = f'(4) = -3$ د سره په لاندې ډول دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x+14}}$
--	---

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کېږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څیړنې لاندې نه نیول کېږي.

د کړې یا منحني بحث (Kurven Diskussion):

تر مخ راورڼه او د کلمې روښانه ونه:

د دې لپاره چې د یوې تابع وکارلی او تشریح کړای شو، اړین دی چې د گراف په ځنې په راوتلو یا غوره تمو او د گراف په تلنه وپوهیږو.

داسې د گراف په غوره خوییز یا کرکترېستیکي خویونو باندې د پوهیدنې او څیړنې ته د کړو یا منحنيو خبرې اترې یا بحث وایو.

د دې لپاره چې د تابع کوم غوره خوي مو له یاده ونه ووځي یا راڅخه پاتې نه شي، نو د داسې څیړنو لپاره سړی باید سیومتريک مخ ته ولاړ شي او هم تل د څیړنو او شمیرنو د لړۍ پرلپسې یا لږې ترتیب په پام کې ونیسي.

په لاندې ډول تلنلار ډېره ګټوره ګڼل شوې

لومړۍ: تعریفورشو یا -ساحه:

سړی له هر څه د مخه د فنکشن یا تابع تعریفورشو ټاکي، ځکه چې فقط د دې ورشو په دننه کې موخه ور دی چې تابع خویونو څیړنه مخ ته بوزو.

دويم: سيومتري:

سړی کره کوي، چې ايا تابع محوري- اوټکی سيومتري دی.

محورسيمتري سره باور لري: $f(-x)=f(x)$ په دواړو حالتونو کې فنکشن بايد وڅيرل شي.

د ټکي سيومري سره باورل ري: $f(-x)=-f(x)$ فقط بايد د $x \geq 0$ لپاره وڅيرل شي.

په ځنګړې توګه د ټول راشنل يا —خوښيار توابعو لپاره باور لري:

يو ټول راشنل تابع ټيک هلته محور سيمتريک دی، که د هغه ترمونه زاتيډوني يا د جمعي اعضاوي فقط د جوړه يا جفت جګ عدد يا اکسپوننت سره ولري.

يو ټول راشنل تابع ټيک هلته ټکی سيمتريک دی، که د هغه ترمونه نا جوړه يا طاق د زياتيدوني يا د جمعي غړي ولري.

دریم: افراطيت:

د نسبي افراطيت ټاکنې، دا سړی جګ — همداسې ټيټ ټکي بولي.

دا د پراته يا افقي تانجنت سره ټکي هم دي.

جګ ټکی = نسبي ماکسيموم پوره کيدونکي شرطونه: $f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) < 0$	ټيټ ټکی = نسبي مينيموم پوره کيدونکي شرطونه: $f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) > 0$
--	--

څلورم: اوړونټکی(نقطه انعطاف):

د اوړونټکي همداسې زين ټکي ټاکنه.

د اوړونټکي لپاره پوره کيدونکي شرطونه: $f''(x_w) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_w) \neq 0$

زینتکی (همغه د اس زین څخه دا نوم رانیول شوی) اوړنتکی دی د پراته تانجنت سره.

پنځم: محور غوڅتکی (د محور د تقاطع نقاط):

که د x -محور ارزښت صفر ($x=0$) د $f(x)$ په فنکشن ارزښت کې کینول شي، نو سړی د y -محور سره غوڅتکی (نقطه تقاطع) لاس ته راوړي.

د y -محور سره غوڅتکی $P_y(0|y_s) \Rightarrow f(0)$ وټاکي.

د x -محور سره غوڅتکی (صفرځای) $P_{xi}(x_i|0) \Rightarrow f(x)=0$

شپږم: گراف:

دا تراوسه د ټولو راټول شوو معلوماتو سره اوس کیدی شي په زیاتو حالتونو کې گراف انځورکړای شو.

د دې لپاره لومړی یو ارزښت جدول چمتو کړي.

دا په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه دې وشمیرل شي.

دا کیدی شي چې د جشمیرونو سره شومیرل شي او د یا د ټولگنونو یا تام اعدادو x - ارزښتونو لپاره د هورنر شیمایه مرسته.

اوم: کږوالي ځانښونه (حالت) او یو غبریزوالی.

په اوړونوټکي یا انعطافټکي x_w کې د f د گراف کږوالی تغیر خوري.

د په خوښه ټکي x_0 کې د کږوالي لپاره باور ري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ گراف کین کور (ننوتی یا مقعر؟؟) دی.

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ گراف بني کور (وتلی یا محدب) دی:

یو غبریزوالی:

۱. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x_0) \geq 0$ وي، نو $f(x)$ یو غریز جگیدونکی دی په انټروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x_0) \leq 0$ وي، نو $f(x)$ یو غریز ټیټیدونکی دی په انټروال I کې.

۲. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x_0) > 0$ وي، نو $f(x)$ کره یا په کلکه یو غریز جگیدونکی دی په انټروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x_0) < 0$ وي، نو $f(x)$ کره یا په کلکه یو غریز ټیټیدونکی دی په انټروال I کې.

لنډ: په اوږونټکي کې د یوه گراف د کږوالي حالت تغیر خوري

د یو غریزووالي حالت په افراطي ټکو کې تغیر خوري

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

د تعریفورشو په ژی ټکو کې د فنکشن څیرنه.

که تعریفورشو محدوده یا رابنده نه وي، نو دواړه پوله ارزښتونه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{او} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

دې وټاکل شي.

په ډول وینه یا افاده: د لوی x - ارزښت لپاره سری د فنکشن ارزښتونه تلنه په زیا تیز یا مثبت لور او هم په کمیزه یا منفي لور څیږي او دا پوښتنه له ځانه کوي، چې فنکشن ارزښتونه په کومه لور ځلي.

د یوه مفصل کړو بحث خبرې اترې یا بحث:

تعریفورشو:

تابعبرابرون یا تابع مسوات:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي تعريف ډېری یا $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

فنکشن د ټول حقيقي ارزښتونو لپاره تعريف دی. د ورسره بلده توگه ټول راشنل فنکشنونو دا تل باور لري، خو پرته له دې که څوک وغواړي تعريف ورشو رابنده یا محدود کړي.

سیومتری: دا چې ټول جگځونه یا اکسپوننتونه جوړه یا جفت دي، نو یو محورسیومتری مخ ده لرو،

باور لري: $f(-x) = -f(x)$ د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

گټه په دې کې ده، چې فنکشن ارزښتونه باید فقط د زیاتیزو یا مثبت x -ارزښتونو لپاره وشمیرل شي.

افراطییت:

د افراطي ټکو شمیرلو لپاره تلنلار:

سری لومړی د $f(x)$ لومړي دوه مشتقونه ټاکي.

د لومړي و مشتق صفرايينوونه د پراته تانجنت ځای راکوي.

که سری دا ارزښتونه په دویم مشتق کې کیردي، نو سری د مخ ته پراته افراطیت په هکله وینا ترلاسه کوي.

(نسبي مامسیموم یا نسبي مینیموم همداسي د افراطي ټکو نه والی).

د افراطي ځایونو x_i ارزښتونه که فنکشن مساوات کې کینبول شي افراطي ارزښتونه راکوي او له دې سره د افراطي ټکو کواوردیناتونه یا پراته ولاړ ارزښتونه څرگند دي.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \quad \text{تابع ابرون یا مساوات:}$$

$$f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x \quad \text{مشتقونه:}$$

د افراطي ارزښتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$$

x له نوکانو وباسی

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

د صفر ضرب جمله له دې لاس ته راځي $x_1 = 0$ همداسې $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ bzw. } x_3 = -2$$

د پراته تانجنت ځایونه: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$

د نسبي ماکسیموم همداسې نسبي مینیموم ښوونه:

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x_1 = x_{E1} = 0 \text{ (Hochpunkt)}$$

$$f''(x_2) = f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_2 = x_{E2} = 2 \text{ (Tiefpunkt)}$$

$$f''(x_3) = f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_3 = x_{E3} = -2 \text{ (Tiefpunkt)}$$

افراطي ارزښتونه:

د $x_{E1} = 0$ لپاره جگ ټکی

$$f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25$$

$$\Rightarrow P_{\text{Max}}\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{\text{Max}}(0 \mid -2,25)$$

د $x_{E2} = 2$ لپاره ټیټکی

$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} = -6,25$$

$$\Rightarrow P_{\text{Min1}}\left(2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{\text{Min1}}(2 \mid -6,25)$$

د $x_{E2} = -2$ لپاره ټیټکی

$$f(-2) = f(2) = -\frac{25}{4} = -6,25$$

د محور سیومتری له امله

$$\Rightarrow P_{\text{Min2}}\left(-2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{\text{Min2}}(-2 \mid -6,25)$$

اورنټکي یا د انعطاف ټکي:

د انعطاف ټکو ټاکلو لپاره د شمیرني تلنلار:

د لومړیو دوه مشتقونو برسيره سری د $f(x)$ دریم مشتق جوړوي یا نیسي.

د دویم مشتق صفرخایونه ممکنه اوړونټکي دي.

د افراطي ټکو مخ ته پرېوتني یا لرنې ازماېښت لپاره د دویم مشتق شمیرل شوی صفرخای په دریم مشتق کې ایښوول کیږي.

که لاس ته راوړنه د صفر سره برابره نه وي، نو اړونده x - ارزښتونه یو اوړنټکی په گوته کوي. ځکه چې دا اړونده فنکشن ارزښتونه د x - ارزښتونو د تابع مساوات $f(x)$ ترم کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \quad \text{تابع مساوات:}$$

$$f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x \quad \text{مشتقونه:}$$

د اوړونټکو لپاره پوره کیدونکي شرطونه:

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ bzw. } x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\boxed{x_{w1} = \sqrt{\frac{4}{3}}} \quad ; \quad \boxed{x_{w2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}} \quad \text{ممکنه اوړونټکی:}$$

په اوړونټکو ښوونه:

$$f'''(x_{w1}) = f''' \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0; \quad f'''(x_{w2}) = f''' \left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \neq 0$$

$$x_{w1} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{د لپاره اوړونټکی}$$

$$f(x_{w1}) = f \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right)^4 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right)^2 - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{w1} \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36} \right)} \text{ bzw. } P_{w1} (1,15 \mid -4,47)$$

د $x_{w2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونټکی

$$f(x_{w2}) = f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{161}{36}$$

د محور سیومتری لهامله

$$\Rightarrow \left[P_{w2} \left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36} \right) \text{ bzw. } P_{w1} (-1,15 \mid -4,47) \right]$$

پنځم: محور غوڅټکي یا نقاط تقاطع محور

الف- د y -محور سره غوڅټکي $f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \left[P_y (0 \mid -2,25) \right]$

ب- د x -محور سره غوڅټکي (صفر ځایونه)

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid \text{Substitution } x^2 = z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$$

په z کې مربع مساوات

$$\Rightarrow p = -8; q = -9; D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9; z_2 = -1 < 0$$

(حل نه شته)

$$z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -3 \quad \text{په څټ یا برعکس بدلون:}$$

په $P_{x_1}(3|0); P_{x_2}(-3|0)$ کې صفرځایونه

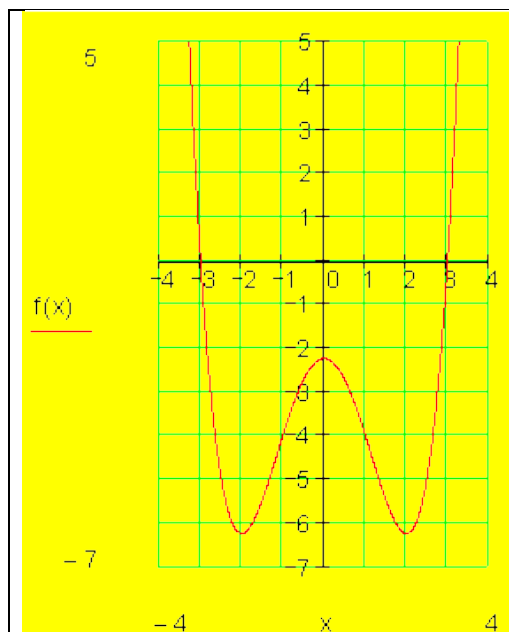
شپږم: ارزښت جدول:

ارزښت جدول د ورزیاتو ارزښتونو سره:

$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4; f(-1) = f(1) = -4$$

$$f(3,25) = \frac{1}{4} \cdot (3,25)^4 - 2 \cdot (3,25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4,52; f(-3,25) = f(3,25) \approx 4,52$$

		P_{x_2}	P_{Min2}	P_{W2}		$P_{Max} = P_y$		P_{W1}	P_{Min1}	F
x	-3,25	-3	-2	-1,15	-1	0	1	1,15	2	
f(x)	4,52	0	-6,25	-4,47	-4	-2,25	-4	-4,47	-6,25	



شپږم: ټولګه:

محور غوڅکي

اکسترم ارزښتونه:

$$P_{Min1}(2|-6,25); P_{Min2}(-2|-6,25)$$

$$P_{Max}(0|-2,25)$$

ا وړونکي

$$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}|-\frac{161}{36}\right); P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}|-\frac{161}{36}\right)$$

مور غوڅکي

$$P_y(0|-2,25); P_{x_1}(3|0); P_{x_2}(-3|0)$$

د کږوالي یو غبریزوالی

ننوتی

	او $\left[-\infty ; -\sqrt{\frac{4}{3}} \right[\text{ und } \left] \sqrt{\frac{4}{3}} ; \infty \right[$ وتلی: $\left] -\sqrt{\frac{4}{3}} ; \sqrt{\frac{4}{3}} \right[$ کره یوگریز یتیدونکی $] -\infty ; -2[\text{ und }] 0 ; 2[$ کره یوگریز جگیدونکی $] -2 ; 0[\text{ und }] 2 ; \infty[$ ژی تکی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
--	---

اووم: کړوالی حالت او یوگریزووالی:

کړوالی د $x_0 = -2$ لپاره (کین له P_{w2})

$$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0$$

د $\left[-\infty ; -\sqrt{\frac{4}{3}} \right[$ لپاره کینکړوالی (ننوتی)

د $x_0 = 0$ لپاره کړوالی (د P_{w1} او P_{w2} ترمنځ)

د $f''(0) = -4 < 0$ بنی کړوالی (وتلی) د $\left] -\sqrt{\frac{4}{3}} ; \sqrt{\frac{4}{3}} \right[$ لپاره.

د $x_0 = 2$ لپاره کړوالی (د P_{w2} بنی لور ته)

$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = x > 0$$

کین کوروالی د $[\sqrt{\frac{4}{3}}; \infty[$ لپاره

کره یا په کلکه قوغریز ټینډونکی د $[-\infty; -2]$ لپاره

کره یوغریز جگیدونکی د $[-2; 0]$ لپاره

کره یا په کلکه قوغریز ټینډونکی د $[0; 2]$ لپاره

کره یوغریز جگیدونکی د $[2; \infty]$ لپاره

اتم: د تعریفوړشو ژی ټکي:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4} \right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty}$$

یوه تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع افرطې ټکي او د انعطاف ټکي په نڅه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنای چیرته له کینې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کینې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا کړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحنی بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو. په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څیړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وړه ده. تناظر **Symetry**: باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده. د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$ د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$ په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي. یه ټولیزه توگه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو گورو چې که توان (د پولینوم درجه) یې جفت (جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان (د پولینوم درجه) طاق (ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي **Extrema**: د نسبي بحراني ټکو ټاکل (جگټکی، ټیټټکی) د جگټکی یا نسبي جگ ټکي پوره کیدونکي شرطونه: $f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$

انعطافټکی یا اوړونټکی : Inflection Point

د انعطافټکو او همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کیدونکي شرطونه: $f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$ زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره. د تابع تقاطع د x او y محورونو سره (د محورونو غوڅټکی): د x - محور سره غوڅټکی: $P_{xi}(x_i | 0) \Rightarrow (x) = 0$ د y محور سره غوڅټکی (صفرخای) ټاکي: $P_y(0 | y_s) \Rightarrow f(0)$ دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځور یږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

د کږوالي - یا انحناء حالت او یو غږیزوالی:

د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ گراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحناء لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف کینه انحناء لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف بنی انحناء لري (کونکاو)

یو غږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوټون جگړي. که

د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوټون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې کره غښتلي مونوټون

جگړدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلي مونوټون

جگړدونکی ده.

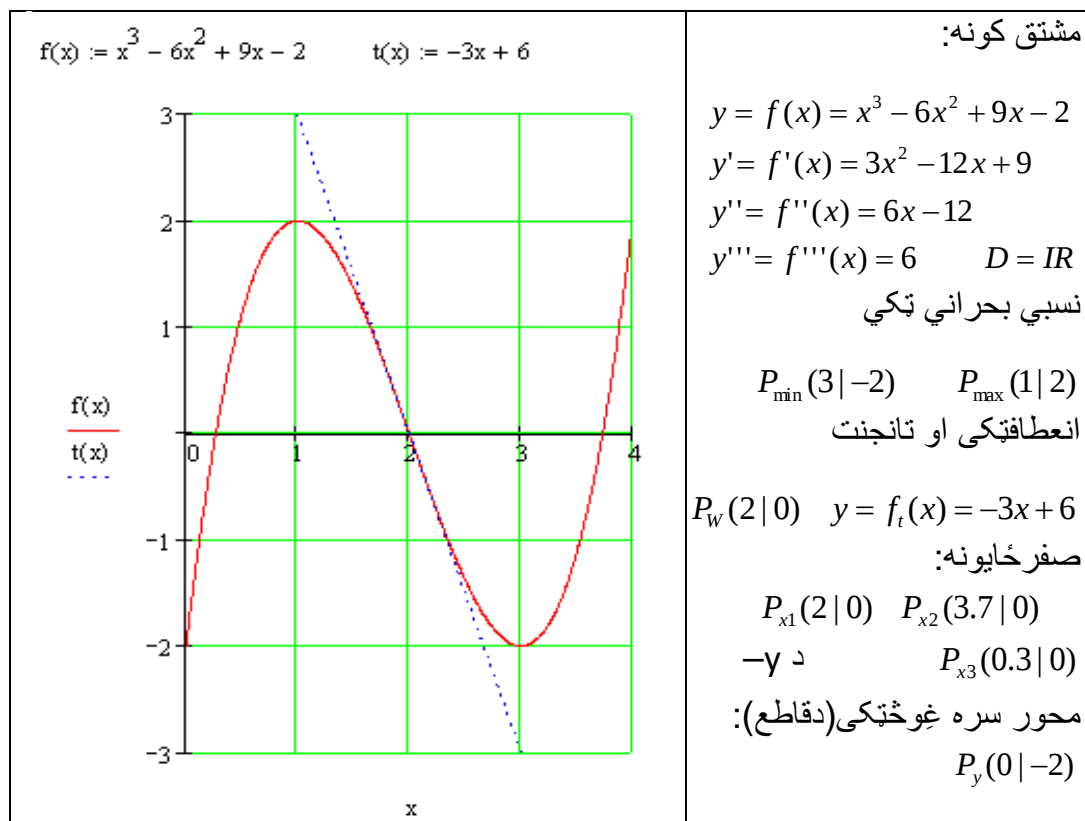
د پېژند وړشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند وړشو کې. که پېژند وړشو نامحدوده وي، نو لیمیت

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ او $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلگه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.



د تابع حالت په $x \rightarrow -\infty$ او $x \rightarrow \infty$ کې $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty$ سيومتري: نه لري	يو غريزوالی (مونوتوني ياجگ - ټيټوالی) په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ کي يو غريز جگيري. په $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کي يو غريز جگيري.
--	---

د کړوالي يا انحناء حالت:

بنی کږوالی یا انحناء (وتلی یا محدب) : $I_4 = \{x | -\infty < x < 2\}_{IR}$

کین کږوالی یا انحناء (مقعریت یا ننوتوالی) : $I_5 = \{x | 2 < x < \infty\}_{IR}$

بیلگه ۱ : لومړۍ تعریفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \quad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیومتري:

ټکی سیومتريک؛ $f(-x) = -f(x)$ ځکه چې فقط ناجوره یا طاق جگعدد

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ bzw. } x_2 = -2$$

$$f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = -2$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)}$$

$$f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}}\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)}$$

څلورم: اورنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$$

$$f'''(x_W) = f'''(0) = -2 \neq 0$$

$$f(x_W) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_W(0 \mid 0)}$$

پنځم: مخور غوڅټکی یا نقاط تقاطع محور:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{12} \text{ bzw. } x_3 = -\sqrt{12}$$

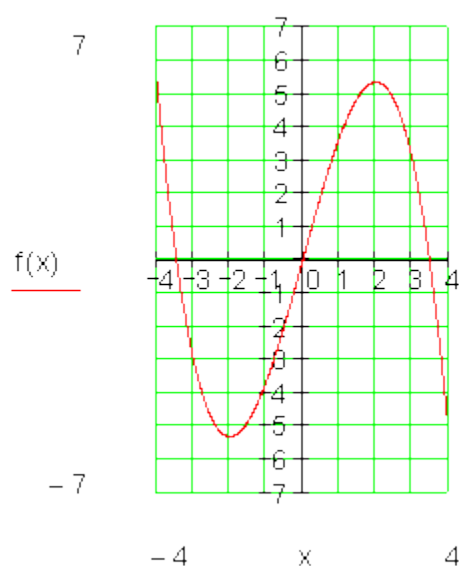
$$\boxed{P_{x1}(0|0)}; \boxed{P_{x2}(\sqrt{12}|0)}; \boxed{P_{x3}(-\sqrt{12}|0)}$$

ضفر خایونه:

شپږم: ارزښتجدول او گراف:

$$f(-4) = 5,3; f(4) = -5,3; f(-3) = -3; f(3) = 3; f(-1) = -3,7; f(1) = 3,7$$

		P_{x3}		P_{Min}		P_y P_w P_{x1}		P_{Max}		P_{x2}	
x	-4	$-\sqrt{12}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
$f(x)$	5,3	0	-3	$-5,3$	-3,7	0	3,7	5,3	3	0	$-5,3$



اووم: کږوالي حالت او یو غریزوالی:

د $x_0 = -2$ لپاره (کین له P_w) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کین کوروال (ننوتی یا کونوکس) $]-\infty; 0[$

د $x_0 = 2$ لپاره (بني له P_w) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي بني کوروالی (کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یو غویزوالی:

د $]-\infty; 0[$ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی یا لویدونکی

د $]0; -\infty[$ لپاره کره یو غریز جگیدونکی

د $]2; \infty[$ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی یا لویدونکی

اتم: د تعریفو رشو ژی شرایط:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2} \right)}_{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

بیلگه ۲:

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \quad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیمتري:

سیومتري نه شته.

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow f$$

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) =$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x \left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{4} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{3}{16}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}(0|2)}$$

$$f(x_2) = f(4) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}}(4|0)}$$

څلورم: اورنټکي یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{\text{W}} = 2$$

$$f'''(x_{\text{W}}) = f'''(2) = \frac{3}{8} \neq 0$$

$$f(x_{\text{W}}) = f(2) = 1 \Rightarrow \boxed{P_{\text{W}}(2|1)}$$

پنځم: محور غوڅتکي:

$$f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_y(0|2)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = 0$$

د P_{min} شمیرنه په دې معنا وگوري لوري صفرځای $x_1=4$. هورنر

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{16} \quad -\frac{3}{8} \quad 0 \quad 2 \\
 x = 4 \quad \frac{4}{16} \quad -\frac{1}{2} \quad -2 \\
 \hline
 \frac{1}{16} \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \Rightarrow \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0
 \end{array}$$

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 4; x_3 = -2$$

صفرخایونه: $P_{x1/2}(4|0)$; $P_{x3}(-2|0)$

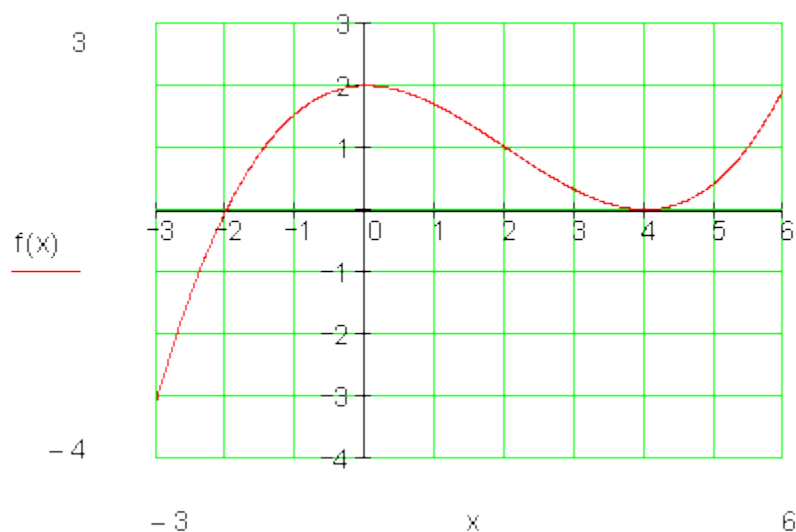
شپږم: ارزښتجدول او گراف:

ارزښتجدوال:

$$f(-3) \approx -3,06; f(-1) \approx 1,56; f(1) \approx 1,67; f(3) \approx 0,31; f(5) \approx 0,44; f(6) = 2$$

		P_{x3}		P_{Max}		P_{W}		P_{Min} $P_{x1/2}$		
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-3,06	0	1,56	2	1,67	1	0,31	0	0,44	2

گراف:



اووم: ګڼوالی (ننوتوالی یا مقعر بیت) او یو غریزووالی:

اووم: ګڼوالی حالت او یو غریزووالی:

د $x=0$ لپاره (کین له P_w) $f'(0) = -\frac{3}{4} < 0$ له دې لاس ته راځي ښی کوروال (ننوتی یا کونوکس) $]-\infty; 2[$

د $x=2$ لپاره (ښی له P_w) $f'(4) = \frac{3}{4} > 0$ له دې لاس ته راځي کین کوروالی (کونکاو یا وتلی) $]2; \infty[$

یو غریزووالی:

د $]0; \infty[$ لپاره کره یو غریز جګیدونکی

د $]0; 4[$ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی

د $]4; \infty[$ لپاره کره یو غریز جګیدونکی

اتم: د تعریفو شوی شرایط؛

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{8x} + \frac{2}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{8x} + \frac{2}{x^3} \right)}_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{1}{16} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{cases}$$

بیلګه ۳:

لومړی: تعریفو شو:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x \quad \boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R}}$$

دویم: سیمتری: سیوتنری نه شته.

دریم: افراطیت: مشتق د صرب له لاری (قانون)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x \underbrace{(x+3)^3}_v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x; v = (x+3)^3; u' = -\frac{1}{2}; v' = 3(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - \frac{3}{2}x(x+3)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \underbrace{(x+3)^2}_u \underbrace{(4x+3)}_v \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}(x+3)^2; v = 4x+3; u' = -(x+3); v' = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)} = -(x+3)(4x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 \cdot 4 = \boxed{-3(x+3)(2x+3)}$$

$$f''(x) = \underbrace{-3(x+3)}_u \underbrace{(2x+3)}_v \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -3(x+3); v = 2x+3; u' = -3; v' = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(x)} = -3(2x+3) - 3(x+3) \cdot 2 = \boxed{-(12x+27)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3; x_3 = -\frac{3}{4}$$

$$f''(x_{1/2}) = f''(-3) = 0 \Rightarrow$$

د افراطیت په هکله وینا نه شته

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = -3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = -\frac{81}{8} = -10,125 < 0$$

لاس ته راځي: د $x_3 = -\frac{3}{4}$ لپاره نسبي افراطیت

$x_{1/2} = -3$ د $f''(x)$ ډبل صفرځای دی، دا په دې معنا چې د $f''(x)$ مخنځې بدلون د

$x = -3$ په ځا کې نه شته. دا په دې معنا چې $x_{1/2} = -3$ دافراطي ځای نه دي.

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{3}{4} + 3\right)^3 = \frac{2187}{512} \approx 4,27$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}\left(-\frac{3}{4} \mid \frac{2187}{512}\right)} \text{ bzw. } P_{\text{Max}}(-0,75 \mid 4,27)$$

څلورم: اوړونټکي یا نقاط انعطاف: د لاندې الماني پښتو: اوړونټکي.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-3) = -(12 \cdot (-3) + 27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = -3$$

$$f'''(x_2) = f'''(-\frac{3}{2}) = -(12 \cdot (-\frac{3}{2}) + 27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_{w1}) = f(-3) = -\frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-3+3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{w1}(-3 \mid 0)}$$

$$f(x_{w2}) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{3}{2} + 3\right)^3 = \frac{81}{32} \approx 2,53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{w2}\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{81}{32}\right)} \text{ bzw. } P_{w2}(-1,5 \mid 2,53)$$

پنځم: محور غوڅتکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3/4} = -3$$

$$\boxed{P_{x1}(0 \mid 0)}; \boxed{P_{x2/3/4}(-3 \mid 0)} \text{ صفر ځایونه:}$$

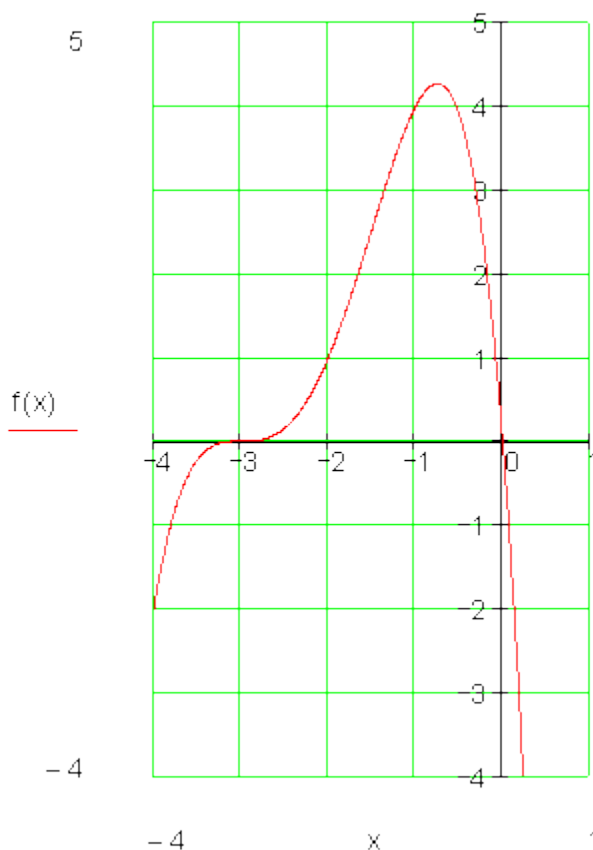
شپږم: ارزښتجدول او گراف:

ارزښتجدول:

$$f(-4) = -2; f(-2) = 1; f(-1) = 4; f(0,5) \approx -10,72$$

		P_{W1} $P_{x2/3/4}$		P_{W2}		P_{Max}	P_{x1}	
x	-4	-3	-2	-1,5	-1	-0,75	0	0,5
$f(x)$	-2	0	1	2,53	4	4,27	0	-10,72

گراف:



اووم: د انحناء حالت او یو غریزوالی:

اووم: کړوالی حالت او یو غریزوالی:

د $x_0 = -2$ لپاره (کین له P_w) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کین کړوال (ننوتی یا کونوکس) $]-\infty; 0[$

د $x_0=2$ لپاره (بني له P_w) $f'(2) < 2$ له دې لاس ته راځي بني کوروالی (کونکاو یا وتلی) $]-\infty; 0]$ یو غیزوالی:

د $]-\infty; 0]$ لپاره کره یو غیز تیتیدونکی یا لویدونکی

د $]-\infty; 0]$ لپاره کره یو غیز جگیدونکی

د $]-\infty; 0]$ لپاره کره یو غیز تیتیدونکی یا لویدونکی

کوروالی:

د $x_0 = -4$ لپاره (کین له P_{w1}) $f'(-4) = -5 < 0$

لاس ته راځي بني کوروالی (کونوکس) $]-\infty; -3]$

د $x_0 = -2$ لپاره (بني له P_{w1}) $f'(-2) = 1 > 0$

لاس ته راځي کین کوروالی (کونوکس) $]-3; -1,5]$

د $x_0 = -1$ لپاره (بني له P_{w2}) $f'(-1) = -2 < 0$

لاس ته راځي بني کوروالی (کونکاو) $]-1,5; -\infty]$

یو غیزوالی:

$]-\infty; -3]$	د مخامخ انتروال لپاره کره یو غیز جگیدونکی
$]-3; -\frac{3}{4}]$	د مخامخ انتروال لپاره کره یو غیز جگیدونکی
$]-\frac{3}{4}; \infty]$	د مخامخ انتروال لپاره کره یو غیز تیتیدونکی

اتم: د تعریفو شو ژی ټکي:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3} \right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = -\infty
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = -\infty$$

بیلگه ۴:

لومړۍ تعریفوړشو:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \quad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: محورسیومتری: $f(-x) = f(x)$ ځکه چې فقط جوړه (جغت) اکسیوننتونه

دریم: افراطیت:

مشتقونه یا رابیلیدنی:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(-4x^2 + 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm \frac{3}{2}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{\text{Min}}(0 \mid -5,06)}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max1}}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{\text{Max1}}(1,5 \mid 0)}$$

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max2}}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{\text{Max2}}(-1,5 \mid 0)}$$

څلورم: اورنټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$f'''(x_1) = f''' \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow$$

په $x_{w1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,87$ کې اورونټکی (انعطاف-)

$$x_{w2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0,87 \quad f'''(x_2) = f''' \left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \right) = -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \right) \neq 0$$

لاس ته راځي: په کې اورونټکی (انعطاف-)

$$f(x_{w1}) = f \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow P_{w1} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4} \right) \text{ bzw. } P_{w1}(0,87 \mid -2,25)$$

$$f(x_{w2}) = f \left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow P_{w2} \left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4} \right) \text{ bzw. } P_{w1}(-0,87 \mid -2,25)$$

پنځم: محور غوڅتکي:

$$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow P_y \left(0 \mid -\frac{81}{16} \right) \text{ bzw. } P_y(0 \mid -5,06)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$$

تراوسه معلوم صفرځايونه
پولینوموېش: $x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -\frac{3}{2}$ (افراطي ټکي وکوری)

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \right) : \underbrace{\left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{3}{2} \right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \right) : \left(x^2 - \frac{9}{4} \right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$-\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 \right)$$

$$\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}$$

$$-\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16} \right)$$

$$-x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

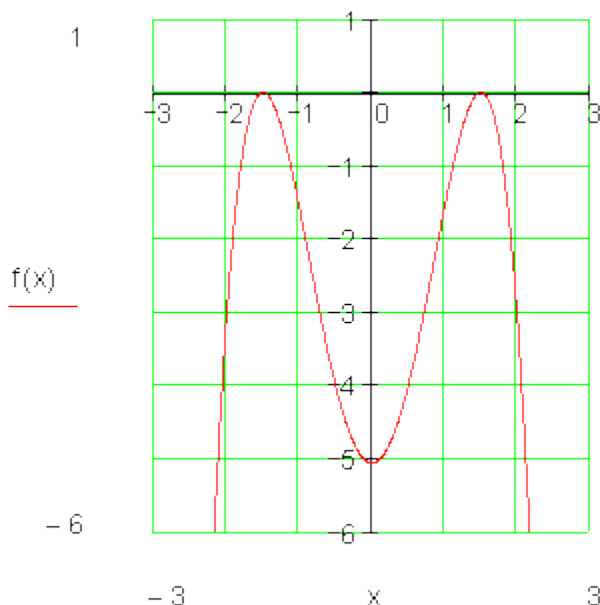
$$\Rightarrow x_{3/4} = \pm \frac{3}{2}$$

$$\left[P_{x1/2} \left(\frac{3}{2} \mid 0 \right) \right]; \left[P_{x3/4} \left(-\frac{3}{2} \mid 0 \right) \right]$$

صفرخایونه:
شپږم: ارزښت جدول او گراف:
ارزښتجدول:

$$f(-2) \approx -3,06 = f(2); f(-1) \approx -1,56 = f(1)$$

		P_{Max2} $P_{x3/4}$		P_{W2}	P_{Min} P_y	P_{W1}		P_{Max1} $P_{x1/2}$	
x	-2	-1,5	-1	-0,87	0	0,87	1	1,5	2
$f(x)$	-3,06	0	-1,56	-2,25	-5,06	-2,25	-1,56	0	-3,06



اووم: کږوالی یا انحنأ:

اووم: کږوالي حالت او یو غریزوالی:

د $x_0 = -2$ لپاره (کښ له P_w) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کښ کږوال (ننوتی یا کونوکس) $[-\infty; 0]$

د $x_0 = 2$ لپاره (بڼي له P_w) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي بڼي کږوالی (کونکاو یا وتلی) $[0; -\infty]$

یو غریزوالی:

د $[-\infty; 0]$ لپاره کږه یو غریز ټیټیډونکی یا لویدیونکی

د $[-\infty; 0]$ لپاره کره یو غریز جگیدونکی
 د $[2; \infty]$ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی یا لویدونکی
 کړوالی:

د $x_0 = -1$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2} ترمنځ) $f'(-1) = -3 < 0$

$$\left] -\infty; -\sqrt{\frac{3}{4}} \right]$$

له دې لای ته راځي ښي کړوالی (وتلی یا محدب؟)

د $x_0 = 0$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2} ترمنځ) $f'(0) = 9 > 0$

$$\left] -\sqrt{\frac{3}{4}}; \sqrt{\frac{3}{4}} \right]$$

له دې لای ته راځي ښي کړوالی کین کړوالی: (ننوتی؟)

د $x_0 = 1$ لپاره (له P_{W1} څخه ښی) $f'(1) = -3 < 0$

$$\left] \sqrt{\frac{3}{4}}; \infty \right]$$

له دې لای ته راځي ښي کړوالی (وتلی یا محدب؟)

یو غریزووالی:	
د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی	$]-\infty; -1,5[$
د مخامخ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی	$] -1,5; 0[$
د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی	$] 0; 1,5[$
د مخامخ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی	$] 1,5; \infty[$

اتم: د تعریفوړشو ژی ټکي:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left(-1 + \frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4} \right)}_{-1} = -1 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty}$$

بیلگه:

۱ - تعریف - یا پیژندور شو:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \quad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

۲ - سیومتری: سیومتری نه شته

۳ - افراطیت-

مشتق

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x + 3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$$

په $x_1 = 0$ کې په افراطی ځای کومه وینه یا افاده نه شتهمگر دا چې $x_{1/2} = 0$ د $f'(x)$ ډبل صفر ځای دی د $f''(x)$ لپاره په $x_{1/2} = 0$ ځایکې د مخنښې بدلون نه شته له دې لاس ته راځي، چې په $x_1 = 0$ کې افراطي ځایونه نه شته

$$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = 3$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6,75 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}\left(3 \mid \frac{27}{4}\right) \text{ bzw. } P_{\text{Max}}(3 \mid 6,75)}$$

۴ - اوړونیکي یا انعطافیکي: (لاندې الماني: په ... کې اوړونیکي)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0$$

$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2$$

$$f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1}(0 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2}(2 \mid 4)}$$

۵ - محور غوڅتکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

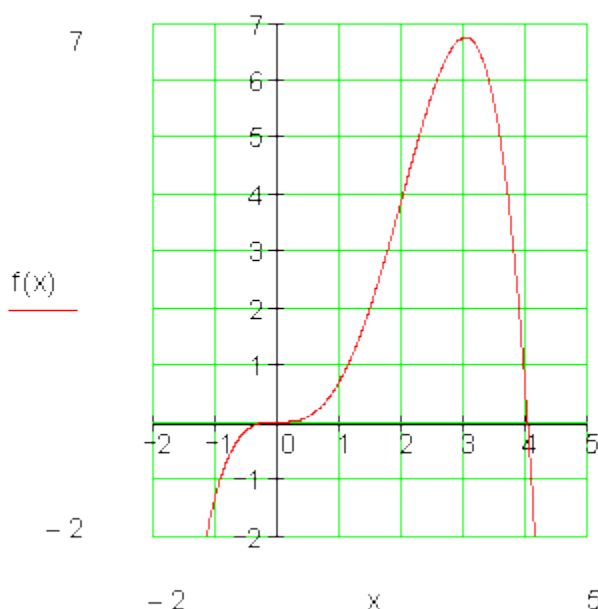
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0; x_4 = 4$$

$$\boxed{P_{x1/2/3}(0 \mid 0)}; \boxed{P_{x4}(4 \mid 0)}: \text{ صفر ځایونه:}$$

ارزینتجدول او گراف : ارزینتجدول

$$f(-1) = -1,25; f(1) = 0,75; f(4,2) = -3,7$$

		P_{W1} $P_{x1/2/3}$ P_y		P_{W2}	P_{Max}	P_{x4}	
x	-1	0	1	2	3	4	4,2
$f(x)$	-1,25	0	0,75	4	6,75	0	-3,7



کړوالی حالت او یو غریزووالی:

کړوالی:

د $x_0 = -1$ لپاره (د P_{W1} کین لور ته) $f'(-1) = -9 < 0$ له دې لاس ته راځي: ښیکړوالی (وتلی) $]-\infty; -0[$ د $x_0 = 1$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2} ترمنځ) $f'(1) = 3 > 0$ له دې لاس ته راځي: کین کړوالی (ننوتی) $]0; 2[$ د $x_0 = 3$ لپاره (ښی له P_{W2}) $f'(3) = -9 < 0$ له دې لاس ته راځي: ښی کړوالی (وتلی)یو غریزووالی: $]2; \infty[$

$] -\infty; 0 [$	د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی
$] 0; 3 [$	د مخامخ لپاره کره یو غریز جگیدونکی
$] 3; \infty [$	د مخامخ لپاره کره یو غریز ټیټیدونکی

اتم: د تعریفوړشو ژی ټکي:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{x} \right)}_{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty}$$

افراطي ارزښتونه

تمرینونه د کور کار I:

د دریمې درجې ټول یا تام راشنل توابعو افراطي ټکي

د لاندې ټول راشنل (هوبنبار) توابعو افراطي ارزښتونه مطالعه کړی او په ممکنه حالت کې یې انحرافي ټکي پیدا کړی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \quad \text{دویم} \qquad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \quad \text{اول}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{څلورم} \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad \text{دریم}$$

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \quad \text{شپږم -} \quad f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad \text{اتم -} \quad f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad \text{اوم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \quad \text{لسم -} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad \text{نهم -}$$

حلونه

تمرینونه: مشتقشمیرنه I

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

$$P_{\text{Min}}(2|-4) \quad P_{\text{Max}}(-2|4) \quad \text{اول -}$$

$$P_{\text{Min}}(0|0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right) \quad \text{دویم -}$$

$$P_{\text{Min}}(4|0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{4}{3} \approx 1,33 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right) \quad \text{دریم -}$$

$$P_{\text{Min}}(-1|0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{5}{3} \approx 1,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right) \quad \text{څلورم -}$$

$$P_{\text{Min}}(4|-6) \quad P_{\text{Max}}(-2|6) \quad \text{پنځم -}$$

$$P_{\text{Min}}(5|0) \quad P_{\text{Max}}\left(\frac{7}{3} \approx 2,33 \mid \frac{512}{135} \approx 3,79\right) \quad \text{شپږم -}$$

اوم - انحرافي ټکي نه شته اتم - $P_{\text{Min}}(4|-4)$ $P_{\text{Max}}(0|4)$ -
 نههم - انحرافي ټکي شتون نه لري.

لسم - $P_{\text{Min}}(-1+\sqrt{3} \approx 0,732 |-3,797)$ $P_{\text{Max}}(-1-\sqrt{3} | 3,131)$ -
 پام: د انحرافي ټکو کې رینه وه، نو د جېشمېري سره دې شمېرې نه شي، ځکه چې پرته
 له دې به شمېرې ډېر وخت ونیسي.

مفصل حلونه

اول - مفصل حل

شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x$$

- د افقي یا پروت محور سره تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 | +4$$

مربع مساوات

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 | \sqrt{\quad} \Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

_ آزمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -2$$

- د انحرافي ارزښتونو شمېرې

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{4}2^3 - 3 \cdot 2 = \frac{8}{4} - 6 = 2 - 6 = -4$$

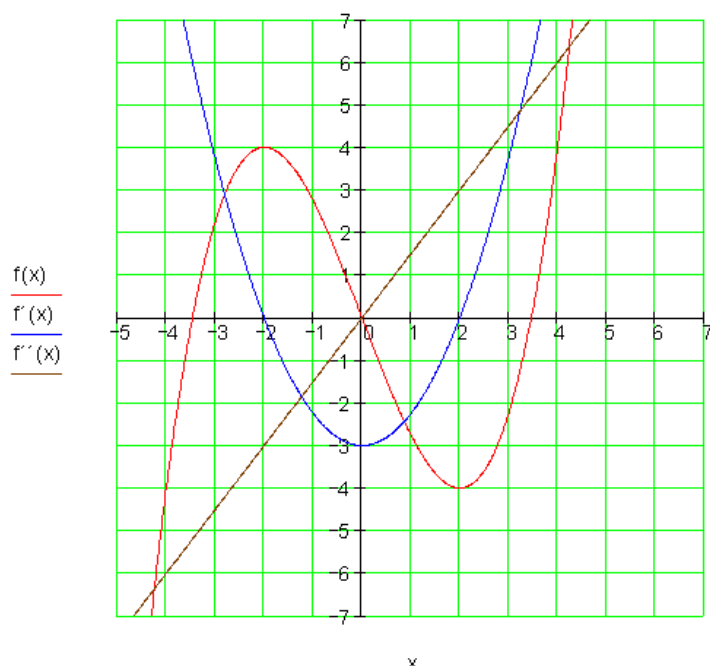
$$f(x_2) = f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -\frac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = 4$$

- انحرافي ټکي:

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(2|-4) \quad P_{\text{Max}}(-2|4)}}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x$$



دویم - مفصل حل.

شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \quad f''(x) = -3x + 4$$

2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 4x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x \left(-\frac{3}{2}x + 4 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 4 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 \mid + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 \mid \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$$

3 - آزمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{8}{3}\right) = -3 \cdot \frac{8}{3} + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{8}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 = 0$$

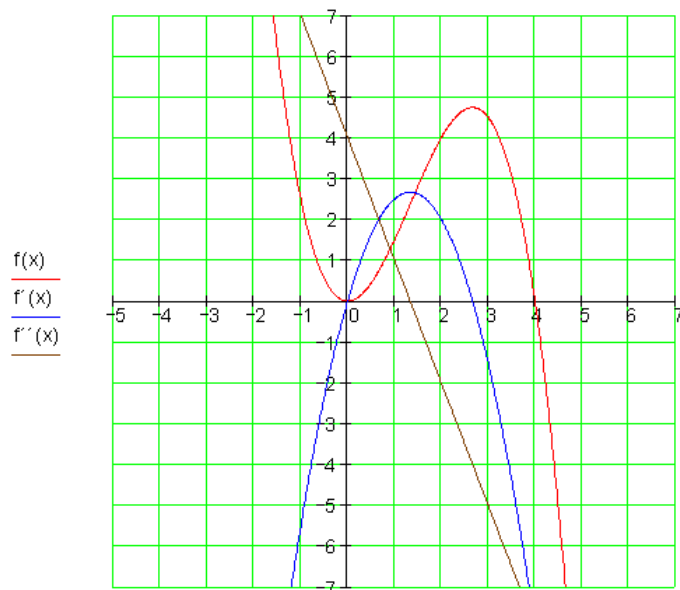
$$f(x_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} + 2 \cdot \frac{64}{9} = -\frac{256}{27} + \frac{384}{27} = \frac{128}{27}$$

5 - انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(0 \mid 0)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Max}}\left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}}$$

ګرافونه:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \quad f''(x) = -3x + 4$$



دریم - مفصل حل: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \quad f''(x) = 3x - 8$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$p = -\frac{16}{3} \quad q = \frac{16}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{64}{9} - \frac{16}{3} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

-- ۲۰۱

دفرنخچال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

3 - آزماینت، چي ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = 3 \cdot 4 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{4}{3}$$

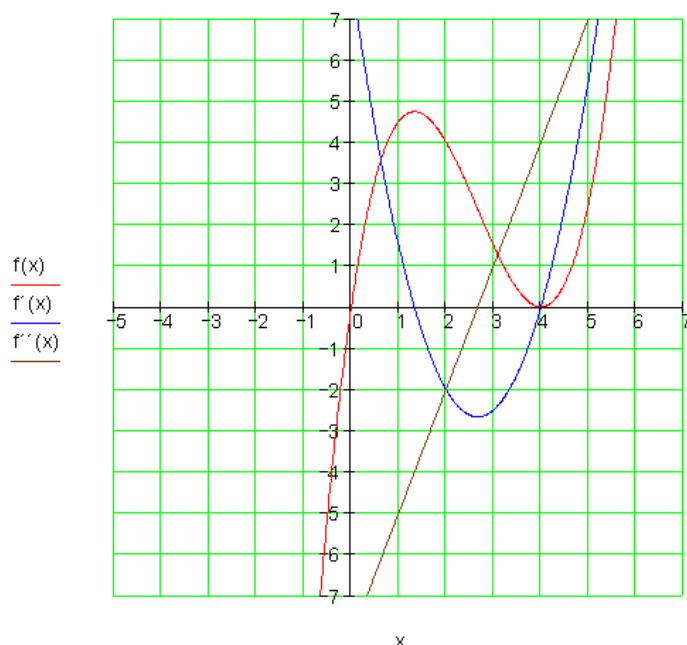
4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 64 - 64 + 32 = 32 - 64 + 32 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27} - 4 \cdot \frac{16}{9} + \frac{32}{3} \\ &= \frac{32}{27} - \frac{192}{27} + \frac{288}{27} = \frac{128}{27} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(4|0)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Max}}\left(\frac{4}{3} \approx 1,33 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}} \quad 5 - \text{انحرافي ټکي:}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \quad f''(x) = 3x - 8$$



گرافونه

مفصل حل -

شمیرنه: **څلورم:**

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \quad f''(x) = -3x + 1$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \mid \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3} \quad q = -\frac{5}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{1}{9} + \frac{15}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1 \end{array} \right.$$

3 - آزمایشنت، چي ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = \frac{5}{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = -3 \cdot (-1) + 1 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = -1$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{27} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} + \frac{25}{6} + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{125}{54} + \frac{75}{54} + \frac{225}{54} + \frac{81}{54} = \frac{256}{54} = \frac{128}{27} \end{aligned}$$

۲۰۳ دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

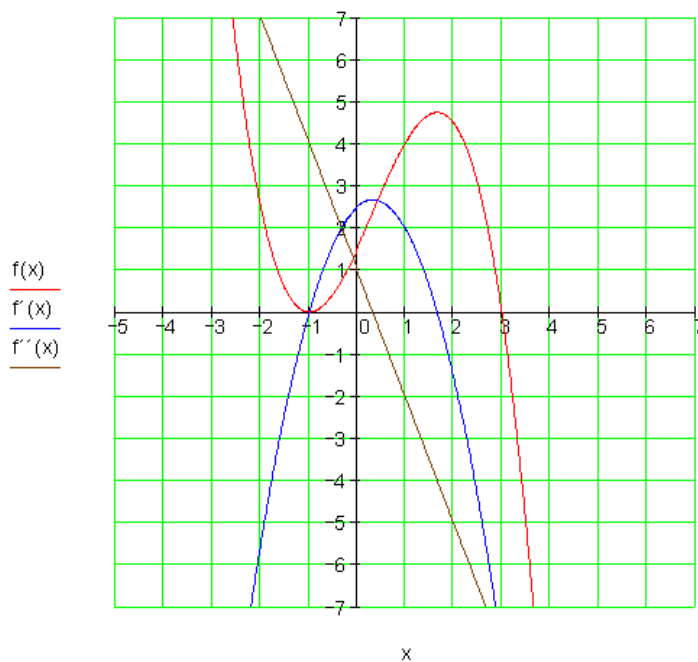
$$f(x_2) = f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{5}{2} \cdot (-1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

5 - انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(-1|0)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Max}}\left(\frac{5}{3} \approx 1,67 \mid \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}}$$

گرافونه

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \quad f''(x) = -3x + 1$$



پنځم:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \mid \cdot 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$p = -2 \quad q = -8 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 8 = 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 + 3 = 4 \\ x_2 = 1 - 3 = -2 \end{array} \right.$$

3 - آزماینت، چي ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = \frac{2}{3} \cdot (-2) - \frac{2}{3} = -\frac{6}{3} = -2 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -2$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(4) &= \frac{1}{9} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 - \frac{8}{3} \cdot 4 + \frac{26}{9} = \frac{1}{9} \cdot 64 - \frac{1}{3} \cdot 16 - \frac{32}{3} + \frac{26}{9} \\ &= \frac{64}{9} - \frac{48}{9} - \frac{96}{9} + \frac{26}{9} = -\frac{54}{9} = -6 \end{aligned}$$

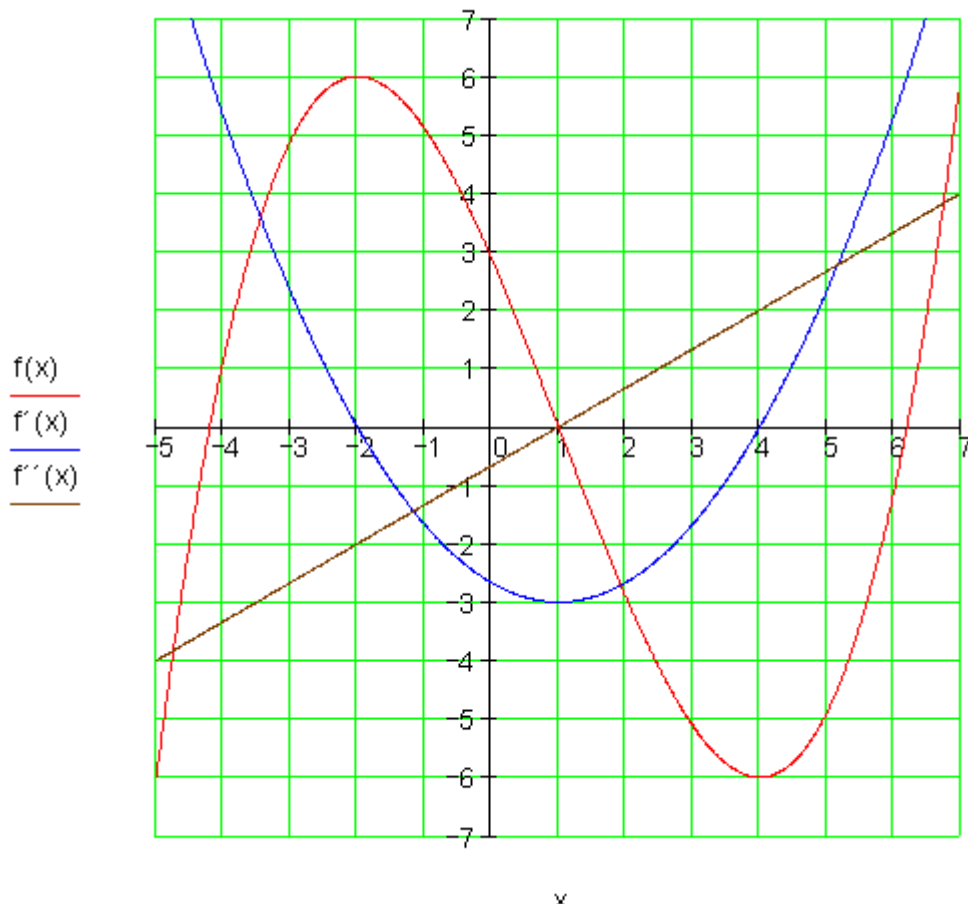
$$\begin{aligned} f(x_2) = f(-2) &= \frac{1}{9} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^2 - \frac{8}{3} \cdot (-2) + \frac{26}{9} = \frac{1}{9} \cdot (-8) - \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{16}{3} + \frac{26}{9} \\ &= -\frac{8}{9} - \frac{12}{9} + \frac{48}{9} + \frac{26}{9} = \frac{54}{9} = 6 \end{aligned}$$

5 - افراطي ټکي

$$\underline{\underline{P_{\text{Min}}(4|-6)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Max}}(-2|6)}}$$

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$



شپیرم:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \quad f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 \quad f''(x) = \frac{12}{5}x - \frac{44}{5}$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 = 0} \cdot \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{35}{3} = 0$$

quadratische Gleichung

$$p = -\frac{22}{3} \quad q = \frac{35}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{121}{9} - \frac{35}{3} = \frac{121}{9} - \frac{105}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{15}{3} = 5 \\ x_2 = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

3 - از ماینست، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(5) = \frac{12}{5} \cdot 5 - \frac{44}{5} = \frac{16}{5} > 0 \Rightarrow$$

د $x_1 = 5$ په ځای کې نسبي مینیموم

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} - \frac{44}{5} = \frac{28}{5} - \frac{44}{5} = -\frac{16}{5} < 0 \Rightarrow$$

د $x_2 = \frac{7}{3}$ په ځای کې نسبي مینیموم

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(5) = \frac{2}{5} \cdot 5^3 - \frac{22}{5} \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 - 10 = 50 - 110 + 70 - 10 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x_2) = f\left(\frac{7}{3}\right) &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{22}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14 \cdot \frac{7}{3} - 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{343}{27} - \frac{22}{5} \cdot \frac{49}{9} + \frac{98}{3} - 10 \\ &= \frac{686}{135} - \frac{3234}{135} + \frac{4410}{135} - \frac{1350}{135} = \frac{512}{135} \end{aligned}$$

5 - انحرافي ټکی

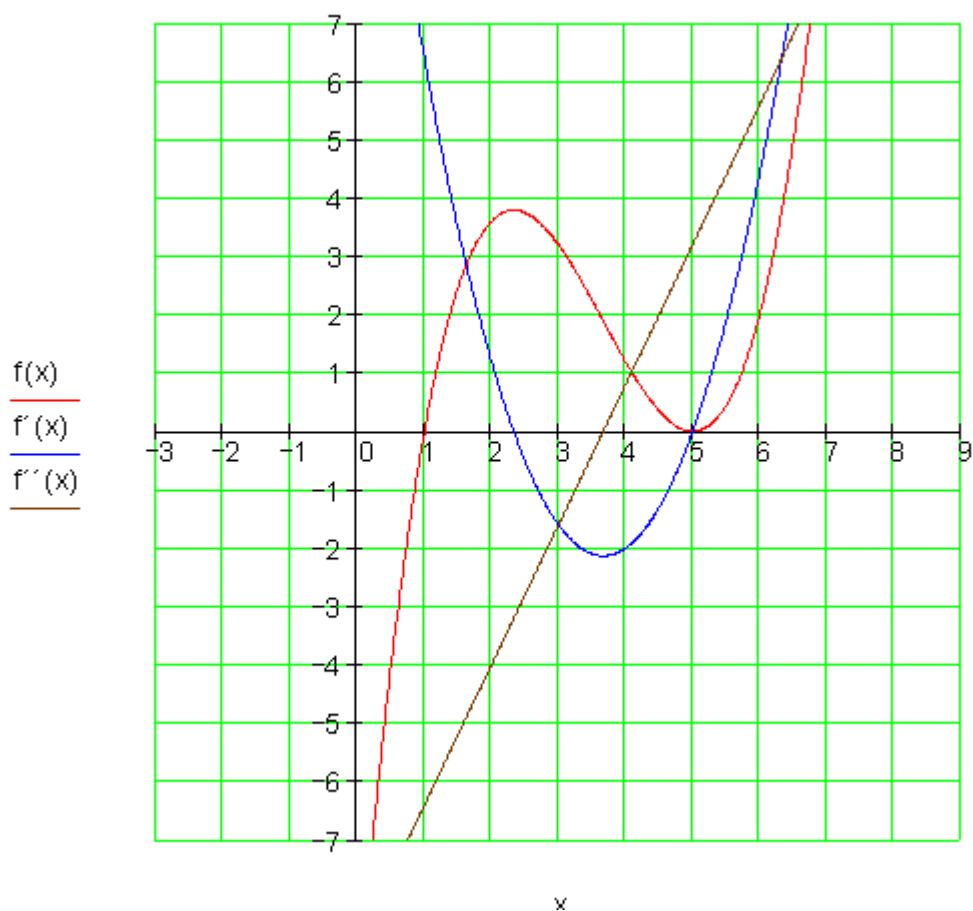
۲۰۷

دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا راییلیدنه)

$$\underline{\underline{P_{\min}(5|0)}} \quad \underline{\underline{P_{\max}\left(\frac{7}{3} \approx 2,33 \mid \frac{512}{135} \approx 3,79\right)}}$$

گرافونه:

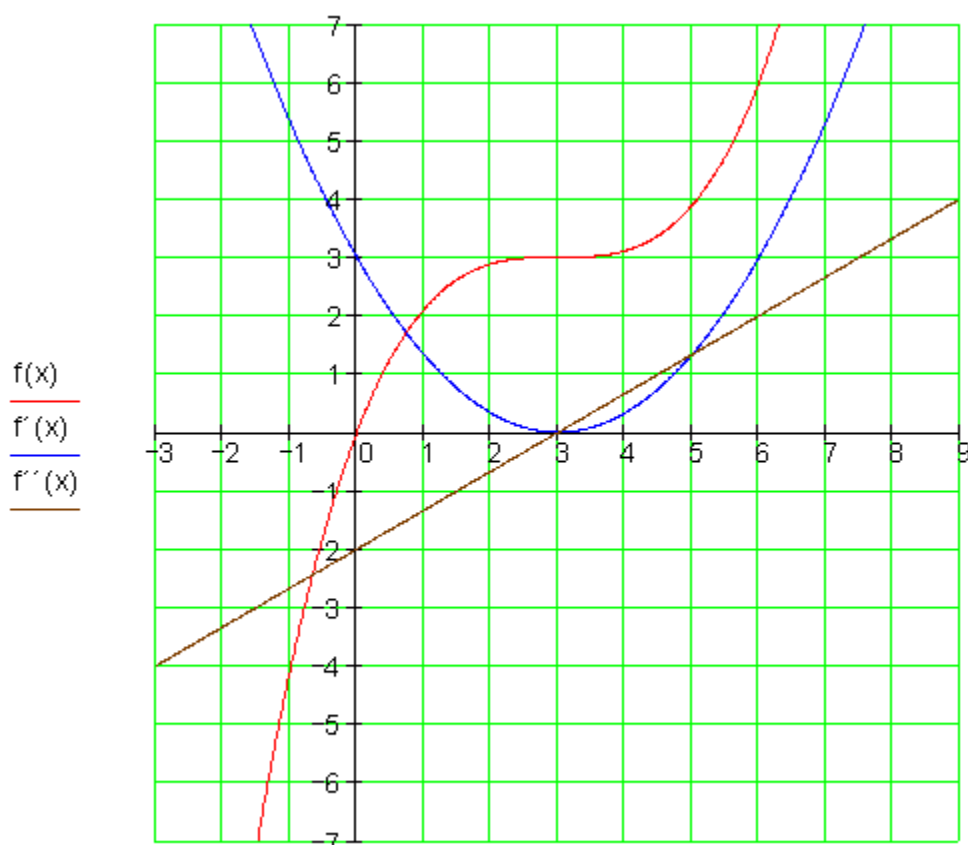
$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \quad f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 \quad f''(x) = \frac{12}{5}x - \frac{44}{5}$$



اووم: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$



2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0}_{\text{quadratische Gleichung}} \cdot 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$p = -6 \quad q = 9 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \end{array} \right.$$

د لومړي مشتق ډبل صفر ځایونه په دې معنا دي، چې په دې ځایونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(3) = \frac{2}{3} \cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې افراطي ټکي نه شته

گرافونه: گراف د تیر مخ په سر کې راوړل شوی او فرمول یې دا لاندې دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

اتم: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x}_{=0} = 0 \Leftrightarrow x \left(\frac{3}{4}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

مربع مساوات

$$\frac{3}{4}x - 3 = 0 \mid +3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3 \mid \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_2 = 4$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي اړوښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 3 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 4 = 4$$

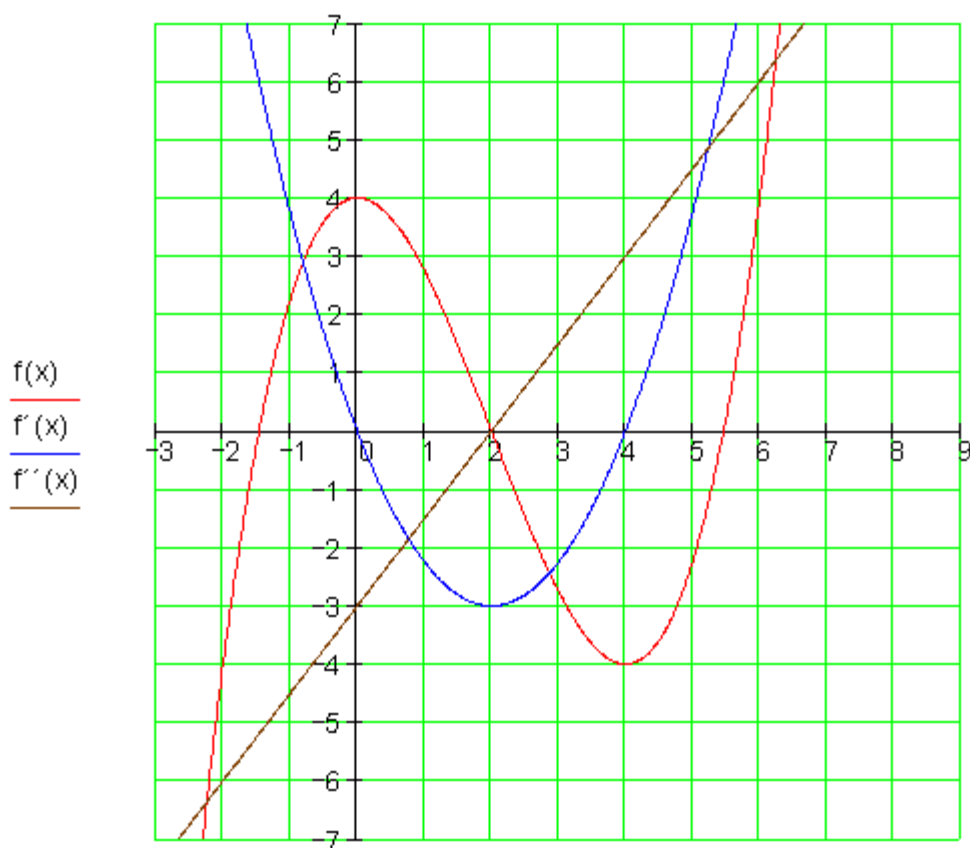
$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4 = 16 - 24 + 4 = -4$$

5 - انحرافي ټکي

$$\underline{P_{\text{Min}}(4|-4)} \quad \underline{P_{\text{Max}}(0|4)}$$

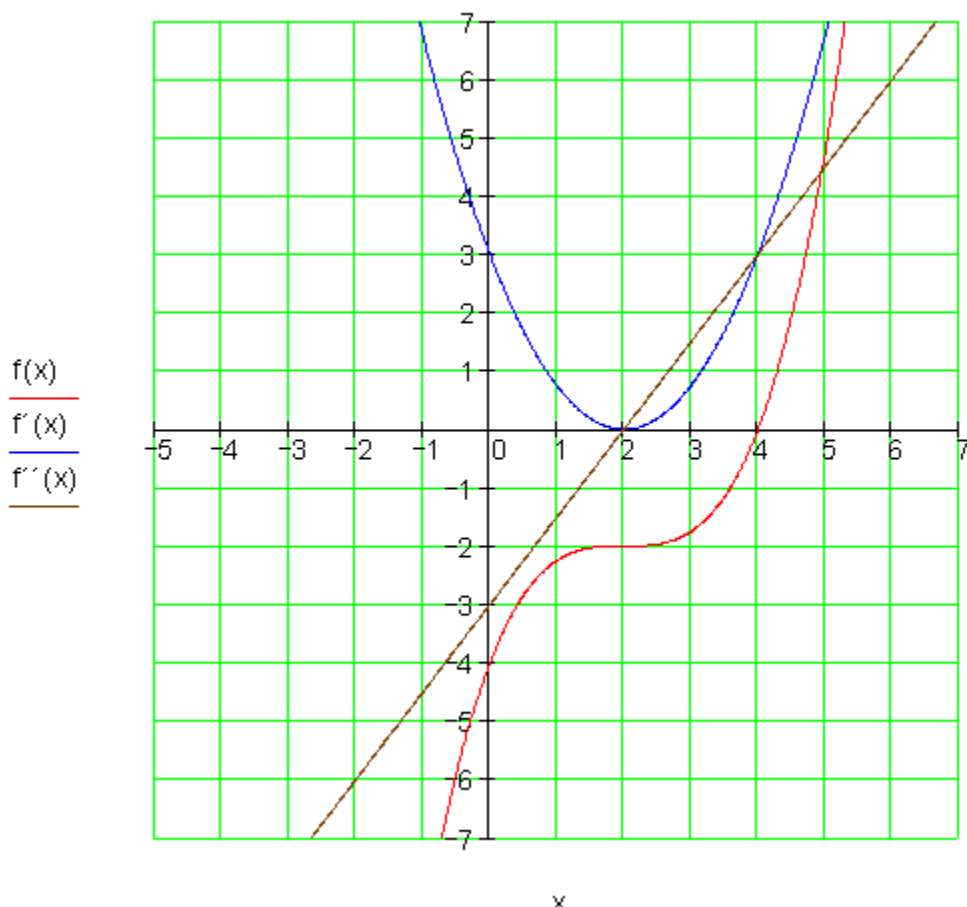
$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

گرافونه:



نهم: شمیرنه: 1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



x

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = 0}_{\text{quadratische Gleichung}} \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$p = -4 \quad q = 4 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

د لومړي مشتق ډبل صفرخایونه په دې معنا دي، چې په دې خایونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمایښت به هم دا وښايي.

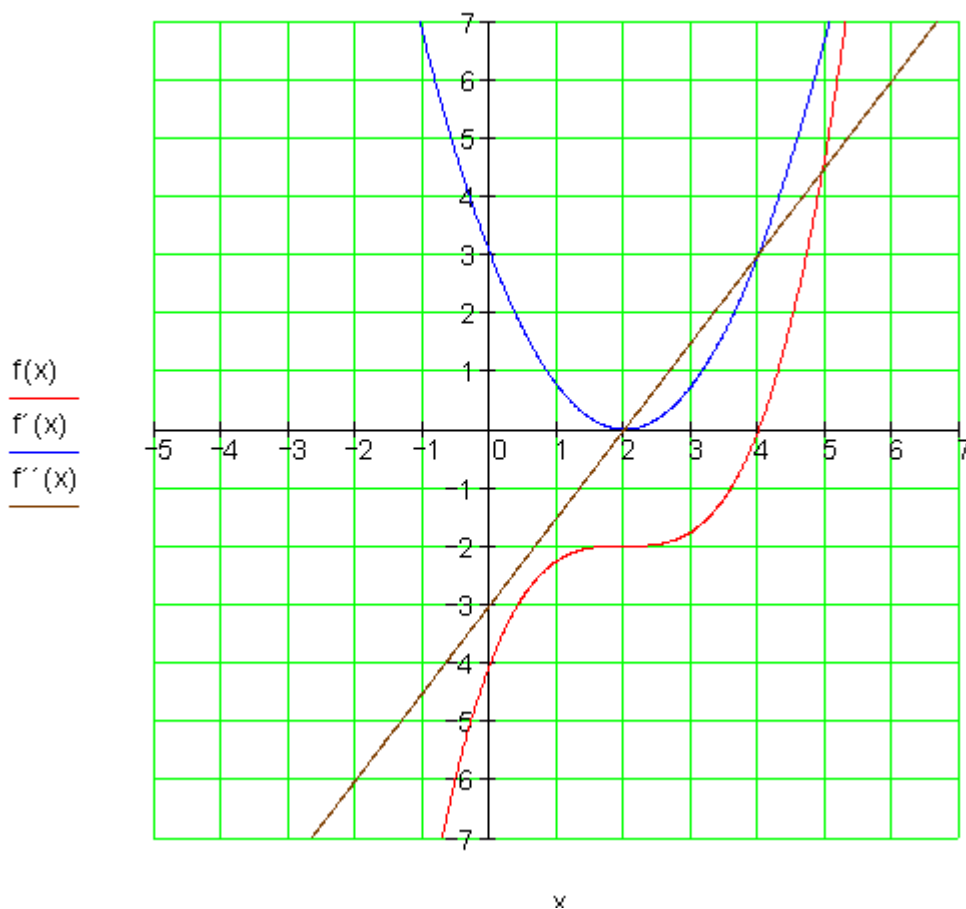
3 - ازمایښت، چې ایا انحرافي ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې انحرافي ارزښتونه په $x_{1/2} = 2$ کې نه شته.

گرافونه: گراف په یر مخ کې او فمول یې بیا هم دل لاندې:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



لسم: شمیرنه:

1 - تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2x - 2}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0$$

$$p = 2 \quad q = -2 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -1 + \sqrt{3} \\ x_2 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

3 - آزماینټ، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(-1 + \sqrt{3}) = 2 \cdot (-1 + \sqrt{3}) + 2 = -2 + 2\sqrt{3} + 2 = 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = -1 + \sqrt{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1 - \sqrt{3}) = 2 \cdot (-1 - \sqrt{3}) + 2 = -2 - 2\sqrt{3} + 2 = -2\sqrt{3} < 0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -1 - \sqrt{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1) = f(-1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{3})^3 + (-1 + \sqrt{3})^2 - 2(-1 + \sqrt{3}) - 3 \approx -3,797$$

$$f(x_2) = f(-1 - \sqrt{3}) = \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{3})^3 + (-1 - \sqrt{3})^2 - 2(-1 - \sqrt{3}) - 3 \approx 3,131$$

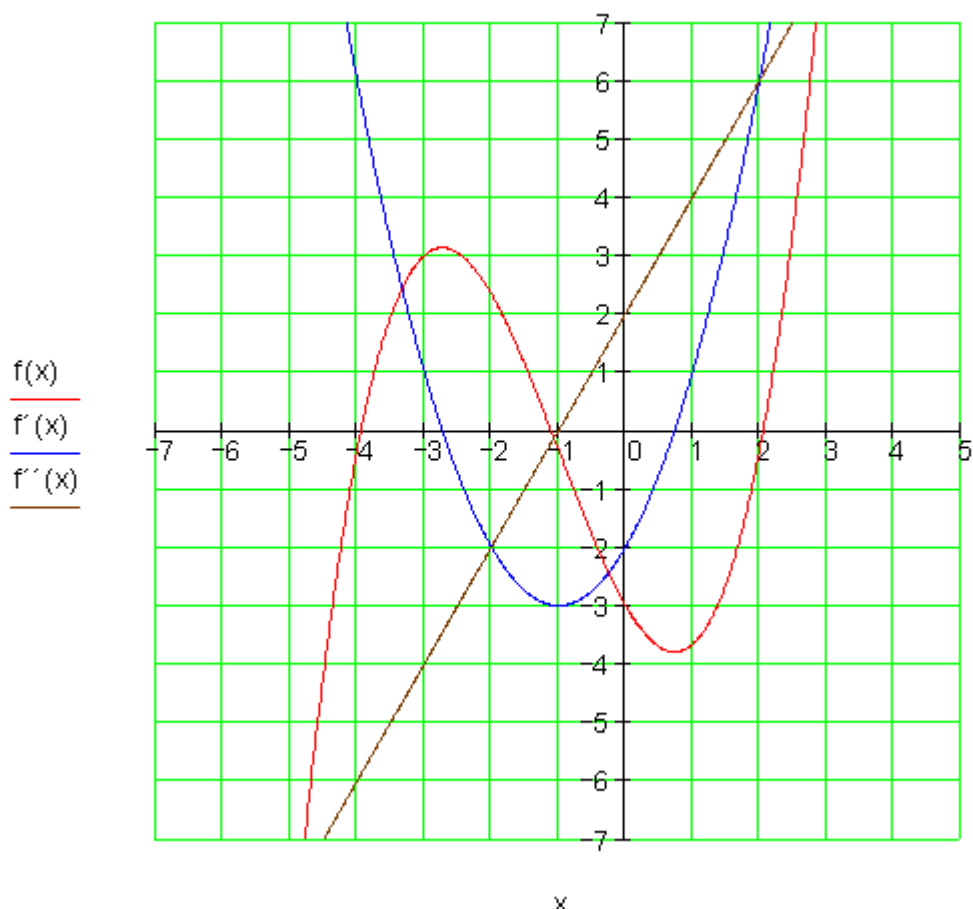
شمیرنه د جېشمیري سره سر ته رسیږي

5 - انحرافي ټکي

$$\underline{P_{\text{Min}}(-1+\sqrt{3} \approx 0,732 \mid -3,797)} \quad \underline{P_{\text{Max}}(-1-\sqrt{3} \mid 3,131)}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2$$



پوښتنې

مشتقشمیرنه IX

لومړۍ:

د منحنی ټکي د پراته تانجنت سره وشمېری. ایا دا د منحنی ټکي انحرافي ارزښتونه دي؟ ستا پریکړه په دلایلو روښانه کړه.

الف - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ پ -

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$	دویم: د تابع $f(x)$ د گراف انحرافي ټکي زشمېری. په یوه مناسب وضعیه قیمت سیستم کې یې گراف وباسی.
$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2 + 4$ د $x \in \mathbb{R}$ سره	دریم: a داسې وټاکي، چې تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې یو انحرافي ځای ولري. دا کوم ډول انحرافي ځای دی؟
$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$	څلورم: یو تابع $f(x)$ ورکړشوی دی. a داسې وټاکي، چې د $f(x)$ د گراف افراطي ټکی د x -محور باندې پروت وي. ایا دا افراطي ټکی جگ - یا ټیټ ټکی دی؟

پنځم:

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$	تابع $f(x)$ دې انحرافي ارزښت ونه لري. د دې حالت لپاره دې ضریبونه کوم شرایط پوره کړي او $f(x)$ څو صفراوونه لري؟ ستاسو ځواب په دلایلو روښانه کړی؟
------------------------------	---

شپږم:

تابع $f_a(x) = ax(x+3)^2$ ورکړ شوی د $x \in \mathbb{R}$ او $a > 0$ سره.

د خورا جگ او خورا ټیټېکي ترنګرېښه د وضعیه قیمت سیسم محور سره مثلث جوړوي. د مثلث سطحه د a په تابعیت سره پیدا کړی. د دې د مخه یو شکل وباسی.

اووم: لاندې په انحرافي ارزښتزنو مطالعه کړی:

الف-

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f'(x)	0,75	0	-0,25	0	0,75

ب-

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	-0,149	-0,135	0,3678	3	13,591
f'(x)	-0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

اتم: اتم - د دلاندې توابعو انحراف او انعطاف ټکو ارزښتونه وشمېری.

سربېره پردې د پوښتنو 1, 4, 5, 6 او 7 د محور غوڅتکي (د تضاطع ټکي) وشمېری او گرافونه یې وکاري.

الف - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

پ - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ ت - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ ث - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \quad \text{ج -}$$

حلونه

مشتقشمیرنه IX

مفصل حلونه:

اول - مفصل حلونه:

الف - مشتق:

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \quad \text{مشتق} \quad f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad \text{الف -}$$

پروت یا افقي تانجنت

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځایونه لري او مخنځینه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{مشتق} \quad f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \text{ب -}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

پروت یا افقي تانجنت:

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځایونه لري او مخنځینه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad \text{مشتق} \quad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$$

پروت (افقي) تانجنت:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ سره ساده صفرخایونه لري او مخنځبڼه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ارزښتونه لري.

ب -

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \text{مشتق:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

پروت (افقي) تانجنت

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ سره ساده صفرخایونه لري او مخنځبڼه بدلوي. پس $f(x)$ دوه افراطي ارزښتونه لري.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2 \quad \text{مشتق:} \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad \text{پ -}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

پروت (افقي) تانجنت: $x_{1/2} = 0$ په ځای کې یو ډبل صفرخای لري، دا په دې معنا چې د مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2} = 0$ په ځای کې انحرافي ټکی نه لري. پس $f(x)$ په دې ځای کې انحرافي ټکی نه لري. $x_3 = 3$ مخنځبڼې بدلېدنه شتون نه لري.

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۲۱۹

د $f'(x)$ ساده صفرخای دی، هلته د مخنځینې بدلېدنه منځ ته راځي. نو $f(x)$ په دې ځای کې افراطي ټکی لري.

دویم - مفصل حلونه:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

د لوکال افراطي ټکو لپاره اړین شرتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \mid \cdot \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow p = -8; q = 12; D = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6}; \boxed{x_2 = 2}$$

$$f''(x_1) = f''(6) = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Min} \quad f''(x_2) = f''(2) = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Max}$$

$$\text{rel Min: } f(x_1) = f(6) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\min}(6|0)}$$

$$\text{rel Max: } f(x_2) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{\max}(2|4)}$$

یادونه: په پورته کې rel د relative لنډونه ده او د نسبي په معنا دی.

د گراف د رسمولو لپاره نور ټکي هم اړین دي

$$\boxed{P_y(0|0)} \quad \text{د } y \text{ محور سره د تقاطع ټکی}$$

صفرخایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = 0$$

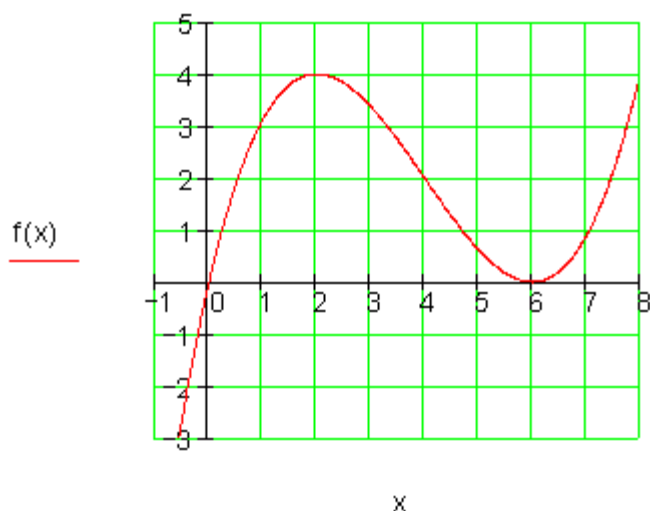
$$\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 0$$

دبل صفرخای

ارزښت جدول:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	-6,125	0	3,125	4	3,375	2	0,615	0	0,875



دریم:

$$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2 + 4; \quad f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2a$$

پیل : په $x = 2$ کې افراطي ټکی په دې معنا دی چې:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۲۲۱

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{سر همداسي} \quad f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4x \quad \text{او له}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{انحرافي ټکي:}$$

همداسي $x_2 = 2$

$f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow f''(x_1) = f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{مین}$ $\Rightarrow f''(x_2) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{په } x_2=2 \text{ کې نسبي ماکس}$	په $x_1 = 0$ کې نسبي مین په $x_2 = 2$ کې نسبي ماکس
--	--

څلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

د انحراف ټکي دې د x محور باندې پروت وي

$$f(x_E) = 0 \quad \text{دا په دې معنا چې:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته یا افقي تانجنت ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{2}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د افراطي ځاي شتون په هکله ازمايښت

$f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$ لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځای نه شته

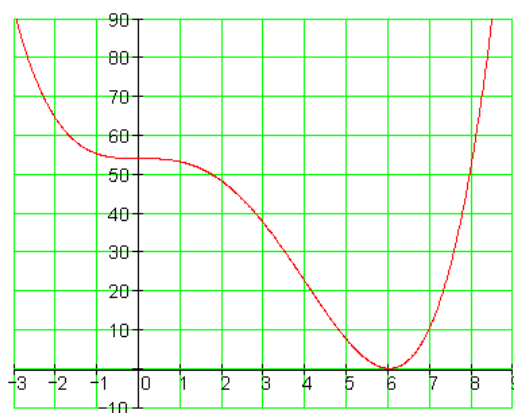
$$f''(x_3) = f''(6) = \frac{2}{3} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 = 18 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_3 = 6$$

د a متحولي ټاکنه

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

د $x_E = 6$ په ځای کې یو نسبي مینیموم لري $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$

دا د x محور باندې پراته دي: $P_{\text{Min}}(6 | 0)$



څلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

افراطي ټکي باید د x په محور پراته وي، دا په دې معنا چې: $f(x_E) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته محور سره د تانچنت ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{2}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د یوه اکسريموم شتون آزماینه: $f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$:
له دې لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځایونه نه شته

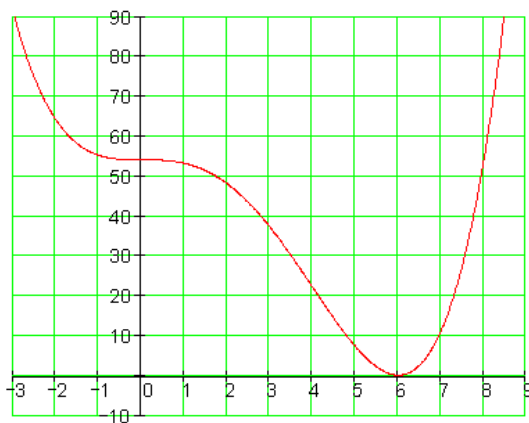
$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

د متحولې a ټاکنه:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$$

د $x_E = 6$ ځای کې یو نسبي مینیموم لري.

دا په x محور پروت دی: $P_{\min}(6|0)$



پنځم:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

که د آنحراف ټکي شتون ونه لري، باید $f'(x) \neq 0$ باور ولري:

یا $f'(x) = 0$ د ډبل صفرخاي سره (لومړي مشتق بي له مخنځبنې تغیر څخه)

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}bx + \frac{1}{3}c = 0$$

quadratische Gleichung

$$p = \frac{2}{3}b; q = \frac{1}{3}c \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c$$

$D < 0$: مربع مساوات حل نه لري، که $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c < 0$ وي.

دا په دې معنا، چې $f(x)$ په دې حالت کې پروت یا أفقي تانجنت نه لري. د $f(x)$ تابع گراف له دریمې څلورمې یا ربعي څخه و لومړۍ څلورمې ته ځلي.

تابع په کلکه همغږیز جگېدونکي د

$D = 0$: مربع مساوات ډبل صفرخاي لري، که $(1/9)b^2 - (1/3)c = 0$ وي.

دا په دې معنا $f(x)$ چې یو پروت تانجنت لري. مگر دا چې د $f'(x)$ لپاره په دې ځاي کې د مخنځبنې تغیر نه شته (ډبل صفرخاي)، نو $f(x)$ افراطي ځایونه نه لري.

دا چې د مخه پوهیږ چې $f(x)$ افراطي ټکي نه لري، نو $f(x)$ ټیک یو صفرخاي لري.

پنځم:

که د آنحراف ټکي شتون ونه لري، باید $|f'(x)| = 0$ باور ولري:

یا د ډبل صفرخاي سره (لومړي مشتق بي له مخنځبنې تغیر څخه)

: مربع مساوات حل نه لري، که وي.

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۲۲۵

دا په دې معنا، چې په دې حالت کې پروت یا آفقي تانجنت نه لري. د تابع گراف له دریمې څلورمې یا ربعي څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز چگیدونکي ده

: مربع مساوات دېل صفرځای لري، که وي.

دا په دې معنا چې یو پروت تانجنت لري. مگر دا چې د لپاره په دې ځای کې د مخنښې تغیر نه شته (دېل صفرځای) انحرافي ځایونه نه لري.

دا چې د مخه پوهیږ چې انحرافي ټکی نه شته، ټیک یو صفرځای لري. شپږم:

$$f(x) = ax(x+3)^2 = ax^3 + 6ax^2 + 9ax$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 12ax + 9a \quad f''(x) = 6ax + 12a$$

افراطي ټکي:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 12ax + 9a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ bzw. } x_2 = -3$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = 6a \cdot (-1) + 12a = a(-6 + 12) > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = -1$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = 6a \cdot (-3) + 12a = (-18 + 12) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 = -3$$

$$P_{\text{Max}} : f(-3) = a \cdot (-3) \cdot (-3+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{Max}}(-3 | 0)}$$

$$P_{\text{Min}} : f(-1) = a \cdot (-1) \cdot (-1+3)^2 = -4a \Rightarrow \boxed{P_{\text{Min}}(-1 | -4a)}$$

کرنیز مساوات د $P_{\text{Max}}(-3 | 0)$ او $P_{\text{Min}}(-1 | -4a)$ سره.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4a - 0}{-1 - (-3)} = \frac{-4a}{2} = -2a \Rightarrow g(x) = -2ax + a_0$$

د $P_{\text{Max}}(-3 | 0)$ سره ټکي ازمايننت

$$g(-3) = 0 \Leftrightarrow -2a \cdot (-3) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -6a \Rightarrow \boxed{g(x) = -2ax - 6a}$$

د محور سره غوڅتکي $g(x)$ او $P_x(-3|0)$ und $P_y(0|-6a)$ دي.

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6a}{2} = \boxed{9a}$$

د درېگودي يا مثلث سطحه:

(د مطلقه ارزښتونو سره کيدی شي وشميرل شي):

د $a=1$ لپاره گرافيکي انځورونه.

کرښه د x محور د $P_x(-3|0)$

په ټکي کې غوڅوي او د y

محور د $P_y(0|-6)$ په ټکي

کې.

د سطحې شميرنه د مطلقه

ارزښتونو سره کيږي، ځکه چې

سطحه تل مثبت ده.

$$A = g \cdot h / 2$$

د $g=3$ او $h=6$ لرو

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ FE}$$

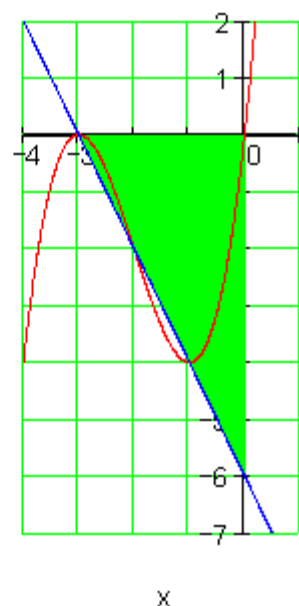
په پورته کې FE د سطحې يوون

يا واحد په معنا دی.

$$g(x) \quad (-3 < x < 0)$$

$$f(x)$$

$$g(x)$$



x

اووم: الف -

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f'(x)	0,75	0	-0,25	0	0,75

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۲۲۷

دوه انحرافي ټکي شتون لري:

په $x = 1$ کې د مخنځېني بدلون لرو د $f'(x)$ لپاره د $\boxed{+} \rightarrow \boxed{-} \Rightarrow \text{rel. Max.}$ د دې لاس ته راځي نسبي ماکسیموم

په $x = 2$ کې د $f'(x)$ لپاره د مخنځېني بدلون مخ ته لرو له $\boxed{-} \rightarrow \boxed{+} \Rightarrow \text{rel. Min.}$ ز له دې لاس ته راځي نسبي مینیموم

ب -

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	-0,149	-0,135	0,3678	3	13,591
f'(x)	-0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

په انټروال $[-3; -2]$ کې یو نسبي مینیموم پروت دی

$f'(x)$ یو د مخنځېني تغیر لري له منفي و مثبت ته یعنې $\boxed{-} \rightarrow \boxed{+}$ اتم:

الف - انحرافي ټکي

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$$

تابع :

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$$

لومړی مشتق:

$$f''(x) = \frac{3}{4}x$$

دویم مشتق ::

$$f'''(x) = \frac{3}{4}$$

دریم مشتق:۔

د پراته تانجنت سره ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

ازماینت چې ایا یو انحرافي ځای مخ ته لرو.

$$f''(x_1) = f''(\sqrt{2}) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 1,016 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = \sqrt{2}$$

$$f''(x_2) = f''(-\sqrt{2}) = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \approx -1,016 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتون شمیرنه:

$$f(x_1) = f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx -0,707; f(x_2) = f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,707$$

فراطي ټکي:

$$P_{\text{Min}}\left(\sqrt{2} \approx 1,414 \mid -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx -0,707\right) \quad P_{\text{Max}}\left(-\sqrt{2} \approx -1,414 \mid \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,707\right)$$

د انعطاف ټکي یا اوړونټکي

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \quad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \quad f''(x) = \frac{3}{4}x \quad f'''(x) = \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 0$$

د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

د انعطاف ټکي ازماینت

$$f'''(x_w) = \frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځي: په $x = x_w = 0$ کې د انعطاف ځای

د انعطاف ټکي وضعیه قیمتونه (کواوردیناتونه یا پروت ولاړ محورونه)

$$y_w = f(x_w) = f(0) = 0 \Rightarrow P_w(0|0)$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$$

د تابع محور غوڅتکي (د محور تقاطع نقاط)

د y محور سره غوڅتکي: $P_y(0|0)$
صفر ځایونه:

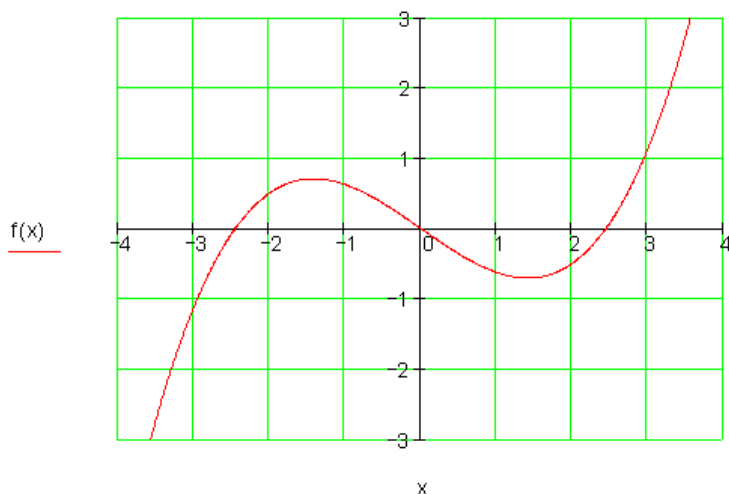
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \mid + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{4} \mid \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{6} \quad x_3 = \sqrt{6}$$



د x محور سره غوڅتکي:

$$\underline{\underline{P_{x_1}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x_2}(-\sqrt{6} \approx -2,449|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x_2}(\sqrt{6} \approx 2,449|0)}}$$

ب -
انحراف ټکي

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$$

تابع :

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

لومړی مشتق:

$$f''(x) = x - 1$$

دویم مشتق:

د پروت افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

ازمایینت، چي ایا انحراف ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 2$$

د انحرافي ټکو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = 4 \quad f(x_2) = f(2) = \frac{10}{3}$$

انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}}(0|4)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Min}}\left(2|\frac{10}{3} \approx 3,333\right)}}$$

۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

۲۳۱

د انعطاف - یا اوړونټکی

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad f''(x) = x - 1 \quad f'''(x) = 1$$

د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره اړین شرایط:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x_w = 1$$

د انعطافټکي آزمایش

$$f'''(x_w) = f'''(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځي: په $x = x_w = 1$ د انعطاف ټکي

د انعطاف- یا اوړون ټکي وضعیه قیمتونه (پراته لار ارزښتونه) یا کواوډیناتونه

$$y_w = f(x_w) = f(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{22}{6} = 3.\bar{6} \Rightarrow P_w \left(1 \mid \frac{22}{6} = 3.\bar{6} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \text{د محور غوڅټکي:}$$

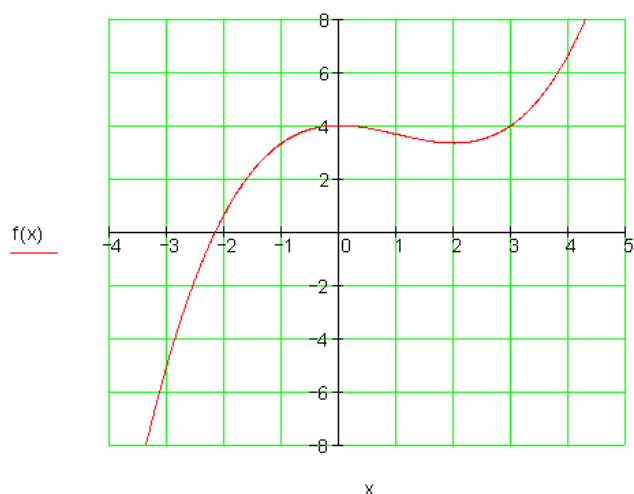
$$P_y(0 \mid 4) \quad \text{د } y - \text{محور سره غوڅټکی:}$$

صفر ځایونه

$$x_1 \approx -2,175 \quad \text{نومریکي پیدا شوی}$$

د x - محور سره غوڅټکی.

$$P_{x1}(x_1 \approx -2,175 \mid 0)$$



پ - افراطي ټکي

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

تابع:

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

لومړی مشتق:

$$f''(x) = -3x^2 + 6x$$

دویم مشتق:

د پروت محور سره ځایونه.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

ازمایینت چې ایا یو افراطي ارزښت مو مخ ته پروت دی:

$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_2) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$	په $x_1=0$ کې افراطي ارزښت نه شته په $x_2=0$ کې نسبي مکسیموم په $x_3=3$ کې افراطي ټکو شمیرنه
--	--

$$f(x_1) = f(0) = -2 \quad f(x_2) = f(0) = -2 \quad f(x_3) = f(3) = \frac{19}{4}$$

افراطي ټکي :

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}} \left(3 \mid \frac{19}{4} = 4,75 \right)}}$$

اورونټکی یا د انعطاف ټکی

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

د انعطاف ټکو لپاره اړین شرایط

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0$$

$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x_{w2} = 2$$

د انعطاف ټکو آزمایش

$$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w1} = 0$ کې د انعطاف ټکي

$$f'''(x_{w2}) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w2} = 2$ کې انعطاف ټکي:

د انعطاف ټکو وضعیه قیمتونه

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = -2$$

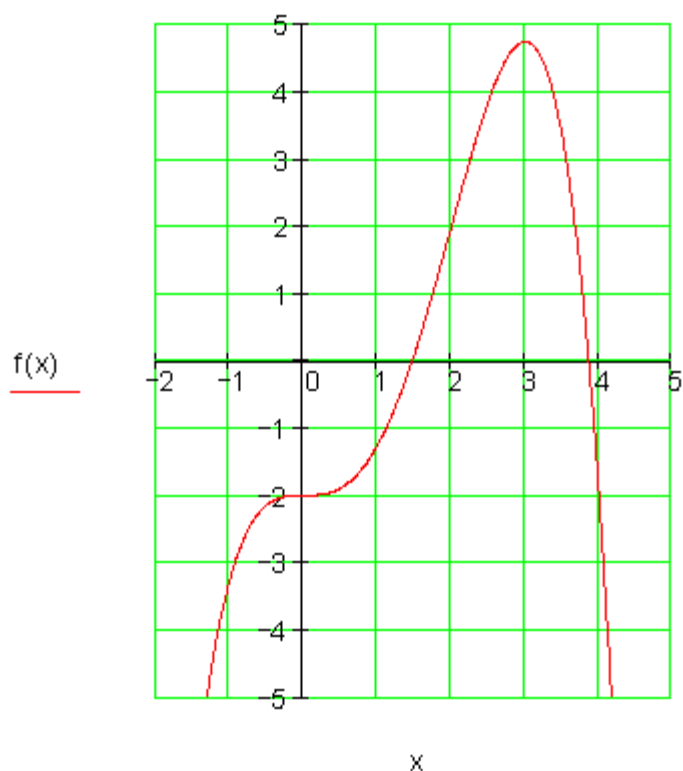
$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|-2)}} \quad \underline{\underline{P_{w2}(2|2)}}$$

د تابع محور غوڅتکي $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

د y محور سره غوڅتکي: $P_y(0|-2)$

صفر ځایونه: $x_1 \approx 1,467$ $x_2 \approx 3,861$



نومریکي پیداشوی

۲۳۵ ۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

$$\underline{\underline{P_{x_1}(x_1 \approx 1,467 | 0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x_2}(x_2 \approx 3,861 | 0)}}$$

د x محور سره غوڅتکي:

ت - افراطي ټکي

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3} \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \quad \text{لومړۍ مشتق:}$$

$$f''(x) = 2x - 2 \quad \text{دویم مشتق:}$$

د پروت یا افقي محور سره غوڅتکي

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$$

ازمایینت چې ایا یو امحرافي ټکی م مخ تخ پروت دی

$$f''(x_1) = f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = -2$$

$$f''(x_2) = f''(4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

د افراطي ارزښتون شمېرنه

$$f(x_1) = f(-2) = 18 \quad f(x_2) = f(4) = -18$$

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}}(-2 | 18) \quad P_{\text{Min}}(4 | -18)}} \quad \text{افراطي ټکي:}$$

ت - انعطافټکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \quad f''(x) = 2x - 2 \quad f'''(x) = 2$$

د انعطافتکو لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_w = 1$$

د اورونټکو یا انعطاف ټکو په هکله آزمایشت

$$f'''(x_w) = f'''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

په $x = x_w = 1$ کې د انعطاف ځایونه

د اعطافتکي وضعیه قیمتونه:

$$y_w = f(x_w) = f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 8 + \frac{26}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w(1|0)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$ محور غوڅتکي

د y - محور سره غوڅتکی: $\underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{26}{3} = 8, \bar{6}\right)}}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3} = 0 \quad \text{صفر ځایونه:}$$

هورنر:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & \frac{1}{3} & -1 & -8 & \frac{26}{3} \\
x=1 & \downarrow & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} \\
 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & 0
 \end{array}
 \quad f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

پاتې یا باقي پولینوم:

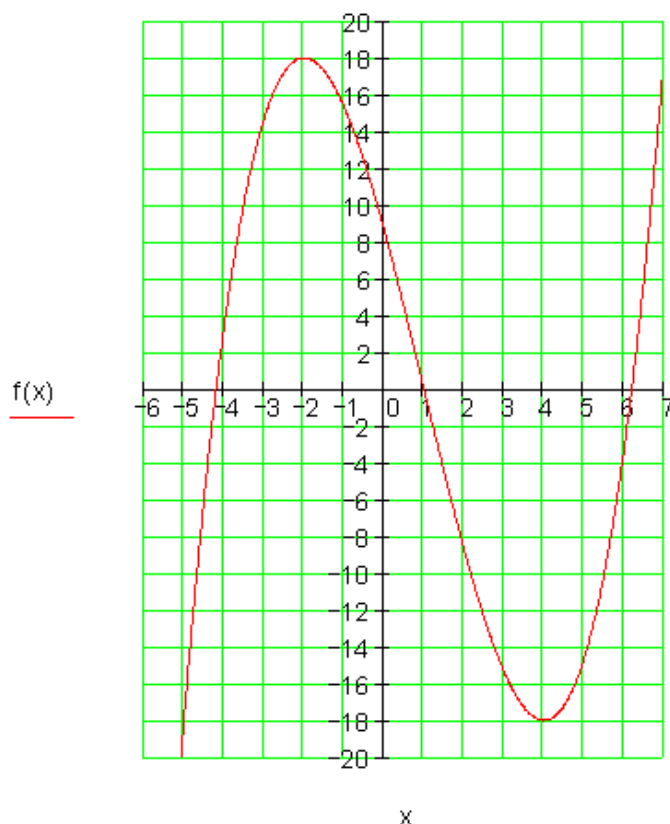
$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 26 = 0$$

$$p = -2 \quad q = -26 \quad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 26 = 27$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad x_2 = 1 + \sqrt{27} \approx 6,196$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{27} \approx -4,196$$



د x - محور سره غوڅتکی

$$\underline{\underline{P_{x1}(1|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x2}(1+\sqrt{27} \approx 6,196|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x3}(1-\sqrt{27} \approx -4,196|0)}}$$

افراطي ټکي

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = x^3 - 2x \quad \text{لومړۍ مشتق:}$$

$$f''(x) = 3x^2 - 2 \quad \text{دویم مشتق:}$$

خایونه د پراته محور سره:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$$

ازمایینت چې ایا یو انحرافي ټکی مو مخ ته پروت دی.

$$f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(\sqrt{2}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = \sqrt{2}$$

$$f''(x_3) = f''(-\sqrt{2}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3 = -\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتونو شمېرنه:

$$f(x_1) = f(0) = 0 \quad f(x_2) = f(\sqrt{2}) = -1 \quad f(x_3) = f(-\sqrt{2}) = -1$$

انحرافي ټکي:

$$\underline{\underline{P_{\text{Max}}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Min1}}(\sqrt{2} \approx 1,414|-1)}} \quad \underline{\underline{P_{\text{Min2}}(-\sqrt{2} \approx -1,414|-1)}}$$

د انعطاف- یا اوړونټکي:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 \quad f'(x) = x^3 - 2x \quad f''(x) = 3x^2 - 2 \quad f'''(x) = 6x$$

د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0 \mid +2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 2 \mid :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \mid \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_{w1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad x_{w2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

د انعطاف ټکو ازمايښت

$$f'''(x_{w1}) = f'''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816$$

$$f'''(x_{w2}) = f'''(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w2} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0,816$$

د انعطاف ټکو وضعیه قیمتونه:

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{5}{9} \approx -0,555$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{5}{9} \approx -0,555 \text{ weil } f(-x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,816 \mid -\frac{5}{9} \approx -0,555\right)}} \quad \underline{\underline{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0,816 \mid -\frac{5}{9} \approx -0,555\right)}}$$

محور غوڅټکي یا د تقاطع ټکي $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ د

د y محور غوڅتکي: $P_y(0|0)$

صفرخایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$$

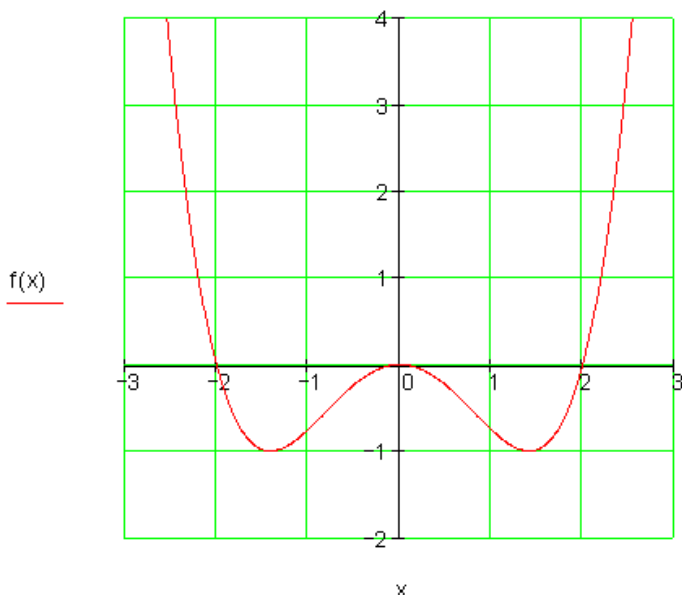
$$\Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 \mid +1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 2$$

د x - محور سره غوڅتکي:

$$\underline{\underline{P_{x1/2}(0|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x3/4}(\pm 2|0)}}$$



ث -

افراطي ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 \quad \text{لومړۍ مشتق:}$$

$$f''(x) = 3x^2 - 9x + \frac{9}{2} \quad \text{دویم مشتق:}$$

خایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{لومړۍ صفرخاي له گومان سره } x_1 = 2 \text{ ونیسی پاتې یا باقي پولینوم:}$$

$$x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}; x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}} \quad \text{نور حلونه ترې لاس ته راځي:}$$

ازماینت چې ایا یو انحرافي ټکی لرو:

$$f''(x_1) = f''(2) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 1,971 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 6,279 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}$$

د انحرافي ټکو شمېرنه

$$f(x_1) = f(2) = 0 \quad f(x_2) = f\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -0,136 \quad f(x_3) = f\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -3,098$$

انحرافي ټکي:

$$P_{\text{Max}}(2|0) \quad P_{\text{Min1}}\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}} \approx 2,686 \mid -0,136\right) \quad P_{\text{Min2}}\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}} \approx -0,186 \mid -3,098\right)$$

د انعطافټکي یا اوړونټکي:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 \quad f'(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

$$f''(x) = 3x^2 - 9x + \frac{9}{2} \quad f'''(x) = 6x - 9$$

د انعطافټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + \frac{9}{2} = 0 \mid : 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$$

$$p = -3 \quad q = \frac{3}{2} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x_{w1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad x_{w1} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366$$

$$x_{w2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634$$

د انعطافټکي - یا اوړونټکي ازماينست (لاندې الما نی د اوړونټکی یا انع

$$f'''(x_{w1}) = f'''(2,366) = 6 \cdot 2,366 - 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w1} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366$$

$$f'''(x_{w2}) = f'''(0,634) = 6 \cdot 0,634 - 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x = x_{w2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634$$

د انعطافټکي وضعيه قيمتونه:

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(2,366) = \frac{1}{4} \cdot 2,366^4 - \frac{3}{2} \cdot 2,366^3 + \frac{9}{4} \cdot 2,366^2 + 2,366 - 3 \approx -0,07$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(0,634) = \frac{1}{4} \cdot 0,634^4 - \frac{3}{2} \cdot 0,634^3 + \frac{9}{4} \cdot 0,634^2 + 0,634 - 3 \approx -1,80$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366 \mid y_{w1} \approx -0,07\right)}} \quad \underline{\underline{P_{w2}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634 \mid y_{w2} \approx -1,80\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$ تابع محور غوڅکي:

د y - محور سره غوڅکي: $P_y(0|-3)$

صفر ځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 1 & -3 \\ x = -1 & \downarrow & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -4 & 3 \\ & & \underline{-\frac{1}{4}} & \underline{\frac{7}{4}} & & \\ & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 & 0 \end{array} \quad f(-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

باقي يا پاتي پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 4x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 \\
 x=2 \downarrow & \frac{2}{4} & -\frac{5}{2} & 3 \\
 \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 0
 \end{array}
 \quad f(2)=0 \Rightarrow x_2=2$$

لاندې الماني = باقي - یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$p = -5 \quad q = 6 \quad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 x_{3/4} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \\
 x_3 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\
 x_4 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

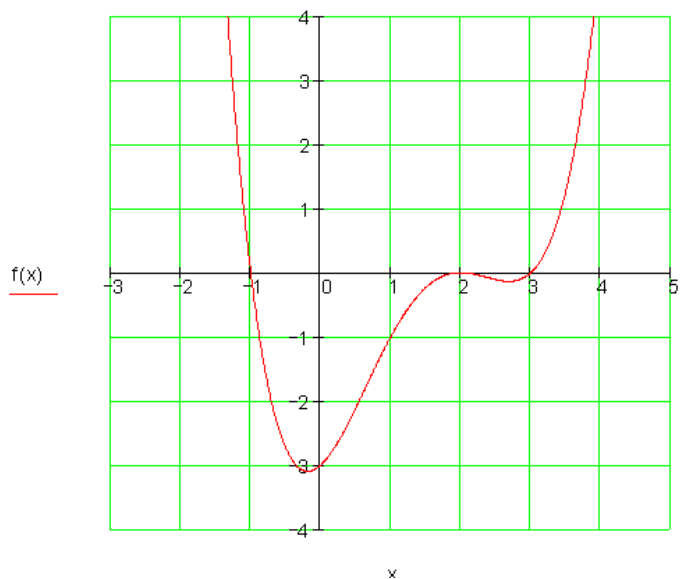
-ارزښتونه د لویې پسې ترتب کړی: $x_1 = -1 \quad x_{2/3} = 2 \quad x_4 = 3$

د x -محور سره غوڅتکی:

$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x2/3}(2|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_{x4}(3|0)}}$$



ج -

افراطي ټكي

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \quad \text{تابع:}$$

$$f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3 \quad \text{لومړی مشتق:}$$

$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \quad \text{دویم مشتق:}$$

خایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \quad (\text{بي (دوه) مربع مساوات})$$

$$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}; x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

ازماینت چي ایا یو افراطي ټکی مخ ته لرو

$$f''(x_1) = f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 3$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -3$$

$$f''(x_3) = f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -3,578 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

$$f''(x_4) = f''\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 3,578 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

د افراطي ارزښتون شمېرنه :

$$f(x_1) = f(3) = 0$$

$$f(x_2) = f(-3) = 0$$

$$f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 2,576 \quad f(x_4) = f\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -2,576$$

افراطي ټکي:

$$P_{\text{Min1}}(3|0) \quad P_{\text{Max1}}(-3|0) \quad P_{\text{Max2}}\left(\sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1,342 | 2,576\right)$$

$$P_{\text{Min2}}\left(-\sqrt{\frac{9}{5}} \approx -1,342 | -2,576\right)$$

اورونتکي یا د انعطاف ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \quad f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$$

$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \quad f'''(x) = \frac{60}{27}x^2 - 4$$

د انعطاف ټکي لپاره اړین شرایط:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^3 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{20}{27}x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2 = 4 \mid : \frac{20}{27} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{5} \mid \sqrt{} \Rightarrow x_{w2/3} = \pm \sqrt{\frac{27}{5}} \approx \pm 2,324 \end{aligned}$$

په انعطاف ټکي ازماښت:

$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = -4 \neq 0$ لاس ته راځي، په $x = x_{w1} = 0$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w2}) = f''' \left(\sqrt{\frac{27}{5}} \right) = \frac{60}{27} \cdot \frac{27}{5} - 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x = x_{w2} = \sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w3}) = f''' \left(-\sqrt{\frac{27}{5}} \right) = \frac{60}{27} \cdot \frac{27}{5} - 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x = x_{w2} = -\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

د اوړونټکي کواورډیناتونه یا پروتولارزبنتونه (قمتهای وضعیه؟؟):

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = 0$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f \left(\sqrt{\frac{27}{5}} \right) = \frac{1}{27} \left(\sqrt{\frac{27}{5}} \right)^5 - \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{27}{5}} \right)^3 + 3 \left(\sqrt{\frac{27}{5}} \right) \approx 1,115$$

$$y_{w3} = f(x_{w3}) = f\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{1}{27}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) \approx -1,115$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{w2}\left(\sqrt{\frac{27}{5}} \approx 2,324 | y_{w2} \approx 1,115\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{w3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}} \approx -2,324 | y_{w3} \approx -1,115\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ محور غوڅتکي یا د محور سره د تقاطع ټکي.

د y محور سره غوڅتکي: $P_y(0|0)$

صفر ځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0 \quad \text{بدلون: } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}z^2 - \frac{2}{3}z + 3 = 0 \quad \text{په } z \text{ کې مربع (څلورئ) مساوات}$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 \quad q = 81 \quad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

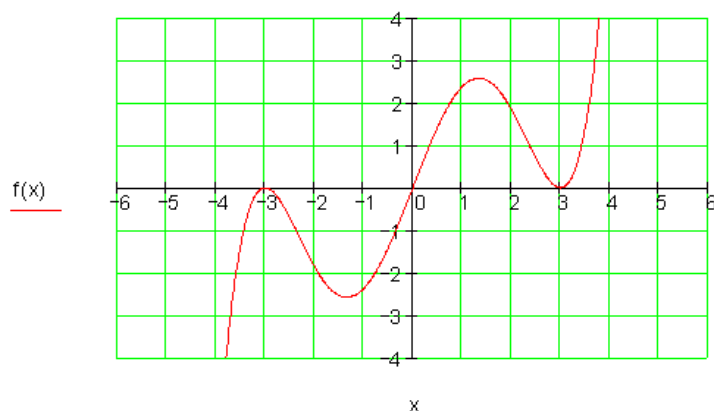
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{matrix} z_1 = 9 \\ z_2 = 9 \end{matrix}$$

۲۴۹ ۳ - دفرخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

$$z_1 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3 \quad z_2 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{4/5} = \pm 3$$

د x -محور سره غوڅتکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x2/3}(-3|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x4/5}(3|0)}}$$



یادونه: دا برخه دلته پای شوه.

3.IX: اوړونټکی یا د انعطاف ټکی او زینټکی

تمرینونه مشتقشمیرنه II

لاندې ټول راشنل یا هوښیار توابع د اوړونټکي په هکله وڅیړئ او په ورکړ شوي حالت کې اوړون- یا د انعطافټکي وټاکئ.

لومړی: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ دویم: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

دریم: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ څلورم: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad \text{شپږم:} \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad \text{اتم:} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad \text{لسم:} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1$$

تمرینونه

مشتقشمیرنه II

نتیجی او مفصل حلونه

نتیجی:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \Rightarrow P_w(2|1) \quad \text{اول -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \Rightarrow P_w\left(\frac{8}{3} \mid \frac{64}{27}\right) \quad \text{دویم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \Rightarrow P_w(2|1) \quad \text{دریم -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \Rightarrow P_w(2|5) \quad \text{څلورم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \Rightarrow P_w\left(-1 \mid \frac{5}{3}\right) \quad \text{پنځم -}$$

۲۵۱ ۳ - دفرخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow P_{w1/2}(\pm 1 | -1) \text{ شپږم -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm 1 \mid \frac{3}{2} = 1,5\right) \text{ اوم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \Rightarrow \text{اتم -}$$

اورونټکی نه شته

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \Rightarrow P_{w1}(0 | 1) \quad P_{w2}(2 | 5) \text{ نههم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm\sqrt{3} \approx 1,73 \mid -\frac{19}{4} = -4,75\right) \text{ لسم -}$$

مفصل حلونه:

لومړی - مفصل حل:

شمیرنه:

اول- د تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

دویم - د انعطافټکي لپاره اړین شرطونه:

ممکنه انعطافځای یا اورونځای دی

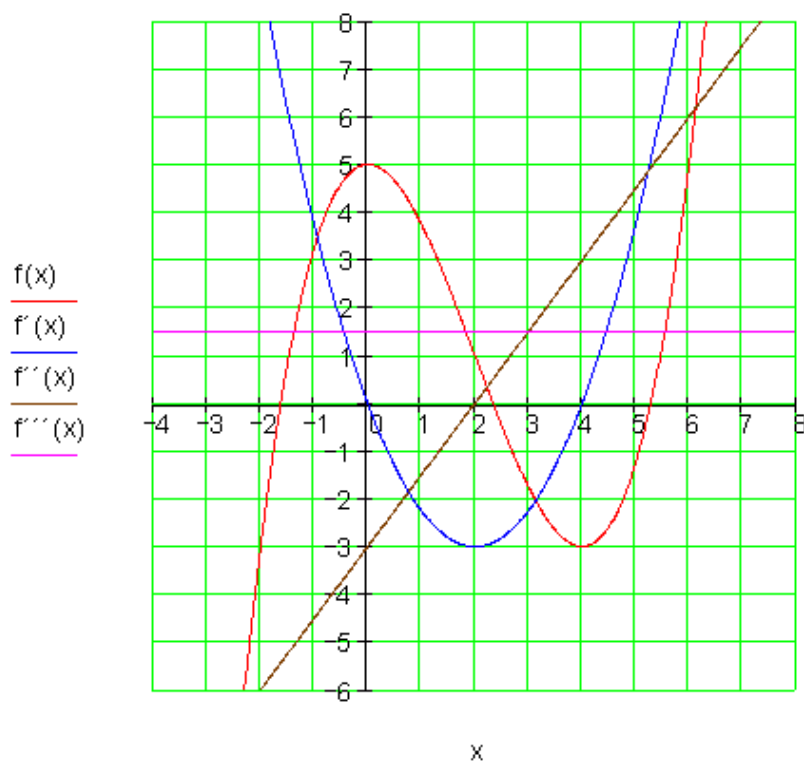
دریم - د دریم مشتق له لارې ښوونه، چې ایا یو انعطاف- یا اوږونټکی لرو:

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو ممکنه انعطاف‌خای یا اوږون‌خایدی.

څلورم - د انعطاف‌تکي ټاکنه د انعطاف‌خای ایښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|-1)}}$$



گرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

دویم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

$$f''(x) = 3x - 8 \quad f'''(x) = 3$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

مکنة اورنټکی یا د انعطاف ټکی

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f''' \left(\frac{8}{3} \right) = 3 \neq 0 \Rightarrow x = x_w = \frac{8}{3}$$

اورنټکی یا د انعطاف ټکی دی

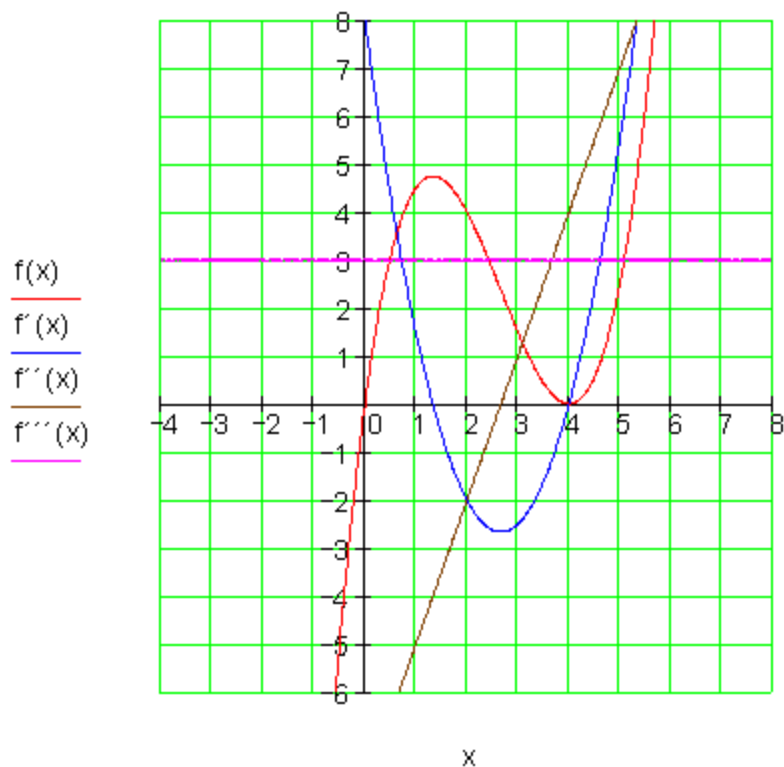
څلورم - د انعطاف ټکي ټاکنه په $f(x)$ کې د انعطاف ټکي اېښوونې له لارې

$$\begin{aligned} f(x_w) &= f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} - 4 \cdot \frac{64}{9} + 8 \cdot \frac{8}{3} \\ &= \frac{256}{27} - \frac{768}{27} + \frac{576}{27} = \frac{64}{27} \Rightarrow \underline{\underline{P_w \left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \mid \frac{64}{27} \approx 2,37 \right)}}} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$$

گرافونه :

$$f''(x) = 3x - 8 \quad f'''(x) = 3$$



دریم - مفصل حل

شمېرنه:

لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

ممکنه اوړونټکی یا د انعطاف ټکی دی

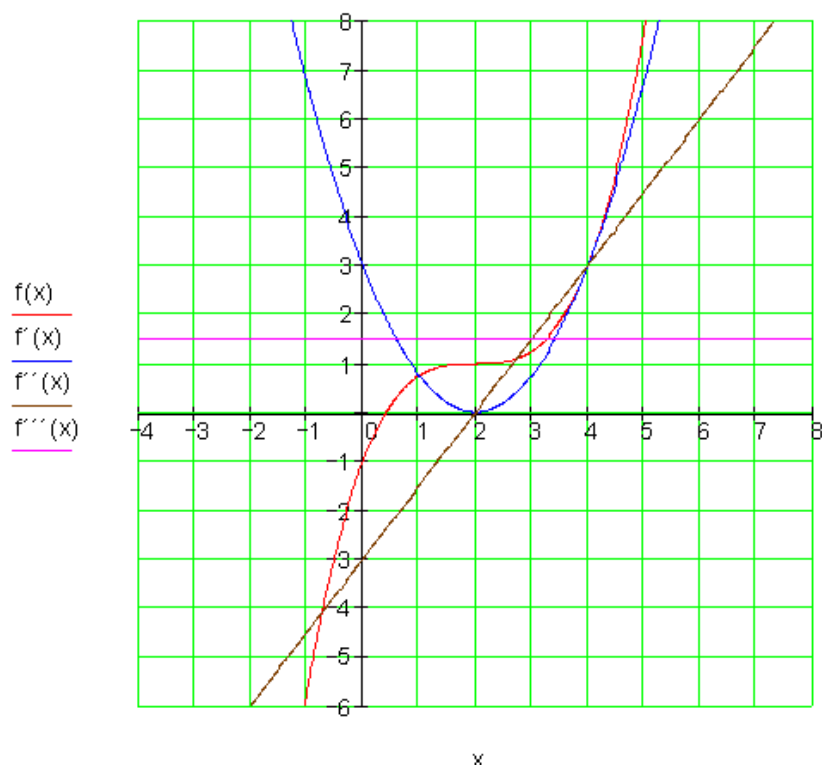
دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

ممکنه اوړونټکی دی

څلورم - د انعطاف ټکي ټاکنه د انعطاف ټکي اېښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|1)}}$$



گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

څلورم - مفصل حل:

شمیرنه: لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

ممکنه اوړونټکي (انعطافټکي) دي.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو انعطافټکی یا اوړونټکی دی.

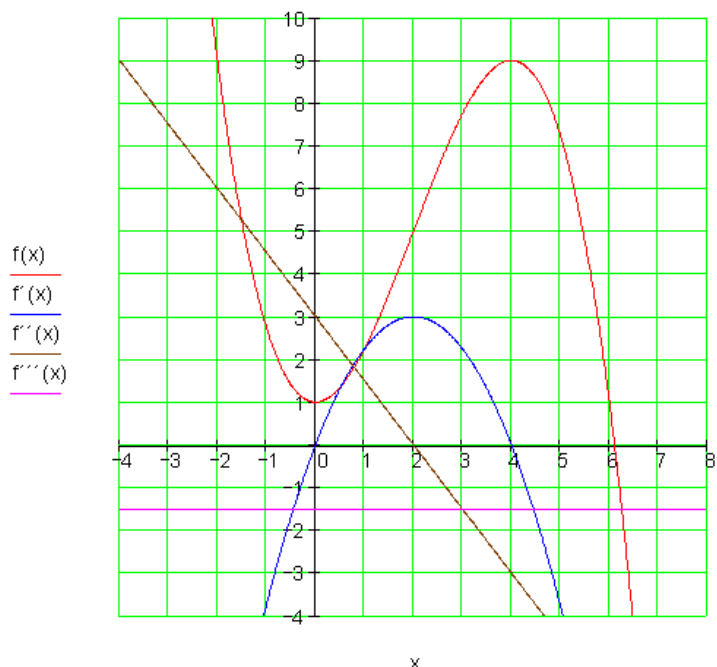
څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافخای ایښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_W) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 1 = -2 + 6 + 1 \Rightarrow \underline{\underline{R_W(2|5)}}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

گرافونه:

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$



پنځم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

ممکنه انعطاف - یا اوړونټکی دی

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

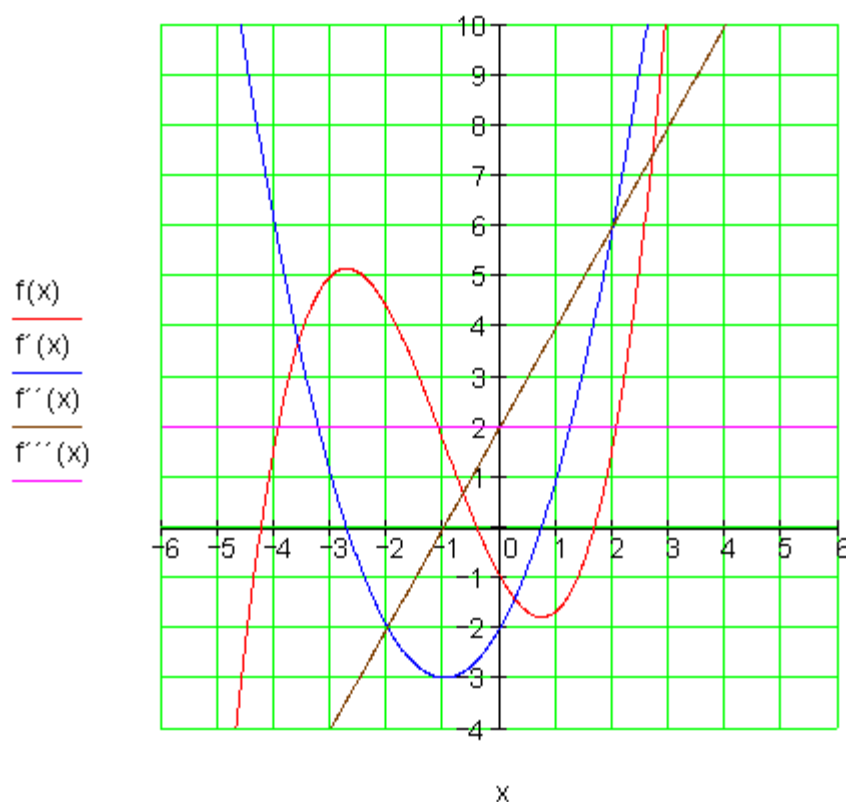
$$f'''(x) = f'''(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = -1$$

یو انعطافټکی دی.

څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافخای ایښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_W) = f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 - 1 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_W \left(-1 \mid \frac{5}{3} \approx 1,67 \right)}}$$



گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

شپږم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad f'(x) = 2x^3 - 6x \quad f''(x) = 6x^2 - 6 \quad f'''(x) = 12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

یو ممکنه انعطاف-یا ا وړونټکی دی.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

یو ا وړون-یا انعطافټکی دی

$$f'''(x_1) = f'''(1) = 12 \cdot 1 = 12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{w1} = 1$$

یو د انعطاف ټکی دی.

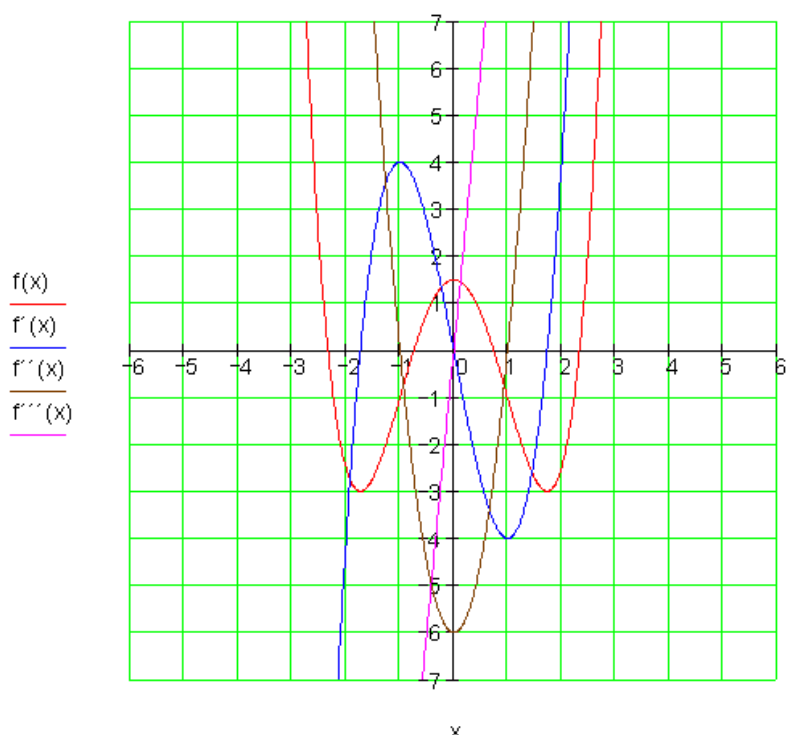
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = 12 \cdot (-1) = -12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{w2} = -1$$

څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافخای ایښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_{w1/2}) = f(\pm 1) = \frac{1}{2}(\pm 1)^4 - 3 \cdot (\pm 1)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{w1/2}(\pm 1 | -1)}}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad f'(x) = 2x^3 - 6x \quad f''(x) = 6x^2 - 6 \quad f'''(x) = 12x$$



اوم - مفصل حل:

شمېرنه: لومړۍ د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

ممکنه اوږون - د انعطاف ځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$$

یو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

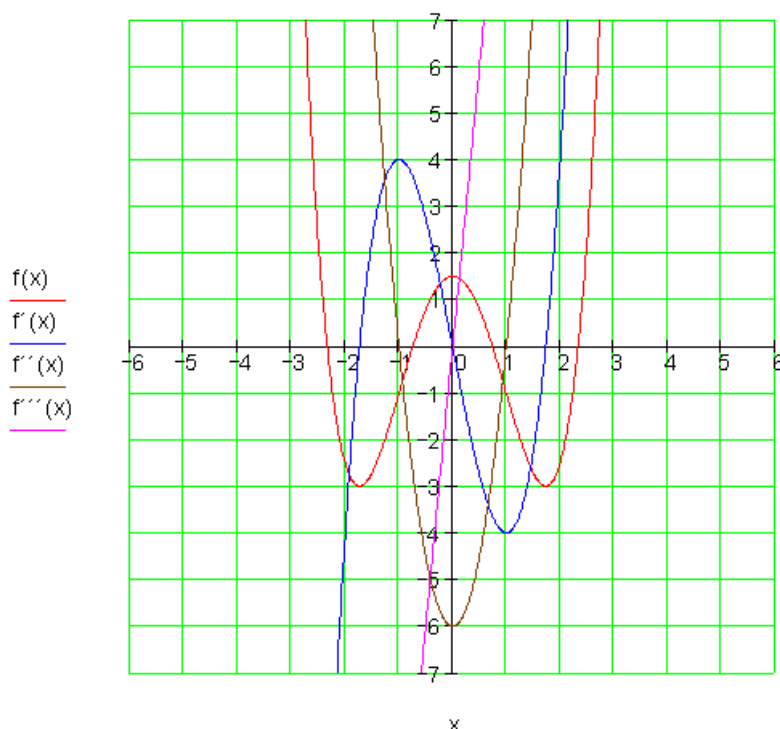
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12 \cdot (-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1$$

یو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

څلورم - د انعطاف ټاکنه د انعطاف ځای ایښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm 1) = -\frac{1}{2}(\pm 1)^4 + 3 \cdot (\pm 1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{W1/2} \left(\pm 1 \mid \frac{3}{2} = 1,5 \right)$$



گرافونه :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6$$

$$f'''(x) = -12x$$

اتم - مفصل حل:

شمېرنه:

لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1$$

ممکنه اوړنټکي یاد انعطاف ټکي دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

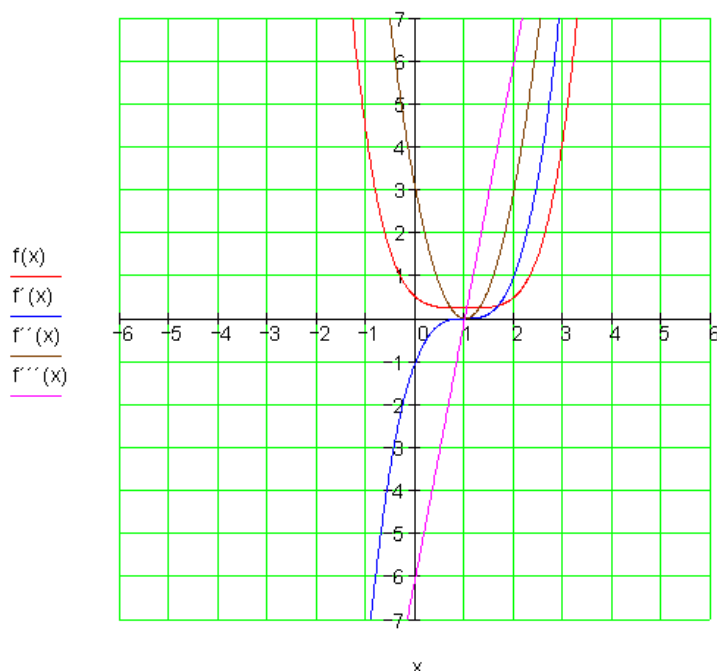
دا د انعطاف ټکی نه دی.

د $f(x)$ گراف اوړونټکی یا د انعطاف ټکی نه لري.

گرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$$



نهم - مفصل حل:

شمیرنه:

لومړۍ - د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$$

د پورته بنسټو: ممکنه اوړنځای یا د انعطاف ځای دی

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0$$

یو اورنځای یا د انعطاف ځای دی

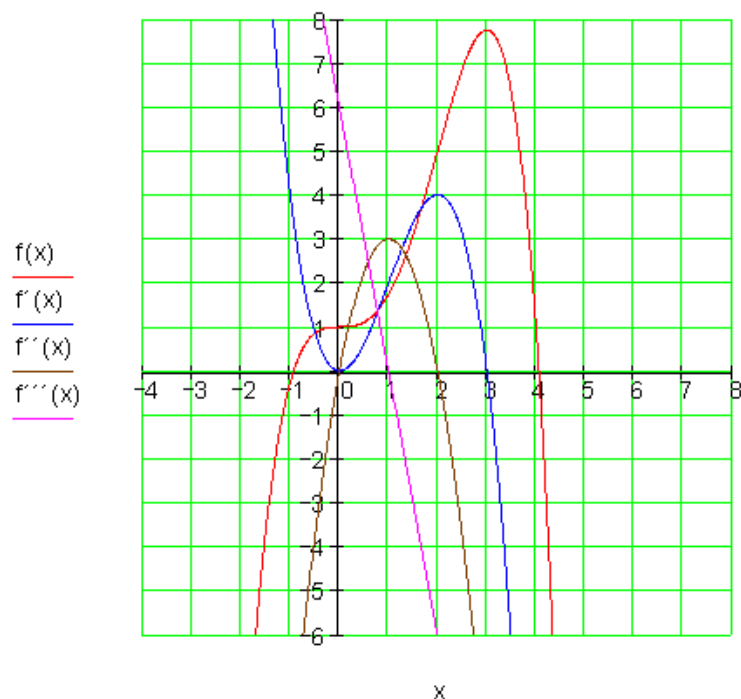
$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2$$

یو د انعطاف ځای دی

څلورم - د انعطاف ټکي ټاکنه د انعطاف ځای ایښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0|1)}}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2|5)}}$$



گرافونه (پورته ۰):

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'''(x) = -6x + 6$$

لسم - مفصل حل:

شمیرنه: لومړۍ د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3} ;$$

ممکنه انعطاف- یا اوړونځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چي ایا نو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(\sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{w1} = \sqrt{3} \text{ i}$$

یو اعطافځای دی

$$f'''(x_2) = f'''(-\sqrt{3}) = -2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{w2} = -\sqrt{3}$$

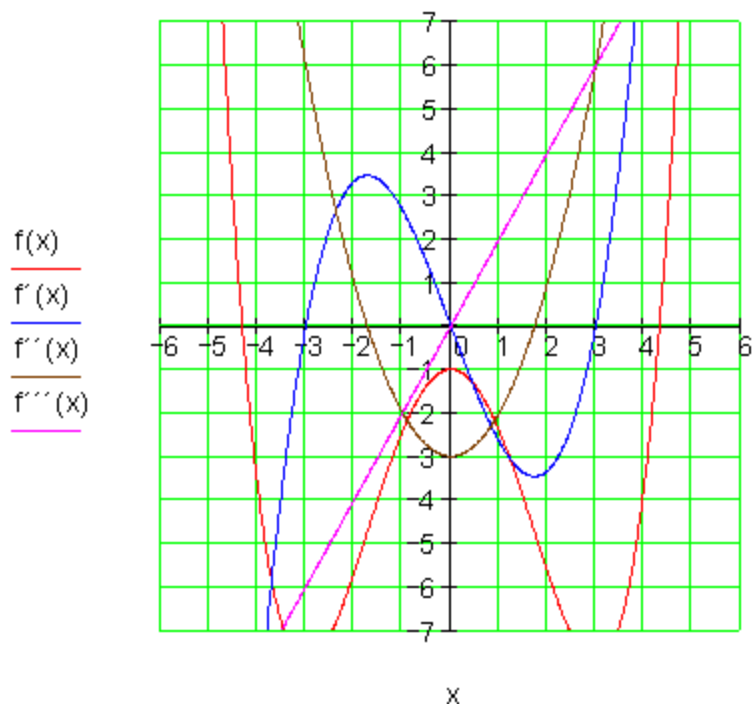
یو انعطافځای یا اوړونځای دی

څلورم - د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$\begin{aligned} f(x_{w1/2}) &= f(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{12}(\pm\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(\pm\sqrt{3})^2 - 1 = \frac{1}{12} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 - 1 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_{w1/2}(\pm\sqrt{3}) = -\frac{19}{4} = -4,75}}} \end{aligned}$$

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$



حلونه

نتیجی او مفصل حلونه

مشتق د ټولګي کار چمتووالي لپاره |

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

لومړۍ: الف -

ب - نسبي مینیموم = ککرټکی یا د رآس ټکي:

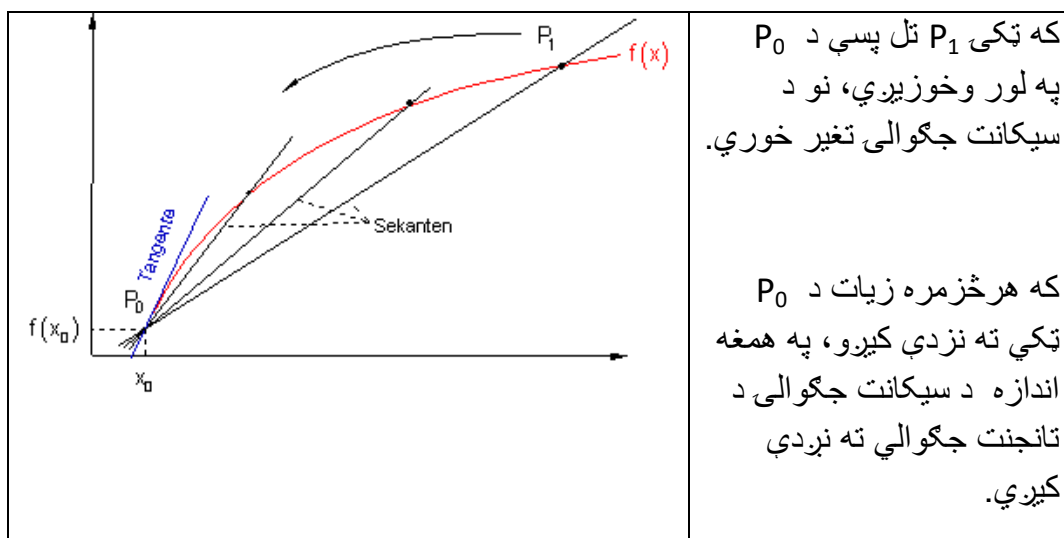
$$P_{\text{Min}}(-2|-4) = P_{\text{Sp}}(-2|-4)$$

$$P_{x1}(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0,83|0) \quad P_{x2}(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4,83|0) \quad \text{پ -}$$

ت - گرافونه د مفضل حل سره دي.

دویم: د یوه تابع د گراف جگېدنه په یوه ټکي کې په همغه ټکي کې د تابع د تانجنت د جگوالي سره برابره ده.

دریم:



څلورم: د x_0 په ځای کې د تابع لومړی مشتق په ټکي $P(x_0 | f(x_0))$ کې د تانجنت جگوالی دی او له دې سره په دې ټکي کې د $f(x)$ د گراف جگوالی هم دی.

پنځم: د مشتق تابع $f'(x)$ له دې امله د جگېدنې تابع بلل کيږي، ځکه چې دا په هر ټکي کې د $f(x)$ جگوالي نمایندګي موي.

شپږم:

$$f'(x) = 3 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) = 0 \quad \text{الف -}$$

$$\text{ب۔} \quad f'(x) = 15x^2 - 3 \quad f''(x) = 30x \quad f'''(x) = 30$$

$$\text{پ۔} \quad f'(x) = 24x^2 + 24x + 6 \quad f''(x) = 48x + 24 \quad f'''(x) = 48$$

$$\text{ت۔} \quad f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \quad f''(x) = 18x + 4 \quad f'''(x) = 18$$

$$\text{ث۔} \quad f'(x) = -4x^3 + 2 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x$$

$$\text{ث۔} \quad f'(x) = 4x^3 - 9 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f'''(x) = 24x$$

$$\text{ج۔} \quad f'(x) = -3cx^2 - a - b - c^3 - 1 \quad f''(x) = -6cx \quad f'''(x) = -6c$$

$$\text{چ۔} \quad f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \quad f''(x) = 24x - 4 \quad f'''(x) = 24$$

ح۔

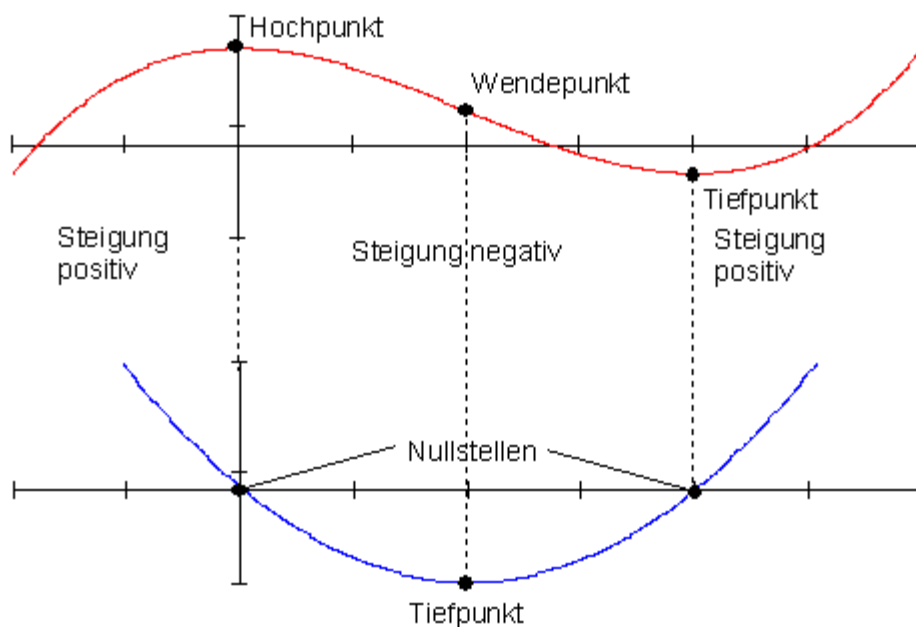
$$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \quad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6 \quad f'''(x) = 120x - 24$$

$$\text{خ۔} \quad f'(x) = -4x^3 \quad f''(x) = -12x^2 \quad f'''(x) = -24x$$

$$\text{اووم:} \quad t(x) = -5x + 6 \quad n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$$

اتم: پښتو: په گراف کې له کین و ښي لور او له پورته کښته لور په ترتیب.

تیب ټکی، اوړونټکی-یا انعطافټکی، جگیدنه مثبت، جگیدنه منفي یا کمیزه، تیبټکی جگیدنه مثبت، صفرخای، تیبټکی.



پوښتنې

مشتق شمیرنه د ټولګي کار د چمتووالي لپاره |

لومړۍ - پارابول په درې ټکو کې:

الف -

د پارابول د تابع مساوات $f(x)$ و ټاکی چې له لاندې ټکو تېرېږي:

$$P_1(-4|-2) \quad P_2(-2|-4) \quad P_3(2|4)$$

ب - د غوڅتکو یا د تقاطع ټکو وضعیه قیمتونه پیدا کړئ

پ - د $f(x)$ محور غوڅتکي پیدا کړی

ت - د $f(x)$ او $f'(x)$ گرافونه په پروتولار سیستم په د وضعیتیه قیمتونو سیستم کې وکارې.

دویم - په یوه ټکي کې د تابع د گراف د جگېدنې لاندې څه پوهیږو؟

دریم - یو د لیدلو لپاره رسم وکارې او د حملو سره یې تشریح کړی، چې په یوه گراف څنگه له سیکانټ جگوالي څخه د تانجنت جگوالي ته راځو؟

څلورم - د x_0 په ځا کې د یوې تابع لومړۍ مشتق څه معنا لري؟

پنځم - ولې د مشتق تابع د جگوالي تبع هم بلل کېږي؟

شپږم - د لاندې توابعو درېواره مشتق ونیسئ:

آلف - $f(x) = 3x + 4$ ب - $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$

پ - $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ ت - $f(x) = (2x + 1)^3$

ټ - $f(x) = x - x^4 + 3 + x$ ټ - $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$

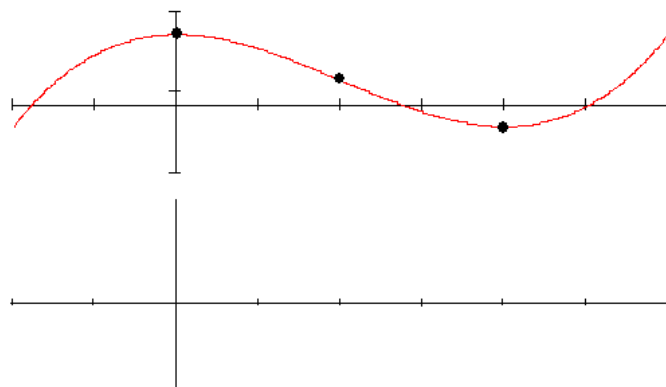
ج - $f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ چ - $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

ح - $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ خ - $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

اوم - یوه $f(x) = -x^2 - x + 2$ تابع ورکړ شوی ده.

د $P(2; f(2))$ ټکي لپاره دې د تنجنت او عمود مساوات و ټاکل شي.

اتم - د تابع د گراف لاندې د تابع د مشتق گراف وکارې او په دواړو گرافونو کې کرکترېستیکي یا خوي ټاکونکي ټکي په نڅېه کړی.



خوابونه:

لومړی: الف -

$$P_1(-4|-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$$

$$P_2(-2|-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_2(2|4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$$

a_0	a_1	a_2	
1	-4	16	-2
1	-2	4	-4 II - I
1	2	4	4 III - I
1	-4	16	-2
0	2	-12	-2 : 2
0	6	-12	6 : (-6)
1	-4	16	-2
0	1	-6	-1
0	-1	2	-1 III + II
1	-4	16	-2
0	1	-6	-1
0	0	-4	-2

$$-4a_2 = -2 |: (-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4 \cdot 2 + 16 \cdot \frac{1}{2} = -2$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$$

$$P_1(-4|-2): f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$P_2(-2|-4): f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_3(2|4): f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

ب - د پارابول ککرتکی یو انحرافي ټکی دی.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = x + 2 \Rightarrow f''(x) = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

ممکنه افراطي ځای دی

$$f''(x) = f''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel.}$$

په $x = -2$ کې نسبي مینیموم

$$f(-2) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_{\text{Min}}(-2|-4) = \underline{\underline{P_{\text{Sp}}(-2|-4)}}: \text{نسبي مینیموم} = \text{ککرتکی.}$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad f(0) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|-2)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$$

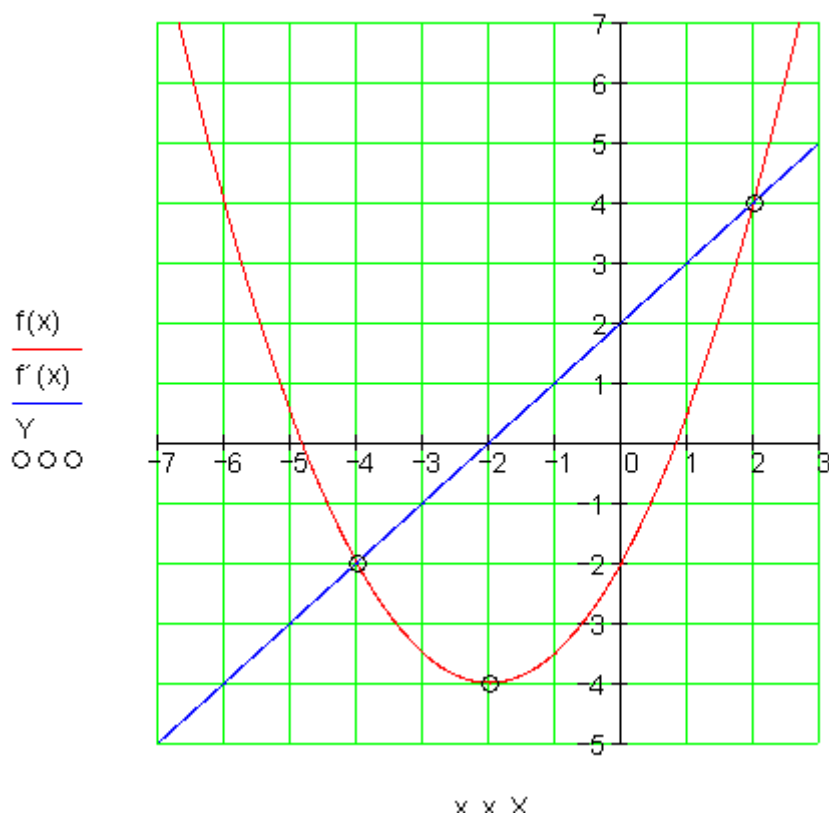
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

د مربع مساوات نورمال بڼه

$$p = 4; q = -4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \\ x_2 = -2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 | 0)}} \\ \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 | 0)}}$$

ت -



شپږم:

ت -

$$f(x) = (2 + x)^3 \quad \text{ت}$$

لومړۍ - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = (2x + 1)^3 = (2x + 1) \underbrace{(2x + 1)^2}_{1. \text{ bin. Formel}} = (2x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = 24x^2 + 24x + 6 \quad f''(x) = 48x + 24 \quad f'''(x) = 48$$

دویم د ځنډیزې قانون سره حل

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = \underline{24x^2 + 24x + 6}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x + 1) \cdot 2 = 24(2x + 1) = \underline{48x + 24}$$

$$f'''(x) = \underline{48}$$

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

لومړۍ حل د ضربونې قانون له لارې

$$f(x) = (2x + 1)^3 = (2x + 1) \underbrace{(2x + 1)^2}_{1. \text{ bin. Formel}} = (2x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = \underline{24x^2 + 24x + 6} \quad f''(x) = \underline{48x + 24} \quad f'''(x) = \underline{48}$$

دویم حل د ځنډیزې قانون له لارې

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = \underline{24x^2 + 24x + 6}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x + 1) \cdot 2 = 24(2x + 1) = \underline{48x + 24}$$

$$f'''(x) = \underline{48}$$

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a+b+c^3-1}_{\text{Konstante}}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-6cx}} \quad f'''(x) = \underline{\underline{-6c}}$$

$$f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2) \quad \text{خ-}$$

لومړۍ - د ضربولو له لارې د بینوم دریم قانون

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دویم: د ضرب قانون سره ضربول

$$= \underbrace{(a^2 + x^2)}_u \underbrace{(a^2 - x^2)}_v \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$) = u'v + uv' = 2x \cdot (a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x) = 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$

$$) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

اووم:

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1$$

د ټکي $P(2; f(2))$ وضعیه قیمتونه (کوارډیناتونه)

$$f(2) = -2^2 - 2 + 2 = -4 - 2 + 2 = -4 \Rightarrow P(2; -4)$$

جگېدنه په $P(2 | -4)$ کې.

$$(د تانجنت جگېدنه) f'(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -5 \Rightarrow mt = -5$$

د تانجنت مساوات:

$$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$$

تانجنت له ټکي $P(2|-4)$ تیریري له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس

$$\Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$$

لاس ته راځي $t(x) = -5x + 6$ د تانجنت مساوات دی له $P(2|-4)$ لارې.

عمود مساوات:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$$

نورمال له ټکي $P(2|-4)$ تیریري. لرو:

$$P(2|-4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow n(x) = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

د نورمال مساوات دی له $P(2|-4)$ څخه تیریري.

د فرمول له مخي الترناټیو یا بدیل حل

د $f(x)$ په گراف په ټکي $P(x_0; f(x_0))$ کي تانجنت او عمود.

د تانجنت مساوات

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

جگپښه $f'(x_0)$

د عمود مساوات

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0); f'(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \quad x_0 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$$

$$f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$$

$$t(x) = -5(x - 2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$$

$$n(x) = \frac{1}{5}(x - 2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - \frac{20}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

پوښتنې

مشتق د ټولګې کار لپاره II

اول - تانجنت او عمود:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7 \quad \text{الف - تابع دې ورکړ شوی وي.}$$

د تانجنت او عمود لپاره دې د $x_0 = 2$ لپاره وشمېرل شي.

ب - تانجنت او عمود د محور سره یو درېګودی (مثلث) جوړوي.

د دې سطحه وشمېری

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; x \in \mathbb{R} \quad \text{دویم - تابع ورکړ شوی}$$

الف - په کومو ځایونو کې $f(x)$ جگېدنه 2 لري؟

ب - د جگېدنه د په ځای کې ده.

بي له شمېرنې یو بل ځای د برابري جگېدنې سره ورکړی.

ستاسې گومان مدلل کړی.

پ - $f(x)$ په کومو ځایونو کې پروت یا افقي محور لري؟

مساوات یې ورکړی.

ت - په $f(x)$ پاندې تانجنت په سرچینه کې وټاکي..

ټ - د تانجنت مساوات په $f(x)$ باندې په ټکي $P(u | f(u))$ کې معلوم کړی

ث - کومه کرښه $f(x)$ په $P_x(3 | 0)$ کې عمود غوڅوي؟

دریم : د څلورمې درجې ټول ریښتونۍ یا تام راشنل تابع ورکړ شوي :

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$$

الف - ایا د تابع گراف سیومتريک دی؟ که هو، نو سیومتري کوم ډول ده؟

خپله پرېکړه باوري کړه (یا په دې هکله دلیل راوړه).

ب - نسبي انحراف (خوړا جگټکی، خوړا ټیټ ټکی) وشمېری.

پ - انعطاف ټکي وشمېری او په اوږونټکو یا انعطاف ټکو کې تابع مساوات هم وشمېری.

ت - محور غوڅټکي وشمېری.

ټ - تراوسه ټولو معلومو ټکو سره ارزښتجدول وکارۍ.

ث – په یوه وضعیه قیمت سیستم کې گراف نسبتاً ټیک وکارئ. او غوره یا د نخبه کېدو ځایونه په نخبه کړئ.

(که اړین وي، له دې سره خپل ارزښت جدول په څو ټکو وغزوی.

په انټروال $[-5; 5]$ کې د اندازې شمیروني یا وکچ یوونونو شمیروني (د کرښې یا خطکش په څیر اله) : کچ واحد یا یوون 1 cm دی)

ج – د گراف په یو غریزوالي وینا وکړئ، دا په دې معنا چې د همغریز جگیدني همداسې همغریز ټیټېدني لپاره انټروالونه ورکړئ.

ح – د گراف په انحنایوه وینا وکړئ، دا په دې معنا چې د ښي همداسې د کیني انحنای لپاره انټروالونه ورکړئ.

خ – د تعریفورشو ژۍ ټکي ورکړئ.

څلورم – د تام راشنل تابع گراف له لاندې ټکو تېرېږي:

$$P_1(-1|7) \quad P_2(-2|6) \quad P_3(3|1) \quad P_4(-3|-2)$$

د تابع مساوات وشمېرئ، همداسې د انعطاف ټکي او محور غوڅتکي.

ارزښت جدول ورکړئ او گراف دامکان تر حده په یوه مناسب پروت ولاړ سیستم کې ټیک وکارئ.

که د رسمولو لپاره کوم ټکي کم وو، نو هغه وشمېرئ.

حلونه:

نتیجې او مفصل حلونه مشتق د تولگي کار ته چمتووالی ||

لومړی:

$$t(x) = -4x + 10 \quad n(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \quad \text{الف -}$$

پ - دا مثلث یوه د 8,5 د سطحې واحدونو سطحه لري.

دویم:

الف - $f(x)$ تابع د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځای کې جگوالی 2 لري.ب - $f'(x)$ د $x_{1/2} = \pm 1,5$ په ځای کې جگپښه 0,25 لري.

$$t(x) = -x \quad \text{ت -}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{ث -} \quad t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3 \quad \text{ب -}$$

دریم:

الف - $f(x)$ گراف د y محور سره سیومتريک دی، ځکه چې اکسپوننت جوړه (جفت) دی

$$P_{\min 1}(-\sqrt{12} \approx -3,46 | 0) \quad P_{\min 2}(\sqrt{12} \approx 3,46 | 0) \quad P_{\max}(0 | 4,5) \quad \text{ب -}$$

$$P_{w1}(2 | 2) \Rightarrow t_1(x) = -2x + 6 \quad P_{w2}(-2 | 2) \Rightarrow t_2(x) = 2x + 6 \quad \text{پ -}$$

$$P_y(0 | 4,5) \quad P_{x1/2}(-\sqrt{12} \approx -3,46 | 0) \quad P_{x3/4}(\sqrt{12} \approx 3,46 | 0) \quad \text{ت -}$$

ب - گراف وگورئ. ث - ارزښت جدول وگورئ.

ج - په $[-\infty; -\sqrt{12}]$ کې کره یو غریز ټیټیډونکي

په $[-\sqrt{12}; 0]$ کې کره مونوتو جگیدونکي

په $]0; \sqrt{12}[$ کې کره مونوتون ټیټیدونکي

په $[\sqrt{12}; \infty[$ کې کره مونوتون چگیدونکي.

چ-په $]-\infty; -2[$ کې ککینه انحنا یا کوروالی په $]-2; 2[$ کې بنی کوروالی

په $]2; \infty[$ کې کینکوروال یا انحنا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

ح-

څلورم:

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$	تابع مساوات
$P_{\min}(2 -2) \quad P_{\max}\left(-\frac{4}{3} = -1,3 \mid \frac{196}{27} \approx 7,26\right)$	انحرافي ټکي
$P_w\left(\frac{1}{3} = 0,3 \mid \frac{71}{27} \approx 2,63\right)$	د انعطاف ټکي
$P_y(0 4) \quad P_{x1}(1 0) \quad P_{x2}(-\sqrt{8} \approx -2,83 0) \quad P_{x3}(\sqrt{8} \approx 2,83 0)$	محور غوڅټکي

مفصل حلونه:

لومړی:

الف-

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7 \quad x_0 = 2 \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{16} \cdot 16 - \frac{3}{2} \cdot 4 + 7 = 1 - 6 + 7 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{4} \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -4(x - 2) + 2 = -4x + 8 + 2 = \underline{\underline{-4x + 10}}$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{4}(x - 2) + 2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}}$$

$$b - \text{د ملت سطحه} = A = \frac{g \cdot h}{2}$$

تانجنت او عمود په $S(x_0 | f(x_0)) = S(2 | 2)$ ټکي کې غوڅوي. له دې سره لږ: $h =$
 2 LE د اوږدوالي دوه واحد. g د $t(x)$ او $n(x)$ د صفرځایونو تر منځ واټندی.

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 10 = 0 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x_1 = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{12}{2} = -6$$

$$g = 6 + 2,5 = 8,5 \Rightarrow A = \frac{8,5 \cdot 2}{2} = \underline{\underline{8,5 \text{ FE}}}$$

یادونه: په پورته 2 LE د اوږدوالي واحد او FE د سطحې واحد دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad \text{دویم: الف -}$$

په x_0 کې جگوالی ارزښت 2 لري.

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 9 \Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2} = \pm 3}}$$

تابع $f(x)$ له دې سره د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځای کې چکوالی ۲ لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محور سیمتریک دی.

د $f'(1,25) = -0,25$ پسې لاس ته راځي: $f'(-1,25x) = -0,25$

$f'(x)$ د $x_{1/2} = \pm 1,5$ په ځای کې $-0,25$ جگپښه لري.

پ -

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right); Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$$

تانجنټونه کرښې دي، چې د x محور سره غبرګې ځلي:

$$\underline{\underline{t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

ت -

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنټ مساوات په سرچینه کې: $x_0 = 0$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1 \quad f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = -1(x - 0) + 0 = -x}}$$

ټ -

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات په $P(u; f(u))$ ټکي کې.

$$t(x) = f'(u)(x - u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1 \quad f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$\begin{aligned} t(x) &= \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x - u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - u\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right) + \frac{1}{9}u^3 - u \\ &= \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{1}{3}u^3 + u + \frac{1}{9}u^3 - u = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{3}{9}u^3 + \frac{1}{9}u^3 = \\ &= \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3 \end{aligned}$$

ټ - کرښه، چې $f(x)$ په $P_x(3 | 0)$ کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 \quad P_x(3 | 0) \Rightarrow x_0 = 3$$

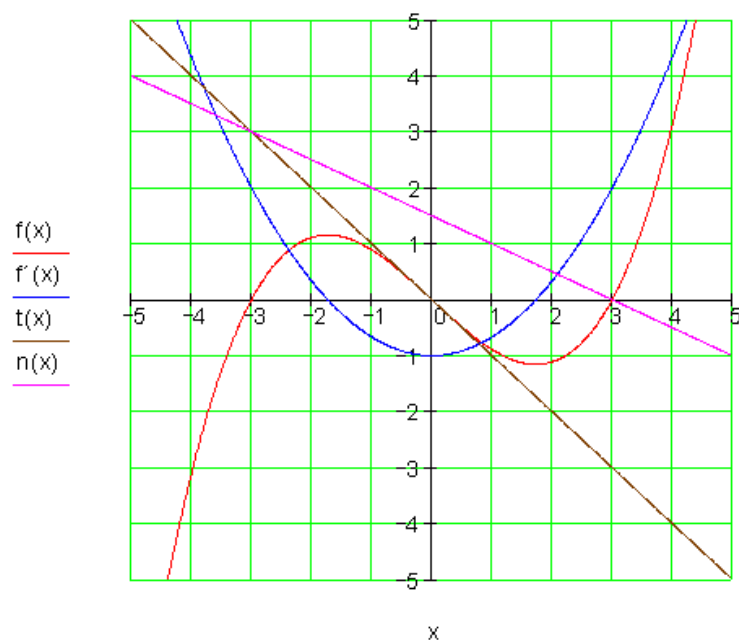
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(3) = \frac{1}{3} \cdot 9 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(x_0) = f(3) = \frac{1}{9} \cdot 27 - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$n(x) = -\frac{1}{2}(x - 3) + 0 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

ټ - گرافونه:



دریم: لف- د $f(x)$ گراف د y محور سره سیومتري دی، ځکه چې فقط جوړه یا جفت اکسیوننت رامنځ ته کیږي.

ب -

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$x_1 = 0$ او $x_{2,3} = \pm\sqrt{12}$ ځایونه دي، د پروت یا افقي محور سره.

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_{2/3}) = f''(\pm\sqrt{12}) = \frac{3}{8} \cdot 12 - \frac{3}{2} = \frac{36}{8} - \frac{3}{2} = 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1) = f(0) = \frac{9}{2} \quad f(x_{2/3}) = \frac{1}{32} \cdot 144 - \frac{3}{4} \cdot 12 + \frac{9}{2} = 0$$

$$P_{\max}(0 | 4,5) \quad P_{\min 1}(-\sqrt{12} \approx -3,46 | 0) \quad P_{\min 2}(\sqrt{12} \approx 3,46 | 0)$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm 2) = \frac{3}{4} \cdot (\pm 2) \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاسته راځي، چې د انعطاف ټکي په $x_{1/2} = \pm 2$ کې.

$$f(x_{1/2}) = f(\pm 2) = \frac{1}{32} \cdot 16 - \frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} = 2$$

$$P_{w1}(-2 | 2) \quad P_{w2}(2 | 2)$$

د انعطاف ټکي دي

د انعطاف تانجنت

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = f(-2) = 2 \quad f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 2$$

$$t_1(x) = 2(x+2) + 2 = \underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2 \quad f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{8} \cdot 8 - \frac{3}{2} \cdot 2 = -2$$

$$t_2(x) = -2(x-2) + 2 = \underline{\underline{-2x+6}}$$

ت -

$$f(0) = \frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{9}{2}\right)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} = 0 \quad (\text{بي يا دوه مربع مساوات})$$

$$x^2 = z \Rightarrow \frac{1}{32}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{9}{2} = 0 \mid \cdot 32 \Leftrightarrow z^2 - 24z + 144 = 0$$

$$p = -24 \quad q = 144 \quad \Rightarrow D = 144 - 144 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 12 \pm 0 = 12$$

$$z_1 = x^2 \Leftrightarrow 12 = x^2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{12} \quad z_2 = x^2 \Leftrightarrow 12 = x^2 \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{12}$$

$$\underline{\underline{P_{x1/3}\left(\sqrt{12} \approx 3,46 \mid 0\right)}} \quad \underline{\underline{P_{x1/3}\left(-\sqrt{12} \approx -3,46 \mid 0\right)}}$$

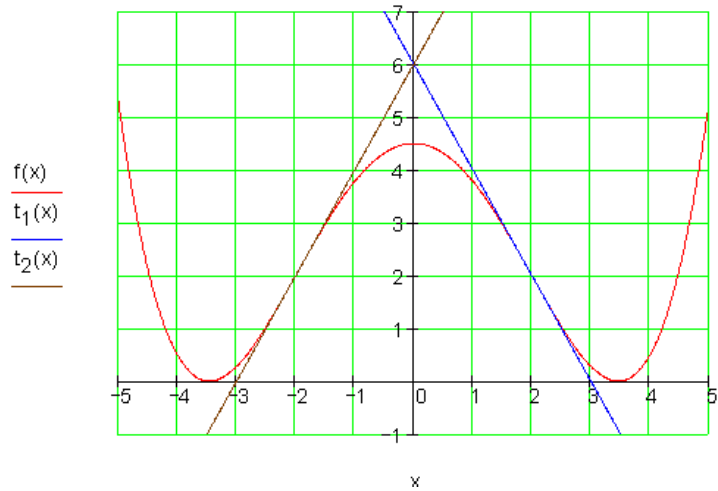
ټ - تابع ارزښتونه د جېشمیري سره شمیرل شوي.

د سیومتری دلایلو په بنسټ بسیا کوي، چې فقط د x مثبت ارزښت لپاره د تابع ارزښتونه وشمیرل شي.

x	-5	-4	$-\sqrt{12} \approx -3,46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5,28	0,5	0	0,28	2	3,78	4,5

x	1	2	3	$\sqrt{12} \approx 3,46$	4	5
$f(x)$	3,78	2	0,28	0	0,5	5,28

ث-ګرافونه:



ج - په $[-\sqrt{12}; 0]$ کې کله یو غریز جگېدونکی په $[-\infty; -\sqrt{12}]$ کې کره یو غریز ټیټېدونکی

په $[\sqrt{12}; \infty]$ کې کله یو غریز جگېدونکی په $[0; \sqrt{12}]$ کې کره یو غریز ټیټېدونکی د یو غریزوالي حالت له گراف څخه لوستل شوی.

تغیرات په افراطي ټکو کې رامنځ ته کیږي.

ح - په $[-\infty; -2]$ کې کینه انحنایا کېږوالی په $[-2; 2]$ کې ښی انحنایا

په $[2; \infty]$ کې کینه انحنایا کېږوالی

د انحنایا کېږوالي حالت له گراف څخه ولوستل شو.

تغییر په اوږون ټکو یا د انعطاف ټکو کې صورت نیسي

خ-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^4}}_{\rightarrow 0} \right] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^4}}_{\rightarrow 0} \right] = \infty$$

څلورم: د تابع مساوات شمېرنه :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = 7 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = 6 \Leftrightarrow -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 1 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$

$$P_4(-3|2) \Rightarrow f(-3) = 2 \Leftrightarrow -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	-1	1	-1	7	
1	-2	4	-8	6	II - I
1	3	9	27	1	III - I
1	-3	9	-27	2	IV - I
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	4	8	28	-6	III + 4 · II
0	-2	8	-26	-9	IV - 2 · II
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	0	20	0	-10	
0	0	2	-12	-7	

له اخرنئ دوه لیکو لرو:

$$20a_2 = -10 \mid 20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1 \Leftrightarrow -a_1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 7 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

افراطي تکی:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3}; q = -\frac{8}{3}$$

$$D = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$f''(x_1) = f''(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 2 - 8 + 4 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Min}}(2 \mid -2)}}$$

$$f(x_2) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} + 4 \cdot \frac{4}{3} + 4 = -\frac{64}{54} - \frac{16}{18} + \frac{16}{3} + 4$$

$$= -\frac{64}{54} - \frac{48}{54} + \frac{288}{54} + \frac{216}{54} = \frac{392}{54} = \frac{196}{27} \Rightarrow P_{\max}\left(-\frac{4}{3} \approx 1,33 \mid \frac{196}{27} \approx 7,26\right)$$

اورونټکی یا د انعطاف ټکی

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1 \Rightarrow f'''(x) = 3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \mid +1 \Leftrightarrow 3x = 1 \mid :3 \Leftrightarrow x_w = \frac{1}{3}$$

ممکنه انعطاف‌خایونه

$$f'''(x_w) = f'''(\frac{1}{3}) = 3 \neq 0 \Rightarrow x_w = \frac{1}{3}$$

یو انعطاف - یا اورونټکی دی.

$$f(x_w) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 = \frac{1}{54} - \frac{1}{18} - \frac{4}{3} + 4$$

$$= \frac{1}{54} - \frac{3}{54} - \frac{72}{54} + \frac{216}{54} = \frac{142}{54} = \frac{71}{27} \Rightarrow P_w\left(\frac{1}{3} \approx 0,33 \mid \frac{71}{27} \approx 2,63\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad f(0) = 4 \Rightarrow P_y(0 \mid 4)$$

محور غوڅتکی:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = 0$$

لومړی صفرځای د آزمایشنت له لارې. د هورنر-شیما:

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 & 4 \\ x=1 & \downarrow & \frac{1}{2} & 0 & -4 \\ & & \underline{\frac{1}{2}} & & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 \end{array} \quad f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

پاتې يا باقي پولینومونه:

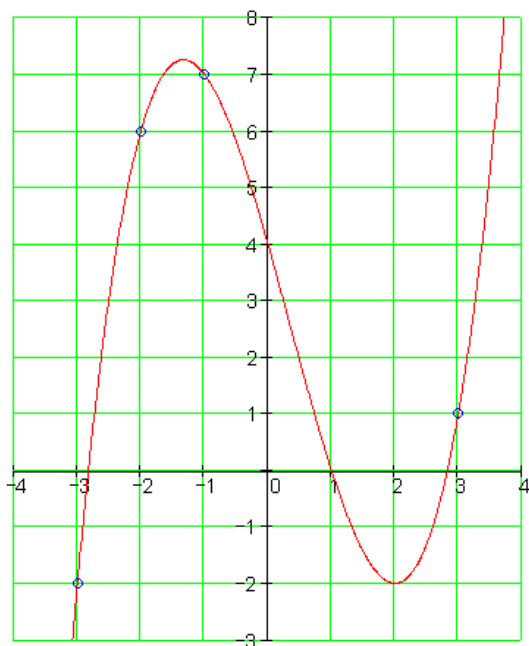
$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(1|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x2/3}(\pm\sqrt{8} \approx 2,83|0)}}$$

ارزینتجدول:

x	-3	-2,83	-2	-1,33	-1	0	0,33	1	2	2,83	3
f(x)	-2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	-2	0	1

گراف:



پوښتنې

مشتقشمیرنه د ټولگي کار ته چمتووالی III

اول -

د دریمې درجې یو تام یا ټول ریښتونی یا راشنل عدد ورکړ شوی:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

الف - مشتقتابع $f'(x)$ معلومه کړی یا وټاکي

ب - د $f'(x)$ تابع بیا مشتق ونیسی، چي له هغې $f''(x)$ تابع منځ ته راشي

پ - د ارزښتجدول لاندې ارزښتونه وشمېری.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-7	-0,38		3,88	3	1,13		-2,63	-3	-1,38	3
f'(x)	17	9,75	4	-0,25		-4,25	-4	-2,25		5,75	12
f''(x)	-16	-13	-10	-7		-1	2		8	11	14

ت - د مخه ورکړ شوي وضعیه قیمتسیستم کې د $f(x)$, $f'(x)$ او $f''(x)$ گرافونه رسم کړی.

دویم - لاندې ریښتوني توابع ورکړ شوي دي:

$$\text{دوه الف - } f(x) = 2x^3 - 6x \quad \text{دوه ب - } f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$\text{دوه پ - } f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \quad \text{دوه ت - } f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

الف - الف - د سیمټري حالت په هکله ویناوې وکړی

ب- پ - ټکي د پراته تانجنت سره وشمېری

پ- پ - د محورمر غوڅټکي وټاکي

ت - یو څو تابع ارزښتونه وشمیری او گراف یې وباسی

دریم - یو تام ریښتونی تابع له لاندې څلور ټکو تیریری:

درې الف - $P_1(-1|7); P_2(-2|6); P_3(3|1); P_4(-3|-2)$

درې ب $P_1(1|6); P_2(3|-4); P_3\left(-\frac{1}{2}|\frac{45}{8}\right); P_4\left(-\frac{3}{2}|\frac{77}{8}\right)$

الف - د تابع مساوات وشمیری ب - د سیمتری حالت باندې یوه وینا وکړی

پ - د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي وشمیری

ت - محور غوڅټکي وټاکي یا معلوم کړی.

یو څو تابع ارزښتونه وشمیری او گراف یې رسم کړی.

څلورم - د فوټبال لوبه کې د ازاده توپ وهلو د $f(x)$ تابع په نږدې توګه د توپ د الوتنې منحنی یا ګره ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2; x > 0$$

الف - توپ کوم ماکسیمال جګوالی غوره کوي او د شوټټکي څخه څومره لرې دی؟

ب - توپ د شوټټکي څخه څومره لرې بېرته په ځمکه لویری؟

پ - نه متره لرې د لوبډلي مقاومت دیوال دی، هغه دوه متره جګ دی. ایا توپ له دې اوري؟

ت - توپ د ګلکریښي څخه په متره جګوالي الوزي. ازاده شوې له کوم واټن څخه وهل شوی دی؟

پنځم - د لاندې توابعو لپاره کمښتویش وشمیری

۲۹۵ ۳ - دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

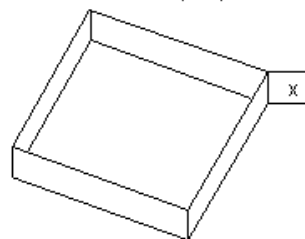
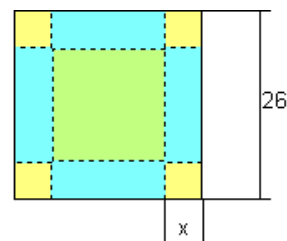
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

او د یوه رسم په کتنه یې ټولیزه معنا روښانه کړی.

الف - $f(x) = x^3$ ب - $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

شپږم - د یوه مربع کارتون څخه یو کوتی یا مکعب بې له پوښ جوړیږي، چې د اړخونو یا ضلعو اوږدوالی یې 26 دی او جگوالی یې x دی، جوړیږي.

الف - د تابع ترم یې وټاکي، چې حجم V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښايي.

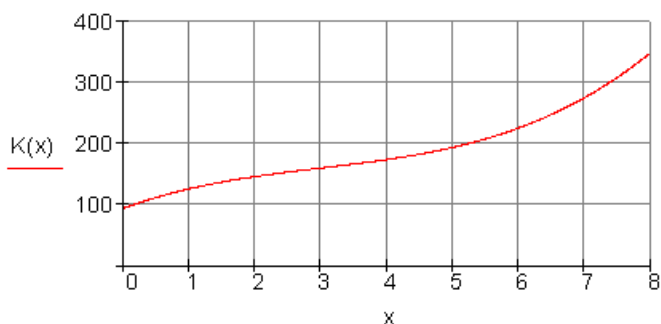


ب - کراف یې وکارې او تقریبي ماکسیمال حجم یې معلوم کړی

اوم - د یوه رغتون د د لگښتتابع $K(x)$ د ناروغانو گڼون یا تعداد x او ټولو لگښتونو ترمنځ انځوروي.

$x = 1$ دې د 100 ناروغانو په معنا، $y = 1$ د د روحي د زرو یورو / 1000 € Tag په معنا وي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف - لگښتتابع په خپله کتابچه کې ولیکئ

ب - د لگښت تابع مشتق د مشتقلگښت یا هم پوله لگښت بولو. دا لگښت زیاتېده بنایي، چې ناروغانو تعداد په واک کې ده. (د $K(x)$ چگېدنه). $K'(x)$ وټاکئ او په کواورډیناتسیستم کې یې گراف رسم کړئ.

پ - د ناروغانو کوم تعداد سره د لگښت زیاتېدل خورا کم دي؟
دا ارزښت وشمېرئ.

حلونه

مفصل حلونه

د ټولګې کار لپاره مشتقشمیرنه III

لومړۍ:

الف - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

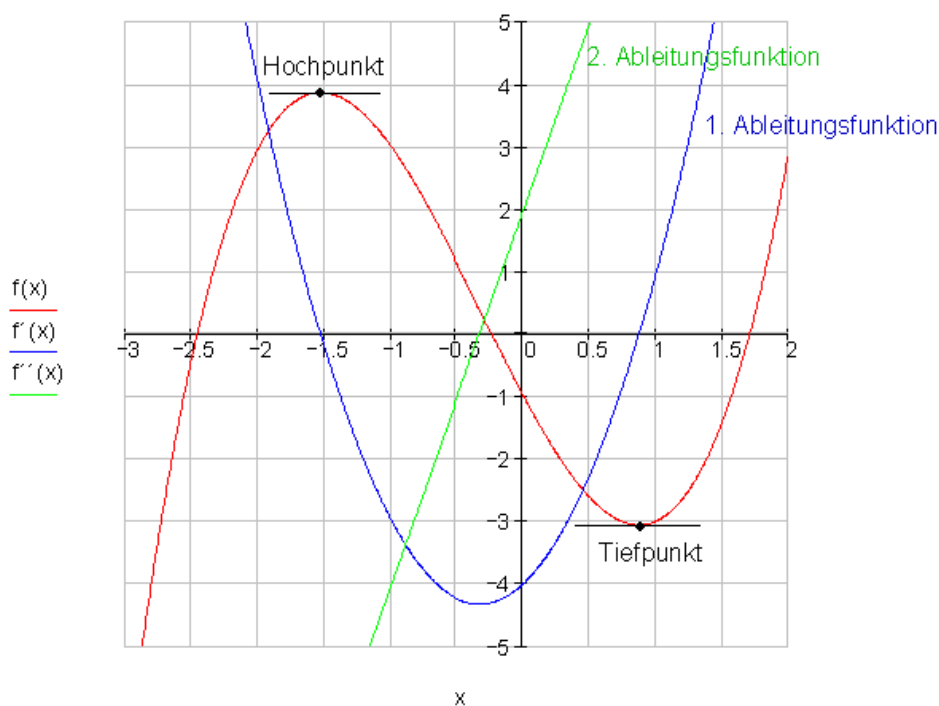
ب - $f''(x) = 6x + 2$

پ - ارزښتچډول

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-7	-0,38	3	3,88	3	1,13	-1	-2,63	-3	-1,38	3
f'(x)	17	9,75	4	-0,25	-3	-4,25	-4	-2,25	1	5,75	12
f''(x)	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14

ت گراف:

$$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4 \quad f''(x) := 6x + 2$$



د پورته پښتو له کین: جگتکی، دویم مشتق، لومړی مشتق، نیټیکي

ت-

$f'(x) = 0$	جگټکی (نسبي ماکس) پروت تانجنت
$f''(x) < 0$	دویم مشتق له صفر کوچنی
$f'(x) = 0$	ټیټټکی (نسبي مین) پروت تانجنت
$f''(x) < 0$	دویم مشتق له صفر لوی.

دویم. یو: الف-

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow$$

تکی سیمتری، ځکه چې فقط ناجوره (طاق) اکسپوننت لرو.

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{صدق کوي:}$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 \quad \text{ب -}$$

د پروت محور سره ټکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \quad | +6$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 = 6 \quad | :6$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$$

د $x_1 = 1$ او $x_2 = -1$ په ځایونو کې افقي تانجنتونه شتون لري.

د y وضعیه قیمت شمېرنه

$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = -4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1|-4)}}$$

$$f(x_2) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1|4)}}$$

پ - د $f(x) = 2x^3 - 6x$ محور غوڅتکي

$$P_y: f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفر ځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$

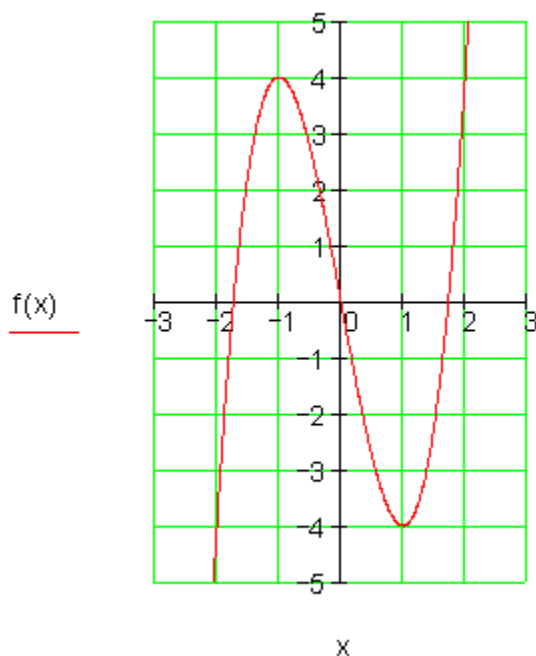
$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2x^2 - 6 = 0 | +6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 | :2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0); P_{x2}(\sqrt{3}|0); P_{x3}(-\sqrt{3}|0)}}$$



ت-

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$$

د سیومتری ټکي له امله

x	-2	-1,73	-1	0	1	1,73	2
f(x)	-4	0	4	0	-4	0	4

دویم. دوه:

الف -

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$$

سیومتری مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جوړه (جفت) یا فقط ناجوړه (طاق) اکسیوننتونه لرو.

ب -

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12x$$

ټکي له پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(6x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$6x + 12 = 0 \mid -12$$

$$\Leftrightarrow 6x = -12 \mid :6$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -2$$

د $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ او په ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري.

د y وضعیه قیمتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = -4 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|-4)}}$$

$$f(x_2) = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2|4)}}$$

پ -

د $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$ محور غوڅتکي یا د تقاطع ټکي.

$$P_y: f(0) = -4 \Rightarrow P_y(0|-4)$$

صفرخایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$$

یو صفرخاس د ازمايښت له لارې پیداوو.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 = 0$$

د $x_1 = -1$ سره صفرخاي.

د هورنر شیمه له لارې پولینوم راکښته یا کمه ونه

$$\begin{array}{r} 2 \quad 6 \quad 0 \quad -4 \\ x = -1 \downarrow \quad \underline{-2} \quad \underline{-4} \quad \underline{4} \\ 2 \quad 4 \quad -4 \quad 0 \end{array}$$

یا کم شوی پولینوم:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0 | : 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$p = 2; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ x_3 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$\underline{P_{x1}(-1|0); P_{x2}(-1 + \sqrt{3}|0); P_{x3}(-1 - \sqrt{3}|0)}$$

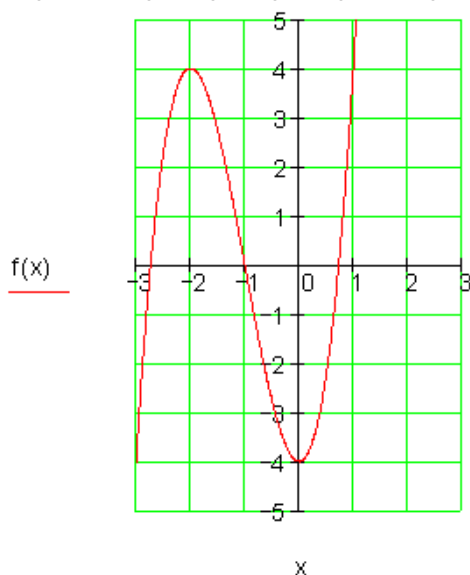
$$\text{bzw. } P_{x1}(-1|0); P_{x2}(0,73|0); P_{x3}(-2,73|0)$$

ت –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 4 = -4$$

x	-3	-2,73	-2	-1	0	0,73	1
f(x)	-4	0	4	0	-4	0	4



دویم. دري:

الف -

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \Rightarrow$$

محورسیومتری، حکه چي حوره یا جفت اکسپوننت مخ ته لرو.

$$f(-x) = f(x) \text{ صدق کوي.}$$

ب -

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{10}x^3 - \frac{18}{5}x$$

د پراته یا افقي تانجنت سره غوڅتکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{10}x^3 - \frac{18}{5}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{4}{10}x^2 - \frac{18}{5} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{4}{10}x^2 - \frac{18}{5} = 0 \mid + \frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{10}x^2 = \frac{18}{5} \mid : \frac{4}{10}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3$$

په $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لريد y وضعیه قیمتونو کواوردیناتونه شمیرل.

$$f(x_1) = f(0) = \frac{81}{10}$$

$$\Rightarrow \underline{P_1 \left(0 \mid \frac{81}{10} \right)} \text{ bzw. } P_1(0 \mid 8,1)$$

$$f(x_2) = f(3) = \frac{1}{10} \cdot 3^4 - \frac{9}{5} \cdot 3^2 + \frac{81}{10} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(3|0)}}$$

$$\underline{\underline{P_3(-3|0)}} \quad f(x_2) = f(-3) = f(3) = 0 \quad \text{د محور سیومتری له امله لاس ته راځي}$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \quad \text{د محور غوڅتکي یا د محور د تقاطع ټکي}$$

$$P_y: f(0) = \frac{81}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{81}{10}\right)}} \quad \text{همداسې } P_y(0|8,1)$$

صفر ځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18; q = 81 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 3 \end{array} \right.$$

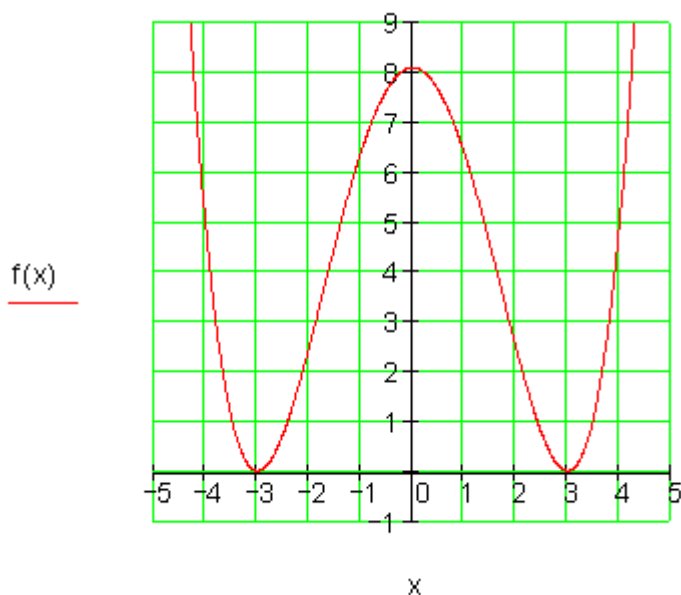
$$\underline{\underline{P_{x1/3}(3|0); P_{x2/4}(-3|0)}} \quad \text{دواړه ډبل صفر ځایونه دي}$$

دا په دې معنا، چې گراف په دې ځای کې د x محور لمسوي.

داسې لمس ټکي یا مماسونه تل هم ټکي دي د پراته تانجنت سره.

۳۰۵ – دفرنخیال شمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

ت – څیره چې وروسته وی بڼه به وی، خو څه وکړو. مخ باید برابر شي.



$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{10} \cdot 1^4 - \frac{9}{5} \cdot 1^2 + \frac{81}{10} = 6,4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 6,4 \quad \text{د محور سیمتری له امله}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{10} \cdot 2^4 - \frac{9}{5} \cdot 2^2 + \frac{81}{10} = 2,5$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = f(2) = 2,5 \quad \text{د محور سیومتری له امله}$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{10} \cdot 4^4 - \frac{9}{5} \cdot 4^2 + \frac{81}{10} = 4,9$$

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = f(4) = 4,9 \quad \text{د محور سیومتری له امله}$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

دویم. څلور:

الف -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$$

یعنې له دې لرو چې: سیومتری مو مخ ته نه ده پرته،

ځکه چې نه فقط جفت (جوړه) او نه فقط طاق (ناجوړه) اکسپوننتونه مخ ته لرو.

ب -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2$$

ټکي د پراته تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 0 \mid + \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x = \frac{12}{5} \mid : \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x_3 = 3$$

د $x_{1/2} = 0$ او $x_3 = 3$ ځایونو کې پروت تانجنت شته.

د y کواوردیناتو شمېرل.

$$f(x_1) = f(x_2) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0)}}$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{1}{5} \cdot 3^4 - \frac{4}{5} \cdot 3^3 = -5,4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3|-5,4)}}$$

پ -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

محور غوڅتکي د

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفر خایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \mid + \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \mid \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0) ; P_{x4}(4|0)}}$$

ت -

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5} \cdot 1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^3 = -0,6$$

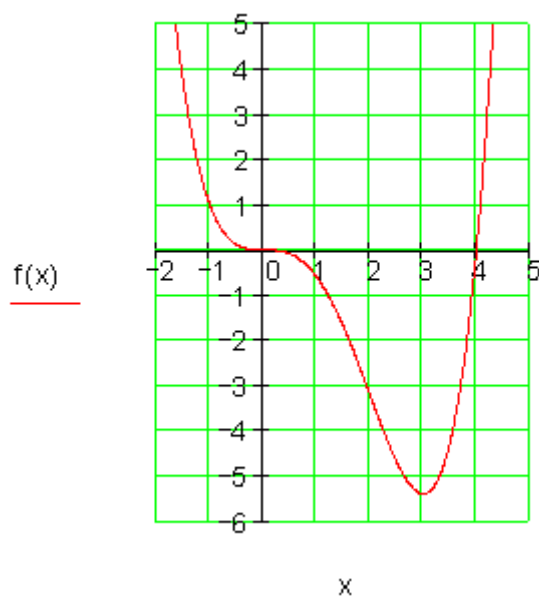
$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{5} \cdot (-1)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-1)^3 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{5} \cdot 2^4 - \frac{4}{5} \cdot 2^3 = -3,2$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{5} \cdot (-2)^4 - \frac{4}{5} \cdot (-2)^3 = 9,6$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = \frac{1}{5} \cdot 5^4 - \frac{4}{5} \cdot 5^3 = 25$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	9,6	1	0	-0,6	-3,2	-5,4	0	25



یادونه : د $x = 0$ په خای کې د $f(x)$ گراف پروت تانجنت لري، مگر هلته نه چگتکی پروت دی او نه تیټ ټکی.

دا په دې معنا، چې د پراته تانجنت سره خایونه حتمي نه ده چې افراطي خایونه وي. مگر افراطي ټکی پروت تانجنت لري.

دریم. یو:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8 \cdot a_3 + 4 \cdot a_2 - 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 1$$

$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 - 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	-1	1	-1	7	
1	-2	4	-8	6	II - I
1	3	9	27	1	III - I
1	3	9	-27	-2	IV - I
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	I · (-1)
0	4	8	28	-6	I : 4
0	-2	8	-26	-9	I : (-2)
1	-1	1	-1	7	
0	1	-3	7	1	
0	1	2	7	-1,5	III - II
0	1	-4	13	4,5	IV - II
1	-1	1	-1	7	
0	1	-3	7	1	
0	0	5	0	-2,5	
0	0	-1	6	3,5	

$$5a_2 = -2,5 | : 5$$

$$\Leftrightarrow a_2 = -0,5 = -\frac{1}{2}$$

$$-a_2 + 6a_3 = 3,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5 + 6a_3 = 3,5 | - 0,5$$

$$\Leftrightarrow 6a_3 = 3 | : 6$$

$$\Leftrightarrow a_3 = 0,5 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 1,5 + 3,5 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 1 - 1,5 - 3,5 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - 0,5 - 0,5 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 7 - 4 + 0,5 + 0,5 = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

ب -

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

سیومتری مخ ته نه لرو

ځکه چې نه فقط جوړه او نه فقط نا جوړه یعنی طاق اکسپوننت شتون لري

پ -

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4$$

تگی د پراټه تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid : \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3}; q = -\frac{8}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{24}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

د $x_1 = 2$ او $x_2 = -4/3$ په ځای کې پراټه تانجنتونه شتون لري

د γ کوآوردیناتونه و شمیری

$$x_1) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = -2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(2 | -2)}}$$

$$x_2) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = \frac{196}{27} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{P_2\left(-\frac{4}{3} \approx -1,33 \mid \frac{196}{27} \approx 7,26\right)}}$$

ت-

د محور غوڅتکی یا نقطه تقاطع $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$

$$P_y: f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 4)}}$$

صفرخای وه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 1 \quad \begin{array}{ccc|c} 1/2 & -1/2 & -4 & 4 \\ \downarrow & 1/2 & 0 & -4 \\ 1/2 & 0 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ist Nullstelle}$$

پاتي یا باقي پولینوم:

$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

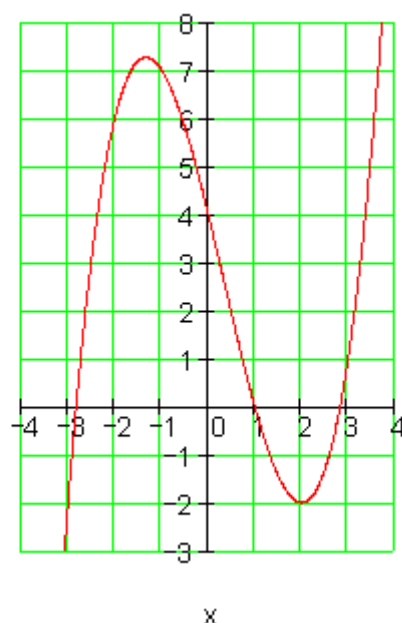
$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0); P_{x2}(\sqrt{8} \approx 2,83 \mid 0); P_{x3}(-\sqrt{8} \approx -2,83 \mid 0)}}$$

ت-

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

x	-3	-2,83	-2	-1,33	-1	0	1	2	2,83	3
f(x)	-2	0	6	7,26	7	4	0	-2	0	1

f(x)



دریم. دوه:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow f(1) = 1 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow f(3) = 27 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{45}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \cdot a_3 + \frac{1}{4} \cdot a_2 - \frac{1}{2} \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_3\left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{77}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} \cdot a_3 + \frac{9}{4} \cdot a_2 - \frac{3}{2} \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	·8
1	3	9	27	-4	·8
1	$-1/2$	$1/4$	$-1/8$	$45/8$	·8
1	$-3/2$	$9/4$	$-27/8$	$-77/8$	·8
8	8	8	8	48	
8	24	72	216	-32	II - I
8	-4	2	-1	45	III - I
8	-12	18	-27	-77	IV - I
8	8	8	8	48	:8
0	16	64	208	-80	:4
0	-12	-6	-9	-3	:3
0	-20	10	-35	-125	:5
1	1	1	1	6	
0	4	16	52	-20	:4
0	-4	-2	-3	-1	III + II
0	-4	2	-7	-25	IV + II
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	-5	
0	0	14	49	-21	:7
0	0	18	45	-45	:9
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	-5	
0	0	2	7	-3	
0	0	2	5	-5	IV - III
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	-5	
0	0	2	7	-3	
0	0	0	-2	-2	

$$-2a_3 = -2 | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 7a_3 = -3$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 | -7$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 | : 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = -5$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 20 + 13 = -5 | +7$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6 | +2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

ب -

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f$$

سیومتری مخ ته نه لرو، حُککه چي نه فقط جفت او نه فقط طاق اکسپوننتونه مخ ته لرو.

پ -

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

تکي د افقي تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$p = -\frac{10}{3}; q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{9} - \frac{6}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{19}{9}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 3,12 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 0,214 \end{array} \right.$$

په $x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}$ او $x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شته.

د y کواوردیناتو شمیرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(3,12) \approx -4,06 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3,12 | -4,06)}}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(0,214) \approx 8,21 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0,214 | 8,21)}}$$

ت -

د $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ محور غوڅتکي

$$P_y : f(0) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|8)}}$$

صفر ځایونه

لاني الماني: لومړی صفر ځای

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ x=1 & \downarrow & 1 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & 6 \\ & 1 & -5 & 2 & 8 \\ x=-1 & \downarrow & -1 & 6 & -8 \\ & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array} \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ist Nullstelle}$$

پاتي يا پاتي پولینومونه: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$p = -6 ; q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

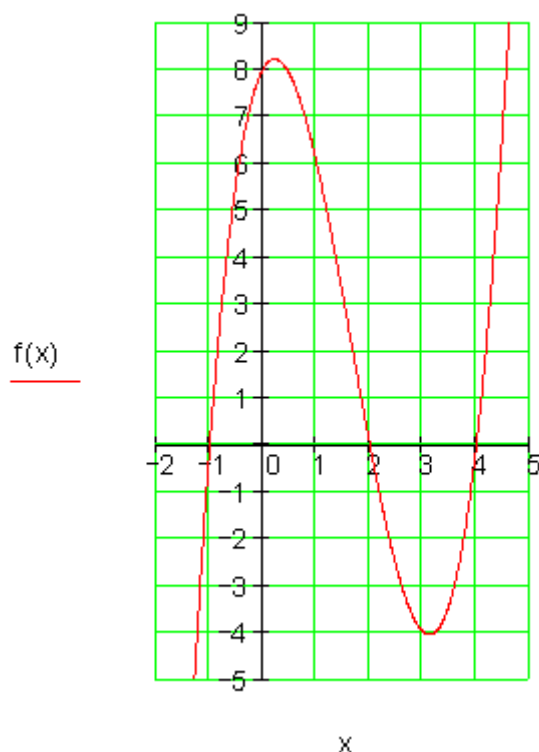
$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + 1 = 4 \\ x_3 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0) ; P_{x2}(4|0) ; P_{x3}(2|0)}}$$

ت -

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,21	1	2	3	3,12	4
f(x)	-9,6	0	5,6	8	8,21	6	0	-4	-4,06	0



څلورم: الف -

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$$

د توپ ماكسيمال جگوالی د الوتنې لار جگټكی دی، له دې امله یو ټكی دی، د پراته تانجنت سره.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ &\quad -\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0 \mid + \frac{1}{96}x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \mid \cdot 96$$

$$\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$$

$$f(12) = -\frac{1}{288} \cdot 12^3 + \frac{1}{16} \cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12 | 3)$$

جگتکی دی.

توپ یو د درې متره ماکسیمال جگوالی ته رسیري. او له دې امله د شونتیا یو وړتیا څخه 12 متره لري دی.

بـ

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

د صفر ځایونه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} \right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \mid + \frac{1}{288}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \mid \cdot 288$$

$$\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$$

توپ د وړتیا څخه په 18 متره لريوالی بیرته ځمکې ته رالویږي

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \quad \text{پـ}$$

د شوتېکي څخه په نهه متره لري د توپ جگوالی دی پیدا شي.

$$f(9) = -\frac{1}{288} \cdot 9^3 + \frac{1}{16} \cdot 9^2 \approx 2,53$$

توپ د مقاومت دیوال څخه چې دوه متره لري دی په 2,53 m جگوالی پورته لوزي.

ت -

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

غواړو ځای پیدا کړو چې هلته توپ الوتنه دوه متره جگوالی لري.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$$

د ازمانېت له لاري حل:

$$f(15) \approx 2,344$$

$$f(15,5) \approx 2,086$$

$$f(15,6) \approx 2,028$$

$$f(15,65) \approx 1,998$$

ازاد شوت یا ازاد وهل له ۱,۹۹۸

پنځم: الف -

$$f(x) = x^3 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$f(x_0) = x_0^3$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{3x_0^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{3x_0 \cdot \Delta x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\rightarrow 0} = 3x_0^2
 \end{aligned}$$

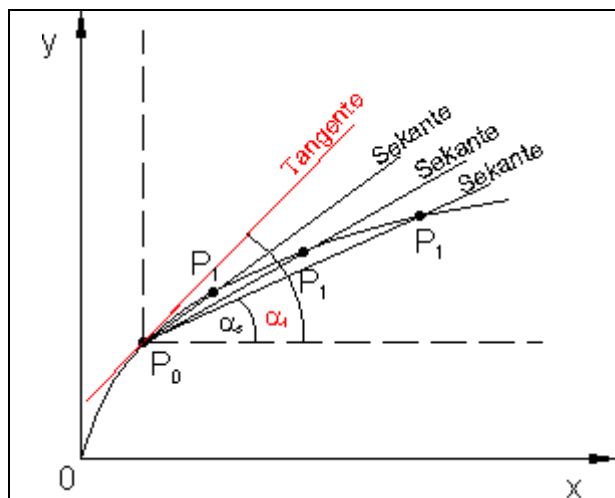
ب -

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{3}(x_0 + \Delta x)^2 = \frac{1}{3}(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$f(x_0) = \frac{1}{3}x_0^2$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - \frac{1}{3}x_0^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(2x_0 + \underbrace{\Delta x}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{2}{3}x_0
 \end{aligned}$$



که P_0 و P_1 ته ورنزدي
کينول شي، نو د نوي
سيکانت جگوالي به په دې
ځاي کې د تابع جگوالی د P_0
په ټکي کې وي، چي بايد پيدا
شي. که دا کار په کلکه مخ
ته يووړل شي او ټکی P_1 تل
زيات و P_0 ټکي ته نږدې
شي، نو د پولې ځاي په څېر

یوه کرښه لاس ته راځي، دا د تابعگراف فقط په ټکي P_0 کې لمسوي. په ټکي P_0 کې د تابعگراف تانجنت. د تانجنت جگوالی په دې ټکي P_0 کې ټیک د تابع جگوالی په P_0 کې شپږم:

الف - حجم یا ډکی : $V = l.b.h$

$$\left. \begin{array}{l} l = 26 - 2x \\ b = 26 - 2x \\ h = x \end{array} \right| \Rightarrow V(x) = (26 - 2x)(26 - 2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

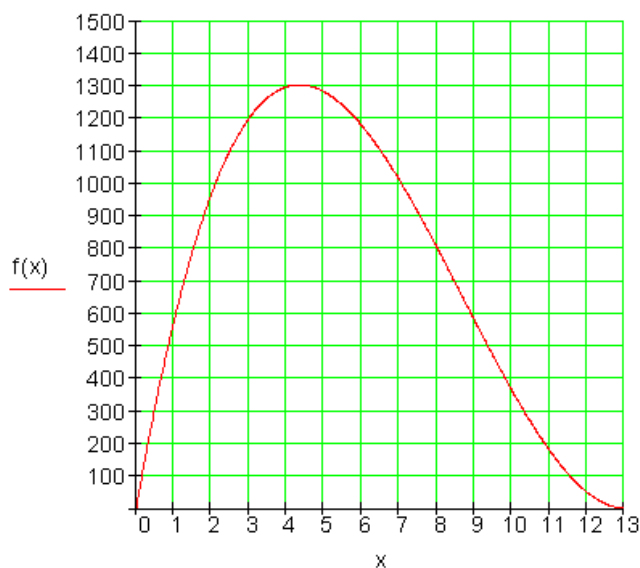
د کوتی حجم یا ډکی د یوه دریمي درجي ترم له لارې ټاکل کیږي:

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \quad \text{ب -}$$

ارزښت جدول:

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	0	968	1296	1176	800	360	48



ماکسیمال حجم یا ډکی په جگټکي کې، له دې لاس ته راځي: پروت یا افقي تانجنت.

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 208x + 676$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 208x + 676 = 0$$

د دې مربع مساوات حل څخه لرو: $x_1 = 13; x_2 = 13/3 \approx 4,33$

$$V\left(\frac{13}{3}\right) \approx 1302$$

د $x = 13/3 \text{ cm}$ له ټاکلو د کوتی حجم یا ډکی $v \approx 1302 \text{ m}^3$ ماکسیمال دی.

حجم یا ډکی دی:

اووم:

الف \ ب



$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښتجدول

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88

پ -

د $K'(x)$ گراف یو پارابول دی، هغه چې د لگښت زیاتوالی ښایي. د لگښت خورا کم زیاتوالی د پارابول له ککرتکي یا رآس ټکي سره لاس ته راځي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د پارابول په ککرتکي کې پروت تانجنت.

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$K'(3) = 13$$

د $x = 3$ ناروغانو گڼون یا تعداد (300 ناروغان) د لگښت زیاتوالی له نورو خورا کم دی. $K'(3) = 13$ په دې معنا چې 130 € / Tag په روځ . یا په بل ډول ویل شوي:

که په دې ناروغانو ته یو بل راشي، دا په دې معنا چې $x = 3,01$. د یوه ورزیات

$$\text{ناروغ لپاره لگښت دی: } K(3,01) - K(3) = 160,13 - 160 = 0,13$$

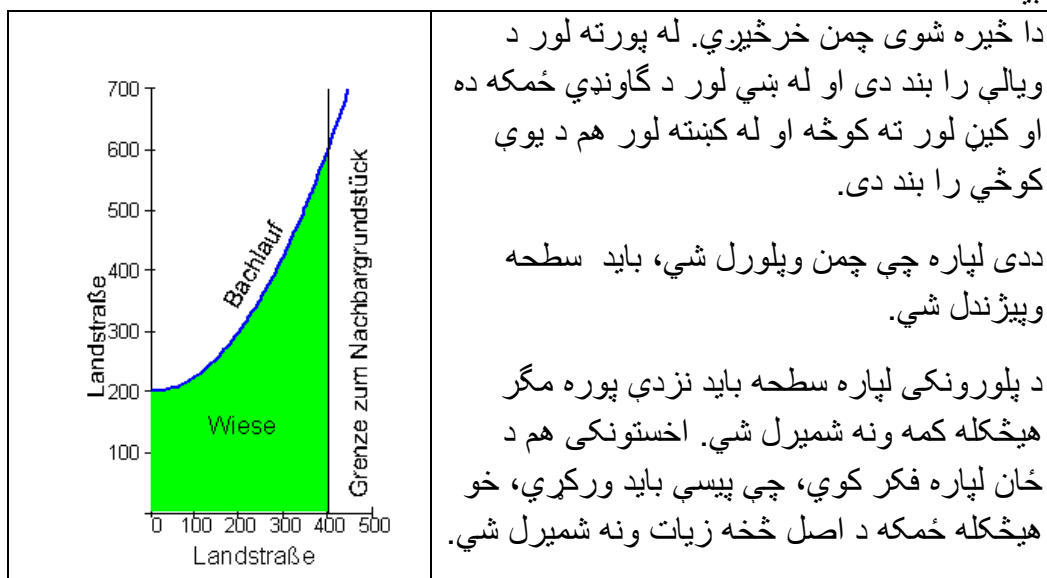
که دا ارزښتونه له 1000 سره ضرب شي، نو د روځي لاس ته ترې 130 €/Tag یورو راځي.

انتیگرال شمیرنه

انتیگرال شمیرني لپاره پیل راوړني

موږ د ځمکچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تټونو یا جسمونو سطحه او ډکۍ یا حجم څنگه وشمیرو. که یوه سطحه له گڼې (-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟ دا مو انتیگرال شمیرني ته رابولي.

پیلېلکه

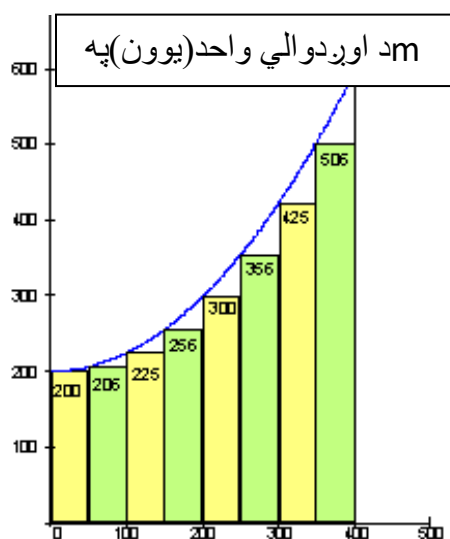


وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

$$f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200 \quad \text{د تابع مساوات لري.}$$

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توتو (پټیو) توتنه کيږي



هره توتنه (مستطیل پټی) 50m سره ورته ده او په رسم کې ورکړ شوی جگوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$$200 \cdot 50 = 10000$$

$$206 \cdot 50 = 10300$$

$$225 \cdot 50 = 11250$$

$$256 \cdot 50 = 12800$$

$$300 \cdot 50 = 15000$$

$$356 \cdot 50 = 17800$$

$$425 \cdot 50 = 21250$$

$$506 \cdot 50 = 25300$$

$$\underline{123700}$$

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې 123700 m^2 ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره توتنه (پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړ شوی جگوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یو ځای شمیرو.

$$206 \cdot 50 = 10300$$

$$225 \cdot 50 = 11250$$

$$256 \cdot 50 = 12800$$

$$300 \cdot 50 = 15000$$

$$356 \cdot 50 = 17800$$

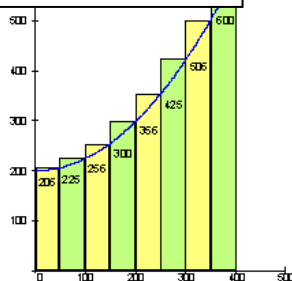
$$425 \cdot 50 = 21250$$

$$506 \cdot 50 = 25300$$

$$600 \cdot 50 = 30000$$

$$\underline{143700}$$

د اوږدوالي واحد (یون) په m



دا د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې 143700 m^2 دی. اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

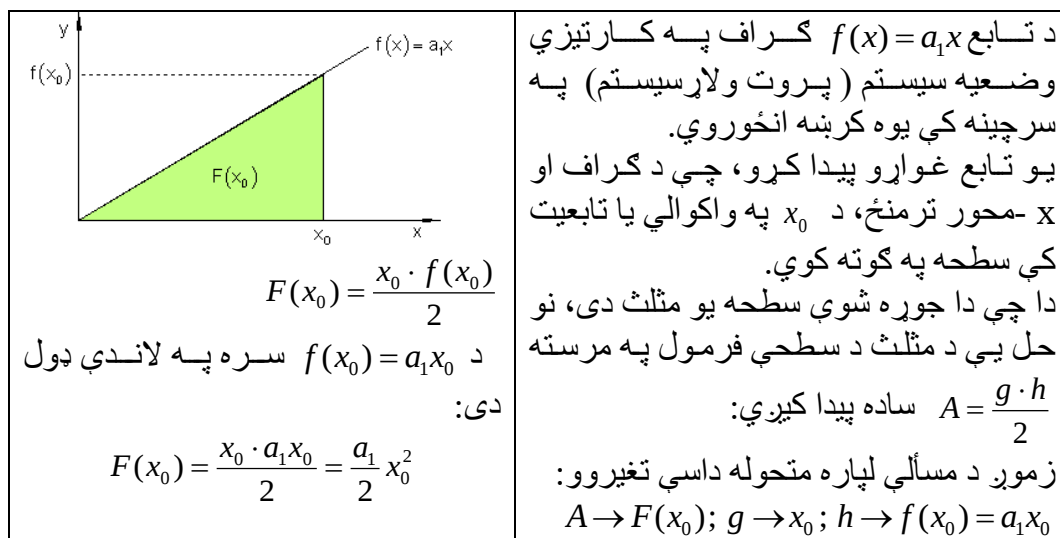
$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{ unt}^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انټیګرال برخه (په مخ) کې وشمیرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333\bar{3} \text{ m}^2$ دی.

د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه ،،لاندنی جمعي جوړول،، بلل کیږي. د پلورونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه، ، پورتنی جمعي جوړول،، بلل کیږي. دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی. باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې ریښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

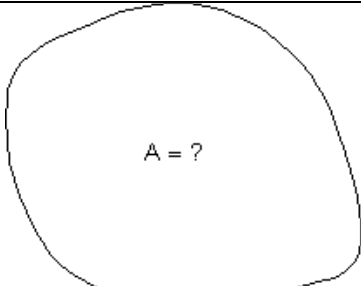
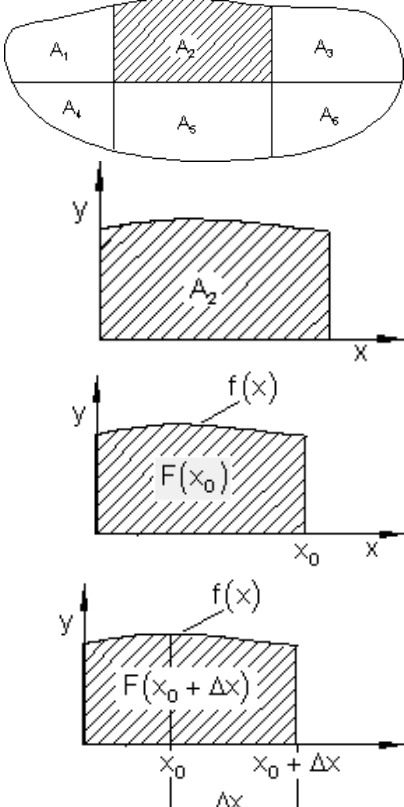
سطحه او لومړنۍ تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

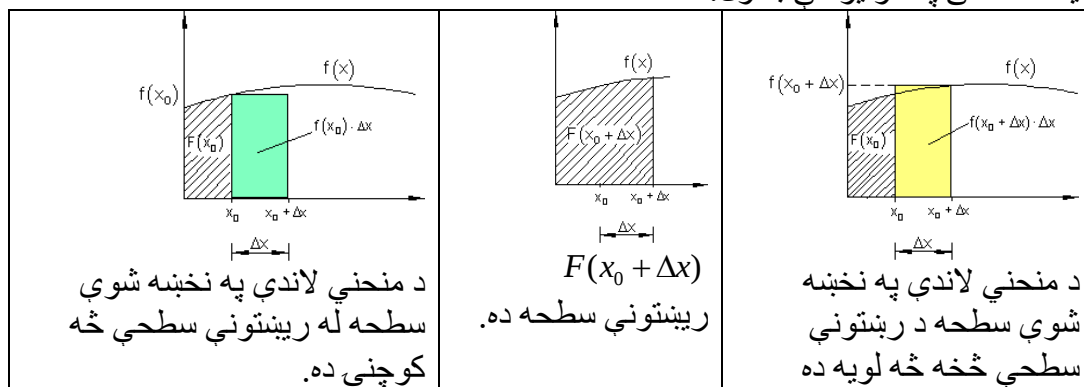


تابع $F(x_0)$ د گراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي (تابعیت) کې تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

د سطحي پرابلم:

	پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنی څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو. دا د مشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پېړۍ پاي کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیخ او نیوتون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.
	هره له کروکړښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو (قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کره کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سیده کرښې دي. هره یوه د سطحې برخه (د بیلګې په توګه دلتا A_2) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کرښې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي. که له کروکړښو رابند گراف د $f(x)$ متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي (پروت) محور ارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلېبلګه کې؟ که داسې یو تابع F شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محور ارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي (پروت) محور ارزښت $(x_0 + \Delta x)$ په سطحه $F(x_0 + \Delta x)$ باندې تنظیم کړای شي.

په یوه څلورضلعي (مستطیل) کې د سطحې رابندول:
یا د سطحې په کوتیو کې بندول:



که د سطحې پټې (یا کوچنۍ مستطیلونه) هرڅومره کوچنۍ شي، په همغه اندازه د اصلي
سطحې د مساحت څخه یې توپیر کميږي.

دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کیدی شي:

$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$
----------------------------------	---------------------	---

دا مو دي لاندې نابرابرونو یا نامساواتو ته راڅڅوي

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت یې نیسو (پوله یې پیدا کوو):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) \leq f(x_0) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) = f(x_0)
 \end{aligned}$$

نو لرو: $F'(x_0) = f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کرې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره
په x_0 ځای کې برابر دی.

مور لیکو:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{یا} \quad F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$$

که مور بریالی شو، داسی یو تابع $F(x)$ پیدا کړو چې مشتق یې د رابندې کړې $f(x)$ تابع وي، نو $F(x)$ د سطحې تابع دی.

که مور یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو یعنې مشتق یې ونیسو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سری کړی شي فورمال ووايي:

د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیدا کړو، دا معنا لري چې انتیګرالول یې شمیرو. د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیدا کیدی شي، چې دا څنګه انتیګرالوي.

توانتابع:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیري او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربیږي. انتیګرالونه (زیاتونه یا ورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیري او پوتنختابع په نوي اکسپوننت وېشل کیږي.

دا همدا اوس ازمايو:

پوتنختابع:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{x^3}$$

تابع $F(x)$ د $f(x)$ بنسټتابع (لومړنی تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې $f(x)$ له $F(x)$ څخه لاس ته اړخي یا را پیدا کیږي یا راځيږي.

ناتاکلی انتیګرال

و به گورو، چې نا ټاکلی انتیگرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې $f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنۍ تابع، یعنې $F(x)$ وپېژنو، نو د یوې ثابتې C د ور جمع کولو سره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو (C په خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتگرالونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

نو لرو: $F(x) = \int f(x)dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلگه:

لومړنۍ تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی.
قاعده داسې ده $F(x) = \int f(x)dx = \int 2x dx$

موږ ازمايو:

$$F(x) = x^2 \quad \text{ځکه چې} \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

$F(x) = x^2 + 2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$$F(x) = x^2 + C \quad \text{ځکه چې په هر حالت کې لرو:} \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره

همغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad \text{قاعده (لار): باور لري:}$$

د لومړنیو توابعو سټ (ډېری)

د بنسټ توابعو لومړني توابع

بیلگه ښايي، چې د تابع $f(x)$ لپاره نه یواځې یو لومړنۍ تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د $f(x)$ د لومړنیو توابعو سټ بولو.

بیلگه

یو لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

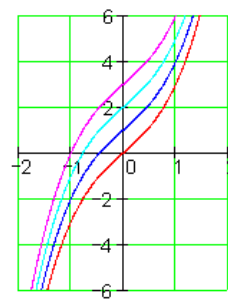
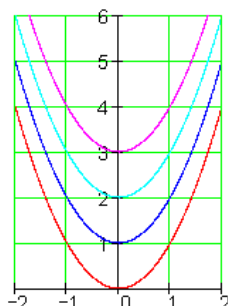
$$F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x) \quad \text{، ځکه چې} \quad F(x) = x^3 + 2x + C$$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنیو ډلې په څیر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بیلګې وکتل شي.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$



تمرینونه

لومړنی تابع پیدا کړی

لاندې $f(x)$ توابعو ته لومړنی توابع $F(x)$ پیدا کړی

اول - $f(x) = x^2$ - دویم - $f(x) = 2x^2$ - دریم - $f(x) = x$

څلورم - $f(x) = -2x$ - پنځم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ - شپږم - $f(x) = -\frac{1}{4}x$

اوم - $f(x) = x^3$ - اتم - $f(x) = 4x^3$ - نهم - $f(x) = 2$

لسم - $f(x) = x + 1$ - یولسم - $f(x) = x^2 + x - 3$ - دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

حلونه

تمرینونه انتیگرال شششمینه |

مفصل حلونه

اول - $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2 = f(x)$$

دوري $f(x) = 2x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 0 = 2x^2 = f(x)$$

دریم - $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 0 = x = f(x)$$

خلورم - $f(x) = -2x \Rightarrow F(x) = -x^2 + C$ از مایینت

$$F'(x) = -2x^1 + 0 = -2x = f(x)$$

پنجم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}x^3 + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{6} \cdot 3x^2 + 0 = \frac{1}{2}x^2 = f(x)$$

شپیرم - $f(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{8}x^2 + C$ از مایینت

$$F'(x) = -\frac{1}{8} \cdot 2x^1 + 0 = -\frac{1}{4}x = f(x)$$

اوم - $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$$

اتم - $f(x) = 4x^3 \Rightarrow F(x) = x^4 + C$ از مایینت

$$F'(x) = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x)$$

نهم - $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x + C$ از مایینت $F'(x) = 2 \cdot 1x^0 + 0 = 2 = f(x)$

لسم - $f(x) = x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 1x^0 + 0 = x + 1 = f(x)$$

یولسم - $f(x) = x^2 + x - 3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x^1 - 3 \cdot 1x^0 + 0 = x^2 + x - 3 = f(x)$$

دولسم - $f(x) = x^n; n \in \mathbb{N} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ از مایینت

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n = f(x)$$

د ناټکلي انتیگرال څخه و ټاکلي انتیگرال ته

ترمنځ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنگه یو تابع $f(x)$ ته لومړنی تابع $F(x)$ منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x) = x^3 + 2x + C$

پیژند: د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع $f(x)$ ته ،، ناټاکلی انتیگرال ،، بلل

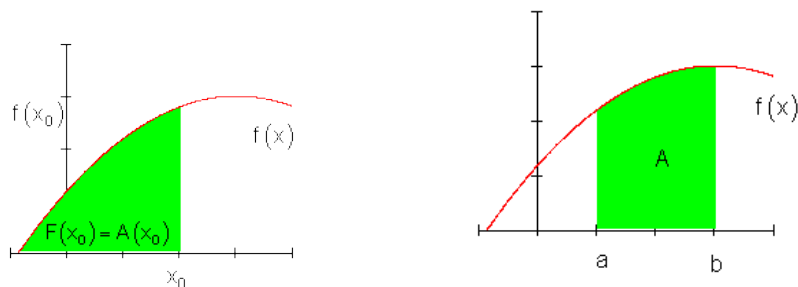
کیري او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د مشتق- او انتیگرال شمیرنې ترمنځ اړیکې کیدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

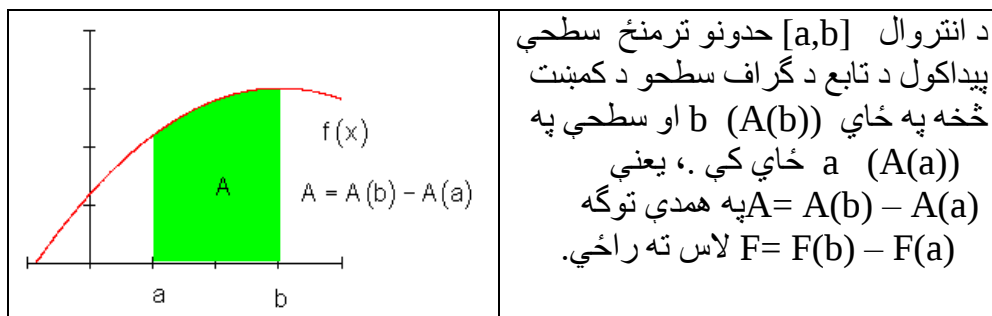
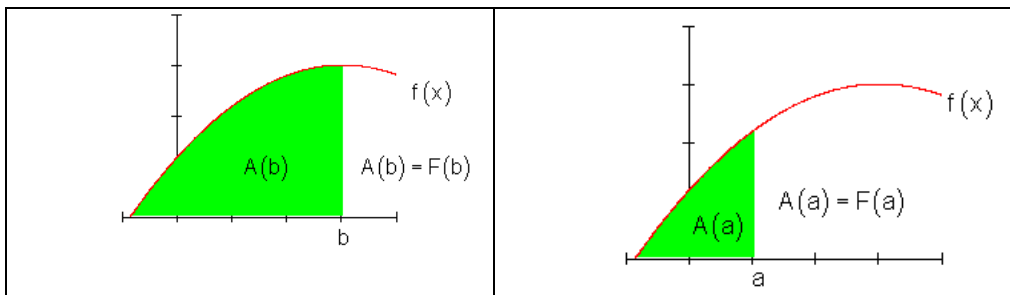
جمله(قضیه): د ناټاکلی انتیگرال شمیرنه د مشتق شمیرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)] + C}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

د تابع د گراف لاندې او د انټروال $[a; b]$ تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



د يوي سطحې تابع شتون مو فکر دي لاندې پوهني (زده کړې) ته لارښوده وي: د يوي سطحې، چې د يوي په پام کې نيولې $f(x)$ تابع گراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې او يوي $F'(x)$ تابع، چې د $F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړيکي شته دي، يعنې $F'(x) = f(x)$



په انټروال $[a, b]$ کې د تابعگراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x) dx$$

دا انټيگرال ټاکلی انټيگرال هم بلل کيږي.

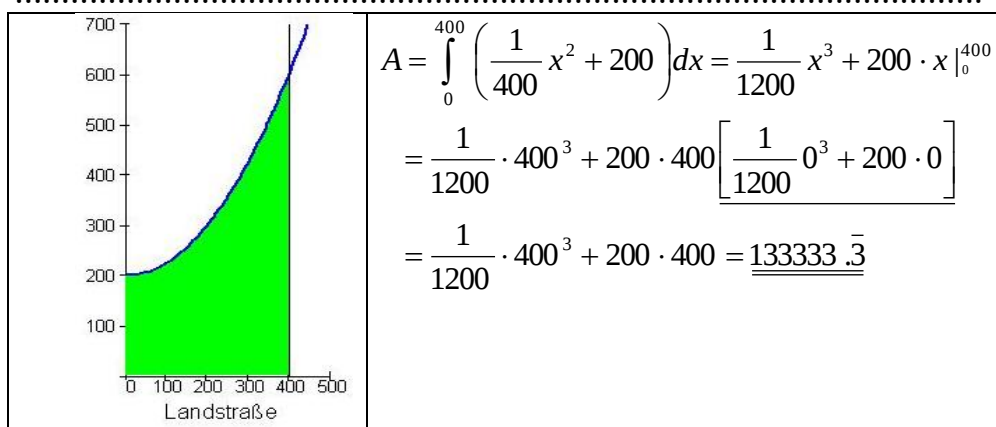
جمله:

دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بيلگه کې راوړي د چمن سطحه وشميرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره يوه بله لار گټوره راوستلې يا گټوره ښوولې:

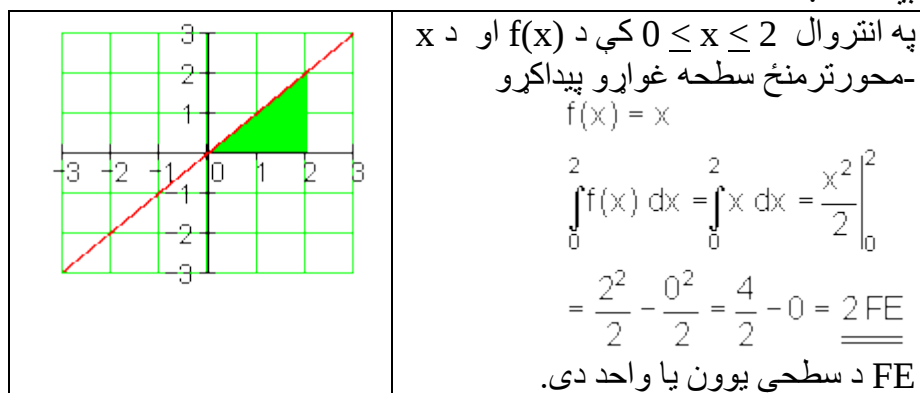
۳۳۵

انتیگرال شمیرنه ویاله

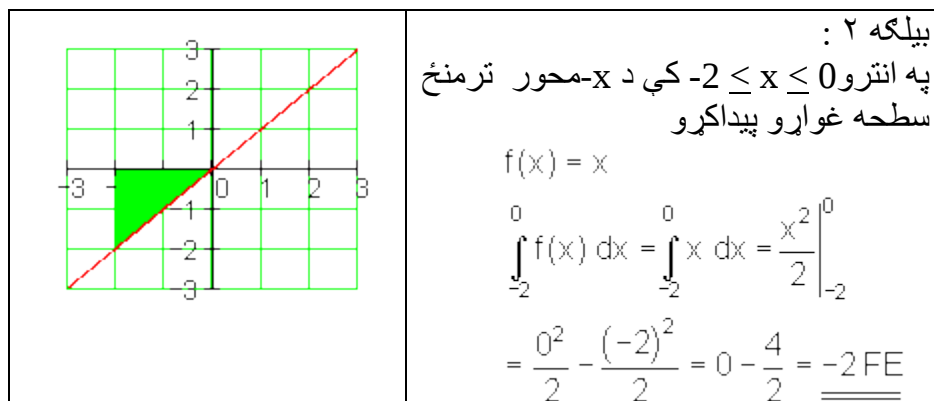


دریم: د ساده سطحو شمیرنه

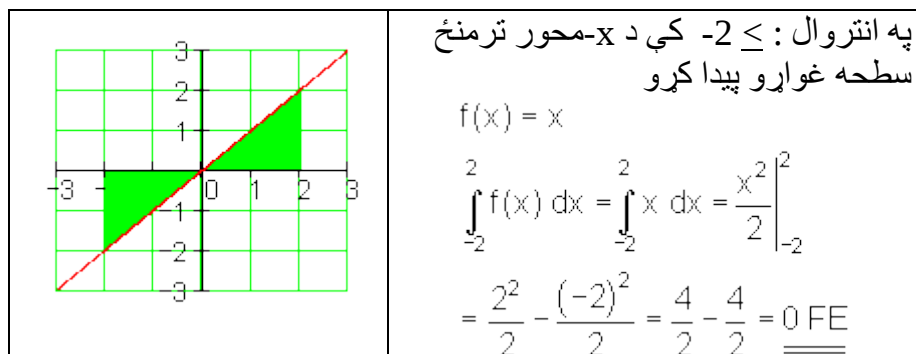
بیلگه ۱:



بیلگه ۲:



بیلگه ۳ :

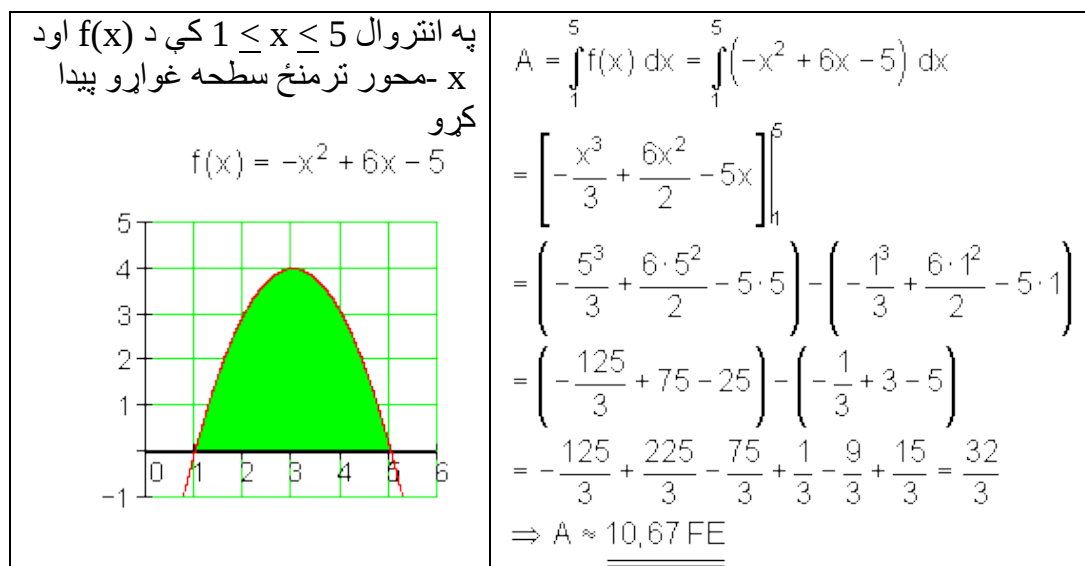


شمیرنه ښایي، چې د x -محور پورته لور ته سطحه زیاتیزه یا مثبت ده او د x -محور
کښته لور ته سطحه کمیزه یا منفي گڼل کیږي.

په بیلگه ۳ کې سطحې یو بل مخامخ سره له منځه وړي یا پورته کوي.
که فزیکي سطحه څیړو، نو انتیگرال باید ووېشل شي او ارزښتونه وشمیرل شي.

$$\int_{-2}^2 x dx = \left| \int_{-2}^0 x dx \right| + \left| \int_0^2 x dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^0 + \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = \left| \frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right| + \left| \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right| = 2 + 2 = 4 \text{ FE}$$

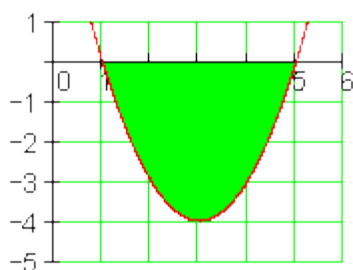
بیلگه ۴ :



بیلگه ۵:

په انټروال $1 \leq x \leq 5$ کې د $f(x)$ اود
 x -محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا
 کړو

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$



$$\begin{aligned} A &= \int_1^5 f(x) \, dx = \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x \right]_1^5 \\ &= \left(\frac{5^3}{3} - \frac{6 \cdot 5^2}{2} + 5 \cdot 5 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{6 \cdot 1^2}{2} + 5 \cdot 1 \right) \\ &= \left(\frac{125}{3} - 75 + 25 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5 \right) \\ &= \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{32}{3} \\ &\Rightarrow A \approx -10,67 \text{ FE} \end{aligned}$$

جمله: سطحه پروتخای او مخنځینه

او سطحه د x -محور پورته لور ته پرته ده

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

او سطحه د x -محور کښته لور ته پرته ده.

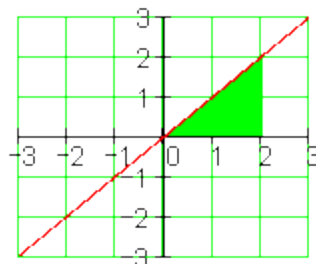
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

د انتیگرېشن پولو بدلول:

څه پیښیږي، که د انتیگرېشن پولې سره بدلې شي؟

بیلگه ۶ :

په انتروال $0 \leq x \leq 2$ کې د $f(x)$ او x - محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو



$$f(x) = x$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2 \text{ FE}$$

FE د سطحې یوون یا واحد دی.

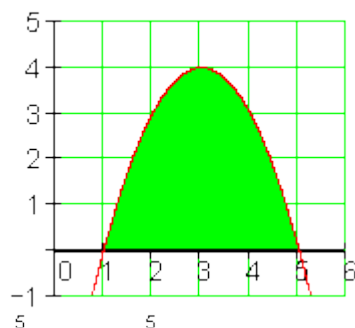
د انتیگرېشن پولې سره بدلون:

$$= \frac{0^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 0 - \frac{4}{2} = -2 \text{ FE}$$

د دې لپاره چې سطحه مثبت یا زیاتیزه شي باید له (-1) سره ضرب شي.

په انتروال $1 \leq x \leq 5$ کې د $f(x)$ او x - محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$



$$A = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx$$

$$\approx 10,67 \text{ FE}$$

بیلگه ۷ :
د انتیگرېشن پولې سره بدلون

$$A = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x \right]_1^5$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6 \cdot 1^2}{2} - 5 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6 \cdot 5^2}{2} - 5 \cdot 5 \right)$$

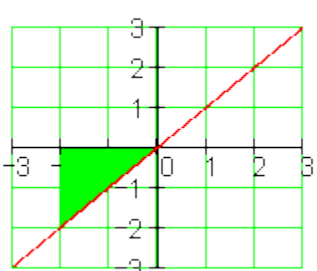
$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5 \right) - \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25 \right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} + \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} = -\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx -10,67 \text{ FE}$$

جمله: د پولې بدلون سره د انتیگرېشن مخنښه بدلون.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{oder} \quad - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$$

بیلگه ۲ : په انټرو $-2 \leq x \leq 0$ کې د $-x$ محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو $f(x) = -x$ 	بیلگه ۸ : په انټرو $-2 \leq x \leq 0$ کې د $-x$ محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو $\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 -x dx = - \int_{-2}^0 x dx$ پولي بدللو $= \int_0^{-2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^{-2}$ $= \frac{(-2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2 \text{ FE}$
---	--

تمرینونه:

انتیگرال شمیرنه II:

لاندې ټاکلي انتیگرالونه وشمیرئ.

$$\int_3^4 dx \quad \text{خلور} - \quad \int_{-2}^2 4 dx \quad \text{درې} - \quad \int_0^3 (x^2 - 1) dx \quad \text{دوه} - \quad \int_1^3 x dx \quad \text{یو} -$$

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx \quad \text{شپږ} - \quad \int_0^4 (2x - 5) dx \quad \text{پنځه} -$$

$$\int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x - 4 \right) dx \quad \text{ا ته} - \quad \int_{-3}^3 (x^3 + 2x) dx \quad \text{او ه} -$$

$$\int_2^3 (3x - 6)^3 dx \quad \text{لس} - \quad \int_{-4}^4 \left(2x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right) dx \quad \text{نه ه} -$$

.....
حلونه

انتیگرال شمیرنه II

نتیجی

$$\int_1^3 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 = 4$$

لومری-

$$\int_0^3 (x^2 - 1) \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^3 = 6$$

دویم:-

$$\int_{-2}^2 4 \, dx = [4x]_{-2}^2 = 16$$

دریم-

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 1$$

خلورم-

$$\int_0^4 (2x - 5) \, dx = [x^2 - 5x]_0^4 = -4$$

پنجم-

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx = \left[\frac{1}{6} x^3 - 4x \right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \approx -15,085$$

شیرم:

$$\int_{-3}^3 (x^3 + 2x) \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + x^2 \right]_{-3}^3 = 0$$

اووم-

$$\int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x - 4 \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 4x \right]_{-1}^2 = -\frac{21}{4}$$

اتم-

$$\int_{-4}^4 \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4 \right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{40}x^5 \right]_{-4}^4 = \frac{512}{15} \quad \text{نهم-}$$

$$\int_2^3 (3x - 6)^3 dx = \left[\frac{27}{4}x^4 - \frac{162}{3}x^3 + \frac{324}{2}x^2 - 216x \right]_2^3 = \frac{27}{4} \quad \text{لسم-}$$

مفصل حلونه:

$$\int_1^3 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{لومری-}$$

د ویم-

$$\int_0^3 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0 \right) = 3^2 - 3 - (0) = 9 - 3 = 6 \quad \text{د ویم-}$$

$$\int_{-2}^2 4 dx = [4x]_{-2}^2 = 4 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) = 8 + 8 = 16 \quad \text{دریم-}$$

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1 \quad \text{څلورم-}$$

پنځم-

$$\int_0^4 (2x - 5) dx = [x^2 - 5x]_0^4 = 4^2 - 5 \cdot 4 - (0^2 - 5 \cdot 0) = 16 - 20 - 0 = -4 \quad \text{شپږم-}$$

شپږم-

$$\begin{aligned}
 \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4 \right) dx &= \left[\frac{1}{6}x^3 - 4x \right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} = \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{8})^3 - 4 \cdot \sqrt{8} - \left(\frac{1}{6} \cdot (-\sqrt{8})^3 - 4 \cdot (-\sqrt{8}) \right) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{8} - 4 \cdot \sqrt{8} - \left(-\frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \sqrt{8} + 4 \cdot \sqrt{8} \right) = \frac{8}{6} \cdot \sqrt{8} - \frac{24}{6} \cdot \sqrt{8} + \frac{8}{6} \cdot \sqrt{8} - \frac{24}{6} \cdot \sqrt{8} \\
 &= -\frac{32}{6} \cdot \sqrt{8} = \underline{\underline{-\frac{16}{3} \cdot \sqrt{8} \approx -15,085}}
 \end{aligned}$$

اووم -

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^3 (x^3 + 2x) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_{-3}^3 = \frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + (-3)^2 \right) \\
 &= \frac{81}{4} + 9 - \left(\frac{81}{4} + 9 \right) = \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}$$

اتم -

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \right) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x \right]_{-1}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - \left[\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-1)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \right] \\
 &= \frac{16}{4} - \frac{8}{6} + \frac{12}{2} - 8 - \left[\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{3}{2} \cdot 1 + 4 \right] \\
 &= 4 - \frac{4}{3} + 6 - 8 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2} + 4 \right] \\
 &= 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{3}{2} - 4 = -\frac{24}{12} - \frac{16}{12} - \frac{3}{12} - \frac{2}{12} - \frac{18}{12} = -\frac{63}{12} = \underline{\underline{-\frac{21}{4}}}
 \end{aligned}$$

نهم: مفصل حل (اوبیونه):

$$\begin{aligned}
 \int_{-4}^4 \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4 \right) dx &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{40}x^5 \right]_{-4}^4 = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{40} \cdot 4^5 - \left[\frac{2}{3} \cdot (-4)^3 - \frac{1}{40} \cdot (-4)^5 \right] \\
 &= \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} - \left[\frac{2}{3} \cdot (-64) - \frac{1}{40} \cdot (-1024) \right] \\
 &= \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} - \left[-\frac{128}{3} + \frac{1024}{40} \right] = \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} + \frac{128}{3} - \frac{1024}{40} \\
 &= \frac{256}{3} - \frac{2048}{40} = \frac{256}{3} - \frac{256}{5} = \frac{1280}{15} - \frac{768}{15} = \frac{512}{15}
 \end{aligned}$$

لسم:

$$\begin{aligned}
 \int_2^3 (3x - 6)^3 dx &= \int_2^3 (3x - 6)^2 \cdot (3x - 6) dx = \int_2^3 (9x^2 - 36x + 36) \cdot (3x - 6) dx \\
 &= \int_2^3 (27x^3 - 162x^2 + 324x - 216) dx \\
 &= \left[\frac{27}{4}x^4 - \frac{162}{3}x^3 + \frac{324}{2}x^2 - 216x \right]_2^3 \\
 &= \frac{27}{4} \cdot 3^4 - \frac{162}{3} \cdot 3^3 + \frac{324}{2} \cdot 3^2 - 216 \cdot 3 - \left[\frac{27}{4} \cdot 2^4 - \frac{162}{3} \cdot 2^3 + \frac{324}{2} \cdot 2^2 - 216 \cdot 2 \right] \\
 &= \frac{2187}{4} - 1458 + \frac{2916}{2} - 648 - 108 + \frac{1296}{3} - 648 + 432 \\
 &= \frac{2187}{4} - 1458 + 1458 - 648 - 108 + 432 - 648 + 432 \\
 &= \frac{2187}{4} - 540 = \frac{2187}{4} - \frac{2160}{4} = \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

د توابعو ترمنځ سطحه

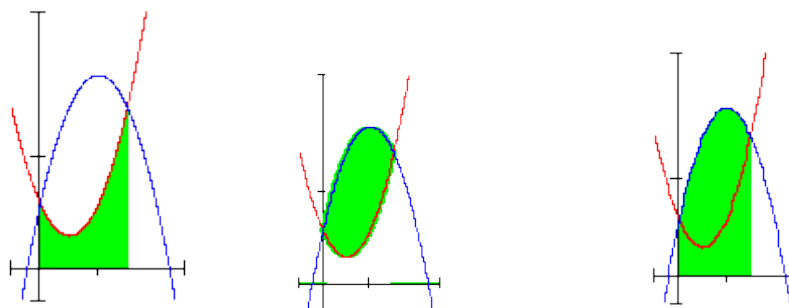
له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه:

ننوتنه: د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټې چې له گرو پولو را بند وي.

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنگه وشمېرو؟

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینتگرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه گرافونه د x -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شیمای څخه مخ ته ځو:



$$A = A_1 - A_2$$

د اینتگرال جوړونه:

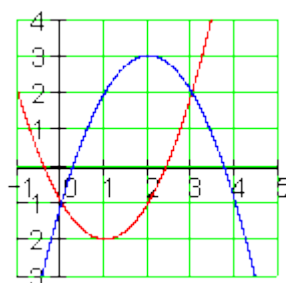
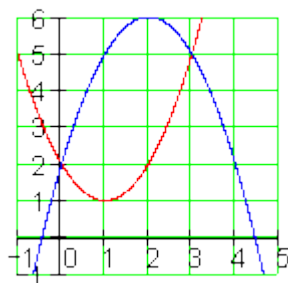
$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چي د دوه گرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي، نو له لوي ارزښت څخه کوچنی ارزښت بايد کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چي پوهیږو، د یوې سطحې مخښه ددې په واک کې ده، چي ایا سطحه د x - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چي ایا دا تاثیرات په پورتنۍ بیلگه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د y -محور په درې واحدونو (یوونونو) کښته لور ته بیاو او سطحې نوې شمېرو.



که د لید له مخې قضاوت وکړو، نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x - ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انتیگرال حدونه به تغیره پاتیري.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

خای په خای کونه:

$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$$

د $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ سره کیري:

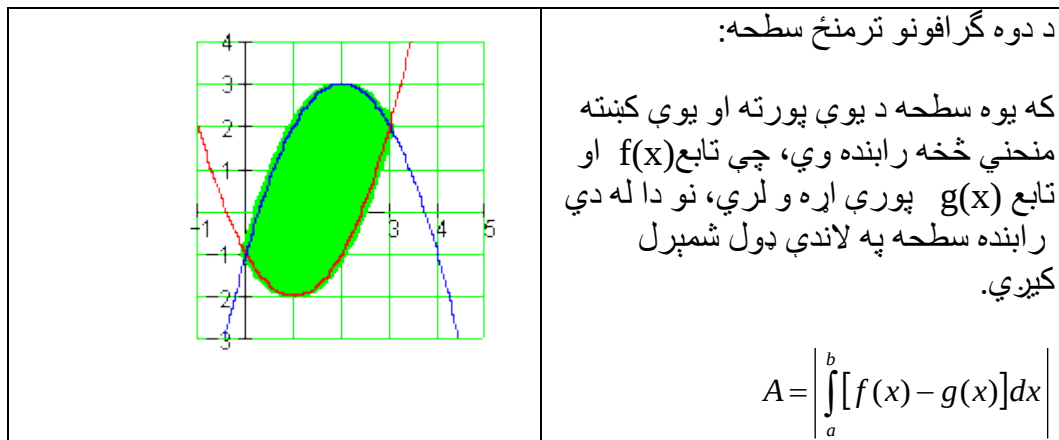
$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$

د دې متود ټولیزه ونه (عمومیت) :



د انتیگرالونی حدونه a او b د x - محور د دواړو گرافونو د وضعیه قبیمتونو غوڅتکی دی.

تمرینونه:

د توابعو گرافونو تر منځ سطحه.

د لاندې فنکشنونو (توابعو) تر منځ سطحه وټاکي او دواړه گرافونه په یوه پروتولای سیستم کې وکارئ. شمیرل شوي سطحې کرښه کرښه کړئ.

$$f(x) = x^2 - x - 6; g(x) = 4x - 10 \quad \text{لومړۍ -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3; g(x) = 3x \quad \text{دویم -}$$

$$f(x) = 0,75(x^2 - 5x + 4); g(x) = 0,75x + 3 \quad \text{دریم -}$$

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}; g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4} \quad \text{څلورم -}$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4; g(x) = x - 1 \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 1; g(x) = -x^2 + 2x + 1 \quad \text{شپږم -}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x \quad \text{اووم -}$$

$$f(x) = x^2 + 3x; g(x) = 0,5x^2 \quad \text{اتم -}$$

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1; g(x) = 2x^2 + 2x + 1 \quad \text{نهم -}$$

$$f(x) = -0,5x^2 + 2; g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1 \quad \text{لسم-}$$

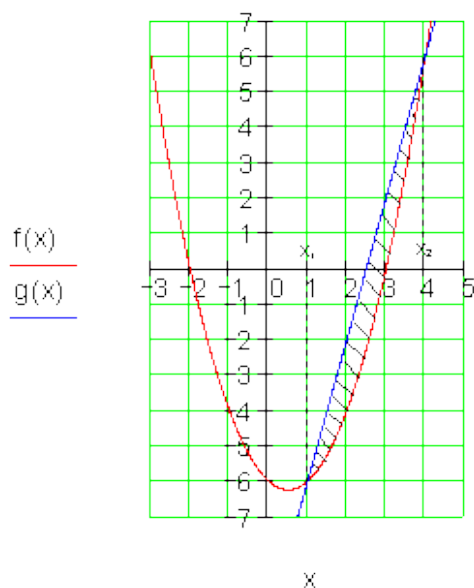
مفصل جلونه یا اویونی

$$f(x) = x^2 - x - 6; g(x) = 4x - 10$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 4$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{5}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - \left[\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \right] \right| = \underline{\underline{4,5}} \quad \text{لومری-} \end{aligned}$$

د دواړو گرافونو ترمنځ سطحه 4,5 FE) به له دې وروسته او د مخه د سطحې واحد یا یوون وي(ده.



دویم -

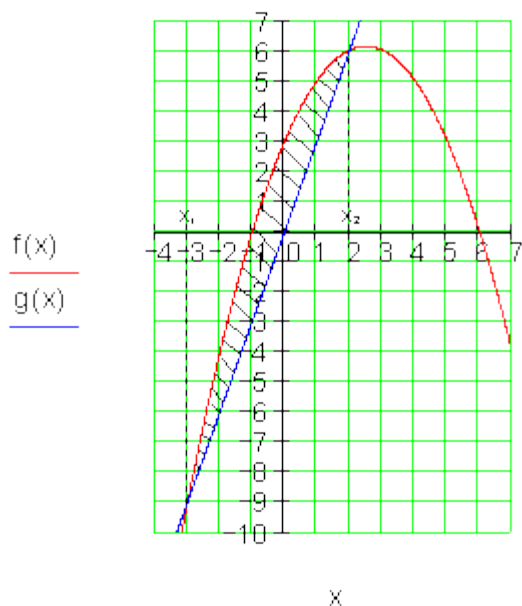
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3; g(x) = 3x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 [f(x) - g(x)] dx &= \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-3}^2 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - \left[-\frac{1}{6} \cdot (-3)^3 - \frac{1}{4} \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right] = \frac{125}{12} \approx \underline{\underline{10,417}} \end{aligned}$$

د دواړو گرافونو ترمنځ سطحه 10,417 FE ده.

یادونه: سری کړی شي چې شمیرنه بی له مطلق ارزښت مخ ته بوزي، که سری له نتایجو یا لاس ته راوړنو، که منفي ارزښت ولري، مطلق ارزښت جوړ کړي.



دریم -

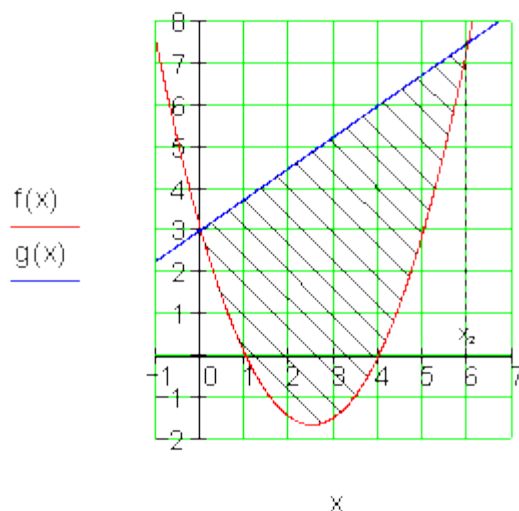
$$f(x) = 0,75(x^2 - 5x + 4) = 0,75x^2 - 3,75x + 3; g(x) = 0,75x + 3$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0,75x^2 - 4,5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 6$$

$$\int_0^6 [f(x) - g(x)] dx = \left[\frac{0,75}{3} x^3 - \frac{4,5}{2} x^2 \right]_0^6 = \frac{0,75}{3} \cdot 6^3 - \frac{4,5}{2} \cdot 6^2 = -27$$

$$A = \left| \int_0^6 [f(x) - g(x)] dx \right| = |-27| = \underline{\underline{27}}$$

د دواړو گرافونو ترمنځ سطحه 27 FE ده.



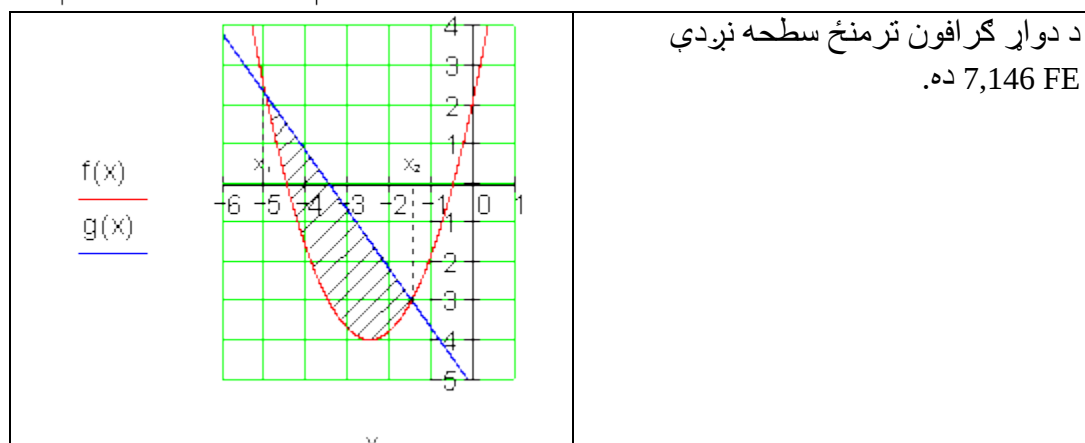
څلورم -

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}; g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5 \text{ und } x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{3}{2} \text{ او}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x) - g(x)] dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{4}x^2 + \frac{15}{2}x \right]_{-5}^{-\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{13}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \left[\frac{1}{3} \cdot (-5)^3 + \frac{13}{4} \cdot (-5)^2 + \frac{15}{2} \cdot (-5) \right] = -\frac{343}{48} \\
 A &= \left| \int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| -\frac{343}{48} \right| \approx \underline{\underline{7,146}}
 \end{aligned}$$



پنځم -

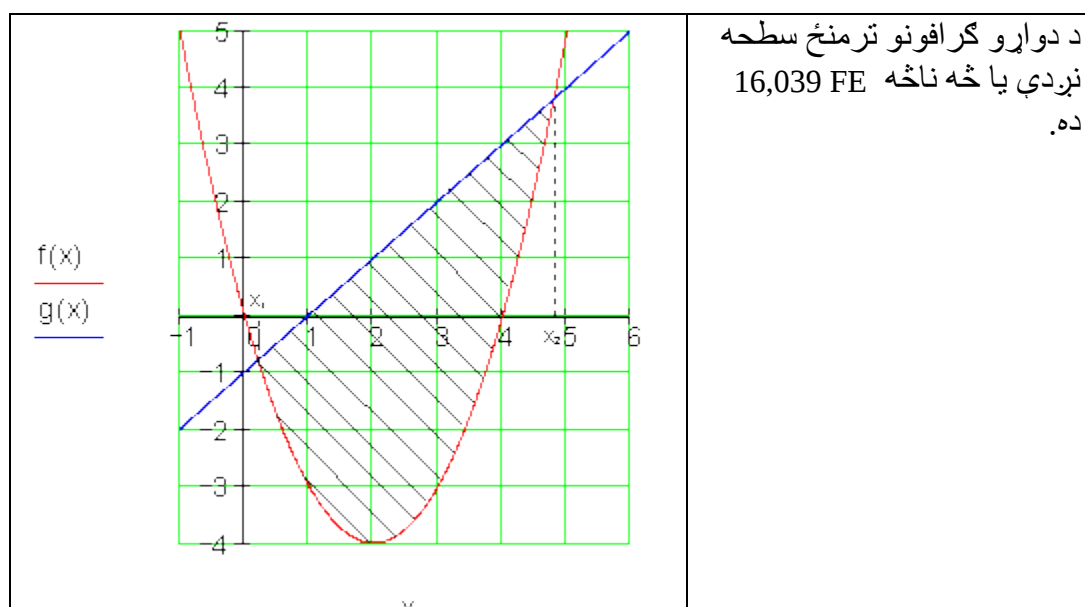
$$f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x; \quad g(x) = x - 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}} \text{ und } x_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}} [f(x) - g(x)] dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x \right]_{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}} \right)^3 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}} \right)
 \end{aligned}$$

$$-\left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}\right)\right] = -\frac{7}{2} \cdot \sqrt{21} \approx -16,039$$

$$A = \left| \int_{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}} [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| -\frac{7}{2} \cdot \sqrt{21} \right| \approx \underline{\underline{16,039}}$$



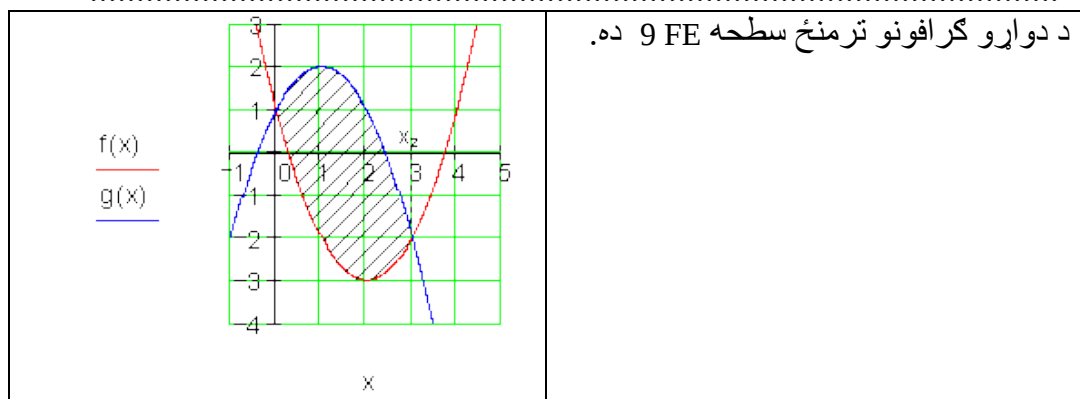
شپږم -

$$f(x) = x^2 - 4x + 1; g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 = -9$$

$$A = \left| \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx \right| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$

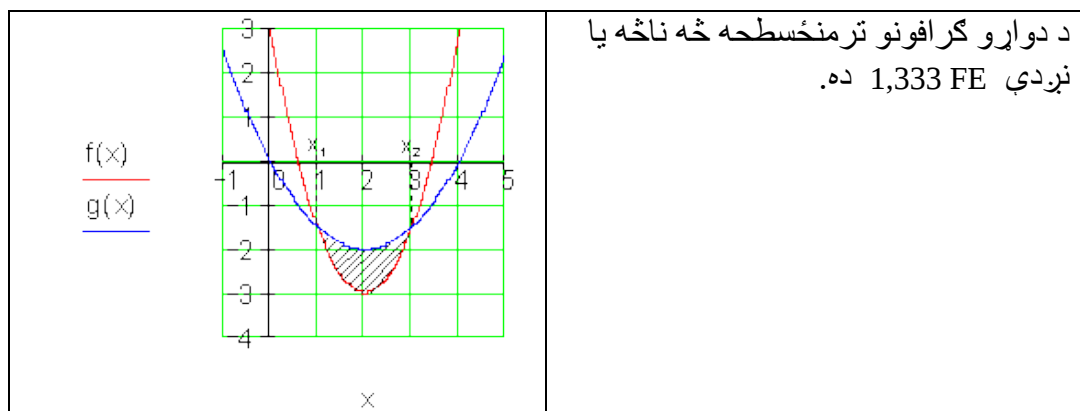


اووم –

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 [f(x) - g(x)] dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \left[\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right] = -\frac{4}{3} \\ A &= \left| \int_1^3 [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} \approx 1,333 \end{aligned}$$



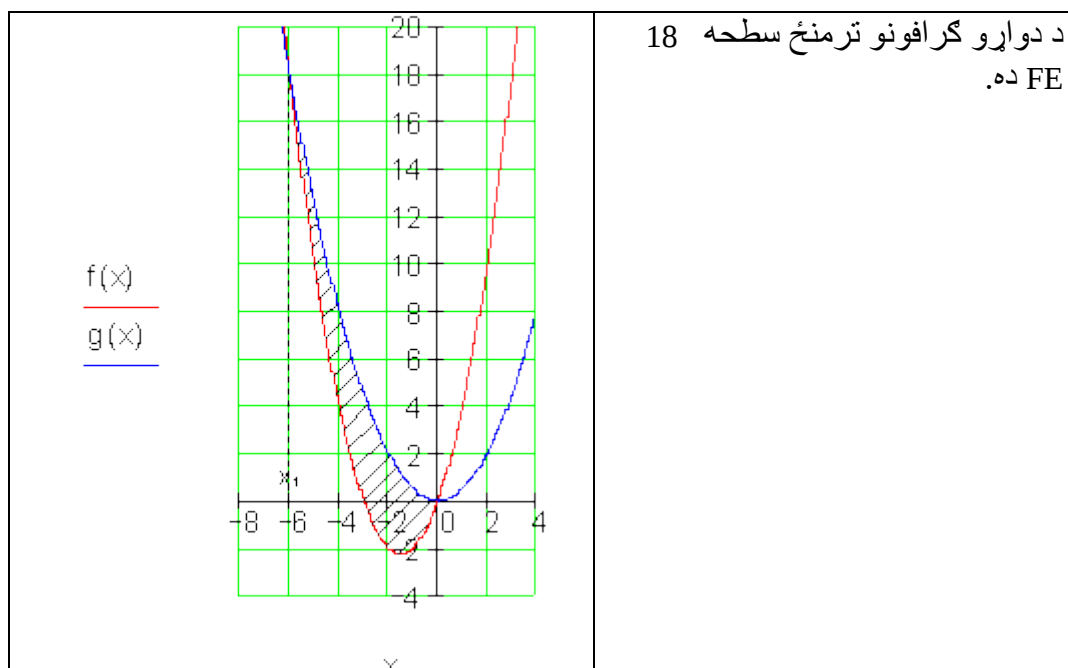
اتم -

$$f(x) = x^2 + 3x; g(x) = 0,5x^2$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6 \text{ und } x_2 = 0$$

$$\int_{-6}^0 [f(x) - g(x)] dx = \left[\frac{0,5}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^2 \right]_{-6}^0 = - \left[\frac{0,5}{3} \cdot (-6)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-6)^2 \right] = -18$$

$$A = \left| \int_{-6}^0 [f(x) - g(x)] dx \right| = |-18| = \underline{\underline{18}}$$

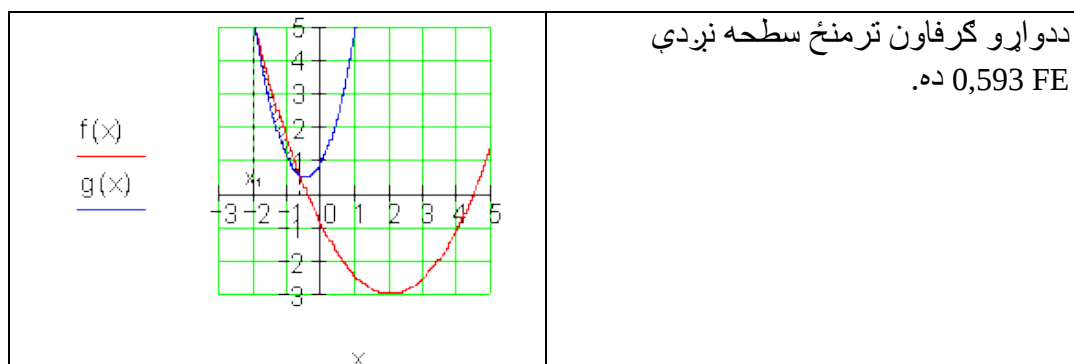


نهم -

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1; g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -1,5x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{3}$$

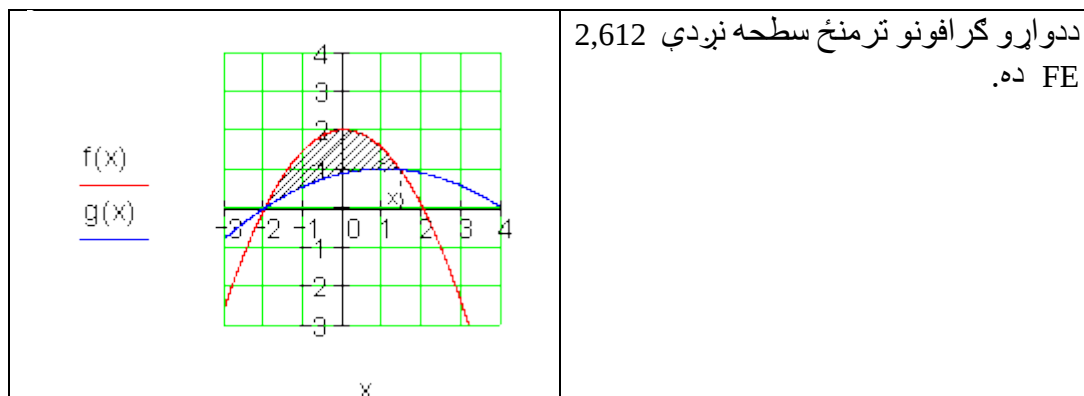
$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^{-\frac{2}{3}} [f(x) - g(x)] dx &= \left[-\frac{1,5}{3}x^3 - 2x^2 - 2x \right]_{-2}^{-\frac{2}{3}} \\
 &= -\frac{1,5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \left[-\frac{1,5}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) \right] \\
 &= \frac{16}{27} \approx 0,593
 \end{aligned}$$



لسم-

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -0,5x^2 + 2; \quad g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{9} \\
 f(x) - g(x) &= 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{18}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = \frac{10}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^{\frac{10}{7}} [f(x) - g(x)] dx &= \left[-\frac{7}{54}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{10}{9}x \right]_{-2}^{\frac{10}{7}} \\
 &= -\frac{7}{54} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^3 - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{7} - \left[-\frac{7}{54} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{9} \cdot (-2)^2 + \frac{10}{9} \cdot (-2) \right] \\
 &= \frac{128}{49} \approx 2,612
 \end{aligned}$$

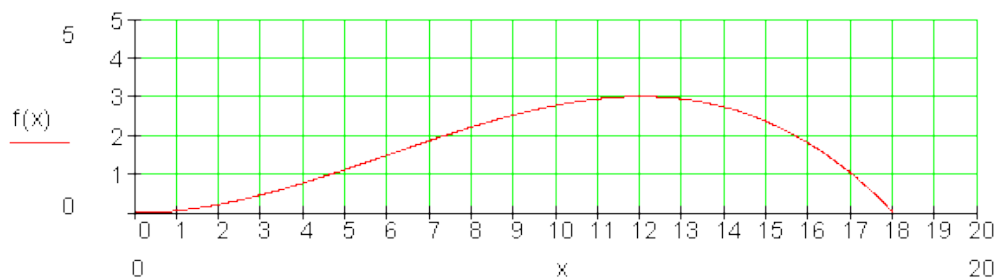


انتیگرال د منځ- ارزښت په حیث یا توګه

$f(x)$ د $[a; b]$ په انټروال کې انتیگرال د منځ ارزښت په تګه (حیث)

د یوه ازاد غونډوسکي وهلو فکشن $f(x)$ گراف په فوټبال لوبه کې په نږدې توګه د غونډوسکي (کړې) الوتنو کړه یا منحني ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



د غونډوسکي (کړې) وهلو یا شوټ څخه وروسته 7 m او ترمنځ 16 m د غونډوسکي کړه کوم د الوتنې منځنۍ جګوالی لري؟

لومړۍ د دې ورشو لپاره ارزښت جدول جوړو.

x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x_i)$	1,872	2,222	2,531	2,778	2,941	3	2,934	2,722	2,344	1,778

د شمیرل شوو فنکشن ارزښتونو $f(x)$ منځ- ارزښت فرمول

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

جوړیږي. زموږ د بیلګې لپاره $n = 10$ دی، نو باور لري:

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \\ &= \frac{1}{10} \cdot (1,872 + 2,222 + 2,531 + 2,778 + 2,941 + 3 + 2,934 + 2,722 + 2,344 + 1,778) \\ &= \frac{25,122}{10} = 2,512 \end{aligned}$$

له دې سره غونډوسکه په انټروال $[7; 16]$ کې منځني د $2,512 \text{ m}$ الوتنجګوالی لري. که سړی دا تلنه په شډلو یا نړیو پلونو (قمونو) واخلي، نو د منځني ارزښت بله لاس ته راوړنه به ترې را ووځي یا لاس ته راشي.

د x - ارزښتونو $7; 10; 13; 16$ سره د منځني ارزښت لپاره به $2,34 \text{ m}$ لاس ته راغلي وای.

د x - ارزښتونو $7; 7,5; 8; 8,5; \dots$ سره د منځني ارزښت لپاره به $2,555 \text{ m}$ لاس ته راغلي وای.

په روښانه تګه لیدل کیږي، چې هرڅومره x - پلونه نري واخستل شي په همغه اندازه منځنی ارزښت ټیګ لاس ته راوړل کیږي.

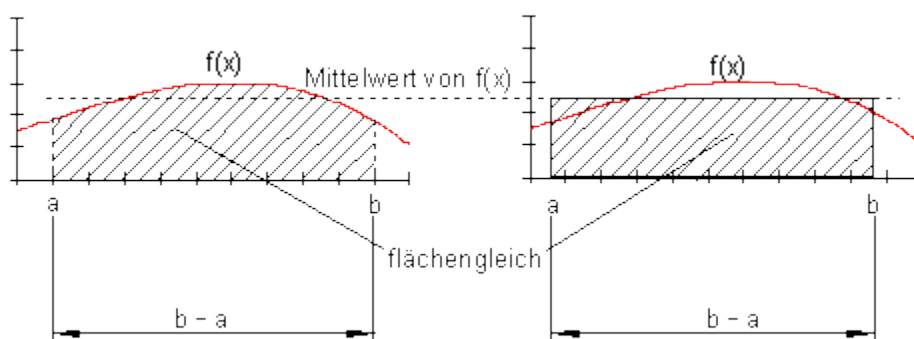
دا تلنار د ټاکلي انتیګرال له لارې غواړو غوره کړو:

لومړی نیسو، چې فنکشن $f(x)$ په انټروال $[a; b]$ کې تعریف دی یا پیژندل لري او زیاتیز یا مثبت. فنکشن د انټروال $[a; b]$ په منځ کې کوم ارزښت غوره کوي؟

ټاکلی انتیگرال $\int_a^b f(x)dx$

په انټروال $[a;b]$ کې د فنکشن د گراف لاندې سطحه انځوروي.

موږ اوس د دې په مخ د ولاړکوډیز یا مستطیل ډوله، له دې سطحې سره برابره کرښیزه سطحه، په لاندې ډول ږدو:



د ولاړکوډیز یا مستطیل پرت ولاړډوله (-عمودي) اړخ د انټروال $[a;b]$ د اوږدوالي سره یعنې $b-a$ د سره برابر دی.

داروبڼانه کيږي، که چیرې د فنکشن $f(x)$ منځ- ارزښت په انټروال $[a;b]$ کې په پورته کرښونه کې د ولاړ کوډیز د جگوالي په څیر تعریف شي.

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

د فنکشن $f(x)$ منځ- ارزښت

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

د یوه دا تالری سره په پرتله کونه

دا زموږ په بیلگه باندې په دې معنا دی:

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ mit } a = 7 \text{ und } b = 16 \text{ folgt:}$$

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \frac{1}{16-7} \int_7^{16} \left(-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \right) dx = \frac{1}{9} \left[-\frac{1}{4 \cdot 288}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 16}x^3 \right]_7^{16} \\ &= \frac{1}{9} \left(\left[-\frac{1}{1152} \cdot 16^4 + \frac{1}{48} \cdot 16^3 \right] - \left[-\frac{1}{1152} \cdot 7^4 + \frac{1}{48} \cdot 7^3 \right] \right) = \underline{\underline{2,598}} \end{aligned}$$

بال به له دي سره په انټروال $[7; 16]$ کې د $2,598 \text{ m}$ منځنۍ جگوالی لروډي.

ټاکلي انتیگرال له دي سره د جمعي يا زیاتون د کلمي تل پاتي ټولنیزوالی کيږي. دا پېډي معنا، چي سړی هرڅومره کوچني x - پلونه واخلي، همغومره سړی د فنکشن منځ ارزښت ته نږدې راځي. د زاتونو يا د جمعي د اجزاوو کا اعضاوو گڼون يا تعداد زیاتیږي يا لویيږي.

انالیزی

--اکسپوننشل توابع او e - توابع

پیل

تراوسه راته معلومو توابعو کي توابع رامنځ ته کیده، چي اکسپوننشنونه یا جگعدونه یي عددونه وو:

توانتوابع: $f(x) = a \cdot x^q$ د $q \in \mathbb{R}$: سره .

بیلگه: $f(x) = 2x^3$

توابع د مثبت بنسټ سره، د هغه سره چي خپلواکه متحوله x د اکسپوننت یا جگعدد سره رامنځ ته کيږي، اکسپوننشل تابع بلل کيږي.

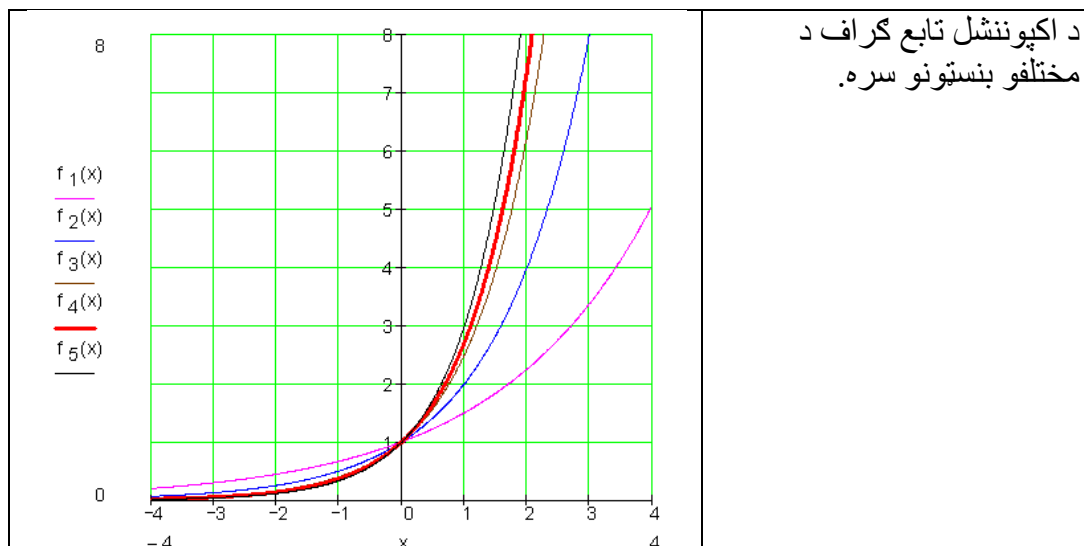
د اکپوننشل تابع لپاره بیلگه:

$$f_1(x) = 1,5^x \quad f_2(x) = 2^x \quad f_3(x) = 2,5^x \quad f_4(x) = e^x \quad f_5(x) = 3^x$$

اعداد e ; $2,5$; 2 ; $1,5$ او 3 بنسټ جوړوي او x اکسپوننت یا جگعدد (جگځي).

بنسټ e د اویلر عدد باندې مشهور دی او تقریبي ارزښت یې $2,71828$ دی.

دا به وروسته هم به نورو راوړونو کي غوره رول ولوبوي.



دا سور رنگه انځور د اړونده اکسپوننشل تابع e^x بنسټ پورې اړه لري، چې e تابع هم بلل کيږي.

پام ته راتلنه يا برېښېدنه:

- ټول په وضعيه قيمتسيسټم کې گرافونه د y - محور د $P_y (0 | 1)$ په ټکي کې غوڅوي (قطع کوي)

- د منفي x - ارزښت لپاره ټول گرافونه د x - محور ته نژدې کيږي. د منفي x - محور په داسې حالتونو کې اسيمپټوت بلل کيږي. داسې هم ويلاى شو، چې په داسې حالاتو کې د منفي x - ارزښت ځان اسيمپټوټيکي د x - محور ته ورنژدې کوي.

په رياضيکي يا شمېرپوهنيز ډول داسې ليکو: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

د مثبت - ارزښت لپاره د تابع ارزښت له ټول پولو اوږي يعنې د ناپاى په لور ځي.

شمېرپوهنيز ليکدود يې داسې دی: $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$

- په وضعيه قيمتسيستم کي انځور شويو گرافونو ټول تابع ارزښتونه مثبت دي، ځکه چې د اکسپوننشل توابعو لپاره مثبت اجازه لري.

دا په دې معنا چې په داسې حالت کي صفرايونه نه شته.

پېژند (هعريف)

د $f(x) = a^x$ تابع د $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ او $x \in \mathbb{R}$ سره اکسپوننشل تابع د a په بنسټ بلل کيږي.

دا د e عدد له کومه منځ ته راځي؟

د ربحي شمېرنې څخه دې عدد e منځ ته راشي يا وده وکړي.

دلته په هر د فرمولونو ټولگه کي خوندي د ربحي فرمول استعمالیږي.

$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$	n: د ربحي د برخي گڼون يا تعداد K_0 : پيلپانگه K_n : کاله ورسته د ربحي برخه p : د ربحي بنسټ يا بڼه په %
--	---

په کلنۍ گټه دې گټه ونه دوه برابره شي. پس د گټې بڼه له $p = 100\%$ ټاکل کيږي داسې چې $p/100 = 1$ وي.

په يو کال د ډېرو د گټې برخو سره، پانگه د گټې-گټې سره ډېر ځله په گټه اچول کيږي.. دلته د گټې بڼه يا ببخ د گټېبرخو باندې و وېشل شي.

د انگي په گټه اچول د کال روسته د $p = 100\% \Rightarrow \frac{p}{100} = 1$ سره

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1 = K_0 (1+1)^1 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

د پانگې گټونه د يو کال وروسته په نيمکلنه گټونه د $t \frac{p}{2 \cdot 100} = \frac{1}{2}$ سره.

$$K_2 = K_0 \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د پانگې گټونه يا په گټې اچونه له يو کال وروسته په مياشتنۍ گټونه د $t \frac{p}{12 \cdot 100} = \frac{1}{12}$ سره

$$K_{12} = K_0 \left(1 + \frac{1}{12} \right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61...}}$$

د پانگې په گټې اچونه له يو کال وروسته په روځنۍ گټونه د $\frac{p}{360 \cdot 100} = \frac{1}{360}$ سره

$$K_{360} = K_0 \left(1 + \frac{1}{360} \right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145...}}$$

د پانگې گټونه يا په گټې اچونه له يو کال وروسته په ساعته گټونه د $\frac{p}{8640 \cdot 100} = \frac{1}{8640}$ سره.

$$K_{8640} = K_0 \left(1 + \frac{1}{8640} \right)^{8640} = \underline{\underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181...}_{\approx e}}}$$

د پانگې گټونه يا په گټې اچونه له يو کال وروسته په n گټونه د $\frac{p}{n \cdot 100} = \frac{1}{n}$ سره.

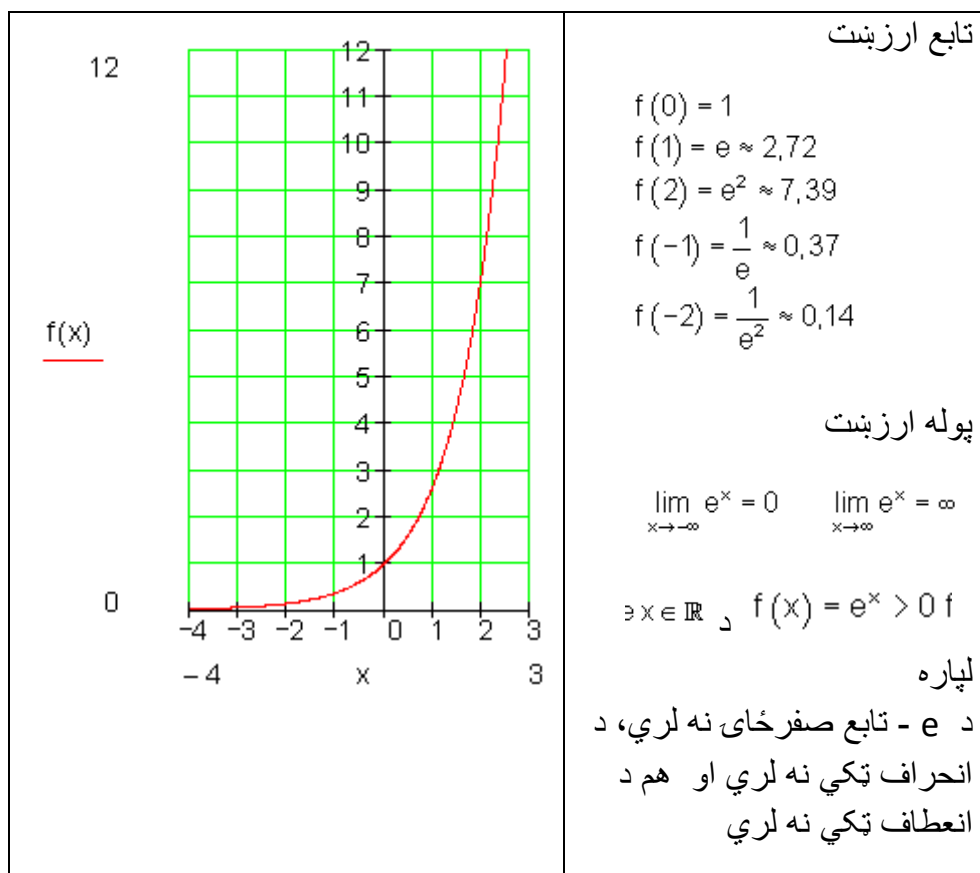
$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

که په هره لحظه میاشتکې په ګټه واچول شي (یعنې په ناپای ډېرو ګټونو ناپای $n \rightarrow$) نو د یو کال وروسته لاندې پانګه لاس ته راوړي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دې معنا چې پانګه د e ضریب سره ډېرځله شوه،

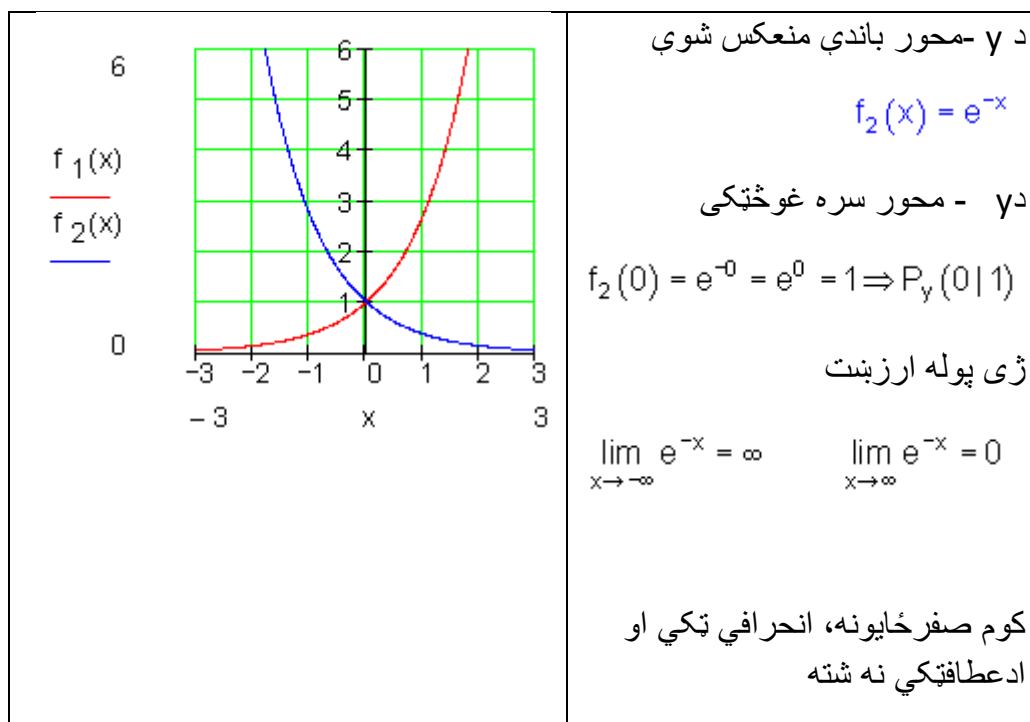
د e - تابع $f(x) = e^x$ بنسټیز خویونه



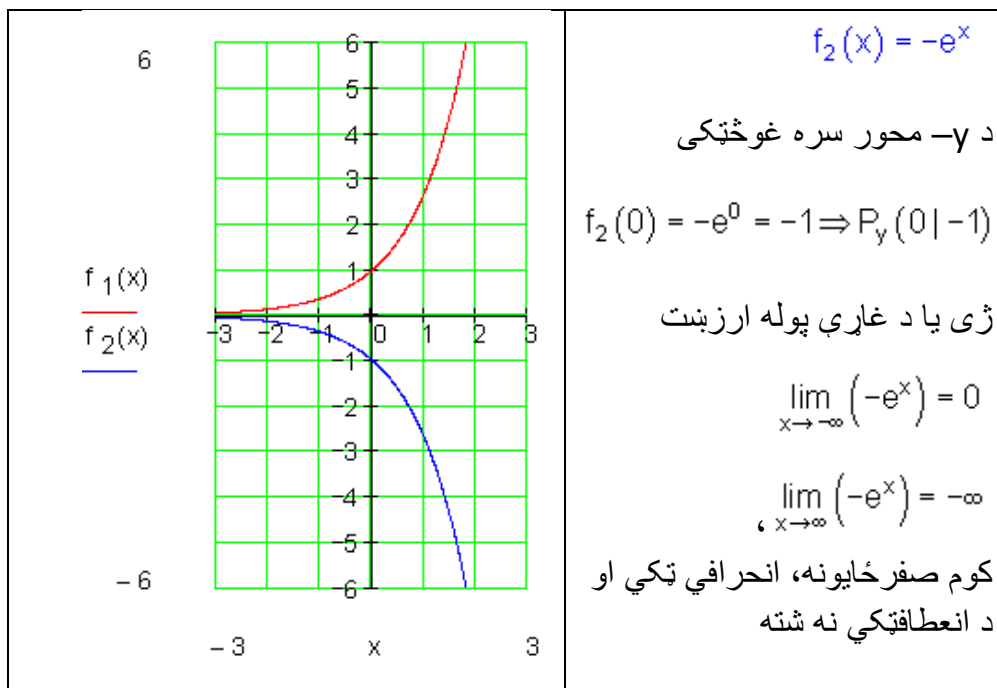
د e - تابع هندارونه يا معكوسونه، راکښنه او غزونه

په ورته توگه، لکه نورمال پارابولونه د مطلوبه عمليو سره نور پارابولونه منځ ته راځي، کيدی شي د e - توابعو د گراف د راکښنې، غزونې او هندارونې سره نور اکسپوننشل توابع وکتل يا لاس ته راوړل شي.

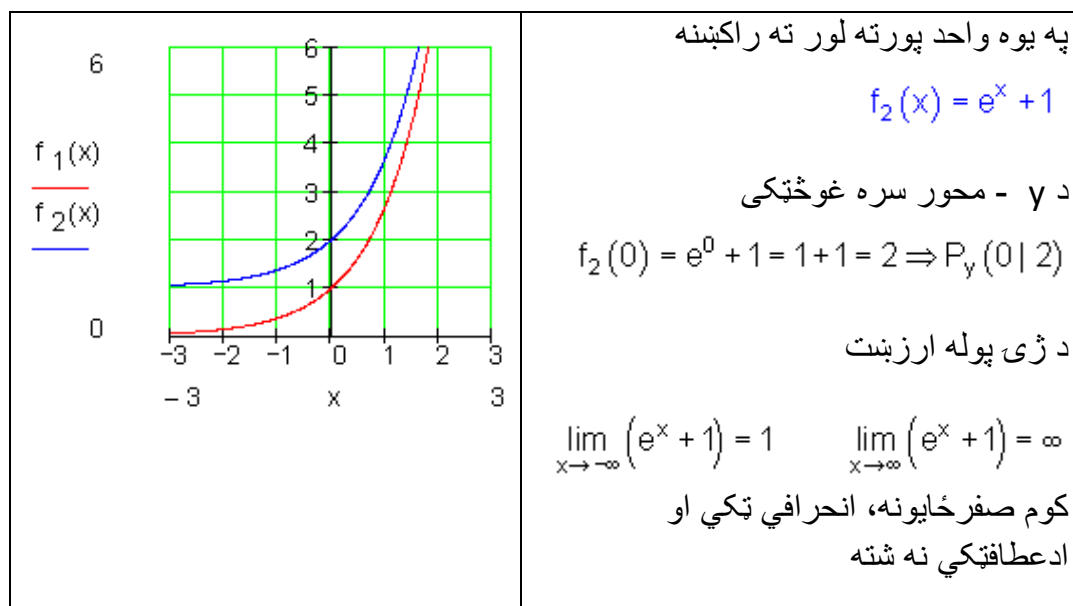
هندارونه يا معكوسونه:



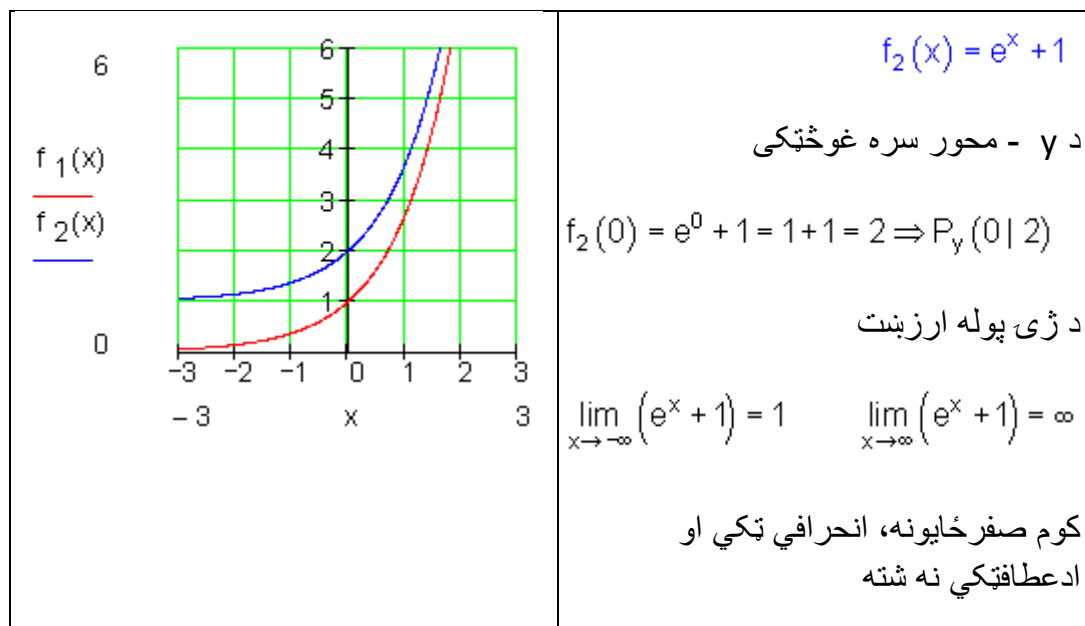
د x په محور هندارونه



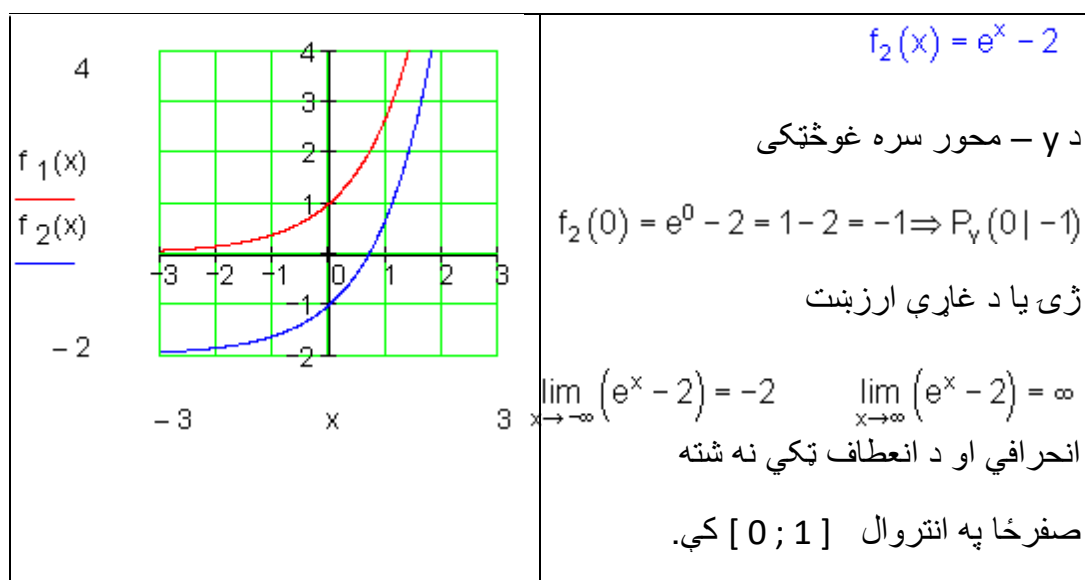
د y په لور راګڼنه



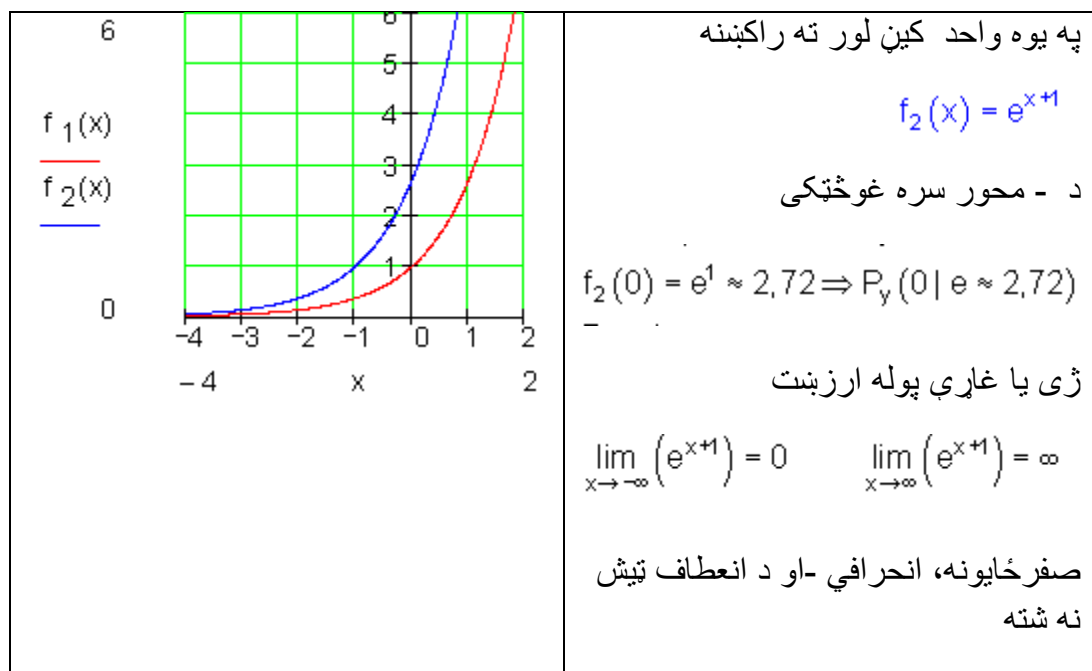
په يوه واحد پورته لور ته راکښنه



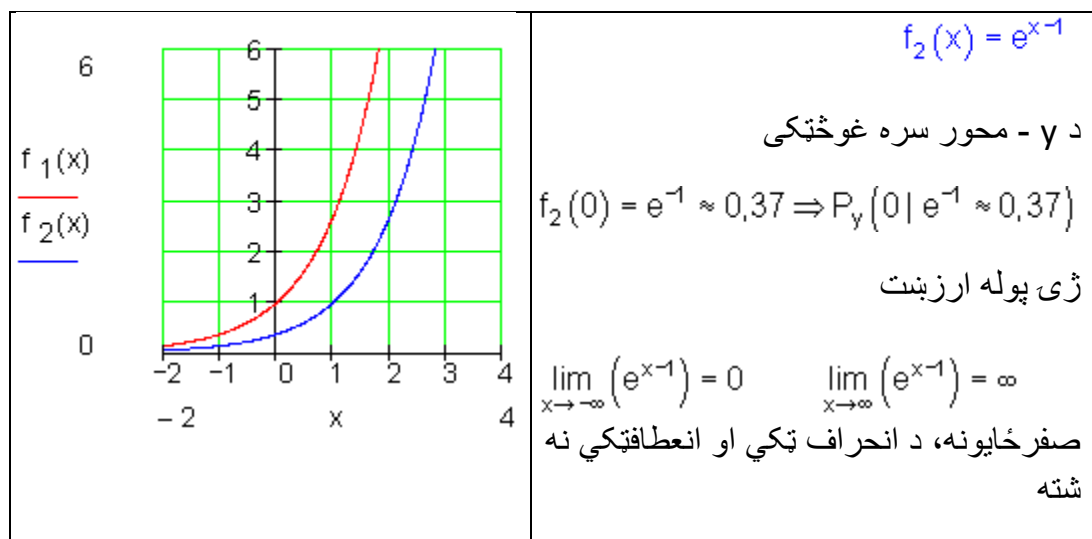
په دوه واحد کښته لور ته راکښنه



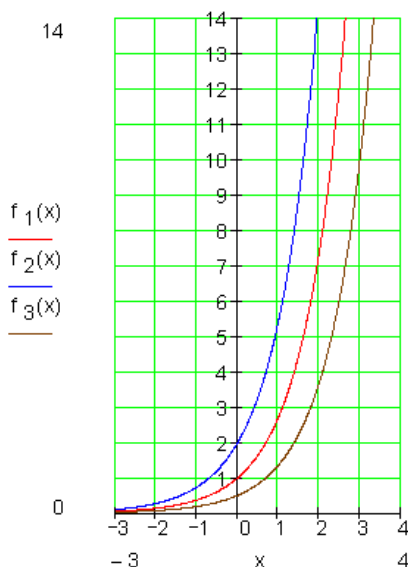
د x محور باندې راکښنه



په يوه واحد بني لور ته راکښنه



غزونه (کېښکودنه) د y په لور



د ضريب $k = 2$ سره غزونه

$$f_2(x) = 2 \cdot e^x$$

د y - محور سره غوڅونه

$$f_2(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0 | 2)$$

ژى پوله ارزښت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 \cdot e^x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cdot e^x) = \infty$$

د ضريب $k = \frac{1}{2}$ سره كينسكودنه

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$$

د y - محور سره غوڅونكى

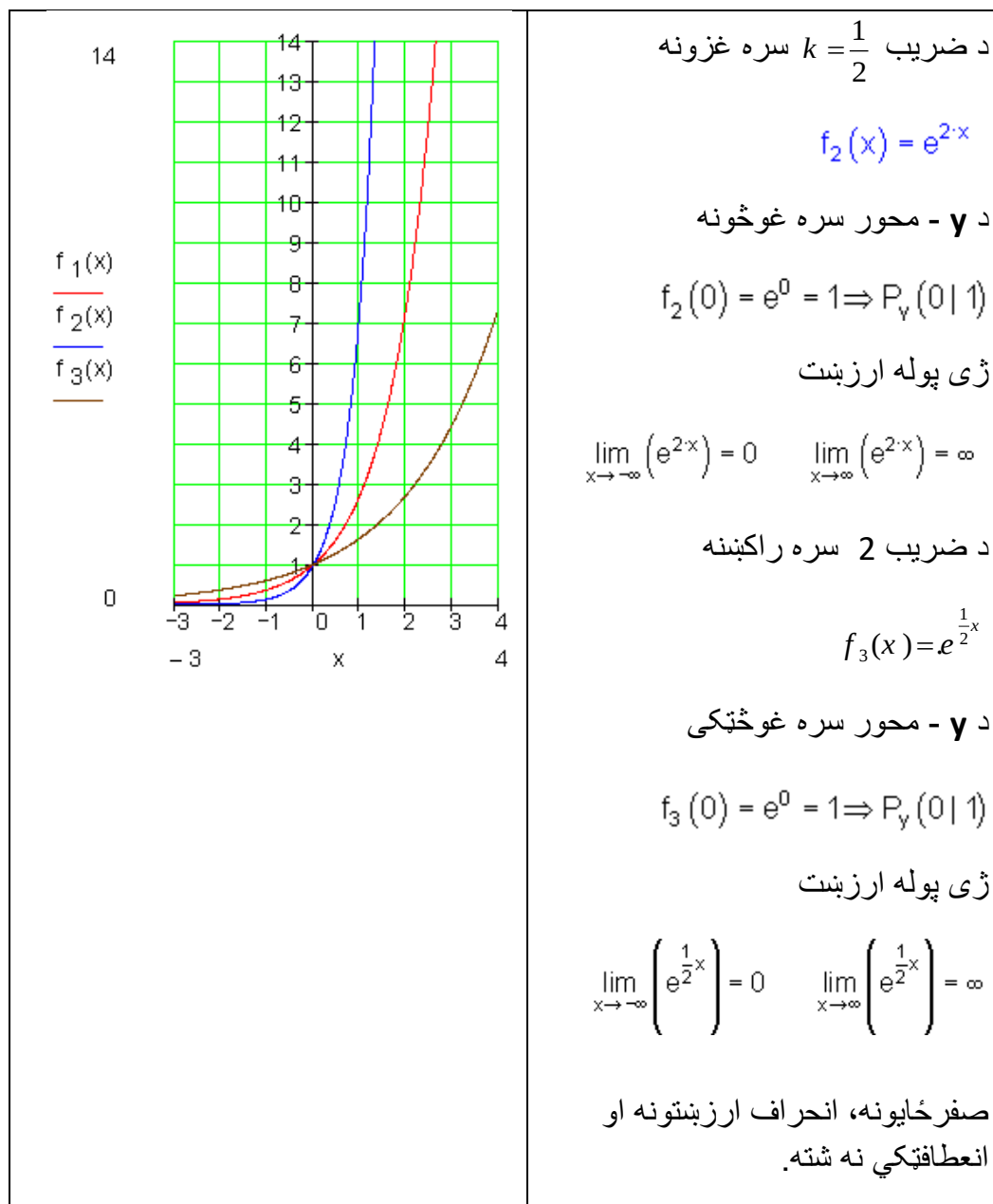
$$f_3(0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_y\left(0 \mid \frac{1}{2}\right)$$

ژى پوله ارزښت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = \infty$$

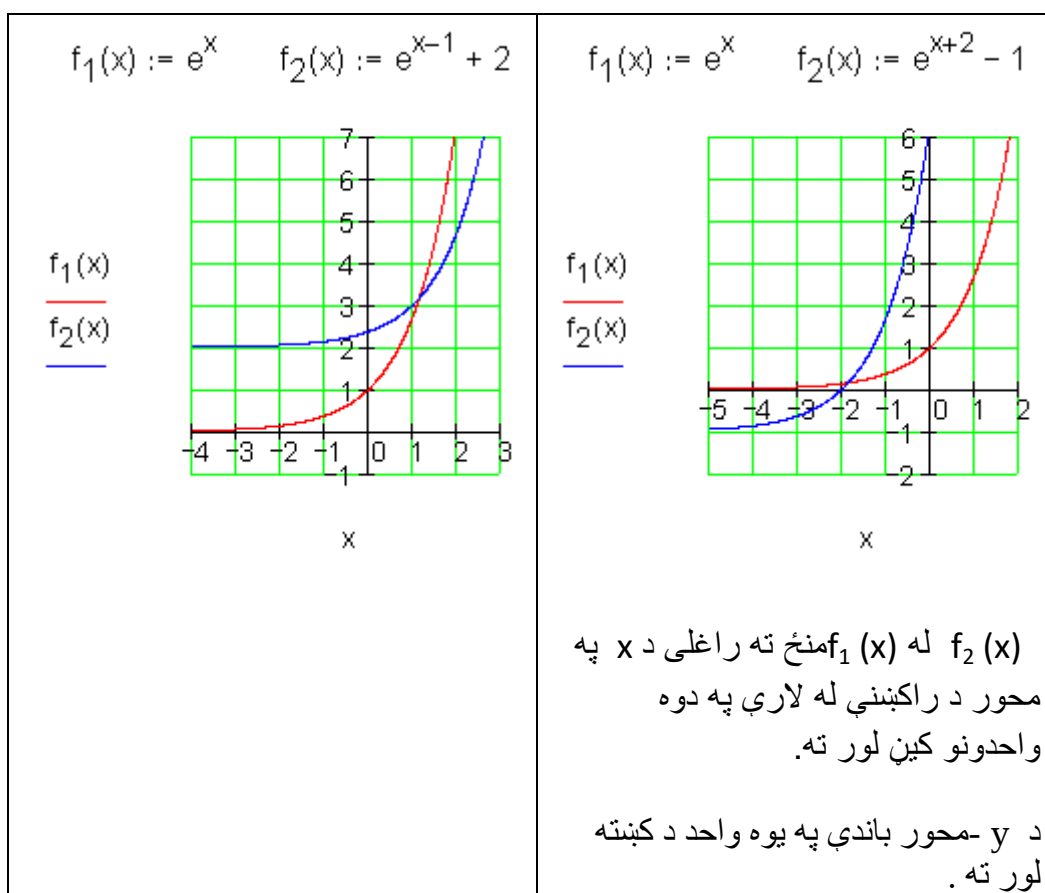
صفرخايونه، انحرافتيكي او انعطافتيكي نه شته.

غزونه (کينسکودنه) د x په لور



د e تابعو هندارونه، راکښنه او غزونه په خوښه یو له بل سره کمینیر یا نښلول کېږي یعنې شمېرنننزي عملیې په اجرا کېدی شي .

د x - او y - محورونو راکښنه:



تمرینونه:

د e - تابع گراف

د بنسټيزې تابع e^x راکښنه، هندارونه يا انعکاس ، او ښه بدلون وښايست.

هر تابع گراف او د بنسټيز تابع گراف په يوه مناسب وضعيه قيمتسېستمکي و کارى او د محور سره يې غوڅتکى (د تقاطع نقطه) .

د گراف په مرسته ولولى:

پوله ارزښت يا حد (لېميت) ، صفرخايونه که شته وي او د انعطاف ټکي.

يادونه: فقط په آنټروال $[-10; 10]$ کې تابع ارزښتونه په پام کې ونيسئ.

Für = د لپاره

اول - $f(x) = e^x; g(x) = e^{-x}$ für $[-4; 4]$ دويم - $f(x) = -e^x$ für $[-5; 3]$

درېم - $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ für $[-4; 4]$ څلورم - $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}$ für $[-4; 4]$

پنځم - $f(x) = \frac{1}{2}e^{x+3}$ für $[-5; 3]$ شپږم - $f(x) = e^{x-2} - 3$ für $[-4; 4]$

اوم - $f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ für $[-5; 3]$

اتم - $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$ für $[-2; 6]$

نهم - $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ für $[-4; 4]$

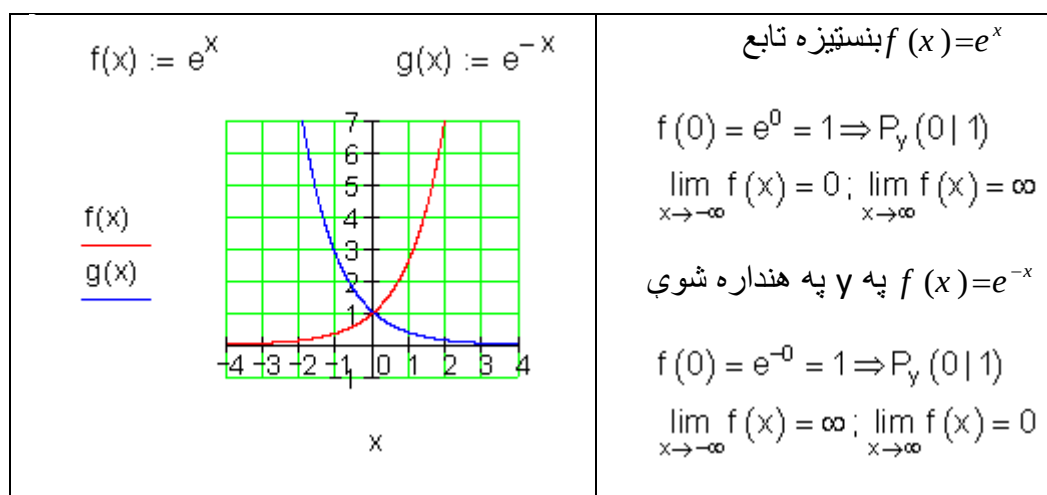
لسم - $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{4}x}$ für $[-10; 5]$

نتیجی:

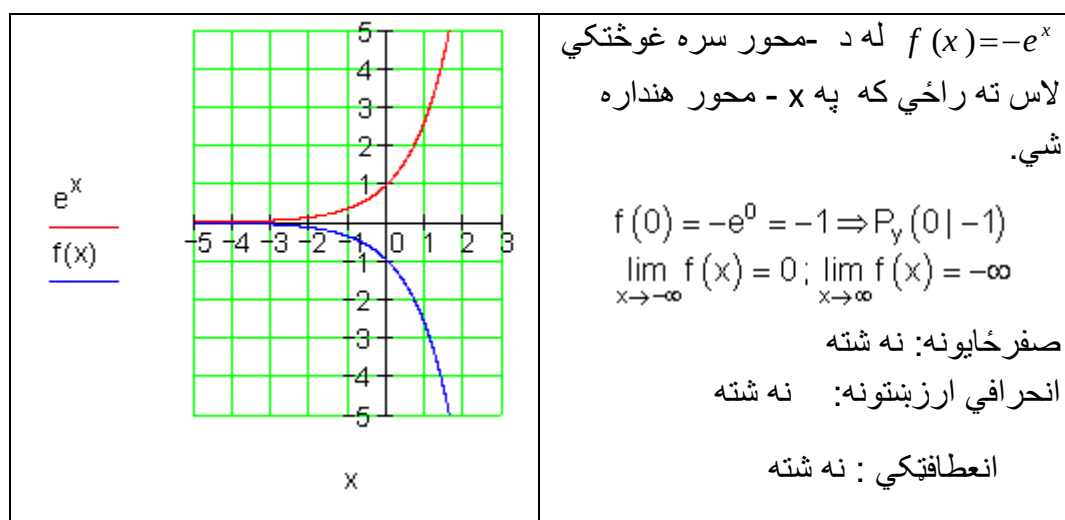
د اکسپوننشل تابع تمرینونه |

مفصل حل

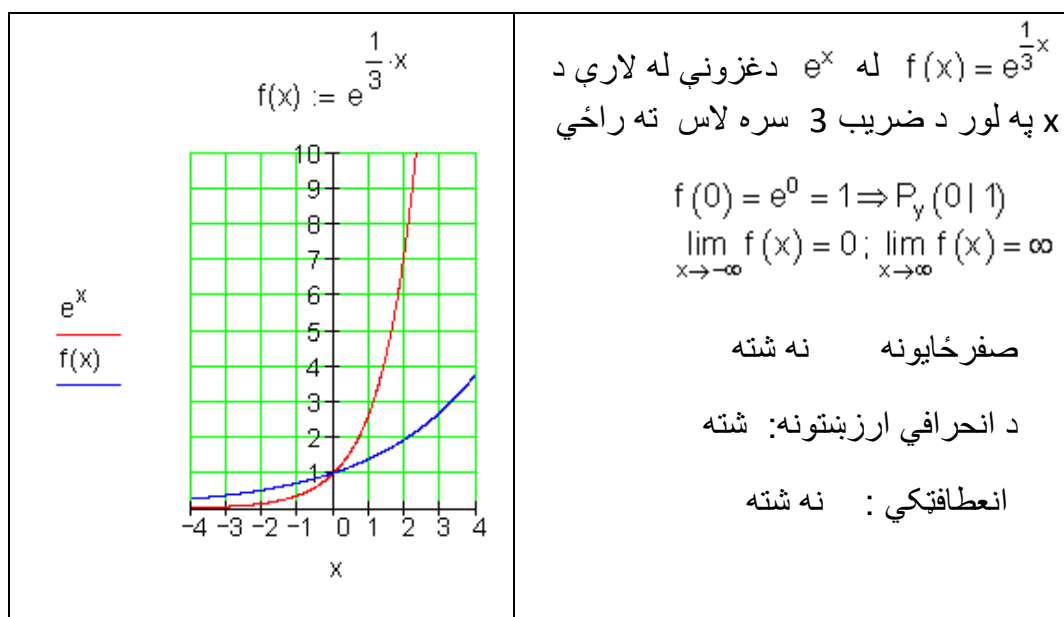
لومړۍ - مفصل حل



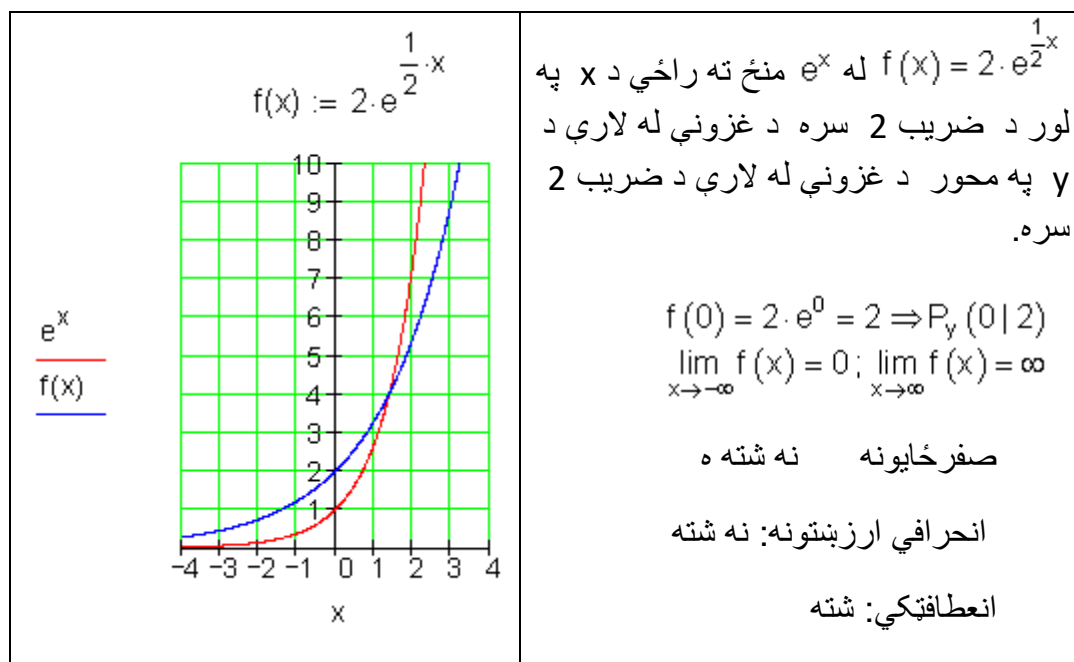
دویم - مفصل حل

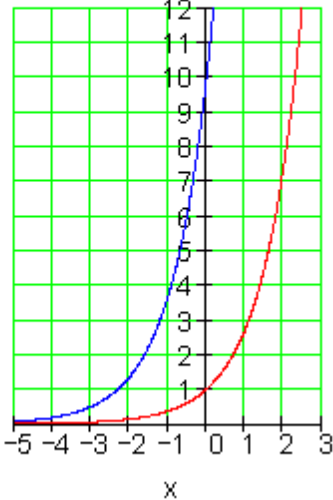
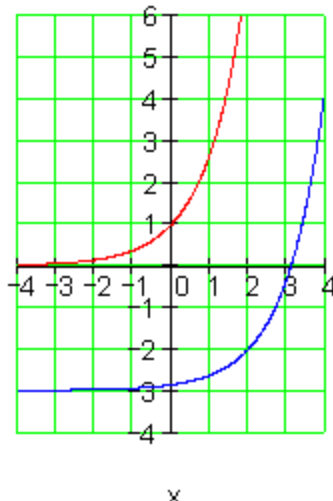


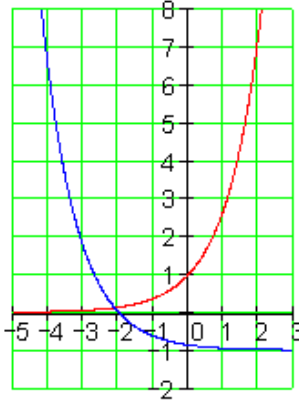
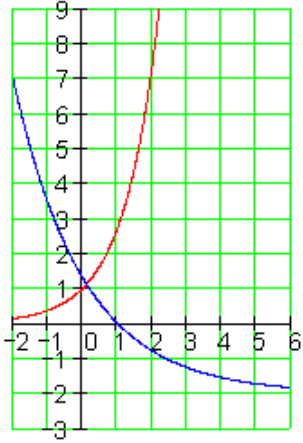
دریم - مفصل حل

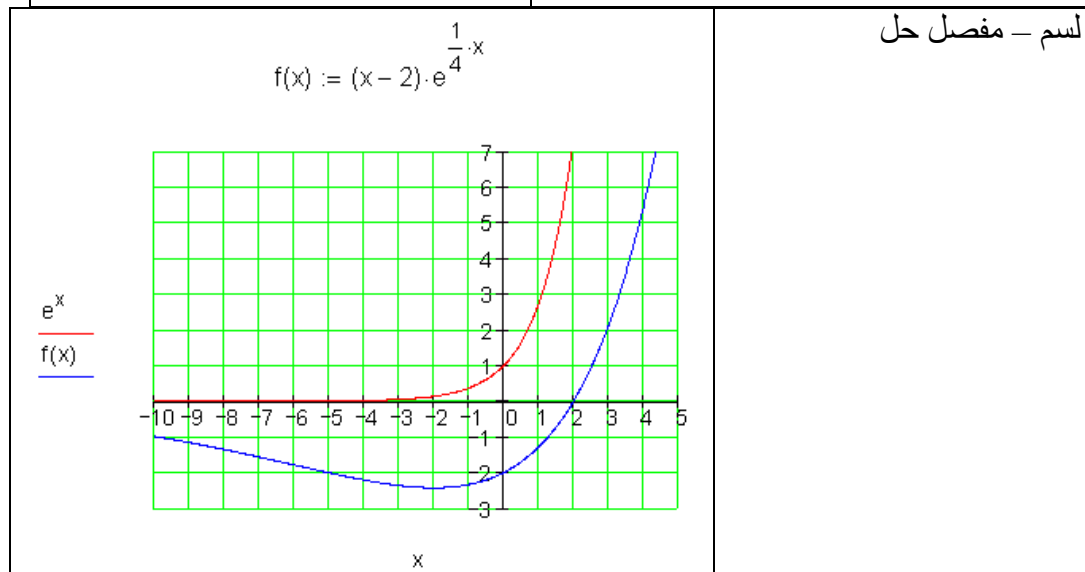
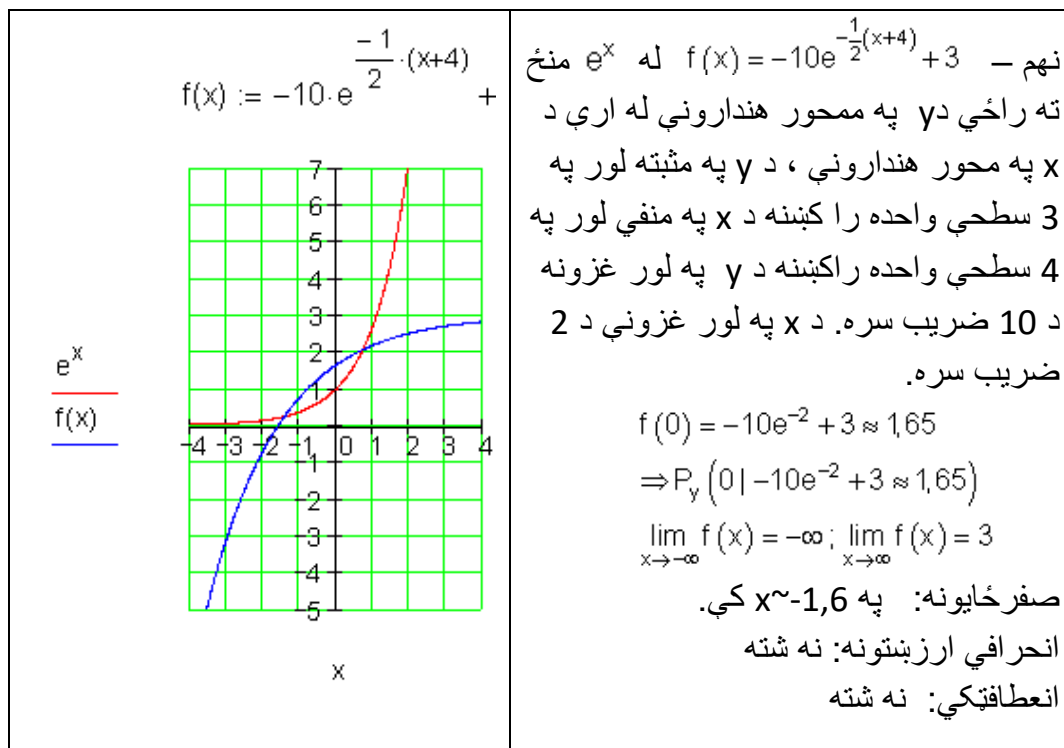


څلورم - مفصل حل



$f(x) := \frac{1}{2} \cdot e^{x+3}$ 	پنځم - $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{x+3}$ له e^x لاس ته راځي د x په منفي لور د راکښني له لارې په 3 کچواحدو، د کيښکودلو له لارې د y په لور ر باندې د ضريب $1/2$ سره $f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^3 \approx 10$ $\Rightarrow P_y \left(0 \mid \frac{1}{2} \cdot e^3 \approx 10 \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ صفر ځايونه: نه شته افراطي ارزښتونه: شته انعطاف ټکي: شته
$f(x) := e^{x-2} - 3$ 	شپږم - $f(x) = e^{x-2} - 3$ له e^x منځ ته راځي د منفي y لور باندې په 3 سطحي واحدو، د x په مثبتو لور د راکښني له لارې په 2 سطحي واحدو. $f(0) = e^{-2} - 3 \approx -2,86$ $\Rightarrow P_y \left(0 \mid e^{-2} - 3 \approx -2,86 \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ صفر ځايونه: په $x \sim 3,2$ انحرافي ارزښتونه: نه شته انعطاف ټکي: نه شته

$f(x) := e^{-(x+2)} - 1$  e^x $f(x)$	$f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ له e^x منځ ته راځي د y په محور د هنداروني له لارې، د y په منفي لور په يو سطحي واخذ. د x په منفي لور په 2 سطحي واحده غزول. $f(0) = e^{-2} - 1 \approx -0,86$ $\Rightarrow P_y(0 e^{-2} - 1 \approx -0,86)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$ صفرځايونه: په $x \sim -1,8$ کې انحرافي ارزښتونه: نه شته انعطافګي: نه شته
$f(x) := 2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot (x-1)} - 2$  e^x $f(x)$	اتم - $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{-1}{2}(x-1)} - 2$ له e^x منځ ته راځي د y په محور د هنداروني له لارې د y په منفي لور راکښل په 2 واحده. د x په مثبت لور په 1 سطحي واحد راکښل. د y په مثبت لور په 2 واحده غزوني. د x په لور د 2 واحده سره $f(0) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1,3$ $\Rightarrow P_y(0 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1,3)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ صفرځايونه: په $x \sim 1,2$ کې انحرافي ارزښتونه: شته انعطافګي: نه شته



کربنيز مساوات $u(x) = x - 2$ د $-e$ تابع $v(x) = e^{\frac{1}{4}x}$ سره نېنلول کيږي. له دې دا

تابع لاس ته راځي: $f(x) = u(x) \cdot v(x) = (x - 2) e^{\frac{1}{4}x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

په $x = 2$ کې صفرځای په $x \sim -2$ کې د انحراف ارزښت په $x \sim -6$ کې د انعطاف ټکی.

د اکسپوننشل توابعو کارونه يا استعمال

د تابع مساواتو جوړونه

په طبیعت کې یې څیړنه:

د اکسپوننشل توابعو مشتق

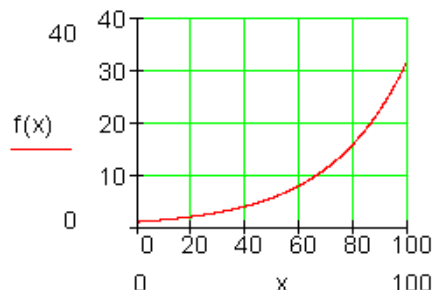
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتې ویش (حجره وېش) له لارې زیاتږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول : او گراف یې کارو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متحوله د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.

$x = \text{Minuten}$	0	20	40	60	80	100
$y = \text{Bakterienzahl}$	1	2	4	8	16	32

پورته جدول کې: $x =$ دقيقې $y =$ د بکتریاو تعداد



اوس مو دنده داده تابعيزې (د تابعو-) اړیکې د $f(x)$ د يوه مساوات په بڼه وټاکو.

هرې ۲۰ دقيقې د بکتریاو تعداد يا گڼون دوه برابره کيږي، دا په دې معنا چې دا د ۲۰ دقيقو وروسته نتيجه د دوه سره ضرب شي

$$\text{لاندې ږدو يا ليکو: } f(x) = 2^x$$

دلته $f(x)$ د بکتریاو تعداد دی او x د دقيقو تعداد.

د دې تابع مساوات سره د بکتریاو تعداد هره دقيقه دوه برابره کوي.

د بام اوفکر وروسته موږ د تابع مساوات لاندې نتيجې ته رسيږو، چې دا شي حالت ټيک روښانه کوي يا تشرېح کوي:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{20}x}$$

$$\text{Probe: } x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1; x = 20 \Rightarrow f(20) = 2^1 = 2; x = 40 \Rightarrow f(40) = 2^2 = 4$$

ډېروالي، لکه چې دلته مو راوړ ، د اکسپوننشل ودې يا - زیاتوالي په نامه نوموو. يوه تابع چې داسې يوه تلنه تشرېح کوي، اکسپوننشل تابع بولو.

تمرينيزي پوښتنې

د اکسپوننشل تابع د تابع مساوات د لاندې شرايطو سره بايد څنگه وبرېښي:

الف - د باکټريو تعداد (گڼون) هر پخلس دقيقې دوه برابره کيږي.

ب - هر دېرش دقيقې د باکټريو تعداد درې برابره کيږي.

پ - موږ په مطالعه يا کتلو پيل کوو، چې $n_0 = 1000\ 000\ 000$ د باکټريو تعداد شته يا موجود وي او تعداد يې هر پنځه څلوېښت دقيقې پنځه برابره کيږي.

ت - د کتلو پيل سره $n_0 = 1000\ 000\ 000$ باکټريې شته دي او هرې 45 min دقيقې د باکټريو تعداد د $e = 2,718$ په ضريب يا څلوروني زياتيږي.

هر لس دقيقې د n_0 تعداد نيميږي.

حل :

$$\text{الف} \quad f(x) = 2^{\frac{1}{15}x} \quad \text{ب} \quad f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$$

$$\text{پ} \quad f(x) = 1000\ 000\ 000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^9 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} \quad \text{ت}$$

$$f(x) = 100\ 000 \cdot e^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{1}{45}x} \quad \text{mit } e = 2,718$$

$$\text{ټ} \quad f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x} \quad \text{منفي پېرېدنه}$$

پام : توابع چي د زياتيدو پروسې څېري، اكسپوننشل توابع بلل كيږي. ټوليز تابع مساوات يې دي:

$$f(x) = n_0 \cdot a^{k \cdot x} \quad (1)$$

n_0 = Anzahl zur Zeit $t = 0$; $a \in \mathbb{R}^+$; $k, x \in \mathbb{R}$, 0 = په وخت t

سره د وخت

اكسپوننشل ډېرېدنه يا اكسپوننشل كېدنه د ژوند په زياتو ورشو گانو كې كتل كېدای شي:

په بېالوژي كې (د باكتريو ډېرېدنه او كمېدنه)

په اوکولوگي كې (د حيواناتو ډېرېدنه يا زېږنده)

په اقتصاد كې (د ربح له لارې د پانگې زياتېدنه)

په فزيكي او تخنيكي مسائلو كې (د راډيو اکتیو موادو تجزيه)

په روغتيا كې (د دوا اغېزه)

د e - تابع ته ځانگړې بېلگې

اكسپوننشل وده كونه

د باكتريا شتون د يوه e -تابع وروسته زياتيږي.

د $n_0 = 2000$ باكترياگانې شتون په ۴ ساعتونو كې په كوم ارزښت زياتيږي.

.....
 له څومره ساعته وروسته دا باکتریاوې $f(x) = n_0 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t}$ د پیل ارزښت n_0 ،
 وخت په ساعت t سره 10 000 ته جگړي؟

د تابع گراف څنگه بریښي؟

د باکتریاو تعداد له څلور ساعته وروسته:

$$f(x) = n_0 \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(4) = 2000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot 4} = \underline{\underline{2600}}$$

له څو ساعته وروسته دا باکتریا وې 10 000 دي؟

$$f(x) = 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t} = 10\,000 \quad \text{ا ښونه:}$$

د دې لپاره چې جگ عدد یا گڼ t وټاکلی شو، نو باید اکسپوننشل مساوات

$$2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t} = 10\,000 \quad \text{حل کړو.}$$

دا د لوگاریتم سره کیدی شي. د دې لپاره باید لاندې د لوگاریتم قوانین وکارول شي:

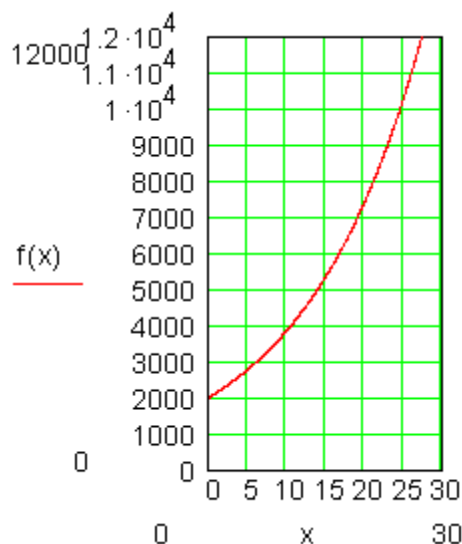
$$\ln e^x = x \quad \text{او} \quad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

د اکسپوننشل مساوات حل:

$$\begin{aligned} \ln \left(2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t} \right) &= \ln 10\,000 \\ \Leftrightarrow \ln 2\,000 + \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t &= \ln 10\,000 \quad | -\ln 2\,000 \\ \Leftrightarrow \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t &= (\ln 10\,000 - \ln 2\,000) \quad | \cdot \frac{262\,551}{17\,221} \\ \Leftrightarrow t &\approx 24,54 \end{aligned}$$

د نږدې 24,5 ساعته وروسته

10000 باکتریاوې دي



اکسپوننشل کمیدنه یا کمښت

رادیو اکتیو مواد په برابر وخت کې تل به همغه ضریب تجزیه کيږي.

د هغو نیم ارزښت وخت څخه لرو، چې له نیم وخت وروسته څومره فعالیت شتون لري. فعالیت $A(x)$ په dgaipikokorl (تجزیه په ثانیه کې $1 \text{ MBq} = \text{Megabecquerel}$) $10^6 \text{ Zerfälle pro Sekunde}$ کچ یا اندازه کيږي.

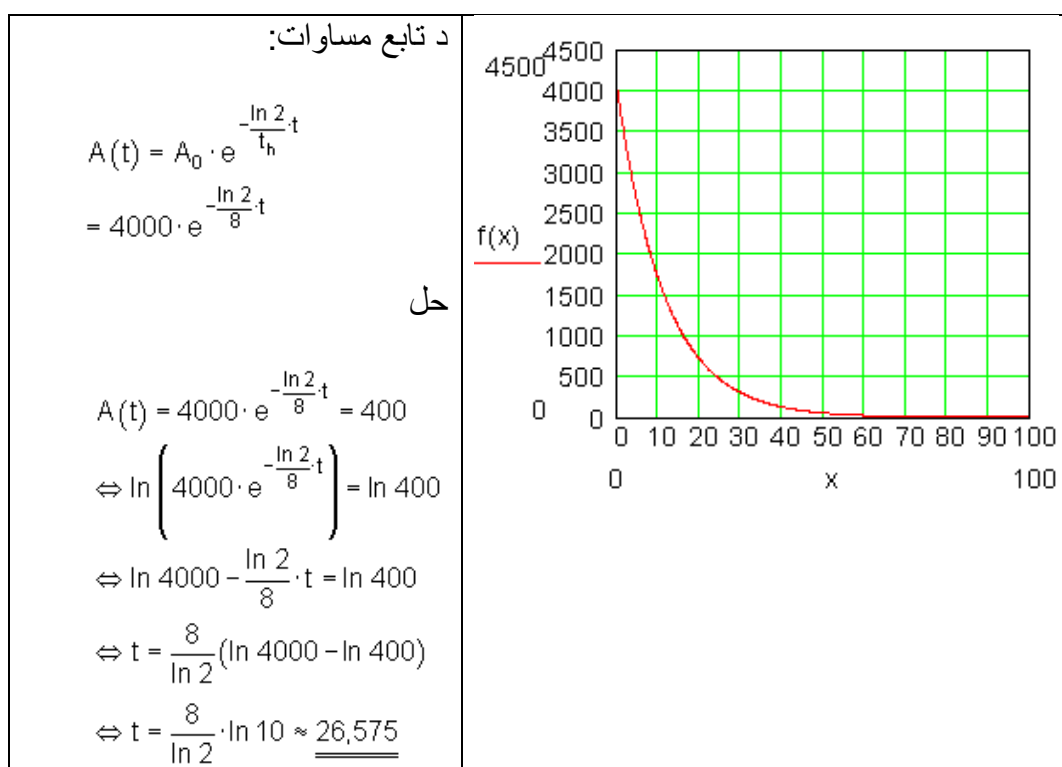
د طبي معاینو لپاره یو $\text{Jod } 131$ د 1 نیم ارزښت وخت (t_h) 8 روحي کارول کيږي.

ناروغ ته $A_0 = 4000 \text{ MBq}$ ورکول کيږي.

د څومره نيم ارزښتوخت يا همداسي روځو وروسته په بدن كې د پاتې فعاليت ماكسيمال تردې وخته 400 MBq دى؟

گراف رسم كړى ، تقريبي وخت ولولى او ټيكن ارزښت يې وشمېرى.

د راديو اکتیو تجزیې قانون: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$
 دلتې په معنا دی: پيلفعاليت په MBq نيمارزښت وخت t_h په روځو ، t وخت په روځو.



د 27 روځو وروسته، نژدې له 3 نيمارزښت وخت وروسته كمښت په بدن كې نژدې 400 MBq دى.

د عدد e ، طبيعي لوگاريتم او د e - تابع

$$e = 2,718\ 281\ 828\ldots$$

$$e^{\ln b} = b$$

$$\ln e^x = x$$

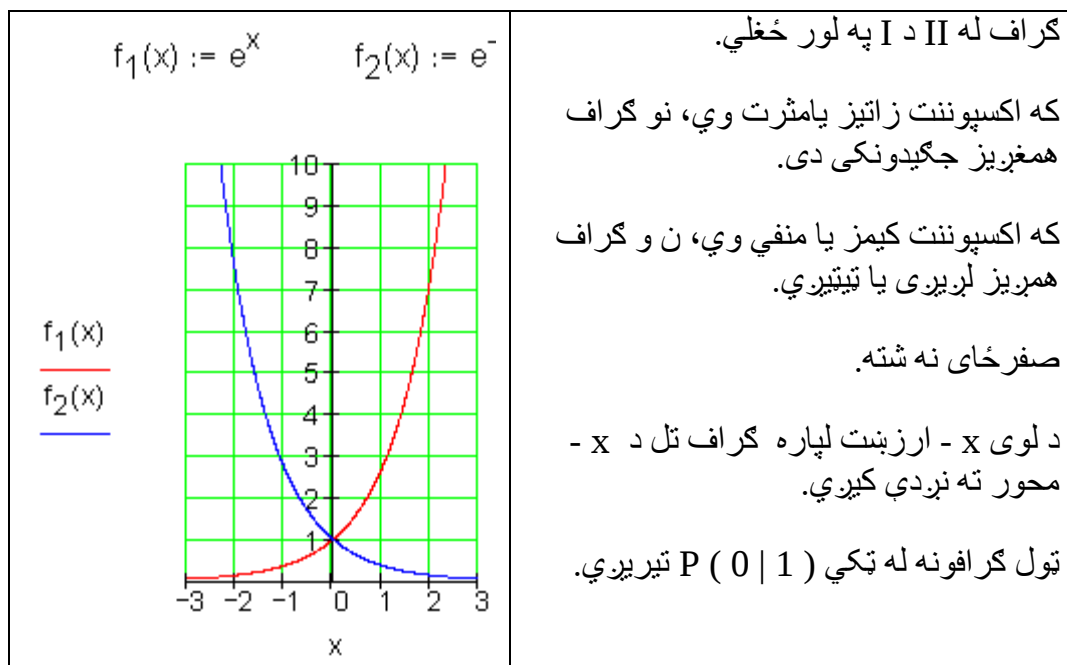
$$\ln 1 = 0$$

$$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$$

$$\text{z.B. } e^{\ln(x-1)} = x-1$$

$$\text{z.B. } \ln e^{-\frac{1}{k}x} = -\frac{1}{k} \cdot x$$

$$\ln e = 1$$



هر اکسپوننشل تابع يا بلواک د e -تابع له لاري کښل کیدی شي.

Mit $f(x) = a^x$ und $a = e^{\ln a}$ gilt:

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a) \cdot x} = e^{x \ln a}$$

له دې بنسټه به په لاندې برخه کې داکسپوننشل تابع فقط د e -تابع تر څيړني لاندې ونيل شي.

دریم: محور غوڅټکي او اکسپوننشل مساوات

پیلېلګې

بیلګه ۱

د لاندې تابع غوڅټکي یا نقاط تقاطع باید وټاکل شي:

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

د y -محور سره غوڅټکي د لاندې ایښوونې له لارې پیدا کیدی شي:

$$y_s = f(0)$$

$$f(0) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(0+4)} = -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0,102 \Rightarrow P_y \left(0 \mid -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0,102 \right)$$

د x -محور سره غوڅټکي د لاندې ایښوونې څخه لاس ته راځي:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)} = 0$$

له دې لاس ته راځي چې غوڅټکي نه شته، ځکه چې $e^{-\frac{1}{2}(x+4)} \neq 0$ دی د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

د x -محور سره غوڅټکي د $f(x)$ د صفر ځایونو له لارې پیدا کيږي. تابع $f(x)$ صفر ځای نه لري، ځکه چې دا د x په لور غزېدل او د x په لور راکښلي e -تابع دی. دا برسیره پرته له دې د y -محور او x -محور باندې هنداره یا منعکس شوی دی،

د اکسپوننشل تابع بڼه $f(x) = a \cdot e^{u(x)}$ د $a \in \mathbb{R}$ سره د y -محور سره فقط یو غوڅتکی لري مگر کوم صفرځای نه لري.

ځکه $e^{u(x)} \neq 0$ د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

بیلګه ۲ :

د لاندې h غوڅتکي غواړو پیدا کړو

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$$

د y -محور سره غوڅتکی: $y_s = f(0)$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^1 - 2 \cdot e^1 = -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4,08 \Rightarrow \underline{\underline{P_y \left(0 \mid -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4,08 \right)}}$$

د دې لپاره چې د x -محور سره غوڅتکي وټاکلی شو، دا کار ستر دی. د دې لپاره د f صفرځایونه باید وټاکل شي.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$$

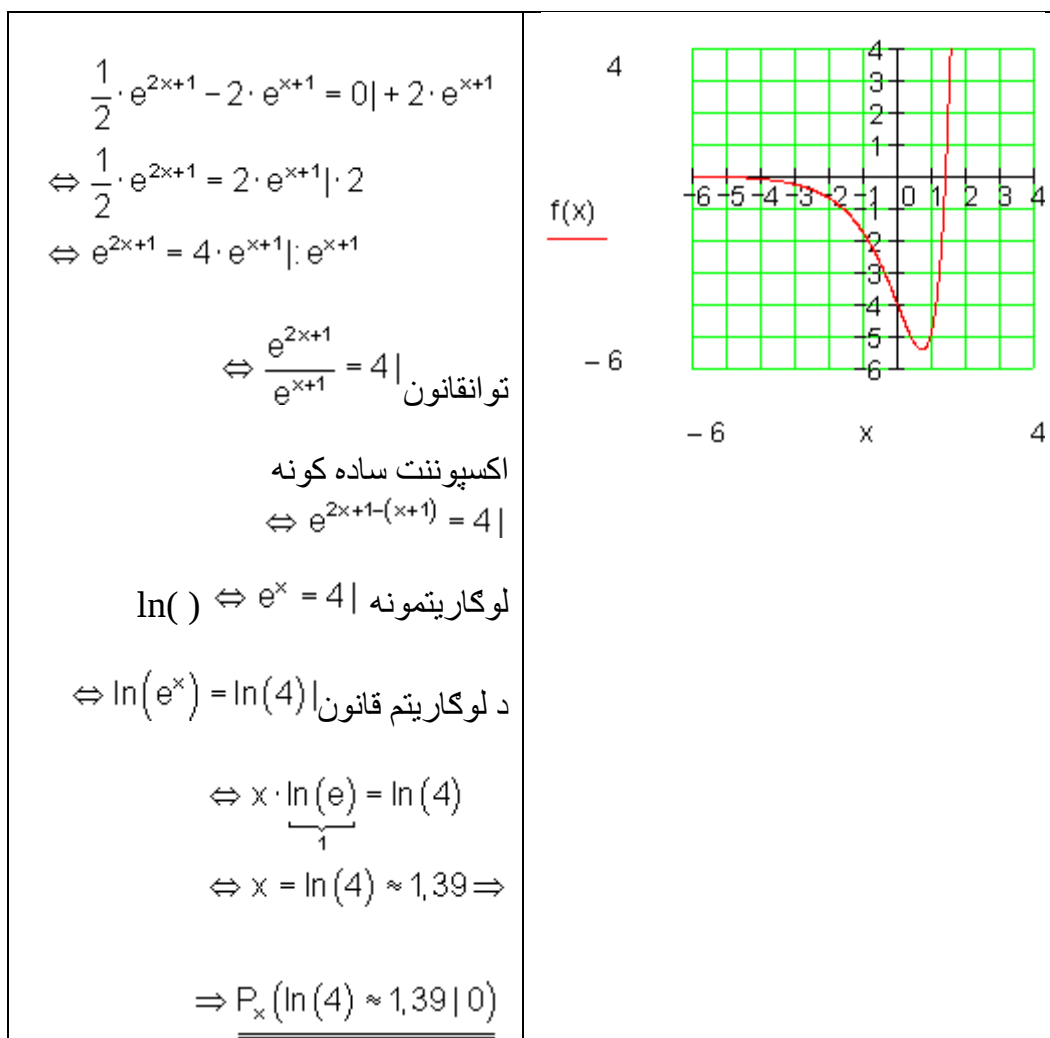
د x محور سره غوڅتکی:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}}_{\text{Exponentialgleichung}} = 0$$

اکسپوننشل مساوات

د دې لپاره چې د x -محور سره غوڅتکی، یعنې د اکسپوننشل تابع صفرځای وټاکو، دا په ډیرو حالتونو کې غوښتونی دی، چې اکسپوننشل تابع حل کړو.

د دې معلومو عملیو د پاسه یا پرته، کوم چې د مساوات د حل لپاره کارول کیږي، د اکسپوننشل مساوات د حل لپاره اړین دی، چې د توان- او لوګاریتم قوانین راته جوت وي.



د توان – او لوگاریتم قوانین

د توان – او لوگاریتم غوره قوانین سره رایوځای کړي.

توانقوانین:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوگاریتم تعریف:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$	$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$
---	--------------------------------------	---------------------------------------

د لوگاریتم قوانین د e په بنسټ

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

تمرینونه:

د توان او لوگاریتم قوانینو استعمال.

د لاندې توان او لوگاریتمي ترمونو د توان او لوگاریتمي قوانینو په استعمال سره ښه بدله کړئ.

اول - $(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x$ - دویم - $(e^x + e^{-x})^2$

دریم - $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$ - څلورم - $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$

پنځم - $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$ - شپږم - $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$

$$\ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \ln(e^2) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right) \quad \text{اوم - اتم -}$$

$$\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} - e^{\ln(k)+1} \quad \text{نهم - لسم -}$$

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل مساوات له لارې حل

يو اکسپوننشل مساوات دی، د لاندې بڼه بدلون له مخې

چې د اکسپوننشل مقابسي سره حل کیدی شي.

يو حل د اکسپوننشل مقابسي له مخې فقط هلته ممکن دی، که وکړای شو، د مساوات دواړه خواو ته ترمونه په داسې بڼه وليکلای شو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. متأسفانه چې دا تل شوونې نه دي لکه لاندې بیلگه به چې وښايي:

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل پرتله کونې له لارې حل

$$e^{2x+4} - e^{x-1} = 0$$

اکسپوننشل مساوات دی، چې له لاندې بڼه بدلون

$$e^{2x+4} = e^{x-1}$$

له لاري د اکسپوننش پرتله کوني سره حل کیدی شي.

$$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Rightarrow \underline{x = -5}$$

ازماښت:

$$e^{-10+4} - e^{-5-1} = e^{-6} - e^{-6} = 0$$

د اکسپوننش له لاري حل فقط هلته شوني دي، چي که وکړای شو، چي پهدواړولورو ترم داسي بڼه بدل کړو، چي د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. دا متأسفانه تل شوني نه دي، لکه چي لاندې بیلگه يې په گوته کوي:

د لوگاریتموس سره حل

$$\frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \mid +3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \mid \cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$$

دلته اکپوننشله مقایسه شوني نه ده.

دا د لوگاریتم نیولو له لاري کیدی شي:

$$\ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow \underbrace{x \cdot \ln(e)}_1 = \underbrace{\ln(1) - \ln(6)}_0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

دا په لوگاریتم نیولو سره پیل په زیاتو حالتونو کي بریاو ته بیایي. مگر یا اګر چي اکسپوننشلمساوات، په کومو کي چي جمعه یا تفریق منځ ته راشي، نه شي کیدی لوگاریت یې ونیول شي. دلته هڅه کیدی شي، دا د بدلون (د ځاي نیوونکي واریابلي ایښوونه) له لاري حل کړو.

د بدلون (په ځای د بلي متحولي ایښول) له لار حل

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \quad \text{بدلون: } e^x = u \text{ und } e^{2x} = u^2$$

$$\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

مربع مساوات دی د $u_1 = 1; u_2 = 4$ حل سره

په څټ بدلون او د لوگاریتم نیولو له لارې حل.

$$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = \ln(1) = 0$$

$$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow x_2 = \ln(4)$$

اکسپوننشل مساوات ته مفصلې بېلگې

بېلگه ۱:

ازمایینست	
$2e^{3x} - 6e^x = 0 \mid + 6e^x$ $\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^x \mid : 2$ د لوگاریتم نیولو له لار حل $\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^x \mid \ln()$ $\Leftrightarrow \ln(e^{3x}) = \ln(3 \cdot e^x)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + \ln(e^x)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + x \cdot \ln(e)$ $\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid - x$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid : 2$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(3)$	$2e^{3 \cdot \frac{1}{2} \ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2} \ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2} \ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2} \ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2(e^{\ln(3)})^{\frac{3}{2}} - 6(e^{\ln(3)})^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0 (w)$

بېلگه ۲:

$x \cdot e^x - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x(e^x - 3) = 0$ $\Rightarrow \underline{x_1 = 0 \text{ und}}$ $e^x - 3 = 0 \mid +3$ د لوگاريتم له لارې حل $\Leftrightarrow e^x = 3 \mid \ln(\quad)$ $\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow \underline{x_2 = \ln(3)}$	ازمايښت $x_1 = 0$ $0 \cdot e^0 - 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (w)}$ $x_2 = \ln(3)$ $\ln(3) \cdot e^{\ln(3)} - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(3) \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(3) = 0 \text{ (w)}$
---	--

بيلگه ۳:

$$e^{2x} - \frac{17}{2}e^x + 4 = 0 \quad \text{بدلون} \quad u = e^x \Rightarrow u^2 - \frac{17}{2}u + 4 = 0$$

د مربع مساوات حل

په څټ بدلون

$$p = -\frac{17}{2}; q = 4;$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{289}{16} - \frac{64}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{15}{4}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$u_2 = \frac{17}{4} - \frac{15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} u_1 = 8 &\Leftrightarrow e^x = 8 \mid \ln(\quad) \\ &\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(8) \\ &\Leftrightarrow \underline{x_1 = \ln(8)} \\ u_2 = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\quad) \\ &\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(1) - \ln(2) \\ &\Leftrightarrow \underline{x_2 = -\ln(2)} \end{aligned}$$

بيلگه ۴:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{1+e^x} &= -2 \frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \quad | : 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^x} = - \frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot (1+e^x)}{(1+e^x)(1+e^x)} &= - \frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = - \frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \quad | \cdot (1+e^x)^2 \\
 \Leftrightarrow 1+e^x &= -(e^x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad 1+e^x = -e^x + 4 \quad | + e^x - 1 \\
 \Leftrightarrow 2e^x &= 3 \quad | \ln() \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2 \cdot e^x) = \ln(3) \\
 \Leftrightarrow \ln(2) + \ln(e^x) &= \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2) + x \cdot \ln(e) = \ln(3) \\
 \Leftrightarrow \ln(2) + x &= \ln(3) \quad | -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(3) - \ln(2) \\
 \Leftrightarrow x &= \ln\left(\frac{3}{2}\right)
 \end{aligned}$$

بيلگه ۵:

$$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2(x+2)} - 3e^{x+2} + 2 = 0$$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$

په خټ بدلون

د مربع مساوات حل

$$\begin{array}{l|l}
 u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \quad | \ln() & p = -3 ; q = 2 ; \\
 \Leftrightarrow (x+2) \ln(e) = \ln(2) & D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \quad | -2 & u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \\
 \Leftrightarrow \underline{x_1 = -2 + \ln(2)} & u_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
 u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \quad | \ln() & u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\
 \Leftrightarrow (x+2) \ln(e) = \ln(1) & \\
 \Leftrightarrow x+2 = 0 \quad | -2 & \\
 \Leftrightarrow \underline{x_2 = -2} &
 \end{array}$$

تمرینونه: اکسیپوننشلمساوات.
لاندې اکسیپوننشلمساوات تاسو ته له معلومي لارې وشمیری.

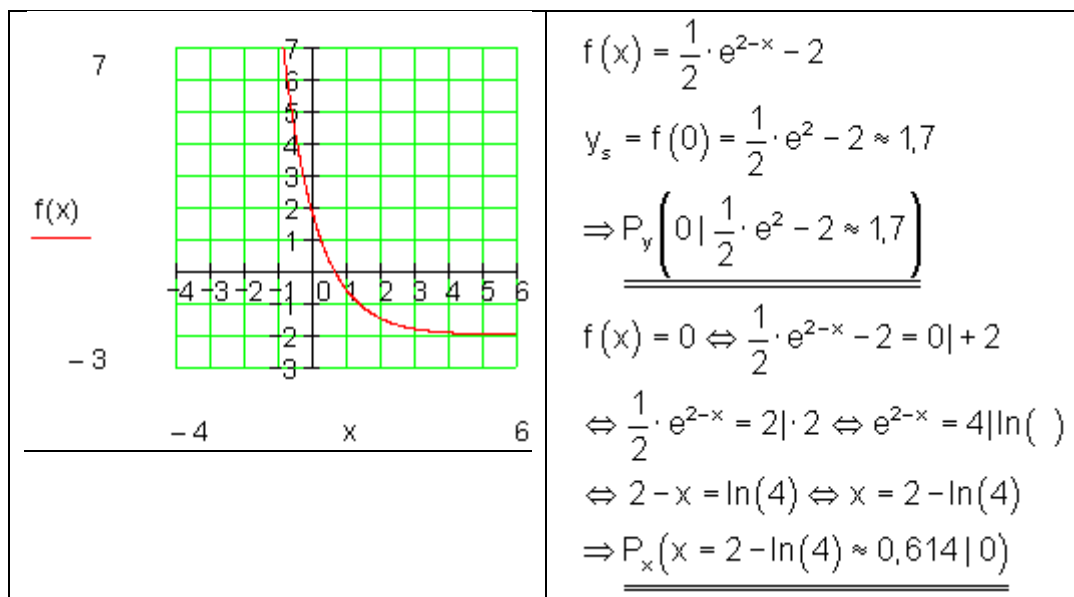
$$\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \quad \text{دریم} \quad \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \quad \text{دویم} \quad 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \quad \text{اول}$$

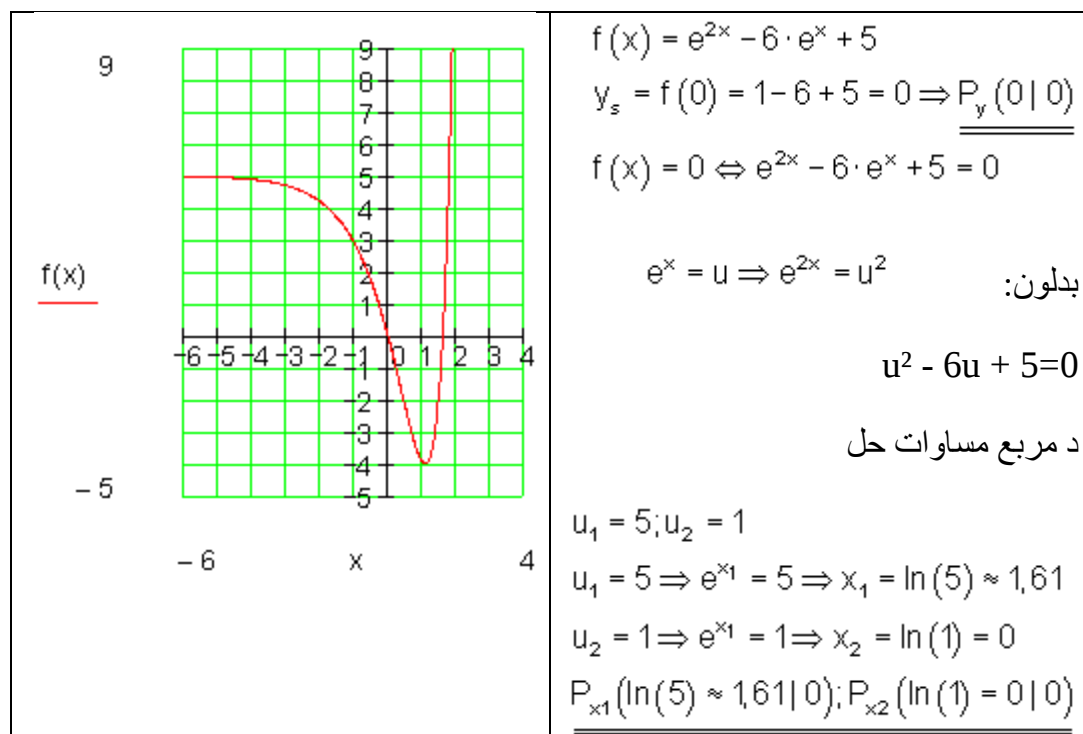
$$\text{خلورم} \quad (3+2x)e^{x-1} = 0 \quad \text{پنځم} \quad -2x^2e^{-x+2} = 0$$

$$\text{شپږم} \quad -\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \quad \text{اوم} \quad 4 - 3e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{اتم} \quad -\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x}$$

$$\text{نهم} \quad \frac{2x}{e^x + 1} = 0 \quad \text{لسم} \quad (2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2$$

د محور ونو غوڅتکي وشمیری





حلونه

تمرینونه توان او د لوگاریتم قوانین

نتیجې

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2 \quad \text{اول -}$$

$$(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x = e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1 \quad \text{دویم -}$$

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1} \quad \text{دریم -}$$

$$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = \frac{1}{e} \quad \text{خلورم -}$$

$$\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0 \quad \text{پنجم -}$$

$$e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)} = -2k \quad \text{شپيرم -}$$

$$\ln(e^2) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3 \cdot \ln(2) - 1 \quad \text{اوم -}$$

$$\ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3 \quad \text{اتم -}$$

$$e^{\ln(k)H} = k \cdot e \quad \text{نهم -}$$

$$\frac{2}{3} e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{8}{9k} \quad \text{لسم -}$$

مفصل حلونه

اول -

$$\begin{aligned} (e^x + e^{-x})^2 &= e^x \cdot e^x + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot e^{-x} \\ &= e^{x+x} + 2 \cdot e^{x-x} + e^{-x-x} \end{aligned}$$

$$= e^{2x} + 2 \cdot e^0 + e^{-2x}$$

$$e^0 = 1 \quad \text{د سره کيږي}$$

$$= e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x} = \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x} + 2}}$$

دويم -

$$\begin{aligned}
 (e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x &= e^x \cdot e^x - e^{-x} \cdot e^x + 5 \cdot e^x \\
 &= e^{x+x} - e^{-x+x} + 5 \cdot e^x \\
 &= e^{2x} - e^0 + 5 \cdot e^x = e^{2x} - 1 + 5 \cdot e^x = \underline{\underline{e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1}}
 \end{aligned}$$

دريم -

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{3x+1} \cdot e^{-(-x+2)} = e^{3x+1-(-x+2)} = e^{3x+1+x-2} = \underline{\underline{e^{4x-1}}}$$

خلورم -

$$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = e^{-x+(-x+2)+2x-3} = e^{-x-x+2+2x-3} = e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

پنجم -

$$\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = e^{-2x} + 3 \cdot e^{-2x} - \left(\frac{4}{e^{2x}}\right) = 4 \cdot e^{-2x} - 4 \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{0}}$$

شپيرم -

$$e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$$

$$d \quad e^{\ln(x)} = x \text{ سره کيږي}$$

$$e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)} = 2k - 2k \cdot 2 = 2k - 4k = \underline{\underline{-2k}}$$

اوم -

$$\ln(e^2) - 3 \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 2 \cdot \ln(e) - 3[\ln(e) - \ln(2)]$$

د $\ln(e) = 1$ سره کيږي

$$= 2 \cdot 1 - 3[1 - \ln(2)] = 2 - 3 + 3 \cdot \ln(2) = \underline{\underline{3 \cdot \ln(2) - 1}}$$

اتم —

$$\begin{aligned} \ln(2e^2) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) &= \ln(2) + \ln(e^2) + \ln(e) - \ln(2) \\ &= \ln(2) + 2 \cdot \ln(e) + \ln(e) - \ln(2) = 3 \cdot \ln(e) = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

نهم —

$$e^{\ln(k)+1} = e^{\ln(k)} \cdot e^1 = \underline{\underline{k \cdot e}}$$

لسم —

$$\frac{2}{3} e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3k}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3k} = \underline{\underline{\frac{8}{9k}}}$$

حلونه

تمرینونه د اکسپوننشل مساوات حلونه

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

$$6 - \frac{3}{2} e^{2-2x} = 0 \Rightarrow x = 1 - \ln(2) \quad \text{اول —}$$

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \ln(4 + 2e) \quad \text{دويم} -$$

$$\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \Rightarrow \quad \text{دريم} -$$

له دې لاس ته راځي چې حل نه شته

$$(3 + 2x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad \text{څلورم} -$$

$$-2x^2e^{-x+2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{پنځم} -$$

$$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = \ln(5) \quad \text{شپږم} -$$

$$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow x_1 = 2 \ln(3) \text{ und } x_2 = 0 \quad \text{اوم} -$$

$$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \Rightarrow x_1 = -\ln(2) \quad \text{اتم} -$$

$$\frac{2x}{e^x + 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{نههم} -$$

$$(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2 \Rightarrow x = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \text{لسم} -$$

مفصل حلونه

اول -

$$6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{2-2x} = 6 \mid : \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{2-2x} = 4 \mid \ln()$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = \ln(4) \mid -2 \Leftrightarrow -2x = \ln(4) - 2 \mid : (-2) \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2}\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 - \ln(2)}}$$

دويم -

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{2}e = 1 \mid + \frac{1}{2}e \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} = 1 + \frac{1}{2}e \mid \cdot 4 \Leftrightarrow e^{4x} = 4 + 2e \mid \ln()$$

$$\Leftrightarrow 4x = \ln(4 + 2e) \mid : 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{4}\ln(4 + 2e)}}$$

$$\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow e^x - 2e^{x+1} = 0 \mid + 2e^{x+1} \quad \text{دریم -}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2e^{x+1} \mid \ln()$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(2e^{x+1}) \Leftrightarrow x = \ln(2) + \ln(e^{x+1})$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2) + x + 1 \mid -x$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ln(2) + 1 \mid -1 \Leftrightarrow \ln(2) = -1$$

تضاد $\Leftrightarrow$ حل نه شته

$$(3 + 2x)e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 3 + 2x = 0 \mid -3$$

$$\Leftrightarrow 2x = -3 \mid : 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{3}{2}}}$$

خلورم -

e^{x-1} تابع e^x ده، چې په يو واحد x محور بني لور ته راګڼل شوي ده.

تابع e^x | صفرځای نه لري.

پنځم -

$$-2x^2 e^{-x+2} = 0$$

$$-2x^2 e^{-x+2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$$

i e^{-x+2} تابع e^{-x} ده چې په $2EH$ (په ۲ یوونه یا واحده) د x محور کین لور ته راګڼل شوي ده..

تابع e^{-x} صفرځای نه لري.

شپږم - لاندې الماني : بدلون

$$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \text{ Substitution } u = e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot (-5) \Leftrightarrow u^2 + 5u - 50 = 0$$

$$p = 5; q = -50 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} + \frac{200}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} = 5 \\ u_2 = -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} = -10 \end{array} \right.$$

$$u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x_1 = \ln(5)$$

$$u_2 = -10 \Leftrightarrow e^x = -10 \Rightarrow$$

حل نه دی

اوم - الماني: بدلون

$$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{Substitution } u = e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4 - \frac{3}{u} = u \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow 4u - 3 = u^2 \mid -u^2 \Leftrightarrow -u^2 + 4u - 3 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$$

$$p = -4; q = 3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = 2 + 1 = 3 \\ u_2 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right.$$

$$u_1 = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\ln(3)}}$$

$$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(1) \Leftrightarrow x_2 = \underbrace{2\ln(1)}_0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$$

اتم - الماني: بدلون ،

$$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \quad \text{Substitution } u = e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2 + 5 = u \mid -u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2 - u + 5 = 0 \mid : \left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow u^2 + \frac{4}{3}u - \frac{20}{3} = 0$$

$$p = \frac{4}{3}; q = -\frac{20}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{4}{9} + \frac{60}{9} = \frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2 \\ u_2 = -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3} \end{array} \right.$$

$$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln(2) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -\ln(2)}}$$

$$u_2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x = \underbrace{\ln\left(-\frac{11}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$$

تعريف نه دی

له دې لاس ته راځي چې حل نه دی.

$$\frac{2x}{e^x + 1} = 0 \mid (e^x + 1) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \quad \text{نهم -}$$

لسم -

$$\begin{aligned} (2 - e^x)^2 &= (e^x - 3)^2 \Leftrightarrow 4 - 4e^x + e^{2x} = e^{2x} - 6e^x + 9 \mid -e^{2x} \\ \Leftrightarrow 4 - 4e^x &= -6e^x + 9 \mid +6e^x \Leftrightarrow 4 + 2e^x = 9 \mid -4 \Leftrightarrow 2e^x = 5 \mid :2 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{5}{2} \mid \ln(\) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}} \end{aligned}$$

څلورم: د e -تابع مشتق يا رابيليدنه

د ضرب- او زنځيري قانون سره

د e -تابع مشتق يا رابيليدنه

د e -تابع مشتق يا رابيليدنه د ساده لارو له لارې نه شي پيداكيدلای، د دې لپاره يوې ،،جگې شميرپوهنې يا رياضي،، ته اړتيا ده. دلته به يو ليدور متود انځور شي، له دې خطر سره هم، چې شميرپوهنيز متخصصين يا شميرپوهان به بغاوت وكړي.

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

په پام کې نيسو چې باور لري: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچني کيدونکي Δx — ارزښت لپاره د $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ ځانښوونه څيرو

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې ځانښوونې يا حالت په بنسټ لاس ته راوړو چې باور لري: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

دا ځمور د شميرنې لپاره په دې معنا دی:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_1 = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x وليکو، نو باور لري: $f'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ مشتق $f'(x) = e^x$ لري

د e په بنسټ اکسپوننشل تابع يو تابع دی، په کوم کې چې تابع او مشتق سره برابر دي.

د $f'(x) = e^x$ — تابع د مشتق سره ځان بيرته توليدوي يا جوړوي.

د e -تابع د مشتق يا بيليدني لپاره بنسټوآښښ:

د e -تابع هندارونه، غزونه او راکښنه مو دې ته بيايي، =ې اکسپوننت يا جگعدد(-گن) نه تنها فقط د x اووښتوني يا متحوله خوندي لري.

د نورو توابعو سره د ښلونو له لارې نوې توابع منځ ته راځي، په کومو کې چې د e -تابع د فاکتور يا ضريب په څير خوندي ده. په داسې حالتونو کې د مشتق لپاره نور قوانين د غوښتلو دي.

د زياتيز يا مثبت x په لور په 3 يوونونو يا واحدونو د e -تابع راکښنه او د په لور په 2 ضريبونو غزونه د دوه ضريبونو يوه زنځرونه ورکوي.

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-2)} = e^{u(x)} \text{ mit } u(x) = \frac{1}{2}(x-2)$$

يو زنځيري تابع انځوروي.

د دې مشتق داسې دی

زنځيري لار يا قاعده:

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-2)}$$

يو د e -تابع ترڼه د يو کرښيز تابع سره تر څيرني لادې نيسو:

$$f(x) = (2x-1) \cdot e^x \quad \text{نو دا د ضرب د قانون سره مشتق کوو يا رابيلوو.}$$

د ضرب قانون يا -لار:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$u(x) = (2x - 1) \Rightarrow u'(x) = 2 \text{ und } v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \\ \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x - 1) \cdot e^x = [2 + (2x - 1)] \cdot e^x = \underline{\underline{(2x + 1) \cdot e^x}}$$

دې قوانینو ته بیلگې

$$f(x) = e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{-e^{2-x}}}$$

دویم -

$$f(x) = e^{\frac{1}{4}x+4} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}}$$

دریم -

$$f(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$$

$$\text{mit } u = (x - 2) \Rightarrow u' = 1 \text{ und } v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot e^{-x} + (x - 2) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} - (x - 2) \cdot e^{-x} \\ = [1 - (x - 2)] \cdot e^{-x} = \underline{\underline{(3 - x) \cdot e^{-x}}}$$

څلورم -

$$f(x) = ax \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{mit } u = ax \Rightarrow u' = a \text{ und } v = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow v' = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + ax \cdot \left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) \\ = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - ax^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{\underline{a \cdot (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

ډېرواره مشتق يا رابيليدنه:

د کړو يا منحنيو خبرو اترو يا بحث سره زيات وخت درې مشتقونه د توابعو د څيړنو لپاره غوښتونکي يا اړين دي.

$$f(x) = (2x+4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad (\text{د يوه کرښيز او } e\text{-تابع ضرب})$$

$$\text{د } u = (2x+4) \Rightarrow u' = 2 \text{ او } v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \text{ سره کيږي}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (2x+4) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[2 + (2x+4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

$$\text{د } u = -x \Rightarrow u' = -1 \text{ او } v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \text{ سره کيږي}$$

$$f''(x) = u'v + uv' = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-x) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\text{د } u = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \text{ او } v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \text{ سره کيږي}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= u'v + uv' = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \\ &= \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}} \end{aligned}$$

د هر مشتق يا رابيليدني سره د e -تابع ضرب بي تغيړه پاتيږي. که دا له نوکانو راوړي، نو نور مشتقونه يا رابيليدني ساده په لاس راوړي شو يا شميرلي شو.

د مشتقتابع صفر ځايونه کيدی شي زيات وخت ساده ولوستل شي.

تمرینونه

د e تابع مشتق

د لاندې توابعو درې ځله مشتق وشمېری

اول - $f(x) = 4 \cdot e^{2x}$ دویم - $f(x) = e^{x+4}$ دریم - $f(x) = 2 \cdot e^{2-4x}$ څلورم -
 $f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x}$ پنځه - $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ شپږم - $f(x) = 2x \cdot e^{2-x}$ اوم -
 $f(x) = (x+2) \cdot e^x$ اتم - $f(x) = (1-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ نههم - $f(x) = (1+x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ لسم -
 $f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

حلونه

د e تابع مشتق

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول - $f(x) = 4 \cdot e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot e^{2x}; f''(x) = 16 \cdot e^{2x}; f'''(x) = 32 \cdot e^{2x}$

دویم - $f(x) = e^{x+4} \Rightarrow f'(x) = e^{x+4}; f''(x) = e^{x+4}; f'''(x) = e^{x+4}$

دریم -

$f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = 4 + 4 \cdot e^{-2x}; f''(x) = -8 \cdot e^{-2x}; f'''(x) = 16 \cdot e^{-2x}$

څلورم -

$f(x) = 2 \cdot e^{2-4x} \Rightarrow f'(x) = -8 \cdot e^{2-4x}; f''(x) = 32 \cdot e^{2-4x}; f'''(x) = -128 \cdot e^{2-4x}$

پنجم -

$$f(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}; f''(x) = (4x - 4) \cdot e^{-2x}; f'''(x) = (12 - 8x) \cdot e^{-2x}$$

شپيرم -

$$f(x) = 2x \cdot e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (2 - 2x) \cdot e^{2-x}; f''(x) = (2x - 4) \cdot e^{2-x}; f'''(x) = (6 - 2x) \cdot e^{2-x}$$

اوم -

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = (x + 3) \cdot e^x; f''(x) = (x + 4) \cdot e^x; f'''(x) = (x + 5) \cdot e^x$$

اتم -

$$f(x) = (1 - x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}; f''(x) = \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}; f'''(x) = \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

نهم -

$$f(x) = (1 + x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}; f''(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}; f'''(x) = \frac{1}{8} \cdot (5 - x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

لسم -

$$f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = t \cdot \left(1 - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}; f''(x) = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x - 8) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}; f'''(x) = \frac{1}{64} \cdot t \cdot (12 - x) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

مفصل حلونه:

اول -

$$f(x) = 4 \cdot e^{2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{8 \cdot e^{2x}}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 8 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{2x}}}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 16 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2x}}}$$

دويم -

$$f(x) = e^{x+4}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

$$f'''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

دريم -

$$f(x) = 2 \cdot e^{2-4x}$$

$$f'(x) = -4 \cdot 2 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{2-4x}}}$$

$$f''(x) = -4 \cdot (-8) \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2-4x}}}$$

$$f'''(x) = -4 \cdot 32 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-128 \cdot e^{2-4x}}}$$

خلورم -

$$f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x}$$

$$f'(x) = 4 - 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{4 + 4 \cdot e^{-2x}}}$$

$$f''(x) = -2 \cdot 4 \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{-2x}}}$$

$$f'''(x) = -2 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{-2x}}}$$

پنجم - $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

د $u = x \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) = 1 \cdot e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}$$

د $u = 1 - 2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-2x} + (1 - 2x) \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) = [-2 - 2 \cdot (1 - 2x)] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(4x - 4) \cdot e^{-2x}}}$$

د $u = 4x - 4 \Rightarrow u' = 4$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'''(x) = 4 \cdot e^{-2x} + (4x - 4) \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) = [4 - 2 \cdot (4x - 4)] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(12 - 8x) \cdot e^{-2x}}}$$

شپږم -

د $u = 2x \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2 \cdot e^{2-x} + 2x \cdot (-1 \cdot e^{2-x}) = (2 - 2x) \cdot e^{2-x}$$

د $u = 2 - 2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{2-x} + (2 - 2x) \cdot (-1 \cdot e^{2-x}) = [-2 - (2 - 2x)] \cdot e^{2-x} = (2x - 4) \cdot e^{2-x}$$

د $u = 2x - 4 \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'''(x) = 2 \cdot e^{2-x} + (2x - 4) \cdot (-1 \cdot e^{2-x}) = [2 - (2x - 4)] \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{(6 - 2x) \cdot e^{2-x}}}$$

اوم -

$$\text{سرہ } v = e^x \Rightarrow v' = e^x \text{ او } u = x + 2 \Rightarrow u' = 1 \text{ د } f(x) = (x + 2) \cdot e^x$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^x + (x + 2) \cdot e^x = [1 + (x + 2)] \cdot e^x = \underline{\underline{(x + 3) \cdot e^x}}$$

$$\text{سرہ } v = e^x \Rightarrow v' = e^x \text{ او } u = x + 3 \Rightarrow u' = 1 \text{ د } f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x + 3) \cdot e^x = [1 + (x + 3)] \cdot e^x = \underline{\underline{(x + 4) \cdot e^x}}$$

$$\text{سرہ } v = e^x \Rightarrow v' = e^x \text{ او } u = x + 4 \Rightarrow u' = 1 \text{ د } f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f'''(x) = 1 \cdot e^x + (x + 4) \cdot e^x = [1 + (x + 4)] \cdot e^x = \underline{\underline{(x + 5) \cdot e^x}}$$

اتم -

$$\text{سرہ } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ او } u = 1 - x \Rightarrow u' = -1 \text{ د } f(x) = (1 - x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = -1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (1 - x) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \left[-1 + \frac{1}{2}(1 - x) \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$\text{سرہ } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ او } u = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} \text{ د } f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right) \right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{د } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ او } u = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \text{ د } f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

سرہ

$$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right)\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \quad \text{نهم}$$

$$v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \quad \text{د } u = 1+x \Rightarrow u' = 1 \quad \text{سرہ}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + (1+x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}(1+x)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} \quad \text{د } f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{او}$$

$$v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \quad \text{سرہ}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-x)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \\ &= \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{4} \cdot (x-3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{4} \cdot (x-3) \Rightarrow u' = \frac{1}{4} \quad \text{د } f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{او}$$

$$v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \quad \text{سرہ}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + \frac{1}{4} \cdot (x-3) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(x-3)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$= \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \underline{\underline{\frac{1}{8} \cdot (5-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}}}$$

لسم -

سرہ $v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $u = t \cdot x \Rightarrow u' = t$ د $f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = t \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + t \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) = \left[t - \frac{1}{4} \cdot t \cdot x\right] \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \underline{\underline{t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

او $u = t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \cdot t$ د $f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

سرہ $v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}t \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) = \left[-\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \cdot t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{16} \cdot t \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

او $u = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \Rightarrow u' = \frac{1}{16} \cdot t$ د $f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

سرہ $v = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= \frac{1}{16} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) = \left[\frac{1}{16}t - \frac{1}{64} \cdot t \cdot (x-8)\right] \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \\
 &= \left(\frac{3}{16} \cdot t - \frac{1}{64} \cdot t \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \underline{\underline{\frac{1}{64} \cdot t \cdot (12-x) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}
 \end{aligned}$$

پنجم: د e -تابع انټيگريشن يا گډونه

پيل: په څټ کتنې را ټولونې سره د انټيگريشن شميرنې څخه لاندې څرگند دي:

که د يو په خوښه انټيگريټور تابع $f(x)$ انټيگريټال ونيول شي، نو سړی يو بنسټ تابع لاس ته راوړي:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

تابع $f(x)$ د انټيگريټور تابع هم بلل کيږي.

$$F(x) = \int f(x) dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

باور لري:

دا په دې معنا، چې که بنسټ تابع مشتق شي يا يې مشتق ونيول شي، نو سړی بيرته د انټيگريټور تابع لاس ته راوړي. دا د يکې موږ ته ممکنې چې د مشتقولو له لارې د انټيگريټال نتيجه و ازمایو.

بيلگه:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

مشتق شوی: $F'(x) = x^2 = f(x)$

که په e -تابع استعمال شي، له کوم چې موږ پوهیږو، چې د مشتق سره پخپله بيرته توليديږي يا منځ ته راځي په دې معنا دی:

وي دي $F(x) = \int f(x) dx = e^x + C$ د ټولو توابعو $f(x)$ بنسټ ډېرئ يا سټ، نو
 دی $F'(x) = f(x) = [e^x + C]' = e^x$

$$(۱) \quad \int e^x dx = e^x + C \quad \text{د -تابع انتيگراډ:}$$

د e -تابع د مشتق سره دي په دې حالت کې، په کوم کې چې د e -تابع جگعدد يا اکسپوننت نه ځانله د اووښتوني يا متحولي x څخه جوړ وو، زنځيرقانون استعمال شي. په انتيگرېشن کې د انتيگراليدونکي تابع دې داسې وټاکل شي، چې د (۱) انتيگرال کيدی شي

ټوليز انتيگرال د بدلون قاعدې سره

$$f(x) = e^{-x} \Rightarrow F(x) = \int e^{-x} dx$$

$$\text{Substitution : } u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} dx = -\int e^u du = -e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \quad \text{په څټ بلون:}$$

$$F(x) = -e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = (-1) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} = f(x) \quad \text{ازماښت:}$$

بيلگه:

$$f(x) = e^{2x-1} \Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx$$

$$\text{Substitution : } u(x) = 2x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1} = e^{2x-1} = f(x) \quad \text{از مابښت:}$$

بيلگه:

$$f(x) = e^{2x-1} \Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx$$

$$\text{Substitution : } u(x) = 2x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int e^{2x-1} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{2x-1} + C}}$$

$$F(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)} = e^{-\frac{1}{2}(1-x)} = f(x) \quad \text{از مابښت:}$$

د بدلون سره ټاکلی انتیګرال

د دې لپاره چې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمیرو، زیات وخت باید یو ټاکلی انتیګرال حل شي. دلته مو هم د بدلون لار حل ته لارښودوي. د بدلون له لارې حل لپاره دوه متودونه یا واریانت شتون لري.

لومړئ لار یا واریانت :

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx$$

بدلون:

$$u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2 \cdot du$$

د انتیگرال عمومي حل:

$$\int e^{\frac{1}{2}x-1} dx = 2 \cdot \int e^u du = 2 \cdot e^u + C \Rightarrow 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + C$$

د ټاکلي انتیگرال په حیث یې وشمیرئ (بې له ټا بتي یا همغې C سره)

$$A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx = 2 \cdot \left[e^{\frac{1}{2}x-1} \right]_{-1}^1 = 2 \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right] \approx 2 \cdot 0,3834 = \underline{\underline{0,7668}}$$

دویمه لار یا واریانت:

$$\text{Variante 2: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx$$

$$u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2 \cdot du$$

بدلون:

پولي هم بدلیري:

$$u_g = u(-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

لاندې یا کښته پوله:

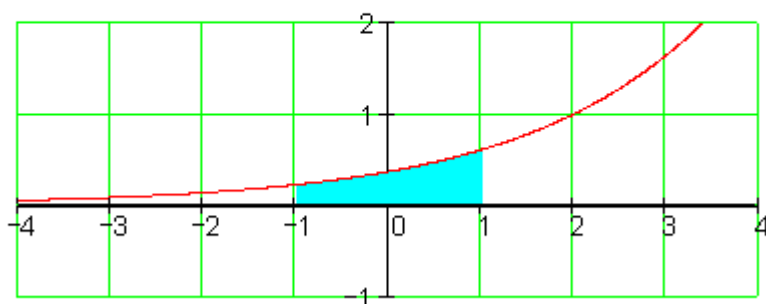
$$u_g = u(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

پورته پوله:

$$A = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}x-1} dx = 2 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^u du = 2 \cdot \left[e^u \right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right] \approx 2 \cdot 0,3834 = \underline{\underline{0,7668}}$$

په دويمه واريابلي کې د انيگرال لاندې او پورته پولي هم بدلي يا سبستيتويرت شوي. له دې لارې په زياتو حالتونو کې شميرن زياتوالی راکميږي.

$$f(x) := e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.7668$$



تمرینونه

د ساده متوابعو انتيگرالونه

د لاندې تابعو انتيگرال وشميرئ. د اول تر څلورم تمرینونو پورې د ازمایښت له لارې کنترول کړئ.

$$\begin{aligned} & \text{اول - } \int -e^{-x} dx \quad \text{دویم - } \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \quad \text{دریم - } \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx \quad \text{څلورم - } \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx \\ & \text{پنځم - } \int_0^2 e^{1-x} dx \quad \text{شپږم - } \int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{اوم - } \int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{اتم - } \int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2} e^{-x} dx \quad \text{نهم - } \\ & \quad \quad \quad \int_0^4 -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}x} dx \quad \text{لسم - } \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx \end{aligned}$$

حلونه

تمرینونه د توابعو انټیگرالونه

نتیجې او مفصل حلونه

$$F(x) = \int -e^{-x} dx = e^{-x} + C \quad \text{Probe: } F(x) = e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x} \quad \text{اول -}$$

دویم -

$$F(x) = \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C \quad \text{Probe: } F(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

دریم -

$$F(x) = \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = -8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \quad \text{ازمایښت:}$$

$$: F(x) = -8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$F(x) = \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C \quad \text{څلورم -}$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} \quad \text{ازمایښت:}$$

$$\int_0^2 e^{1-x} dx = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx 2,350 \quad \text{پنځم -}$$

شپږم -

$$\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot \left[e^1 - e^{-\frac{1}{2}} \right] \approx 4,224$$

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - e^0] = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - 1] \approx 3,195$$

اوم -

$$\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-\ln(2)}] = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{4}$$

اتم -

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 2 \cdot [e^2 - e^0] = 2 \cdot [e^2 - 1] \approx 12,778$$

نهم -

$$\int_0^4 -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = -2 [e^0 - e^{-1}] \approx -1,264$$

لسم -

اول - مفصل حل:

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int -e^{-x} dx = -\int e^{-x} dx$$

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون

$$-\int e^{-x} dx = -\int (-1) \cdot e^u du = \int e^u du = e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int -e^{-x} dx = \underline{e^{-x} + C}$$

$$F(x) = e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x}$$

ازمايننت:

دويم - مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$: u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du \quad \text{بدلون:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} e^u du = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + C \\ \Rightarrow F(x) &= \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \underline{\frac{1}{4} e^{2x} + C} \end{aligned}$$

$$\text{Probe: } F(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \quad \text{ازمايننت:}$$

دریم - مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = 2 \int e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4 \cdot du \quad \text{بدلون:}$$

$$\begin{aligned} \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx &= 2 \int (-4) \cdot e^u du = -8 \int e^u du = -8 \cdot e^u + C \\ \Rightarrow F(x) &= \int 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = \underline{-8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C} \end{aligned}$$

$$\text{Probe: } F(x) = -8 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{ازمايننت:}$$

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \frac{3}{4} \int e^{3x-4} dx \quad \text{خلورم -}$$

$$u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3} \cdot du \quad \text{بدلون:}$$

$$\int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{3} \cdot e^u du = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} \cdot e^u + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4} dx = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C}}$$

$$: F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4} \cdot e^{3x-4}$$

از مایینت:

$$: u(x) = 1-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad \int_0^2 e^{1-x} dx$$

پنجم - بدلون:

$$: u(2) = 1-2 = -1 \quad u(0) = 1-0 = 1$$

لاندې پولي: پورته پولي:

$$\int_0^2 e^{1-x} dx = \int_1^{-1} (-1) \cdot e^u du = -\int_1^{-1} e^u du = \int_{-1}^1 e^u du = [e^u]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx \underline{\underline{2,350}}$$

شپږم - مفصل حل

$$u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2 \cdot du \quad \int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx$$

بدلون:

$$: u(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad : u(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$

لاندې پولي: پورته پولي:

$$\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 e^u du = 2 \cdot [e^u]_{-\frac{1}{2}}^1 = 2 \cdot \left[e^1 - e^{-\frac{1}{2}} \right] \approx \underline{\underline{4,224}}$$

اوم - مفصل حل

$$: u(x) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2} \cdot du \quad \int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{بدلون:}$$

$$u(1) = 4 - 2 = 2 \quad u(2) = 4 - 4 = 0 \quad \text{لاندې پولي: پورته پولي:}$$

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_2^0 e^u du = \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du = \frac{1}{2} \cdot [e^u]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - e^0] = \frac{1}{2} \cdot [e^2 - 1] \approx \underline{\underline{3,195}}$$

اتم – مفصل حل

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad \int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} e^{-x} dx \quad \text{بدلون:}$$

$$u(\ln(2)) = -\ln(2) \quad u(0) = 0 \quad \text{لاندې پولي: پورته پولي:}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} e^{-x} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{-\ln(2)} (-1) \cdot e^u du = \frac{1}{2} \int_0^{-\ln(2)} e^u du = -\frac{1}{2} \int_{-\ln(2)}^0 e^u du \\ &= -\frac{1}{2} \cdot [e^u]_{-\ln(2)}^0 = -\frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-\ln(2)}] = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

$$e^{\ln(a)} = a \Rightarrow e^{\ln(2)} = 2 \quad \text{يادونه:}$$

نهم – مفصل حل

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{بدلون:}$$

بدلون:

$$u(x) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2} du$$

لاندې پولي: $u(1) = 4 - 2 = 2$ پورته پولي: $u(2) = 4 - 4 = 0$

$$\begin{aligned} 4 \int_1^2 e^{4-2x} dx &= 4 \int_2^0 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^u du = -2 \int_2^0 e^u du = 2 \int_0^2 e^u du \\ &= 2 \cdot [e^u]_0^2 = 2 \cdot [e^2 - e^0] = 2 \cdot [e^2 - 1] \approx \underline{\underline{12,778}} \end{aligned}$$

لسم - مفصل حل

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4 \cdot du \quad \int_0^4 -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$u(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1 \quad u(0) = 0$$

لاندې پولي: پورته پولي:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{-1} (-4) \cdot e^u du = 2 \int_0^{-1} e^u du = -2 \int_{-1}^0 e^u du \\ &= -2 \cdot [e^u]_{-1}^0 = -2 [e^0 - e^{-1}] \approx \underline{\underline{-1,264}} \end{aligned}$$

شپږم: ناتيکلی انتيگراډ:

د طبيعي عدد وده د گټې شميرني په مرسته د يو کال وروسته د پانگې گټه
د $p = 100\% = 1$ سره.

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0 (1 + p) = K_0 \cdot 2$$

د يو کال وروسته د نيم کال د پانگي په گټونې د $p = 1/2$ سره

$$K_2 = K_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د يو کال وروسته د مياشتې د پانگي په گټونې د $p = 1/12$ سره

$$K_{12} = K_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61...}}$$

د يو کال وروسته په روځنۍ په بانگي گټونې د $p = 1/360$ سره

$$K_{360} = K_0 \left(1 + \frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145...}}$$

د يو کال وروسته په ساعتې د پانگي په گټونې د $p = 1/8640$ سره

$$K_{8640} = K_0 \left(1 + \frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{\underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181...}_{\approx e}}}$$

د پانگي گټونه د يوه کال وروسته د n گټونې سره

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه کې پيسې په گټه واچول شي (يعنې ناپايي ډېرې گټونې ناپاي $n \rightarrow \infty$) ،
نو نو له يو کال وروسته يوه پانگه لاس ته راوړي د :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دې معنا پانگه په e ضريب ډېرځلي شوه.

په ډېرو جېشمېريو کې يوه e -تابعتمه لري د Pi دکميو ته ورته.

د اوپلر د عدد ارزښت يو ناپای نه پريوديکي يعنې نه بېرته راگرځېدونکي لسميز کسر(مات).

عدد e د اکسپوننشل تابع بنسټ جوړوي.

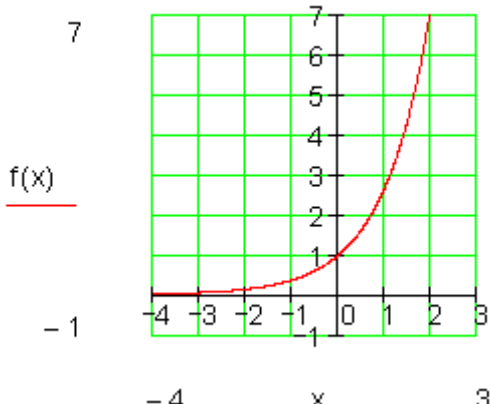
$$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x} \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

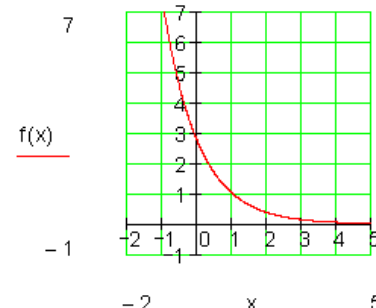
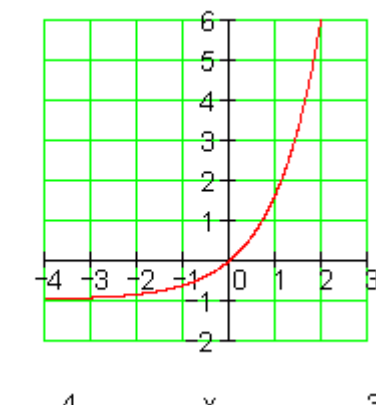
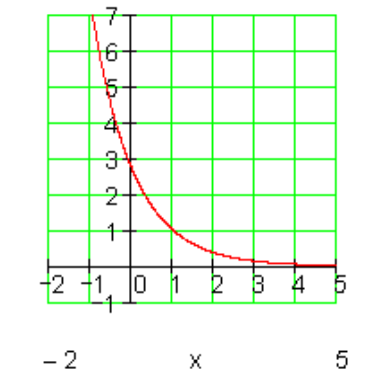
باور لري e د تابع دابنه لري:

د e ارزښت په 3 ځايونو راگرد شوی: $e = 2,718$

د e ارزښت په 9 ځايونو راگرد شوی: $e = 2,718\ 281\ 828$

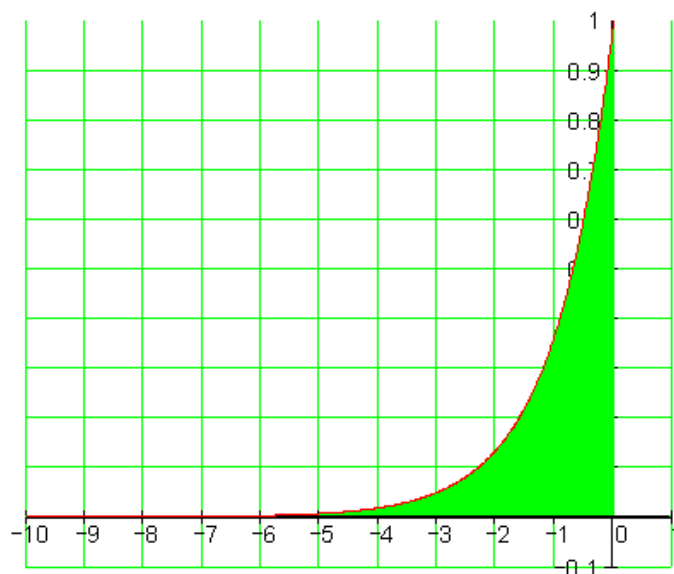
د e -تابع ته څيرنه

د e -تابع نورماله $f(x) = e^x$ د y-محور سره غوڅتکي $f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$	
د y -محور باندې هنداره شوی $f(x) = e^{-x}$ د y -محور سره غوڅتکي	

$f(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$	
په يوه واحد(يوون) کښته لور ته راکښلی $f(x) = e^x - 1$ د y محور سره غوڅتکی $f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow P_y(0 0)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1) = \infty$	
په يوه واحد(يوون) کښته لور ته راکښلی $f(x) = e^{-(x-1)}$ د y محور سره غوڅتکی $f(0) = e^{-(0-1)} = e^1 = e \Rightarrow P_y(0 e)$ $f(1) = e^{-(1-1)} = e^0 = 1 \Rightarrow P(1 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-(x-1)} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(x-1)} = 0$	

ناټاکلی انتیګرال

بیلګه:



د $f(x) = e^x$ د ګراف او د x -محور ترمنځ ټوله سطحه دې په $(-\infty; 0]$ کې وشمیرل

$$A = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

شي، يعنې

تراوسه د ټاکلي انتیګرال کښته او پورته پولې اعداد وو.

يعنې د انتیګریشن ورشو محدوده يا رابنده وه.

اوس د انتیګریشن ورشو نوره رابنده نه ده.

دا ډول انتیګرال نا څرګند يا نا معلوم يا نا اصلي انتیګرال بلل کيږي د نابند انتیګریشن ورشو سره.

دا انتيگرا ل ه ې درې بنو څخه په يوه بڼه را تلې شي.

$\int_a^{\infty} f(x) dx$	$\int_{-\infty}^b f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
---------------------------	----------------------------	-----------------------------------

د داسې انتيگرا ل و نو شميرلو لپاره سړی داسې مخ ته ځي:

لومړی سړی انتيگرا ل $\int_a^b f(x) dx$ د پای ان تروال $[a, b]$ لپاره شميري، پسي د اړونده ويناو يا افادو څخه د $a \rightarrow -\infty$ يا $a \rightarrow \infty$ همدا سې $b \rightarrow -\infty$ يا $b \rightarrow \infty$ لپاره پوله ارزښتونه جوړوي.

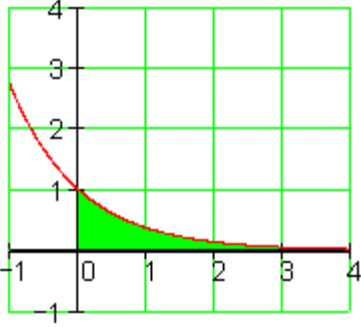
فورمال دا داسې ليدل کيږي:

$$\begin{aligned}\int_a^{\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx\end{aligned}$$

زموږ د سطحي شميرلو لپاره دا په داسې توگه معلوميږي.

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x \\ A &= \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} e^0}_1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} e^a}_0 = 1\end{aligned}$$

بيلگه:



دا د y -محور باندې هنداره شوی د e -تابع د
 $f(x) = e^{-x}$ سره باید په انټروال $[0; \infty)$ کې برابرې
 سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

بدلون:

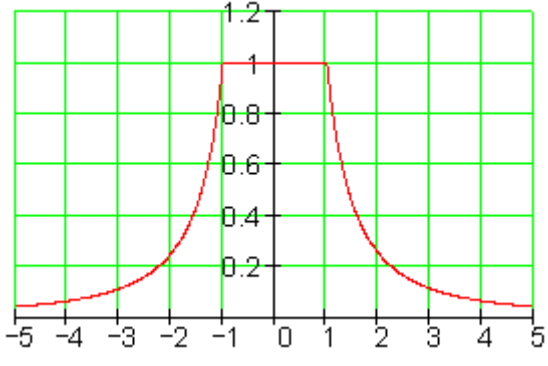
$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0; u(b) = -b$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} = - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 e^u du$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{-b}^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^0 - e^{-b}]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} e^0 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1$$



د یوه ترکیبي یا ګډوله تابع لپاره
 بیلګه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

د انټیګرال (په برخو) ټوټه کونه

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

تر مخ راورنه:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

د سيومتري دلايلو له امله باور لري:

داسي چي دا انتيگرا ل فقط يو حل بايد وشميرل شي

$$\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = [1] - [-1] = 1 + 1 = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{1} \right] = 0 - (-1) = 1$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx}_1 + \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_2 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

پوښتنې

د e- تابع سره انتيگرا لونه

د سطحي مساحت شمېرنه

اول – لاندې انتيگرا لونه وشمېری او اړونده سطحه يې کړنې ژکړنې کړی.

$$\int_{-3}^0 e^x dx \quad \text{پ} \quad \int_{-1}^0 e^x dx \quad \text{ب} \quad \int_0^1 e^x dx \quad \text{الف}$$

دويم – لاندې انتيگرا لونه وشمېری او اړونده سطحه يې کړنې ژکړنې کړی.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx \quad \text{پ -} \quad \int_0^3 (e^x - 1) dx \quad \text{ب -} \quad \int_0^1 (e^x - 1) dx \quad \text{الف -}$$

دريم - لاندې انتيگرا لونه وشمېری او اړونده سطحه يې کړېښي ژکړېښي کړی.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad \text{پ -} \quad \int_{-1}^2 e^{-x} dx \quad \text{ب -} \quad \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{الف -}$$

څلورم - لاندې انتيگرا لونه وشمېری او اړونده سطحه يې کړېښي ژکړېښي کړی.

$$\int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx \quad \text{پ -} \quad \int_1^3 e^{-(x-2)} dx \quad \text{ب -} \quad \int_0^3 e^{-(x-3)} dx \quad \text{الف -}$$

پنځم - لاندې انتيگرا لونه وشمېری.

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx \quad \text{پ -} \quad \int_0^4 3 \cdot e^{x+2} dx \quad \text{ب -} \quad \int_0^3 (e^x - x + 1) dx \quad \text{الف -}$$

شپږم - د k د کوم ارزښت لپاره دا انتيگرا ل ورکړ شوي ارزښتونه لري؟

$$\int_0^k e^x dx = 2 \cdot e \quad \text{پ -} \quad \int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = 4 \quad \text{ب -} \quad \int_0^2 k \cdot e^x dx = \frac{1}{2} e \quad \text{الف -}$$

اوم - لاندې انتيگرا لونه وشمېری.

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4} e^x - 2e^{\frac{1}{2}x} \right) dx \quad \text{پ -} \quad \int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k \cdot e^x) dx \quad \text{ب -} \quad \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx \quad \text{الف -}$$

اتم - لاندې انتيگرا لونه وشمېری او اړونده سطحه يې کړېښي - کړېښي کړی.

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2$$

$$g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \quad \text{für } 2 \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} g(x) dx$$

ب -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3$$

$$g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)} \quad \text{für } 3 \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^{\infty} g(x) dx$$

نهم - لاندې انټيگرالونه وشمېری او اړونده سطحه یې کرښې - کرښې کړی.

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 4$$

$$g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \quad \text{für } 4 \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^{\infty} g(x) dx$$

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq k$$

$$g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \quad \text{für } k \leq x < \infty$$

$$A = \int_0^k f(x) dx + \int_k^{\infty} g(x) dx$$

ب -

حلونه

د e تابع انټيگرالونه |

د سطحې شمېرنه

نيجي او مفصل حلونه

نتيجه

اول -

$$\int_{-3}^0 e^x dx \approx 0,905 \quad - \quad \int_{-1}^0 e^x dx \approx 0,632 \quad - \quad \int_0^1 e^x dx \approx 1,718 \quad \text{الف -}$$

دويم -

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1 \quad - \quad \int_0^3 (e^x - 1) dx \approx 16,086 \quad - \quad \int_0^1 (e^x - 1) dx \approx 0,718 \quad \text{الف -}$$

درېم -

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad - \quad \int_{-1}^2 e^{-x} dx \approx 2,583 \quad - \quad \int_0^1 e^{-x} dx \approx 0,632 \quad \text{الف -}$$

څلورم -

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-3)} dx = 1 \quad - \quad \int_1^3 e^{-(x-2)} dx \approx 2,350 \quad - \quad \int_0^3 e^{-(x-3)} dx \approx 19,086 \quad \text{الف -}$$

پنځم -

$$\int_0^4 3 \cdot e^{x+2} dx \approx 1188,119 \quad - \quad \int_0^3 (e^x - x + 1) dx \approx 17,586 \quad \text{الف -}$$

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx \approx 148,406 \quad \text{پ -}$$

شپيرم -

$$\int_0^k e^x dx = 2e \quad \int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = 4 \quad \int_0^2 k \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$\Leftrightarrow k \approx 1,862 \quad \text{پ} \quad \Leftrightarrow k \approx 6,2 \quad \text{ب} \quad \Leftrightarrow k \approx 0,213 \quad \text{الف}$$

اوم -

$$\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx - 2 \cdot \int_0^{\ln(2)} e^x dx = -\frac{1}{2}$$

الف -

$$\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - ke^x) dx = \int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx - k \cdot \int_0^{\ln(k)} e^x dx = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

ب -

پ -

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4} e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \frac{1}{4} \cdot \int_0^4 e^x dx - 2 \cdot \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{4} e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12,175$$

$$\int_0^2 (e^x - 1) dx + \int_2^{\infty} f(2) \cdot e^{-(x-2)} dx = 2e^2 - 4 \approx 10,778$$

اتم - الف -

$$\int_0^3 (e^x - 1) dx + \int_3^{\infty} f(3) \cdot e^{-(x-3)} dx = 2e^3 - 5 \approx 35,171$$

ب -

$$\int_0^4 (e^x - 1) dx + \int_4^{\infty} f(4) \cdot e^{-(x-4)} dx = 2e^4 - 6 \approx 103,196$$

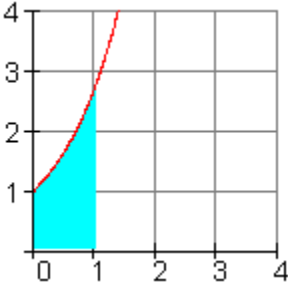
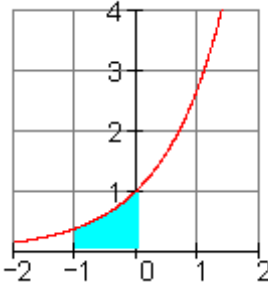
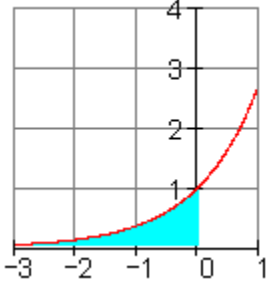
نهم - الف -

$$\int_0^k (e^x - 1) dx + \int_k^{\infty} f(k) \cdot e^{-(x-k)} dx = 2e^k - k - 2$$

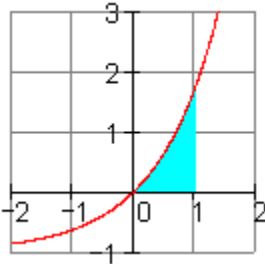
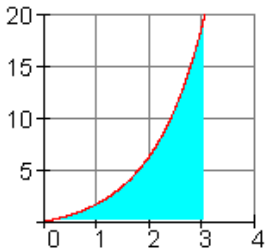
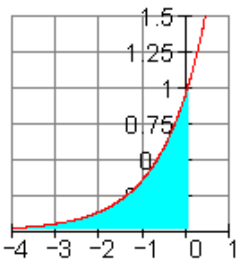
ب -

مفصل حلونه:

لومړی -

$\int_0^1 e^x dx$ $= e^x \Big _0^1$ $= e^1 - e^0$ $= e - 1 \approx 1,718$	الف - 
$\int_{-1}^0 e^x dx$ $= e^x \Big _{-1}^0$ $= e^0 - e^{-1}$ $= 1 - e^{-1} \approx 0,632$	ب - 
$\int_{-3}^0 e^x dx$ $= e^x \Big _{-3}^0$ $= e^0 - e^{-3}$ $= 1 - e^{-3} \approx 0,950$	ب - 

دويم:

$\int_0^1 (e^x - 1) dx$ $= e^x - x \Big _0^1$ $= e^1 - 1 - (e^0 - 0)$ $= e - 1 - 1 \approx 0,718$	الف- 
$\int_0^3 (e^x - 1) dx$ $= e^x - x \Big _0^3$ $= e^3 - 3 - (e^0 - 0)$ $= e^3 - 3 - 1 \approx 16,086$	ب - 
$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx$ لومړی بي له پوله ارزښت جوړولو شمېرنه $\int_a^0 e^x dx = e^x \Big _a^0 = e^0 - e^a = 1 - e^a$ د پوله ارزښت جوړول $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a)$ $= 1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} e^a}_0 = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$	ج - 

دریم:

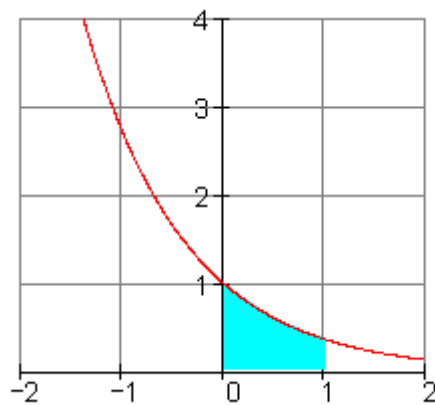
الف-

$$\int_0^1 e^{-x} dx \quad | \quad \text{د بدلون له لارې حل}$$

$$: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad \text{بدلون}$$

$$\text{لاندې يا كېنښته پوله: } u(0) = 0 \quad \text{پورته پوله: } u(1) = -1$$

$$\Rightarrow -\int_0^{-1} e^u du = \int_{-1}^0 e^u du = e^u \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0,632$$



ب -

$$\int_{-1}^2 e^{-x} dx \quad | \quad \text{د بدلون له لارې حل}$$

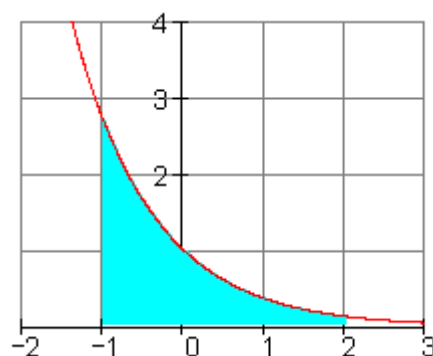
$$u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

$$u(2) = -2 : \text{پورته پوله} : u(-1) = -(-1) = 1$$

لاندې بوله :

$$\Rightarrow -\int_1^{-2} e^u du = \int_{-2}^1 e^u du = e^u \Big|_{-2}^1 = e^1 - e^{-2} = e - e^{-2} \approx 2,583$$



پ -

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} dx$$

حل لومړی بي لهه پولېجوړولو.

$$\int_0^a e^{-x} dx$$

د بدلون له لارې حل

$$u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

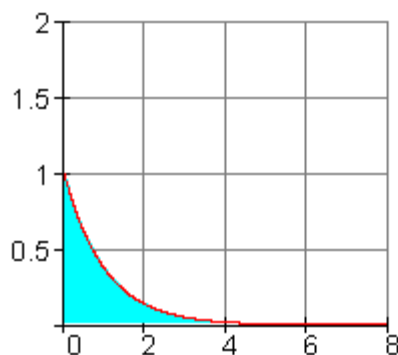
بدلون

لاندي يا كېنته پوله: $u(0) = -0 = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a} e^u du = \int_{-a}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a}^0 = e^0 - e^{-a} = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

پوله تاكنه:



څلورم: الف-

$$\int_0^3 e^{-(x-3)} dx \quad | \quad \text{د بدلون له لارې حل}$$

$$: u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

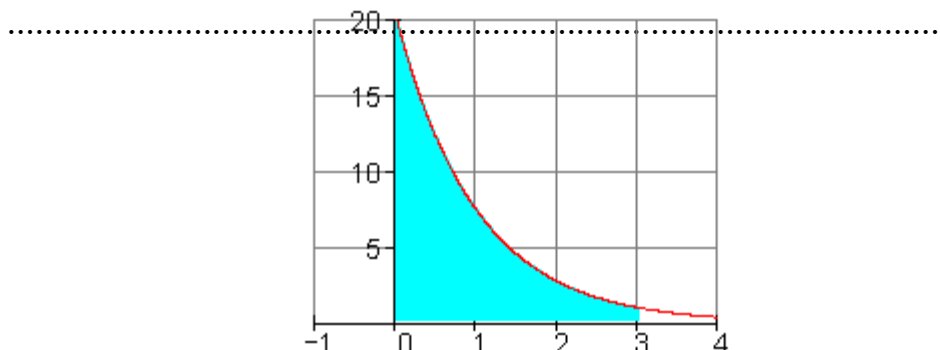
بدلون

لاندي پوله: $u(0) = -(0-3) = 3$ پورته پوله: $u(3) = -(3-3) = 0$

$$\Rightarrow -\int_3^0 e^u du = \int_0^3 e^u du = e^u \Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19,086$$

۴۴۳

اناليزي

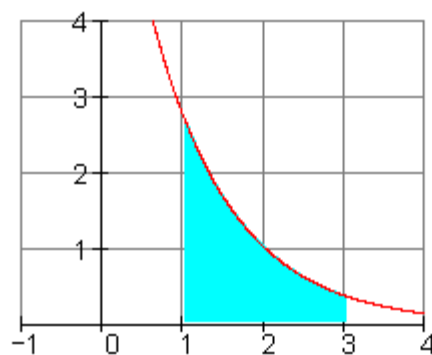


ب - $\int_1^3 e^{-(x-2)} dx$ د بدلون له لاري حل

$$: u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad \text{بدلون}$$

$$u(3) = -(3-2) = -1 \quad \text{پورته پوله:} \quad u(1) = -(1-2) = 1 \quad \text{لاندې پوله:}$$

$$\Rightarrow -\int_1^{-1} e^u du = \int_{-1}^1 e^u du = e^u \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - e^{-1} \approx 2,350$$



ب -

$$\int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a e^{-(x-3)} dx$$

حل ، لومړی بې له پولي جوړولو

$$\int_3^a e^{-(x-3)} dx$$

د بدلون له لارې حل

$$u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

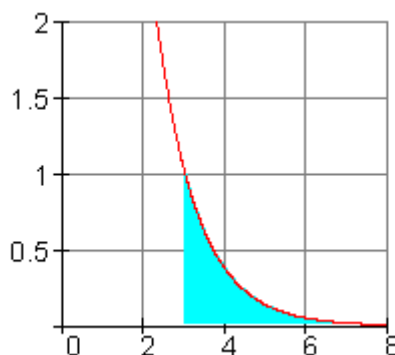
بدلون:

$$u(a) = -a+3 \quad u(3) = -(3-3) = 0$$

لاندې پوله : پورته پوله:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-3)} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-a+3}}_0 = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-(x-3)} dx = 1$$

پوله جوړونه:



پنځم: الف -

$$\begin{aligned} \int_0^3 (e^x - x + 1) dx &= e^x - \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_0^3 \\ &= e^3 - \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 - \left(e^0 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \right) \\ &= e^3 - \frac{9}{2} + 3 - 1 = e^3 - \frac{5}{2} \approx 17,586 \end{aligned}$$

ب -

$$\int_0^4 3 \cdot e^{x+2} dx = 3 \cdot \int_0^4 e^{x+2} dx$$

د بدلون له لارې حل

$$u(x) = x + 2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$$

بدلون:

$$: u(4) = 4 + 2 = 6 \quad \text{پورته پوله:} \quad u(0) = 0 + 2 = 2$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \int_2^6 e^u du = 3 \cdot \int_2^6 e^u du = 3 \cdot e^u \Big|_2^6 = 3 \cdot (e^6 - e^2) \approx 1188,119$$

حل ، لومړی بي له پولې جوړولو

پ -

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx = \underbrace{\int_0^5 e^x dx}_I + \underbrace{\int_0^5 e^{-x} dx}_{II} = I + II$$

$$I : \int_0^5 e^x dx = e^x \Big|_0^5 = e^5 - e^0 = e^5 - 1$$

$$II : \int_0^5 e^{-x} dx =$$

د بدلون له لارې حل

$$: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون

$$u(5) = -5 \quad \text{پورته پوله:} \quad u(0) = 0$$

$$\Rightarrow - \int_0^{-5} e^u du = \int_{-5}^0 e^u du = e^u \Big|_{-5}^0 = e^0 - e^{-5} = 1 - e^{-5}$$

$$\int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx = I + II = e^5 - 1 + 1 - e^{-5} = e^5 - e^{-5} \approx 148,406$$

شپيرم:
الف:

$$\int_0^2 k \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$\int_0^2 k \cdot e^x dx = k \cdot \int_0^2 e^x dx = k \cdot e^x \Big|_0^2 = k \cdot (e^2 - e^0) = k \cdot (e^2 - 1)$$

$$k \cdot (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot e \quad | : (e^2 - 1) \quad \text{برابر کيردى:}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\frac{1}{2} \cdot e}{(e^2 - 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{e^2 - 1} \approx 0,213$$

ب -

$$\int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = 4$$

$$\int_0^4 (e^x - k \cdot x) dx = e^x - \frac{1}{2} k x^2 \Big|_0^4 = e^4 - \frac{1}{2} k \cdot 16 - (e^0 - 0) = e^4 - 8k - 1$$

$$e^4 - 8k - 1 = 4 \quad | -e^4 + 1 \quad \text{برابر کيردى:}$$

$$\Leftrightarrow -8k = -e^4 + 5 \quad | : (-8)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-e^4 + 5}{-8} = \frac{1}{8} e^4 - \frac{5}{8} \approx 6,2$$

پ - لاند الماني: برابر کيردى

$$\int_0^k e^x dx = 2e$$

$$\int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1$$

$$\text{gleichsetzen: } e^k - 1 = 2e \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow e^k = 2e + 1 \quad | \ln (\quad)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^k) = \ln(2e + 1)$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \underbrace{\ln(e)}_1 = \ln(2e + 1)$$

$$\Leftrightarrow k = \ln(2e + 1) \approx 1,862$$

اووم: حل : الف-

$$\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx}_I - 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^x dx}_{II} = I - 2 \cdot II$$

$$I: \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx = \text{د بدلون له لاري حل}$$

$$: u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du \quad \text{بدلون:}$$

$$\text{لاندې پوله: } u(0)=2 \cdot 0=0 \quad \text{پورته پوله: } u(\ln(2))=2 \cdot \ln(2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{2 \ln(2)} e^u du &= \frac{1}{2} e^u \Big|_0^{2 \ln(2)} = \frac{1}{2} (e^{2 \ln(2)} - e^0) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e^{\ln(2)}}{2} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (2^2 - 1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$II: \int_0^{\ln(2)} e^x dx = e^u \Big|_0^{2 \ln(2)} = \frac{e^{\ln(2)}}{2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x) dx = I - 2 \cdot II = \frac{3}{2} - 2 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

ب-

$$\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - ke^x) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx}_I - k \cdot \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^x dx}_{II} = I - k \cdot II$$

$$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx = \text{د بدلون له لاري حل} = \text{د}$$

$$u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

بدلون:

لاندي پوله : $u(0)=2 \cdot 0=0$ پورته پوله: $u(\ln(k)) = 2 \cdot \ln(k)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{2 \ln(k)} e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_0^{2 \ln(k)} = \frac{1}{2} (e^{2 \ln(k)} - e^0) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e^{\ln(k)}}{k} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} (k^2 - 1)$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln(k)} = \frac{e^{\ln(k)}}{k} - e^0 = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k e^x) dx = I - k \cdot II = \frac{1}{2} (k^2 - 1) - k \cdot (k - 1) = -\frac{1}{2} k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ-

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4} e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\int_0^4 e^x dx}_I - 2 \cdot \underbrace{\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = \frac{1}{4} \cdot I - 2 \cdot II$$

$$I: \int_0^4 e^x dx = e^x \Big|_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$II: \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx =$$

د بدلون له لاري حل

$$u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2du$$

بدلون:

لاندي پوله : $u(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ پورته پوله: $u(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int_0^2 e^u du = 2 \cdot e^u \Big|_0^2 = 2(e^2 - e^0) = 2e^2 - 2$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\frac{1}{4} e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx &= \frac{1}{4} \cdot I - 2 \cdot II = \frac{1}{4} \cdot (e^4 - 1) - 2 \cdot (2e^2 - 2) \\ &= \frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{4} - 4e^2 + 4 = \frac{1}{4} e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12,157 \end{aligned}$$

اتم: الف-

$$f(x) = e^x - 1 \quad g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \text{ mit } f(2) = e^2 - 1$$

$$A = \underbrace{\int_0^2 f(x) dx}_I + \underbrace{\int_2^\infty g(x) dx}_{II} = \int_0^2 (e^x - 1) dx + (e^2 - 1) \int_2^\infty e^{-(x-2)} dx = I + (e^2 - 1) \cdot II$$

$$I: \int_0^2 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^2 = e^2 - 2 - (e^0 - 0) = e^2 - 3$$

$$II: \int_2^\infty e^{-(x-2)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a e^{-(x-2)} dx$$

حل ، لومری بی له پولي جوړولو

$$\int_2^a e^{-(x-2)} dx$$

د بدلون له لاري حل

$$u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

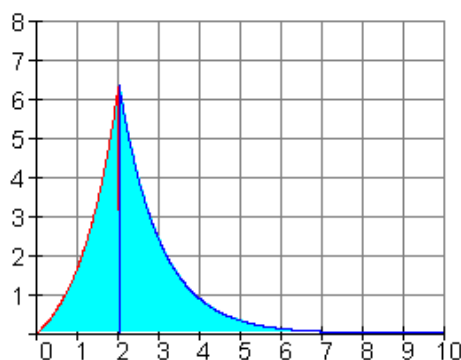
$$u(a) = -a+2 \quad \text{پورته پوله:} \quad u(2) = -(2-2) = 0 \quad \text{لاندي پوله:}$$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+2} e^u du = \int_{-a+2}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+2}^0 = e^0 - e^{-a+2} = 1 - e^{-a+2}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-2)} dx = 1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a+2}}_0 = 1 \Rightarrow \int_2^{\infty} e^{-(x-2)} dx = 1$$

$$A = 1 + (e^2 - 1) \cdot II = e^2 - 3 + (e^2 - 1) \cdot 1 = e^2 - 3 + e^2 - 1 = 2e^2 - 4 \approx 10,778$$



ب۔ $f(3) = e^3 - 1$ سره $f(x) = e^x - 1$ ۽ $g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)}$

$$A = \underbrace{\int_0^3 f(x) dx}_I + \underbrace{\int_3^{\infty} g(x) dx}_{II} = \underbrace{\int_0^3 (e^x - 1) dx}_I + (e^3 - 1) \underbrace{\int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx}_{II}$$

$$I: \int_0^3 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^3 = e^3 - 3 - (e^0 - 0) = e^3 - 4$$

$$II: \int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a e^{-(x-3)} dx$$

حل ، لومړی بي له پولي جوړولو

$$\int_3^a e^{-(x-3)} dx$$

د بدلون له لارې حل

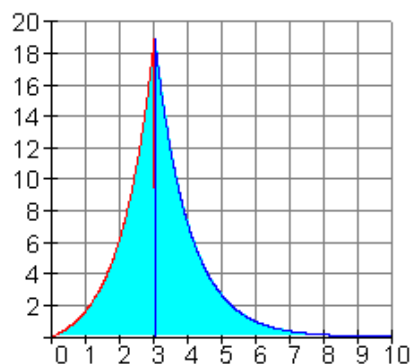
لاندي پوله : $u(3) = -(3-3) = 0$ پورته پوله : $u(a) = -a+3$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+3} e^u du = \int_{-a+3}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+3}^0 = e^0 - e^{-a+3} = 1 - e^{-a+3}$$

پوله جورونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-3)} dx = 1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a+3}}_0 = 1 \Rightarrow \int_3^{\infty} e^{-(x-3)} dx = 1$$

$$A = I + (e^3 - 1) \cdot II = e^3 - 4 + (e^3 - 1) \cdot 1 = e^3 - 4 + e^3 - 1 = 2e^3 - 5 \approx 35,171$$



نهم:

الف-

$$f(x) = e^x - 1 \quad g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \text{ mit } f(4) = e^4 - 1$$

$$A = \underbrace{\int_0^4 f(x) dx}_I + \underbrace{\int_4^{\infty} g(x) dx}_{II} = \int_0^4 (e^x - 1) dx + (e^4 - 1) \int_4^{\infty} e^{-(x-4)} dx = I + (e^4 - 1) \cdot II$$

$$I: \int_0^4 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^4 = e^4 - 4 - (e^0 - 0) = e^4 - 5$$

$$II: \int_4^{\infty} e^{-(x-4)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_4^a e^{-(x-4)} dx = L$$

حل ، لومړی بي له پولي جوړولو

$$\int_4^a e^{-(x-4)} dx \quad L$$

د بدلون له لارې حل

$$u(x) = -(x-4) = -x+4 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

$$u(a) = -a+4 \quad \text{پورته پوله:} \quad u(4) = -(4-4) = 0 \quad \text{لاندې پوله:}$$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+4} e^u du = \int_{-a+4}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+4}^0 = e^0 - e^{-a+4} = 1 - e^{-a+4}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-4)} dx = 1 - \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a+4}}_0 = 1 \Rightarrow \int_4^\infty e^{-(x-4)} dx = 1$$

$$A = I + (e^4 - 1) \cdot II = e^4 - 5 + (e^4 - 1) \cdot 1 = e^4 - 5 + e^4 - 1 = 2e^4 - 6 \approx 103,196$$

ب-

$$f(x) = e^x - 1 \quad g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \quad \text{mit } f(k) = e^k - 1$$

$$A = \int_0^k f(x) dx + \underbrace{\int_k^\infty g(x) dx}_I = \int_0^k (e^x - 1) dx + (e^k - 1) \underbrace{\int_k^\infty e^{-(x-k)} dx}_{II} = I + (e^k - 1) \cdot II$$

$$I : \int_0^k (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^k = e^k - k - (e^0 - 0) = e^k - k - 1$$

$$II : \int_k^\infty e^{-(x-k)} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_k^a e^{-(x-k)} dx \quad L$$

حل ، لومړی بي له پولي جوړولو

$$\int_k^a e^{-(x-k)} dx$$

د بدلون له لارې حل

$$u(x) = -(x-k) = -x+k \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

بدلون:

$$u(a) = -a+k \quad \text{پورته پوله:} \quad u(k) = -(k-k) = 0 \quad \text{لاندې پوله:}$$

$$\Rightarrow - \int_0^{-a+k} e^u du = \int_{-a+k}^0 e^u du = e^u \Big|_{-a+k}^0 = e^0 - e^{-a+k} = 1 - e^{-a+k}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(x-k)} dx = 1 - \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-a+k}}_0 = 1 \Rightarrow \int_k^\infty e^{-(x-k)} dx = 1$$

$$A = 1 + (e^k - 1) \cdot 11 = e^k - k - 1 + (e^k - 1) \cdot 1 = e^k - k - 1 + e^k - 1 = 2e^k - k - 2$$

پوښتنې

مشتق — او انټيگرالشميرنه |

کډې وډې پوښتنې

لومړۍ - د لاندې پوټنځ - او لوگاريتم ترمونو بڼه بدله کړی د توان - او لوگاريتم قوانینو د استعمال له لارې .

$$\text{الف - } (e^x + e^{-x})^2 \quad \text{ب - } (e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x$$

دويم - د اکسپوننشل مساوات تاسو ته معلومي لاري حل کړی.

$$\text{الف - } 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \quad \text{ب - } \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1$$

دريم - د لاندې توابعو مشتق وشمېری.

$$\text{الف - } f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \quad \text{ب - } f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$$

څلورم - د لاندې توابعو انټيگراډ وشمېری او د مشتق سره يې نتيجي کنټرول کړی.

$$\text{الف - } f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \quad \text{ب - } f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

پنځم - تاسو ته د معلوم قانون له مخې د لاندې توابعو مشتق وشمېری.

$$\text{الف - } f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \quad \text{ب - } f(x) = (1 - e^{ax})^2$$

شپږم - لاندې انټيگراډونه وشمېری.

$$\text{الف - } \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{ب - } \int_1^2 e^{4-2x} dx$$

$$\text{اوم - } f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{تابع ورکړ شوی.}$$

الف - د $[-4; 5]$ لپاره ارزښت جدول وکارئ او گراف يې گړښیز کړی. د y - محور، له ټيټيکي او x - محور څخه تېرېدوکی y - محور سره غبرگي کرښې ترمنځ سطحه په نڅښه کړی.

ب - نسبي مينيموم $T(x_e | f(x_e))$ وشمېری.

پ - د الف لاندې په نخښه شوې سطحه وشمېری.

اتم - د 3 مې درجې تام راشنل تابع د x -محور په $P(0 | -4)$ کې غوڅوي او په $T(0 | 2)$ کې یو ټیټکی لري. په P تانجنت د y -محور په $P_y(0 | 48)$ کې غوڅوي. د $f(x)$ تابع مساوات او د $t(x)$ تانجنت مساوات وشمېری او گراف یې کړنښ-کړنښ کړی.

غوښتنه:

ټول هوښیا-یا راشنل توابع یابلواک، ټیټ ټکی، محور غوڅکي، مشتق، تانجنت مساوات، گاوس-الگوریتم.

نهم - د $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$ تابع مساوات ورکړشوي دي. انحرافي ارزښتونه وشمېری او د گراف او x -محور منځ سطحه وشمېری، چپړته چې صفرخایونه د انتیگرال پولې جوړوي. گراف یې وکارۍ او شمېرلي سطحه یې په نخښه کړی.

غښتنې:

افراطي ارزښتونه، صفرخایونه، بیمرېع مساوات، ټاکلی انتیگرال.

حلونه (اوبیوني)

مشتق - او انتیگرال شمیرنه |

نتیجې او مفصل حلونه.

نتیجې:

اول - نتیجې

$$\text{الف - } (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$$

$$\text{ب - } (e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x = e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1$$

دويم - نتيجي

$$\text{الف - } 6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \Rightarrow x = 1 - \ln(2)$$

$$\text{ب - } \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\ln(4 + 2e)$$

دريم - نتيجي

$$\text{الف - } f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4(e^{-4x} + e^{4x})$$

$$\text{ب - } f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C$$

$$\text{پنجم - الف - } f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2(x+a - e^{2x-3})$$

$$\text{ب - } f(x) = (1 - e^{ax})^2 \Rightarrow f'(x) = -2a \cdot e^{ax}(1 - e^{ax})$$

شپيرم - نتيجي:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778$$

الف -

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,195 \quad \text{ب -}$$

اوم - نتيجي:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{د}$$

لپاره ارزښت جدول.

الف -

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17

$$T(\ln(2) | \sqrt{2}) \quad \text{ب - ټيټيکي:}$$

پ - په نخښه شوي سطحه 1FE (FE د سطحي واحد) ده

اتم - نتيجي:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}; t(x) = 12x + 48$$

نهم - نتيجي:

$$P_{\text{Max}}(0 | -8); P_{\text{Min}_1}\left[-\sqrt{\frac{6}{5}} | -\frac{49}{5}\right]; P_{\text{Min}_2}\left[\sqrt{\frac{6}{5}} | -\frac{49}{5}\right]$$

$$\text{سطحه: } A = |-32| = 32 \text{ FE (FE د سحي يوونونه يا واحدونه)}$$

مفصل ځوابونه:

لومری:

$$\underbrace{(e^x + e^{-x})^2}_{1. \text{ bin. Formel}} = e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}$$

$$= \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x} + 2}} \quad \text{الف-}$$

$$(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x = e^{2x} - \underbrace{e^{-x} \cdot e^x}_1 + 5 \cdot e^x$$

$$= e^{2x} - 1 + 5 \cdot e^x$$

$$= \underline{\underline{e^{2x} + 5 \cdot e^x - 1}} \quad \text{ب -}$$

دویم:

الف -

$$6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \mid -6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^{2-2x} = -6 \mid \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2-2x} = 4 \mid \ln(\quad)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2-2x}) = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = \ln(4)$$

$$\text{د } \ln(4) = \ln(2^2) = 2 \cdot \ln(2) \text{ له امله باور لري:}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x = 2 \cdot \ln(2) \mid -2$$

$$\Leftrightarrow -2x = 2 \cdot \ln(2) - 2 \mid : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(2) + 1 = \underline{\underline{1 - \ln(2) \approx 0,307}}$$

ب -

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} &= 1 \mid + \frac{e}{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} &= 1 + \frac{e}{2} \mid \cdot 4 \\
 \Leftrightarrow e^{4x} &= 4 + 2e \mid \ln() \\
 \Leftrightarrow \ln(e^{4x}) &= \ln(4 + 2e) \\
 \Leftrightarrow 4x &= \ln(4 + 2e) \mid : 4 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\ln(4 + 2e)}{4} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \ln(4 + 2e) \approx 0,561
 \end{aligned}$$

دریم:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \\
 \Rightarrow f'(x) &= (-10x-3) \cdot \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \\
 &= -\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x} \quad \text{ب -}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 f(x) &= e^{-4x} - e^{4x} \\
 \Rightarrow f'(x) &= -4 \cdot e^{-4x} - 4 \cdot e^{4x} \\
 &= -4(e^{-4x} + e^{4x}) \quad \text{الف -}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \\
 \Rightarrow F(x) &= \int \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (x^2 - 3e^x) dx \\
 &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x \right] + C \\
 F'(x) &= \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x)
 \end{aligned}$$

خلورم: الف -

ب -

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \\
 \Rightarrow F(x) &= \int \left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C}}
 \end{aligned}$$

$$j: \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{يادونه:}$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x}$$

پنجم:

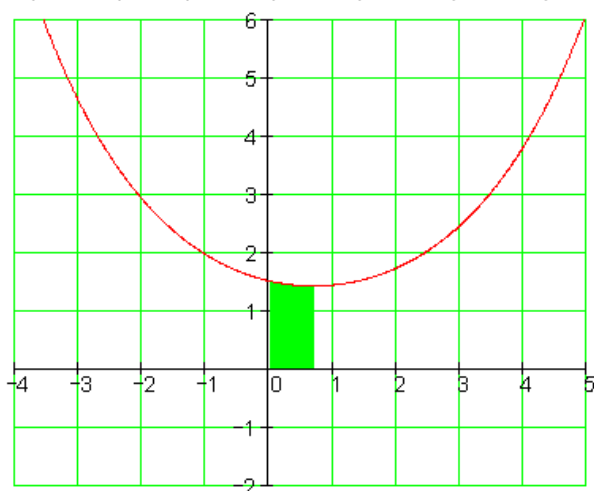
الف -	ب -
قانون سره $f(x) = (1 - e^{ax})^2 \quad \text{د زنجيري}$ $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2 \cdot (1 - e^{ax})}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{a \cdot (-e^{ax})}_{\text{innere Abl.}}$ دندنی مشتق دبانندی مشتق $= \underline{\underline{-2a \cdot e^{ax} (1 - e^{ax})}}$	الف - $f(x) = (x + a)^2 - e^{2x-3}$ $\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (x + a) \cdot 1 - 2 \cdot e^{2x-3}$ $= 2x + 2a - 2 \cdot e^{2x-3}$ $= \underline{\underline{2(x + a - e^{2x-3})}}$

شپږم:

الف -	ب - بدلون
$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \text{ Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x$ $u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$ $ug: u(0) = 0; og: u(4) = 2$ $2 \cdot \int_0^2 e^u du = 2 \cdot e^u \Big _0^2 = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0$ $= \underline{\underline{2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778}}$	$\int_1^2 e^{4-2x} dx \text{ Substitution: } u(x) = 4 - 2x$ $u'(x) = \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} du$ $ug: u(1) = 2; og: u(2) = 0$ $-\frac{1}{2} \cdot \int_2^0 e^u du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 e^u du$ $= \frac{1}{2} \cdot e^u \Big _0^2 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot e^0$ $= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,95}}$

اووم: الف - د $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



ب - د نسبي مينيموم يا خورا کوچني ارزښت شميرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = 0 \quad | +\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 2e^{-\frac{1}{2}x} \quad | \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \quad | \ln(\quad)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

افراطي خاى. افراطي ارزښت:

$$f(x_e) = f(\ln(2)) = e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{T(\ln(2) | \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

ثبیت ټکی:

پ - د سطحی شمیرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x) dx = \int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx}_I + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} \left(e^{\frac{1}{2}x} \right) dx}_{II}$$

$$I: \int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx \quad u(x) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

$$u(0) = 0 \quad u(\ln(2)) = -\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2 \int_0^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^u du = 2 \int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^0 e^u du = 2 \left[e^u \right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^0 = 2 \left[e^0 - e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} \right]$$

$$\text{II:} \quad \frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} \left(e^{\frac{1}{2}x} \right) dx \quad u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$u(0) = 0 \quad u(\ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} (e^u) du = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} (e^u) du = \left[e^u \right]_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0$$

$$\text{I+II:} \quad 2e^0 - 2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0 = 1 - 2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

په نخښه شوې سطحه ارزښت 1FE (د سطحې يوون يا واحد) لري
اتم:

د پراېلم تحليل:

د درېمې درجې ام راشنل (ريښتيني) تابع لپاره: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
I. په $T(2|0)$ کې ټيټ ټکی په دې معنا دی:

$$1. x_1 = 2 \quad f(x_1) = f(2) = 0 \quad \text{يعني} \quad f(x) \text{ صفرځای دی،}$$

$$2. x_T = 2 \quad f'(x_T) = f'(2) = 0 \quad \text{يعني} \quad f(x) \text{ افراطي ځای دی،}$$

$$\text{II. } P(-4|0) \quad f(x) \text{ صفرځای دی، يعني } f(-4) = 0.$$

$$\text{III. په } P(-4|0) \text{ کې تانجنت د } y \text{-محور په } a_{0T} = 48 \text{ کې غوڅوي، يعني } t(0) = 48 \text{ او } t(0) = 48.$$

د ضريبونو مساواتو ليكل:

$$\begin{aligned} \text{I1. } \Rightarrow f(2) = 0 &\Leftrightarrow a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0 \end{aligned}$$

مساوات ۱ .

$$\begin{aligned} \text{I2. } \Rightarrow f'(2) = 0 \text{ mit } f'(x) &= 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = 0 \\ f'(2) = 0 &\Leftrightarrow 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0 \end{aligned}$$

مساوات ۲ .

$$\begin{aligned} \text{II } \Rightarrow f(-4) = 0 &\Leftrightarrow a_3 \cdot (-4)^3 + a_2 \cdot (-4)^2 + a_1 \cdot (-4) + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0 \quad \text{Gleichung III} \end{aligned}$$

مساوات ۳ .

$$\text{III. د تانجنت مساوات: } t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = -4$ سره $f(x_0) = f(-4) = 0$ باور لري، ځکه چې $x_0 = -4$ د $f(x)$ صفر ځایونه دي.

$$\begin{aligned} f'(x_0) = f'(-4) &= 3a_3 \cdot (-4)^2 + 2a_2 \cdot (-4) + a_1 \\ &= 48a_3 - 8a_2 + a_1 \end{aligned}$$

$$\text{also } t(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x + 4)$$

$$t(0) = 48 \Leftrightarrow (48a_3 - 8a_2 + a_1) \cdot 4 = 48$$

$$\Leftrightarrow 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48 \quad \text{Gleichung IV}$$

پورته: مساوات IV .

له دې سره اوس ټول د ضريبونو مساوات معلوم دي:

$$\text{I } 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$

$$\text{II } 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$$

$$\text{III } -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0$$

$$\text{IV } 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48$$

د مساواتسيستم ځواب د گاس-الگوريتم له لارې:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
1	-4	16	-64	0	III - I
0	4	-32	192	48	: 4
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	-6	12	-72	0	III + 6 · II
0	1	-8	48	12	IV - II
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	0	36	0	0	
0	0	-12	36	12	

$$3a_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$-12a_2 + 36a_3 = 12$$

$$\Leftrightarrow 36a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

$$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 12 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$$

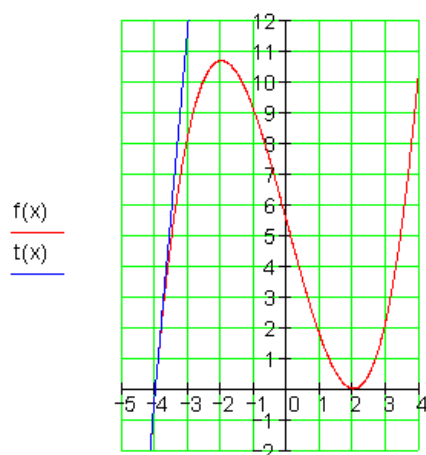
$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{16}{3}}$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}$$

د پورته الماني پښتو: تابع مساوات.
د تانجنت مساوات:

$$t(x) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x + 4) = \left(\frac{48}{3} - 4\right)(x + 4) = \underline{\underline{12x + 48}}$$



نهم:
اول: افراطي ارزښتونه

.....
 $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$ و y محور ته سيمتريک ده.

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

په کي نسبي ماکسيموم

$$f'(x) = 5x^3 - 6x; f''(x) = 15x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 15 \cdot 0^2 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel Max bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_3 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f(x_1) = f(0) = -8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Max}}(0 | -8)}}$$

$$f(x_2) = f(x_3) = f\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 8 = -\frac{49}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Min}_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right); P_{\text{Min}_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)}}$$

دوه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8 = 0$$

د سطحی شميرنه صفر ځايونه:
بدلون: $x^2 = z$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2 - 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{12}{5}z - \frac{32}{5} = 0 \Rightarrow z_1 = 4 \mid$$

$$\text{همداسي } z_2 = -\frac{8}{5} \quad (\text{حل نه شته})$$

$$x_2 = 2 \text{ د انتيگريشن پولې دي. } z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$$

د سطحې انتيگراډ:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 \left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8 \right) dx = \left[\frac{x^5}{4} - x^3 - 8x \right]_{-2}^2 \\ &= \left[\frac{2^5}{4} - 2^3 - 8 \cdot 2 \right] - \left[\frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8 \cdot (-2) \right] = -32 \end{aligned}$$

سطحه: $A = |-32| = 32FE$ (د سطحې واحد يا يوون)

$$P_{\text{Max}} (0 | -8)$$

$$P_{\text{Min}_1} \left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5} \right)$$

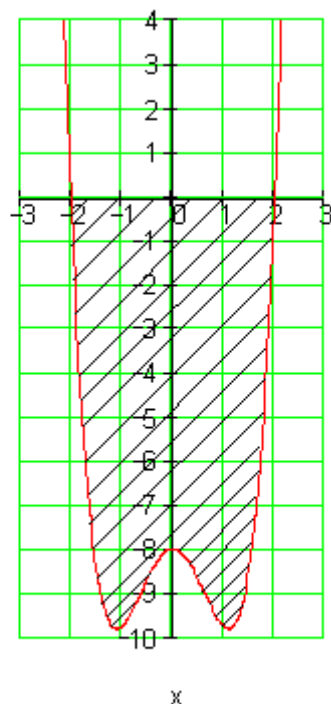
$$\text{bzw. } P_{\text{Min}_1} (-1,09 \mid -9,8)$$

$$P_{\text{Min}_1} \left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5} \right)$$

$$\text{bzw. } P_{\text{Min}_1} (1,09 \mid -9,8)$$

x	-2,2	-2	-1,5	-1
f(x)	6,76	0	-8,42	-9,75
x	-0,5	0	0,5	1
f(x)	-8,67	-8	-8,67	-9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	-8,42	0	6,76	

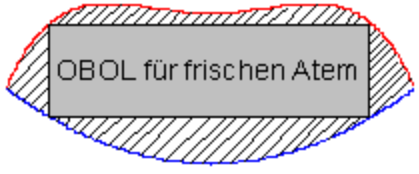
f(x)



مشتق — او انټیگرالشمېرنې ته د استعمال پوښتنې!

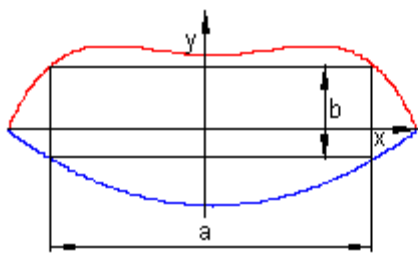
د اعلاناتو تختې او ګډوله پوښتنې.

لومړۍ:

دا تر څنګ د اعلاناتو تخته) خوله د یوه په کې خوندي ولاړګوډیز یا مستطیل سره، چې خوزنده اعلانات په کې انځور شوي دي) باید داسې جوړه شي، چې په کې خوندي مستطیل ممکنه خورا لویه سطحه ولري. د خولې د غاړې کړې یا منحنې د په څنګ کې توابعو د تابع مساواتو له لارې انځوریزې:	 $f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2; g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$
--	---

الف- د خولې پورته برخه کوم تابع ښايي او کوم دا کښته برخه؟ خپل ځواب مددل کړۍ.

ب —

د دې مودول جوړونکي د ځغلند لیک لپاره د مستطیل یا ولاړګوډیز ټيکي کچې ته اړتیا لري. د مستطیل اړخ a او b اړخ داسې وټاکي، چې سطحه ماکسیمال شي. سطحه څومره لویه ده؟ د اوږدوالي یوون یا واحد متر دی.	
---	--

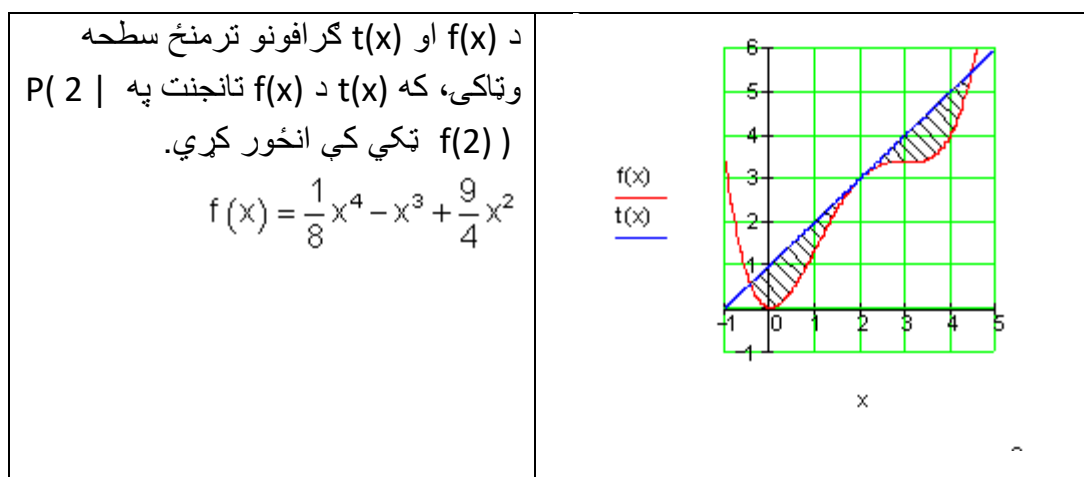
پ-

دا ټوله خوله دې په یوه دکور په یوه دیوال کې ورګډه یعنې وکښل شي، د دې لپاره د
جوړولو انجنر اړینې سطحې ته اړتیا لري.

ت- دا کرښه شوي سطحه دي د خورا ارزښتناک برطېنا رانه رنگ سره جوړه شي. د يوه مربع متر په پوښ ورکونه يا رنگونه € 120 قيمت لري. ټوله پوښونه به څومره قيمت ولري؟

غوښتنه: مشتق، افراطي ارزښتونه، د گرافونو ترمنځ سطحه.

دويم:



غوښتنه: تانجنت، صفرځايونه، هورنر، ټاکلي انتيگرال

دريم:

تابع ورکړ شوی: $f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \quad x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

الف- د $f(x)$ صفرځايونه وټاکي او خپلي نتيجې په کومنتار روښانه کړي.

ب - د پراته تانجنت سره ټکي پيدا کړي او د دې ټکو پروتځای په هکله يوه وينا وکړي.

غوښتنه: مشتق، -تابع، د ضرب قانون، زنځيري قانون. صفرضرب. تانجنتونه، پراته.

ځوابونه

مشتق او انټيگراشميرني ته د استعمال پوښتنې |

نتيجه

الف- $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$ د خوله لاندې برخه ښايي.

د خوله پورته برخه ښايي. $f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$

ب - د ولاړگوديز يا مستطيل خورا لويه سطحه $23,095 \text{ m}^2$ ده.

پ - د خولي لپاره د کور په ديواله په تولييزه توگه $36,267 \text{ m}^2$ سطحې ته اړتيا شته.

ت - کرښيزه سطحه د تولي سطحې او د ولاړگوديز يا مستطيل کمښت يا تفريق دی. دا نږدې $13,172 \text{ m}^2$ دی. د پوښوني قيمت $1580,65 \text{ €}$ دی. دويم: غږښتونکي سطحه $2,939 \text{ FE}$ (د سطحې واحد يا يوون) ده.

درېم:

الف- $x_{1/2} = 0$ يواځن صفرځای دی، ځکه چې ډبل منځ ته راځي، د $f(x)$ گراف د x - محور په همدې ځای کې لمسوي.

ب- ټکي د پراته تانجنت سره په $x_1 = 0$ او $x_2 = 1$ کې پراته دي. ټول ټکي P_{1a} د کواورديناټ يا پروت ولاړسيستم په سرچينه کې په $(0 | 0)$ کې پراته دي. ټول P_{2a} ټکي د محور y ته غبرگې باندې په واټن کې پراته دي او کواورديناټ $(1 | a)$ P_{2a} لري.

مفصل ځوابونه:

الف- د خولي لاندې برخه د مربع تابع له لارې روښانه يا تشيح کيږي. پورته برخه د ۴ درجې يوه ټول هوښيار يا راشنل تابع له لارې.

د خولي لاندې برخه ښايي $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$

$$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2t$$

د خولي پورته بڅه ښايي.

ب-دا چې د $f(x)$ او $g(x)$ گرافونه د y محور سره سيمتريک ځلي، نو دا خوندي ولاړگوديز يا مستطيل هم د y محور ته سيمتريک دی.

د y محور a په دوه برابر وېشو. د دې لپاره چې اړخ يا خوا b د a په واکوالي کې وټاکو، نو ولاړگوديز يا مستطيل د ولاړو گډونو يا قيموزاويو پورته او کښته کواوردیناتونو ته اړتيا لرو.

$$\left(\frac{a}{2} \mid f\left(\frac{a}{2}\right)\right) \quad \left(\frac{a}{2} \mid g\left(\frac{a}{2}\right)\right)$$

پورته ولاړ يا قايم گود يا کونج: کښته ولاړگود:

د y محور مطلق کمښت اړخ b راکوي. د دې لپاره د ولاړگوديز يا مستطيل همغه اړونده د y کواوردیناتونه شمېرو.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{2}\right) &= -\frac{1}{486} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{1}{54} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{486} \cdot \frac{a^4}{16} + \frac{1}{54} \cdot \frac{a^2}{4} + 2 \\ &= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 > 0 \\ g\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{18} \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{72}a^2 - 2 < 0 \end{aligned}$$

د b د اوږدوالي لپاره نو باور لري:

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) + \left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|$$

دا چې $g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ است، دی، نو $\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right| = -g\left(\frac{a}{2}\right)$ باور لري او له دې سره دا لاندې

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \left(\frac{1}{72}a^2 - 2\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \frac{3}{216}a^2 + 2 \\
 &= -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{2}{216}a^2 + 4 = -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4
 \end{aligned}$$

دا چي د b اړخ د a په واک کې دی، نو سړی دا هم وايي چي b د a فنکشن دی يعنې $b(a)$.

د ولاړگوديز A مساحت د هغه د اړخونو ضرب دی.

$$\begin{aligned}
 A(a) &= a \cdot b(a) = a \cdot \left(-\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4 \right) \\
 &= -\frac{1}{7776}a^5 - \frac{1}{108}a^3 + 4a
 \end{aligned}$$

د $A(a)$ د افراطي ارزښت ټاکل د a ارزښت راکوي، چي د هغه لپاره د ولاړگوديز سطحه خورا بيا ماکسيمال لويږي.

(په لاندې کې د الماني پښو: بدلون، حل نه شته،

$$A'(a) = -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4; A''(a) = -\frac{20}{7776}a^3 - \frac{6}{108}a$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 = 0 \mid \cdot \left(-\frac{7776}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{3 \cdot 7776}{108 \cdot 5}a^2 - \frac{4 \cdot 7776}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{216}{5}a^2 - \frac{31104}{5} = 0 \text{ Substitution: } a^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{216}{5}z - \frac{31104}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{216}{5}; q = -\frac{31104}{5}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow D &= \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = \left(\frac{108}{5} \right)^2 + \frac{31104}{5} = \frac{11664}{25} + \frac{155520}{25} = \frac{167184}{25} \\
 &= \frac{1296}{25} \cdot 129 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1296}{25} \cdot 129} = \frac{36}{5} \sqrt{129}
 \end{aligned}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129} = a^2 \\ z_2 = -\frac{108}{5} - \frac{36}{5} \sqrt{129} < 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

حل نه شته

$$a^2 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129} \Rightarrow |a| = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129}}$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129}}; a_2 = -\sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5} \sqrt{129}}$$

$$a_1 = \frac{6}{5} \sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \approx 7.757$$

د يو څو بڼه بدلونونو سره.

دا چې د z_2 ريښه يا جذر نه شي نيول کیدی او د a لپاره ارزښت بايد زياتيز يا مثبت وي، بايد د a د $A(a)$ يو افراطي ځای وي. دا د $A(a)$ د دويم مشتق سره ازمايلي شو.

$$A''(a_1) < 0$$

$$A''(a_1) = -\frac{20}{7776} a_1^3 - \frac{6}{108} a_1$$

$$a_1 > 0 \quad \text{او}$$

له امله.

$$a_1 = \frac{6}{5} \sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \quad \text{د ارزښت لپاره}$$

د ولاړگوديز يا مستطيل سطحه ماکسيمال يا خورا لويه ده

دا چې گراف، چې د خولي پورته برخه جوړوي، د $x = 0$ په ځای کې یو مینیموم یا خوراکوچنی ارزښت په گوته کوي ($P_{\text{Min}}(0 | 2)$)، باید وازمایل شي، چې د ولاړگوډیز یا مستطیل پورته اړخ له دې څخه کښته پروت دی.

$$\text{Also ob } f\left(\frac{a_1}{2}\right) < 2 \text{ ist.}$$

$$f\left(\frac{a_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 1,813 < 2$$

شمیرنه د جېشمیري سره صورت نیسي. نتیجه تصدیقوي، چې د مستطیل پورته اړخ د $f(x)$ د خورا کوچني ارزښت کښته لور ته پروت دی

اوس کیدی شي د مستطیل مساحت د جېشمیري سره و شمیرل شي. د الماني پښتو: ولاړگوډیز یا مستطیل.

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = -\frac{1}{7776}a_1^5 - \frac{1}{108}a_1^3 + 4a_1$$

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 23,095$$

د ولاړگوډیز خورا لوی ارزښت یا ماکسیماله لویه نږدې $23,095 \text{ m}^2$ مساحت لري.

پ- د خولي ټول مساحت د $f(x)$ او $g(x)$ توابعو گرافونو ترمنځ پروت دی. دا د انتگرال په مرسته میندل کیدی شي. د دې لپاره باید لومړی د انتیگرېشن پولې وټاکل شي.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2 - \left(\frac{1}{18}x^2 - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 - \frac{3}{54}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 = 0 \quad | \cdot (-486)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 18x^2 - 1944 = 0 \quad \text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 18z - 1944 = 0 \Rightarrow p = 18; q = -1944$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 + 1944 = 2025 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2025} = 45$$

$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$ z_1 = -9 + 45 = 36 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 6$ $ z_2 = -9 - 45 = -54 < 0 \Rightarrow$	د انتیگریشن پولي د x لپاره حل نه شته
---------------------------------------	---	---

د $f(x) - g(x) = -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4$ سره د گرافونو ترمنځ سطحې لپاره باور لري:

لاندي الماني: خوله

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Mund}} = A &= \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-6}^6 \left(-\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 \right) dx \\
 &= -\frac{1}{5 \cdot 486}x^5 - \frac{1}{3 \cdot 27}x^3 + 4x \Big|_{-6}^6 \\
 &= -\frac{7776}{2430} - \frac{216}{81} + 24 - \left(-\frac{7776}{2430} - \frac{216}{81} - 24 \right) \\
 &= -\frac{15552}{2430} - \frac{432}{81} + 48 = \frac{544}{15} \approx 36,267
 \end{aligned}$$

دپه دیوال د خولي لپاره تولټال $36,267 \text{ m}^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت- کرښیزه سطحه د تولي سطحې او د ولاړگوډیز د سطحې د کمون یا تفریق سره برابره ده.

په لاندې کې د الماني پښتو له کین څخه ښي لورته: کرښیز، خوله، مستطیل یا ولاړ کوډیز

$$A_{\text{schraffiert}} = A_{\text{Mund}} - A_{\text{Rechteck}} = \frac{544}{15} - A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 13,172$$

د 1m^2 پوښوني قيمت 120€ دی.

$$\text{ټول قيمت} = 120\text{ €} \cdot A_{\text{schraffiert}} = 1580,65\text{ €}$$

يادونه:

د دې لپاره چې د گردوني ناتيکاوې مخه ونيول شي، بايد د جېشميري شميرنې سره منځارزېستونه ذخيره شي.

$$\text{ټول قيمت} = 120\text{ €} \cdot 13,172 = 1580,64\text{ €}$$

د گردوني ناتيکاوې ته يادونه.

تر شوونتيا پورې چې د گردوني ناتيکاوې مخه ونيولې شو، بايد د جېشميري شميرنې سره منځارزېستونه ذخيره شي. مگر په ډېرو حالتونو کې د لسميز يا اعشاريې (کوما) وروسته درې ځايونه بسيا کوي. په لاندې کې دې د لسميز وروسته د ۳ ځايونو تيکاوې سره سرته ورسول شي. د الماني : ولاړگوديز، خوله، کرېنيزه سطحه، خوله، مستطيل

$$a_1 \approx 7,757$$

$$A_{\text{Rechteck}} \approx -\frac{1}{7776} \cdot (7,757)^5 - \frac{1}{108} \cdot (7,757)^3 + 4 \cdot 7,757 \approx 23,095$$

$$A_{\text{Mund}} \approx 36,267$$

$$A_{\text{schraffiert}} = A_{\text{Mund}} - A_{\text{Rechteck}} \approx 36,267 - 23,095 \approx 13,172$$

$$\text{ټول ارزښت} \approx 120\text{ €} \cdot 13,172 \approx 1580,64\text{ €}$$

دويم: حل

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$$

تanjent په $f(x)$ باندې په $P(2|f(2))$ کې
 $f(2)=3$ له دې لاس ته راځي، چې $t(x)$ د $f(x)$ گراف په ټکي $P(2|f(2))$ کې لمسوي
 تانجنت مساوات: $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ د $x_0 = 2$ سره

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 1$$

او د $tf(x_0) = f(2) = 3$ سره باور لري: $t(x) = 1 \cdot (x - 2) + 3$ يعنې $t(x) = x + 1$

د تانجنت غوڅټکي همداسې لمستکي د $f(x)$ د گراف سره

$$t(x) - f(x) = x + 1 - \left(\frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 \right) = -\frac{1}{8}x^4 + x^3 - \frac{9}{4}x^2 + x + 1$$

$$t(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^4 + x^3 - \frac{9}{4}x^2 + x + 1 = 0$$

برېښي چې تانجنت د $f(x)$ گراف په ټکي $P(2|3)$ کې لمسوي، کيدی شي $x_{1/2} = 2$ حلونه وي.

هورنر:

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{8} \quad 1 \quad -\frac{9}{4} \quad 1 \quad 1 \\ x=2 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{6}{4} \quad -\frac{6}{4} \quad -\frac{4}{4} \\ \hline -\frac{1}{8} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{2}{4} \quad 0 \\ x=2 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{2}{4} \\ \hline -\frac{1}{8} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_{3/4} = 2 \pm \sqrt{6}$$

داچې تانجنت د $f(x)$ گراف په ټکي $P(2|3)$ کې لمسوي (ډبل صفر ځای)، کيدی شي غوښتونې سطحه د لاندې انټيگرال سره وشميرل شي.

$$A = \int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} [t(x) - f(x)] dx = \int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \left[-\frac{1}{8}x^4 + x^3 - \frac{9}{4}x^2 + x + 1 \right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \approx 2,939$$

غوښتونې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد يا يوون) ده.

درېم:

الف-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$$

د صفر ځايونو لپاره اېښونه: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} = 0$

تر څېړنې لاندې نيول کيږي، چې د کوم x ارزښت لپاره ضرب ضريبونه (د x ځلوونې) صفر کيږي.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ يو ټاکلی ضريب دی، چې هېڅ صفر کيدای نه شي.

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0 \quad \text{يو ډبل صفر ځای دی.}$$

$$e^{3-2x} : e^{3-2x} = e^{-(2x-3)} \quad \text{د څېړنه}$$

له $e^{-(2x-3)}$ څخه د e^{-2x} څخه د x محور بڼې لور ته په ۳ واحده يا يوون د راکښنې له لارې منځ ته راځي ه.

دا چې e^{-2x} صفر ځای نه لري، نو $e^{-(2x-3)}$ هم صفر ځای نه لري.

له دې سره $x_{1/2} = 0$ يو اځنی صفر ځای دی، ځکه چې ډبل منځ ته راځي، د $f(x)$ گراف د x محور په دې ځای کې لمسوي. (پروت تانجنت) ب-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \quad \text{په پاته تانجنت باندې څېړنه}$$

د پراته تانجنت لپاره شرطونه: $f'_a(x) = 0$

د ضرب قانون له لارې مشتق: $f'_a = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u = a \cdot x^2 ; v = e^{3-2x} \Rightarrow u' = 2a \cdot x ; v' = -2e^{3-2x}$$

$$\Rightarrow f'_a(x) = 2ax \cdot e^{3-2x} + ax^2 \cdot (-2e^{3-2x})$$

$$= 2ax \cdot e^{3-2x} - 2ax^2 \cdot e^{3-2x} = 2a \cdot e^{3-2x} (x - x^2)$$

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot e^{3-2x} (x - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$$

e^{3-2x} صفر کیدی نه شي (برخه الف وگوری)

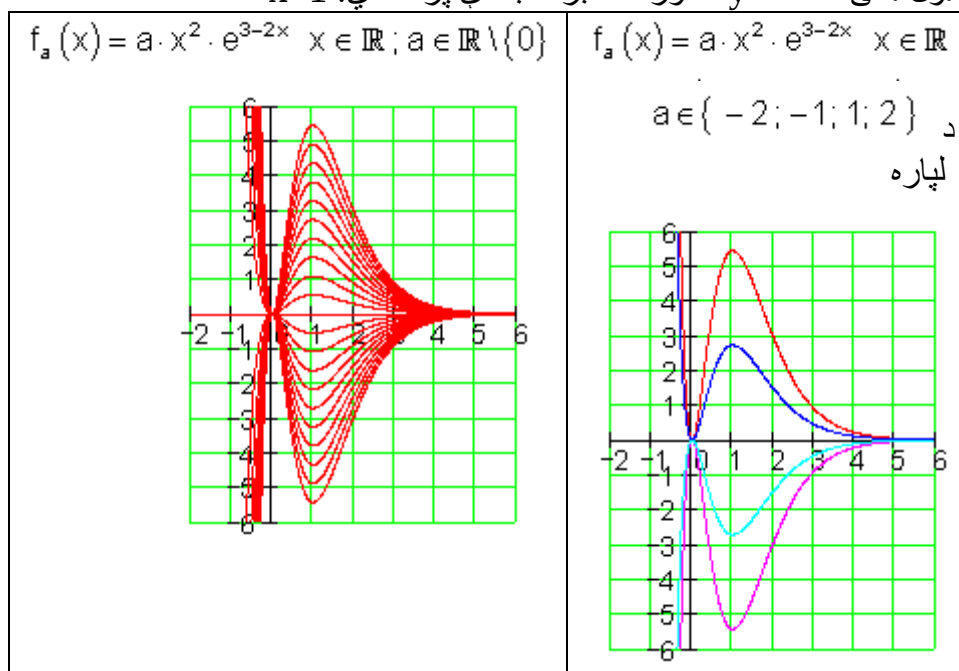
د پراته محور سره غوڅتکي

$$f_a(x_1) = f_a(0) = a \cdot 0^2 \cdot e^3 = 0 \Rightarrow \underline{P_{1a}(0|0)}$$

$$f_a(x_2) = f_a(1) = a \cdot 1^2 \cdot e^{3-2} = a \cdot e \Rightarrow \underline{P_{2a}(1|a \cdot e)}$$

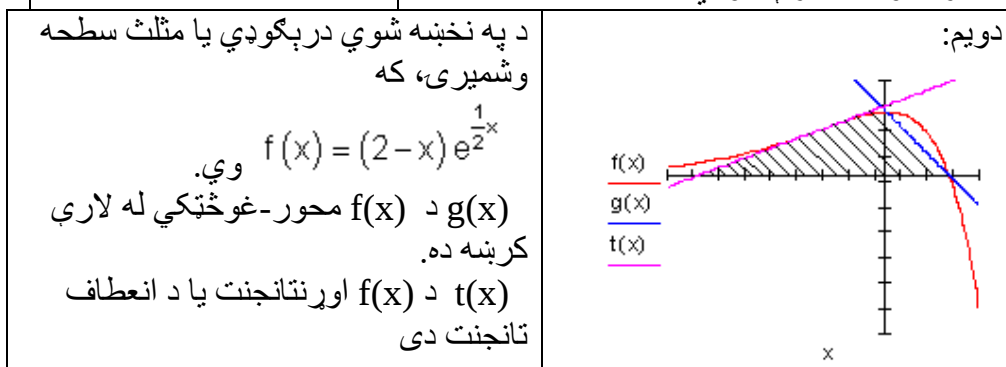
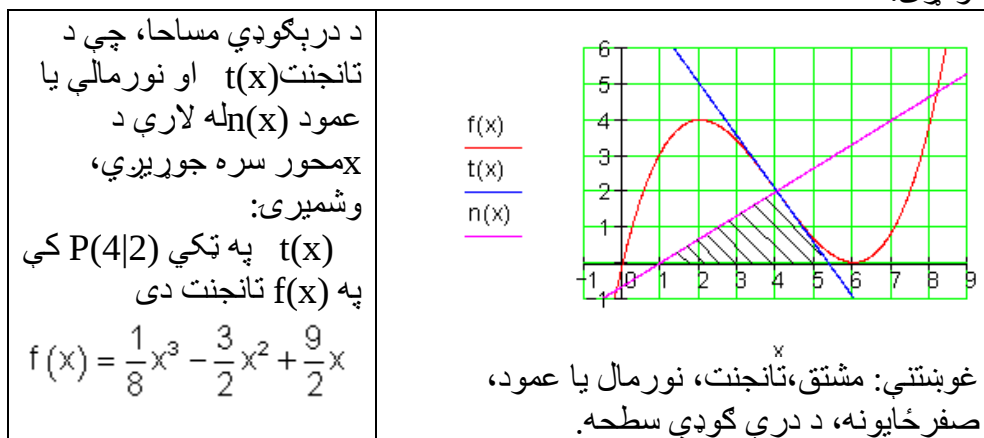
ټول ټکي P_{1a} د کواردینات په سرچینه پراته دي، له پارامتر a څخه خپلواک دي.

ټول ټکي P_{2a} د y محور ته غیره باندې پراته دي: $x=1$

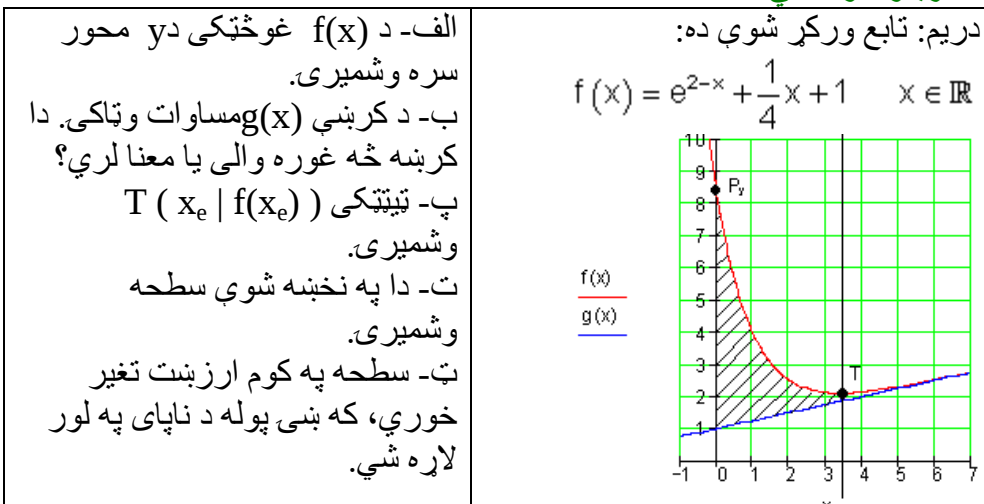


پوښتنې: مشتق او انتیگرالشمیرنه II
 گډوله پوښتنې

لومړۍ:



غوښتنه: محور غوڅټکي، اوړون - يا د انعطاف ټکي، اوړنتانجنت يا د انعطاف تانجنت،
د کړښو غوڅټکي.



غوښتنه: e - تابع ، محور غوڅتکي، مشتق، سطحه، انټيگریشن، ناپای انټيگرال.

خوابونه

مشتق او انټيگرال ته گډوله پوښتنې II

نتیجې او مفصل خوابونه

نتیجې

لومړۍ:

د درېگوډۍ مساحت نږدې $4,333... FE$ د سطحې یوون یا واحد دی.

دویم: د درېگوډي سطحه نږدې $8,606 FE$ د سطحې واحد دی.

دریم:

الف- $P_y(0 | e^2 + 1)$ bzw. $P_y(0 | 8,389)$ همداسې

ب- کرښه د گراف اسیمپټوټي جوړوي.

د اسیمپټوټي د تابع مساوات دی: $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

ټیټکی: $T\left(2 + \ln(4) \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3,386 \mid 2,097)$

ت-په نخښه شوې سطحه ده:

$$A = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7,139$$

$$A = e^2 \approx 7,389$$

په دې ارزښت سطحه تغيړ خوري، كه بنې پوله د ناپاي په لور لاړه شي.

مفصل ځوابونه:

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \quad \text{د} \quad {}^1P(4|2) \Rightarrow x_0 = 4 \quad \text{له لارې تانجنت}$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(4) = 2; f'(x_0) = f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x - 4) + 2 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}x + 8}}$$

$$n(x) = \frac{2}{3}(x - 4) + 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}}$$

د تانجنت غوڅتکی د x محور سره:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow x_t = \frac{16}{3}$$

د نورمالي غوڅتکی د x محور سره.

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = 1$$

$$g = x_t - x_n = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3} \quad \text{د} \quad A = \frac{g \cdot h}{2} \quad \text{د درېگودي سطحه:}$$

$$h = 2 \Rightarrow A = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \frac{13}{3} \text{ FE} \quad \text{او (دسطحي يوون يا واحد) سره.}$$

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{دويم:}$$

اول: د محور غوڅتکو شميرنه.

د y محور سره غوڅتکی:

$$f(0) = (2-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 2e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

د x محور سره غوڅتکی

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow (2-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$\text{ضريب } e^{\frac{1}{2}x} \text{ نه صفر کيږي، نو } \underline{\underline{P_{x1}(2|0)}}.$$

دوه: کرښه د د محور غوڅتکو $P_y(0|2)$ او $P_{x1}(2|0)$ له لارې.

$$g(x) = a_1x + a_0 \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + a_0$$

$$P_y(0|2) \quad g(0) = 2 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2$$

ازماښت:

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -x + 2}}$$

دری: اورون - یا انعطافتی

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (2-x); u' = -1; v = e^{\frac{1}{2}x}; v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = -1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (2-x) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left[-1 + \frac{1}{2}(2-x)\right]e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x; u' = -\frac{1}{2}; v = e^{\frac{1}{2}x}; v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right); u' = -\frac{1}{4}; v = e^{\frac{1}{2}x}; v' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w = -2}}$$

$$f'''(x_w) = f'''(-2) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{4e} \neq 0$$

$$\Rightarrow x_w = -2$$

دا اړونټکي يا انعطافټکي دی.

$$y_w = f(x_w) = f(-2) = (2 - (-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

څلور: د اړونټکي يا انعطاف ټکي تانجنت

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x_w) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2) \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{e}$$

$$f(x_w) = f(-2) = (2 - (-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{e}(x+2) + \frac{4}{e} = \frac{1}{e}x + \frac{6}{e}$$

$$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w) \quad \text{د } x_w = -2 \text{ سره لرو}$$

پنځه: د x محور او $g(x) = -x + 2$ سره د اړونټانجنت يا انعطافتانجنت غوڅټکي

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

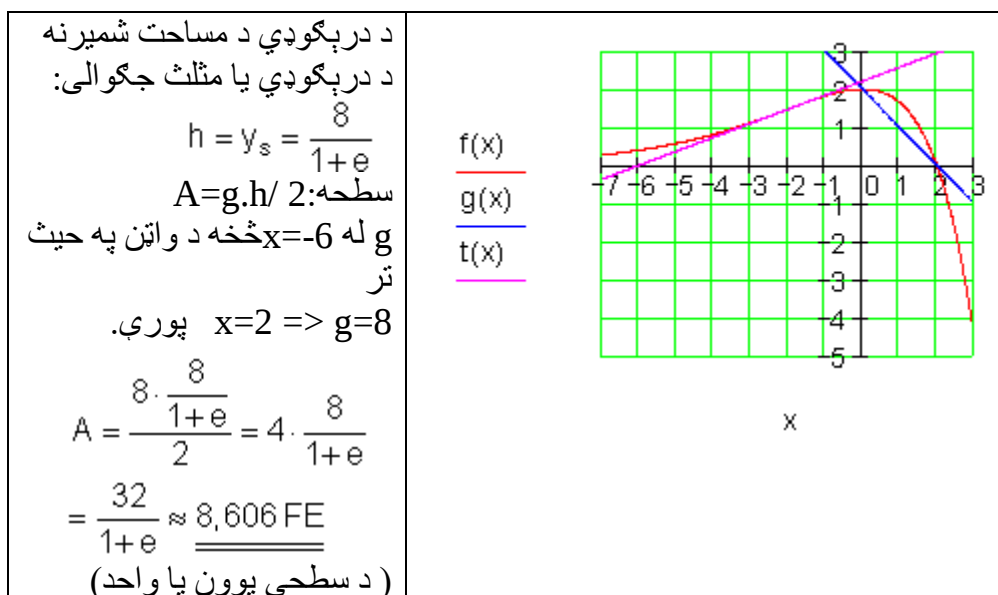
د انعطافټکي يا اونټکي صفر ځايونه.

$$t(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = -x + 2 \Leftrightarrow x_s = \frac{2e-6}{1+e}$$

$$y_s = g(x_s) = -\frac{2e-6}{1+e} + 2 = \frac{6-2e}{1+e} + 2 = \frac{8}{1+e}$$

د درېگودي يا مثلث جگوالی دی.

شپږ:



دریم:

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{الف.}$$

د y محور سره د غوڅي لپاره شرطونه:

$$y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0} + \frac{1}{4} \cdot 0 + 1 = e^2 + 1 \approx 8,389$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 | e^2 + 1) \text{ bzw. } P_y(0 | 8,389)}}$$

پورته: bzw = همداسې.

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{ب.}$$

$f(x)$ د $g(x)$ اسیمپټوت يا ګاونډ (مجانې) دی داپه دې معنا، چې د $f(x)$ ګراف د لوی x ارزښتونو لپاره د $g(x)$ په لور ځلي.

$e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ د لوی x ارزښت لپاره د صفر په لور ځلي، داسې چې $f(x)$ د لوی x

ارزښت لپاره فقط نور د برختم $\frac{1}{4}x + 1$ له لارې ټاکل کيږي.

نو له دې د گاونډ يا مجانب د تابع مساوات دى. $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ پ.

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \Rightarrow f'(x) = -e^{2-x} + \frac{1}{4} \Rightarrow f''(x) = e^{2-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{2-x} + \frac{1}{4} = 0 \mid +e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{2-x} \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(e^{2-x})$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) - \ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \ln(4) = >$$

افراطي ارزښت په $x_e = 2 + \ln(4) \approx 3,386$ کې

$$f''(x_e) = f''(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} = e^{2-2-\ln(4)}$$

$$= e^{-\ln(4)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3,386$$

$$f(x_e) = f(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} + \frac{1}{4}(2 + \ln(4)) + 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(4) + 1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4) \approx 2,097$$

ټيټکى:

$$\underline{\underline{T\left(2 + \ln(4) \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3,386 \mid 2,097)}}$$

ت. په نخښه شوې سطحه د $f(x)$ او $g(x)$ گرافونو ترمنځ په انټروال $[0; x_e]$ کې پرته ده.

$$g(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{سرہ} \quad \text{او} \quad f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{د} \quad A = \int_0^{x_e} [f(x) - g(x)] dx$$

$$A = \int_0^{x_e} e^{2-x} dx \quad \text{کيري} \quad f(x) - g(x) = e^{2-x} \quad \text{او له دې سره} \quad \text{بدلون:}$$

$$u = 2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad x_e = 2 + \ln(4)$$

$$: u(x_e) = 2 - (2 + \ln(4)) = -\ln(4) \quad \text{لاندې پوله } u(0)=2 \text{ پورته پوله:}$$

$$A = - \int_2^{-\ln(4)} e^u du = \int_{-\ln(4)}^2 e^u du = [e^u]_{-\ln(4)}^2 = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7,139$$

ب- په نڅېنه شوې سطحه د $f(x)$ او $g(x)$ گرافونو ترمنځ په انټروال $[0; \infty]$ کې پرته ده

$$g(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{سرہ} \quad \text{او} \quad f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \quad \text{د} \quad A = \int_0^{\infty} [f(x) - g(x)] dx$$

$$f(x) - g(x) = e^{2-x} \quad \text{کيري} \quad \text{او له دې سره}$$

$$A = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{2-x} dx \quad \text{يو نا معلوم؟؟؟ انټيگرا ل دی له دې لاس ته راځي} \quad A = \int_0^{\infty} e^{2-x} dx$$

$$u=2 \Rightarrow du/dx = -1 \Rightarrow dx = -du \quad \text{بدلون:}$$

$$u(b) = 2 - b \quad \text{لاندې پوله } u(0)=2 \text{ پورته پوله:}$$

$$A = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(- \int_2^{2-b} e^u du \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{2-b}^2 e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{2-b}^2 =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^2 - e^{2-b}] = e^2 \approx 7,389$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{2-b} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(b-2)} = 0$$

خُکِه چي

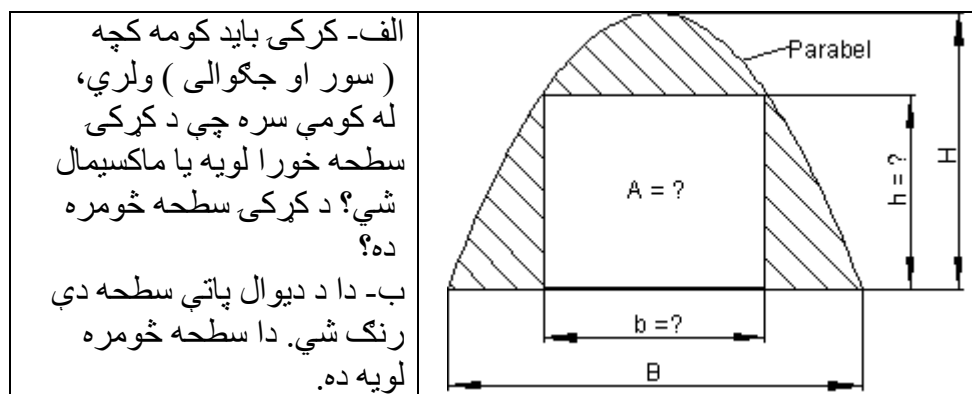
پوښتنې

مشتق او انتيگراډ شميرنه III

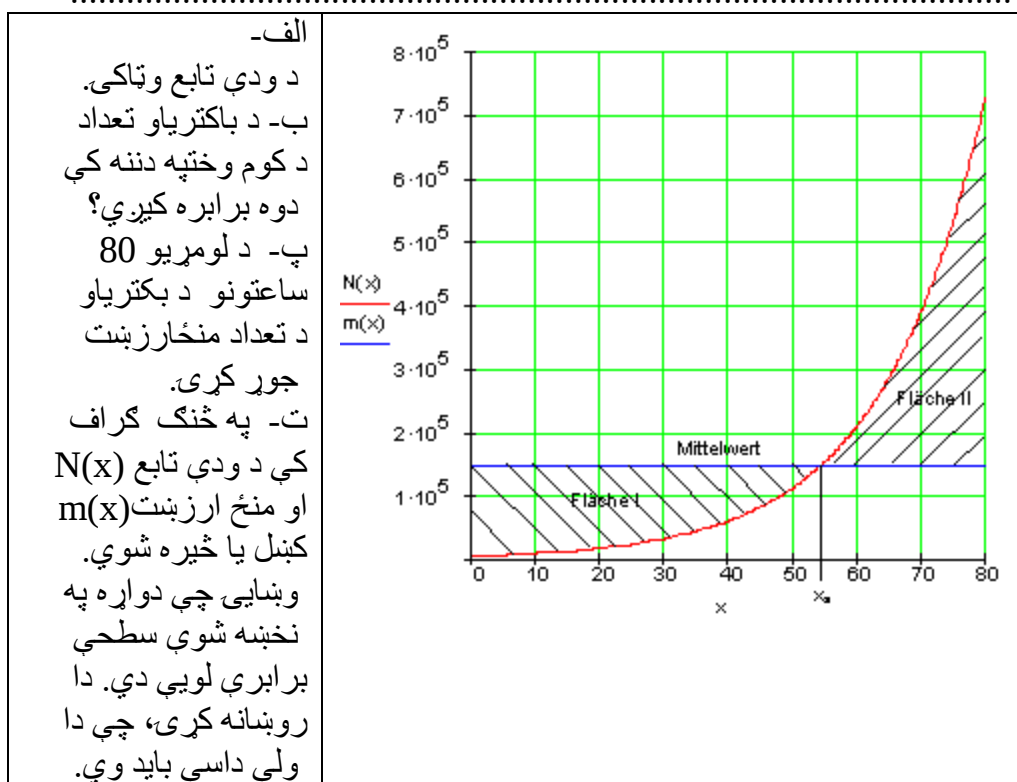
گډوله پوښتنې

لورمۍ:

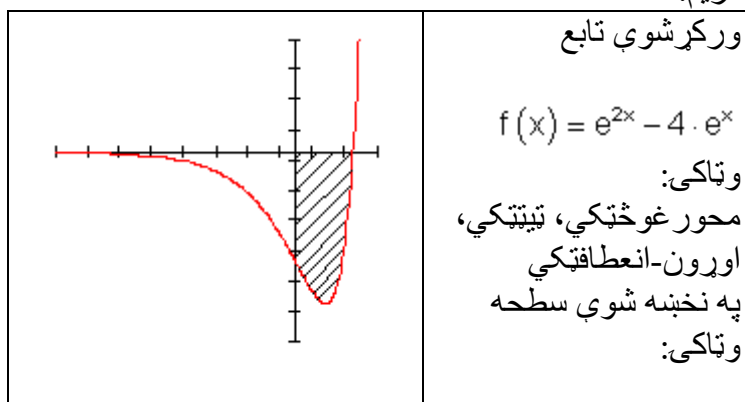
په يوه پارابول ډوله ديوال دې يوه ولاړگوديزه کړکۍ کيښول شي، تر ځمکې رسيري. د ديوال کچه، $B = 4\text{ m}$ (سور) $H = 4\text{ m}$ (جگوالی) ده.



غوښتنې: د کړکۍ ټکي مساوات، افراطي ارزښت شميرنه، ټاکلی انتيگراډ، ريښه قانونونه. دويم: د يوې باکتریا کلتور (وده) اکسپوننشل جگيري. د 48 ساعته په دننه کې دبکتریاو گڼون يا تعداد له 5000 و 100000 ته زيات کړ. (100000 همداسې x ، وخت په ساعت)



غوښتنې: تابع، توانقوانين، لوگاريتم قوانين، اکسپوننشلمساوات، منځ ارزبنت، ټاکلي
 انټيگرال.
 دريم:



پوښتنې: اکسپوننشلمساوات، افراطي ارزبنتونه، د بدلون له لاري انټيگرال.

خوابونه

مشتق او انتيگرا ل شميرنه |||

گډوله پوښتنې

نتيجې او مفصل خوابونه

نتيجې:

لومړۍ:

الف-

د کرکی سو: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2,309 \text{ m}$

د کرکی جگوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ mit $\frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$ und $f(x) = -x^2 + 4$

$$h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2,6 \text{ m}$$

د کرکی سطحه: $A = h \cdot b = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158 \text{ m}^2$

ب- پاتي سطحه: د پارابول منځ کي سطحه ترې کم د کرکی سطحه.

$$\frac{32}{3} - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 4,508 \text{ m}^2$$

دويم:

الف- د ودې تابع دی:

$$N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \ln(20)t}$$

ب- د باکتریا تعداد هر ټول 11,106 ساعتونه دوه برابره کيږي

پ- په منځنۍ توگه په لومړيو 80 ساعتونو کي 146570 باکتریاوي شتون لري

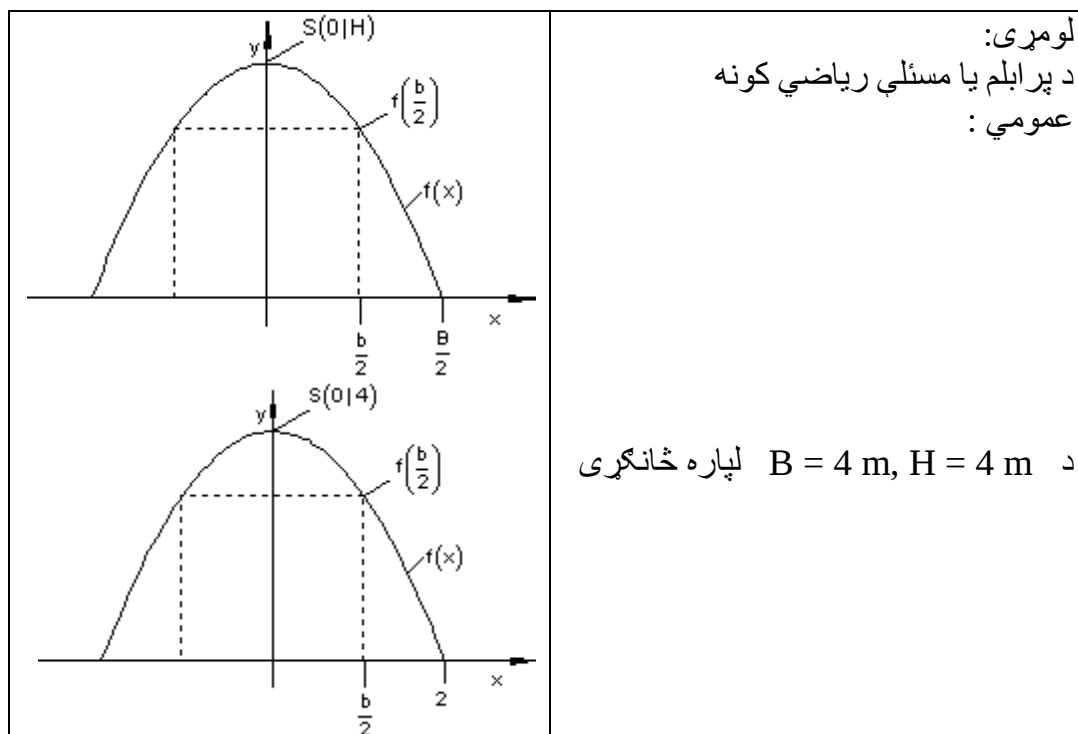
ت-تابع $m(x) = m$ دودې تابع $N(x)$ منځ ارزښت جوړوي. د سطحې برخه (سطحه I)

، چې د $m(x) = m$ لاندې يا کښته لور ته پرته ده بايد ټيک همدمره لويه وي لکه د

.....
 سطحې برخه (سطحه II)، چې د $m(x) = m$ پورته لور ته پرته ده. دا د منځ ارزښت څخه لاس ته راځي. دا چې اوس $N(x)$ د سطحې I په ورشو يا ساحه کې کښته لورته پروت دی، هلته د انټيگرال ارزښت کميز يا منفي دی. دا چې $N(x)$ د سطحې II په ورشو يا ساحه کې پورته لور پروت دی، هلته د انټيگرال ارزښت زياتيز يا مثبت دی. نو د دې پسي يا تعقيب بايد په ټوله سطحه د انټيگرال منځ ارزښت صفر وي.
 دريم:

$P_y(0 -3)$ $P_x(\ln(4) 0) \text{ bzw. } P_x(1,39 0)$ $P_{\text{Min}}(\ln(2) -4) \text{ bzw. } P_{\text{Min}}(0,69 -4)$ $P_w(0 -3)$ $A = \left -\frac{9}{2} \right = \frac{9}{2} \text{ FE} = 4,5 \text{ FE}$	د y محور سره غوڅتکی: د x محور سره غوڅتکی: تنټیکي: اوړن-يا د انعطاف ټکی: په نځینه شوې سطحه: bzw = همداسي
---	--

مفصل حلونه



الف -

ردو: $f(x) = a_2x^2 + 4$ د $S(0|4)$ له امله ککړې ټکۍ

$$P(2|0) \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + 4 = 0 \quad | -4$$

$$\Leftrightarrow 4a_2 = -4 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow a_2 = -1$$

د پارابول مساوات: $f(x) = -x^2 + 4$

د مستطیل یا ولاړگودیز سطحه $A = b \cdot h$ د سره

$$h = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4$$

$$\Rightarrow A(b) = b \cdot \left(-\frac{b^2}{4} + 4\right) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b$$

د $A(b)$ خورا جگ ارزښت غواړو پیدا کړو (افراطي ارزښت)

$$A(b) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b \Rightarrow A'(b) = -\frac{3}{4}b^2 + 4 \Rightarrow A''(b) = -\frac{3}{2}b$$

د افراطي ارزښت لپاره اړین شرطونه:

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 + 4 = 0 \quad | : -4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 = -4 \quad | : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |b| = \frac{16}{3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ bzw. } b_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$$

b1 ارزښتو يا رانيسو، ځکه چې کميزه يا منفي سطحه نه لرو يا نه شته.

په افراطيت ازمايښت:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2,309 \text{ m} \quad \text{د کرکی سور:}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \quad \text{د کرکی جگوالی:} \quad h = f\left(\frac{b}{2}\right)$$

او $f(x) = -x^2 + 4$ سره کيږي

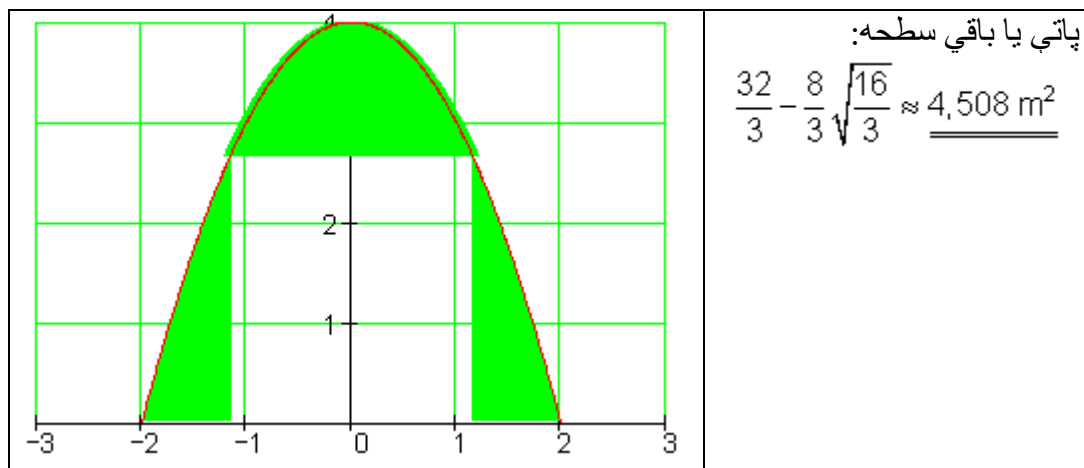
$$h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2,6 \text{ m}$$

$$A = h \cdot b = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158 \text{ m}^2 \quad \text{د کرکی سطحه:}$$

ب – پاتي سطحه: د پارابول لاندې يا گڼته سطحه ترې کم يا منفي د کرکی سطحه.

د پارابول لاندې سطحه:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - \left[-\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-3) \right] \\ &= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$



دويم -

الف - د ودې تابع لپاره ايښوونه: $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ د $N_0 = 5000$ سره.

د ۴۸ ساعته وروسته باور لري: $N_{48} = N_0 \cdot e^{48k}$ د $N_{48} = 100000$ سره.

د ودې فامتور يا ضييب يا څلوونی دې وټاکل شي.

$$N_{48} = N_0 \cdot e^{48k} \quad | : N_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0} = e^{48k} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = \ln(e^{48k}) = 48k \quad | : 48$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = k \quad t$$

$$k = \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{100000}{5000}\right) = \frac{1}{48} \cdot \ln(20)$$

د عددونو سره کيږي.

$$: k = \frac{1}{48} \cdot \ln(20) \approx 0,0624$$

د ودي صريب:

$$: N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \ln(20)t}$$

له دي سره د ودي تابع ده:

ب - د باکتریانو تعداد يا گڼون ډبل يا دوه برابره کيږي

$$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48} \ln(20)t} \quad | : N_0 \quad \text{ايښوونه:}$$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48} \ln(20)t} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln \left(e^{\frac{1}{48} \ln(20)t} \right) = \frac{1}{48} \ln(20) \cdot t \quad | : \frac{1}{48} \ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48} \ln(20)} = t \Leftrightarrow t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11,106$$

هر 11,106 ساعته د باکتریاو تعداد دوه برابره کيږي.

پ - د ۸۰ ساعته وروسته منځ ارزښت

$$m = \frac{1}{80} \int_0^{80} N(t) dt = \frac{1}{80} \int_0^{80} N_0 \cdot e^{k \cdot t} dt = \frac{N_0}{80} \int_0^{80} e^{k \cdot t} dt$$

$$: u(t) = k \cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = k \Rightarrow dt = \frac{1}{k} du \quad \text{بدلون:}$$

لاندې پوله : $u(0) = k \cdot 0 = 0$ پورته پوله: $u(80) = 80k$

$$m = \frac{N_0}{80} \left(\frac{1}{k} \int_0^{80k} e^u du \right) = \frac{N_0}{80k} [e^u]_0^{80k} = \frac{N_0}{80k} (e^{80k} - 1)$$

د $N_0 = 5000$ او $k = \frac{1}{48} \ln(20)$ سره کيږي

$$\begin{aligned} m &= \frac{5000}{\frac{80}{48} \ln(20)} \left(e^{\frac{80}{48} \ln(20)} - 1 \right) = \frac{5000}{\frac{5}{3} \ln(20)} \left(e^{\frac{5}{3} \ln(20)} - 1 \right) \\ &= \frac{15000}{5 \cdot \ln(20)} \left(20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) = \frac{3000}{\ln(20)} \left(20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) \approx 146569,767 \end{aligned}$$

په منځنۍ توگه په لومړنيو 80 ساعتو کې، 146570 اکټياو ې شتون لري.

ت — $m(x) = m$ — ثابت يا همغه دی (د پوښتنې پ برخه وگورۍ)

موږ انتيگرا ل جوړوو، کوم چې د دواړو پولو ترمنځ سطحه انځوروي.

$$\int_0^{80} (N(x) - m) dx = \int_0^{80} (N_0 \cdot e^{k \cdot x} - m) dx = N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x} dx - m \int_0^{80} dx$$

انتیگرال: $\int_n^{80} e^{k \cdot x} dx$ د بدلون له لارې حل $u(x) = k \cdot x$

$$\frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$$

لاندي پوله : $u(0) = k \cdot 0 = 0$ پورته پوله: $u(80) = 80k$

$$\int_0^{80} e^{k \cdot x} dx = \frac{1}{k} \int_0^{80k} e^u du = \frac{1}{k} [e^u]_0^{80k} = \frac{1}{k} (e^{80k} - 1)$$

انتیگرال II :

$$\int_0^{80} dx = [x]_0^{80} = 80$$

$$N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x} dx - m \int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k} (e^{80k} - 1) - 80m$$

ارزبنتونه کیردی یا وضعه کری

$$N_0 = 5000; k = \frac{1}{48} \ln(20); m = \frac{3000}{\ln(20)} \left(20^{\frac{5}{3}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{k} (e^{80k} - 1) - 80m &= \frac{5000}{\frac{1}{48} \ln(20)} \left(e^{80 \cdot \frac{1}{48} \ln(20)} - 1 \right) - \frac{80 \cdot 3000}{\ln(20)} \left(20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) \\ &= \frac{240000}{\ln(20)} \left(20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) - \frac{240000}{\ln(20)} \left(20^{\frac{5}{3}} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

تابع $m(x) = m$ د ودې تابع $N(x)$ منځ ارزښت جوړوي. د سطحې (برخه I) د $m(x)$ کښته لور ته باید ټیک همدومره لویه وي، لکه د سطحې برخه (برخه II) ، چې د $m(x)$ پورته لور ته پرته ده. دا له منځ ارزښت څخه راځي یا لرو. دا چې د $N(x)$ د سطحې I په ورشو کې د $m(x)$ کښته لور ته پروت دی ، هلته د انتیگرال ارزښت کمیز یا منفي دی. دا چې $N(x)$ د سطحې II په ورشو کې د $m(x)$ پورته لور ته پروت دی ، نو هلته د انتیگرال ارزښت زیاتیز یا مثبت دی. د دې په تعقیب یا په دې پسې د انتیگرال په ټوله سطحه کې چې منځ ارزښت یې جوړ شو، نو منځ ارزښت باید په صفر برابر وي. پورته شمیرنه په گوته کوي، چې دا حالت دی.

دریم -

لومړۍ: محور غوڅتکي:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^x$$

د y محور سره غوڅتکي

$$y_s = f(0) = e^0 - 4 \cdot e^0 = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{P_y(0 | -3)}$$

د x محور سره غوڅتکي

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^x = 0 \quad (\text{اکسپوننشل مساوات})$$

د حل اېښوونه د لوگاریتم له لارې:

$$e^{2x} - 4 \cdot e^x = 0 \quad | +4 \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^x \quad | \ln(\quad)$$

$\ln(\quad)$ په دې معنا چې د دواړو اړخونو لوگاریتم ونیسی

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(4 \cdot e^x)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(4) + x \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \quad | -x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1,39 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{P_x(1,39 | 0)}} \quad \underline{\underline{P_x(\ln(4) | 0)}} \quad | \quad \text{صفر ځایونه: همداسي}$$

دویم:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^x; f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x; f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} = 4 \cdot e^x \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 2 \cdot e^x \mid \ln(\quad)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(2 \cdot e^x)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(2) + x \cdot \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \Rightarrow x_e = \ln(2)$$

$$f''(x_e) = f''(\ln(2)) = 4 \cdot e^{2\ln(2)} - 4 \cdot e^{\ln(2)} = 4 \cdot (e^{\ln(2)})^2 - 4 \cdot e^{\ln(2)}$$

$$\text{له } e^{\ln(2)} = 2 \text{ سره کیري}$$

$$f''(\ln(2)) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_e = \ln(2)$$

$$y_e = f(\ln(2)) = e^{2\ln(2)} - 4 \cdot e^{\ln(2)} = (e^{\ln(2)})^2 - 4 \cdot e^{\ln(2)} = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{\text{Min}}(\ln(2) \mid -4) \text{ bzw } P_{\text{Min}}(0,69 \mid -4)}}$$

دریم: اورنتیکی یا د انعطاف ټکی $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^x; f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x; f''(x) = 4 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x;$$

$$; f'''(x) = 8 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot e^{2x} = 4 \cdot e^x \mid : 4$$

.....
 $\Leftrightarrow e^{2x} = e^x \Rightarrow x_w = 0$ ڇڪه ڇي $2x=x$ فقط د $x=0$ لپاره ڪيڊونڪي دي.

$$f'''(x_w) = f'''(0) = 8 \cdot e^0 - 4 \cdot e^0 = 8 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow x_w = 0$$

صفرخاي دي

$$f(x_w) = f(0) = e^0 - 4 \cdot e^0 = 1 - 4 \cdot 1 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(0|-3)}}$$

څلورم:

$$\int_0^{\ln(4)} f(x) dx = \int_0^{\ln(4)} (e^{2x} - 4 \cdot e^x) dx = \int_0^{\ln(4)} e^{2x} dx - 4 \int_0^{\ln(4)} e^x dx$$

برخه انتيگرا ل د بدلون له لاري حلونه. الماني= او له دي سره

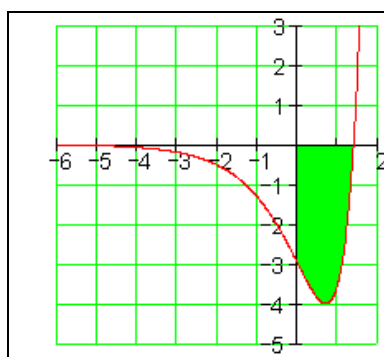
$$\int e^{2x} dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u \Rightarrow \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \text{ und mit } \int e^x dx = e^x$$

$$\int_0^{\ln(4)} f(x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 4e^x \right]_0^{\ln(4)} = \left[\frac{1}{2} e^{2\ln(4)} - 4e^{\ln(4)} \right] - \left[\frac{1}{2} e^0 - 4e^0 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot 16 - 4 \cdot 4 \right] - \left[\frac{1}{2} \cdot 1 - 4 \cdot 1 \right] = -\frac{9}{2}$$

$$A = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2} \text{ FE} = \underline{\underline{4,5 \text{ FE}}}$$



په پورته ڪي FE (د سطحي يون يا واحد)

پوښتنې

مشتق- او انټيگرالشميرنې ته د استعمال پوښتنې ||

Infusion او گډې وډپوښتنې

لومړۍ:

د عمليات وروسته ناروغ ته اينفوزيون Infusion (اينفوزيون Infusion لاتين کلمه ده، چې له *infundere* اخست شوی او دلته د ،،څاڅکي څاڅکي،، په مانا ده، چې بدن ته ننوځي) اخلي يا اينفوزيون ورکوي. څيره دوزي *Dosierung* ښايي چې ناروغ ته يوه 24 ساعته وخت په انټروال کې ورکول کيږي. دوزي په دې معنا دی: په وخت کې mg/h . پيل کيږي 1 mg/h دوزي سره.

الف- د دوزي ورکونو تلنه وښايی.

ب- د دوزي تلنه د يوه لاندې اکسپوننشل تابع سره موډل کيږي.

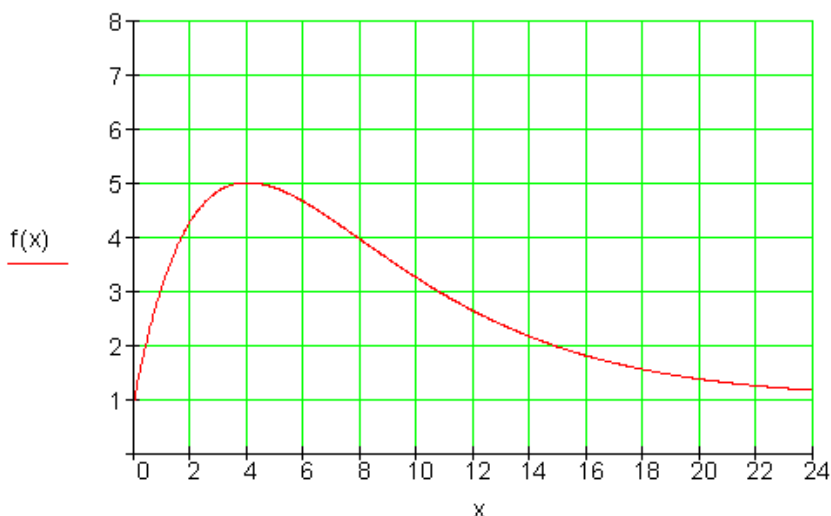
$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

د او لپاره مناسب ارزښتونه وسميری، که له ساعته وروسته يو خورا لږه دوزي ورکونه د دا نوره بس شي.

تابع مساوات څنگه دي؟

پ- په کوم وخت کې د دوزي کميدنه به زور سره صورت نيسي؟

ت- د ورکړ شوي دوا ډېرۍ يا سټ وشميری، که اينفوزيون 24 صورت ونیي.



غوښتنه: e - تابع ، مشتق ، افراطي ارزښتونه، اورنټکي يا د انعطاف ټکي، ټاکلی انتیګرال.

دویم: لاندې تابع ورمر شوی دی:

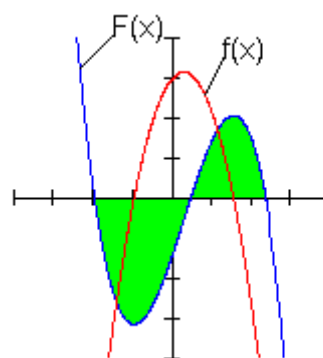
$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

الف-د بنسټ تابع $F(x)$ ګراف د ټکي (0 | -2 له لاري ځغلي.

د $F(x)$ تابع مساوات وټاکي.

ب- دا په څنګ کي د ګراف په نڅېبه شوي سطحه وشمیري.

د شمیرني ټیکوالی: د لسميز يا عشاريه څخه درځايه وروسته.



غوښتنه: ټول راشنل يا هوښيار. بنسټ تابع، c وټاکي، صفرځايونه، ټاکلی انتیګرال.

حلونه (اوبیوني)

مشتق- او انټیگرال شمېرنې ته د استعمال پوښتنې ||

نتیجې او مفصل حلونه

اول – نتیجې:

الف – د تلنو تشریح:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کيږي. بیا یو غریزه جگيږي، چې ۴ ساعته وروسته د 5 mg/h یو خورا حگ ارزښت ته ورسيږي. له دې وروسته ټیټيږي، لورمې په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غریزه کميږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

پ – د دوزې ورکونې کموالی د $x = 8$ ساعته وروسته په زور یا قوي دی. دا ۱ وړنځای یا انعطافځای دی.

ت -

$$M = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx = 24 - 112e^{-6} + 16e \approx 66,738$$

په 24 ساعته کې د ورکړ شوو دارو ډېرې یا سټ نږدې 67 mg دی.

دویم – نتیجه.

الف- د بنسټتابع $F(x)$ تابع مساوات داسې دي:

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

ب - د په نخښه شوي سطحي منځپانگه يا مساحت نږدې دی:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477 \text{ FE}$$

FE د سطحي واحد يا يوون

اول- مفصل حل : دلته ټ نه شته؟؟؟

الف - د تلني تشریح يا روښانونه:

دوزي ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کيږي. بیا یو غبریزه جگيږي، چې ۴ ساعته وروسته د 5 mg/h یو خورا حک ارزښت ته ورسيږي. له دې وروسته ټيټيږي، لورمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غبریز کميږي.

ب - د دوزي ورکوني تابع مساوات دي:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477 \text{ FE}$$

FE د سطحي واحد يا يوون

پ -

$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

ایښوونه:

$$n_0 = 1 \text{ mg/h} \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

پیل دوز بورکونه:

د $x=4$ ساعته وروسته خورا لویه یا ماکسیمال دوزي ورکونه په دې معنا:

$$f'(x) = 0 \text{ په } x=4 \text{ کې پروت یا افقي تانجنت لري، یعنې}$$

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ او } u = a \cdot x \text{ او } v = e^{k \cdot x} \text{ همداسې } u' = a \text{ او } v' = k \cdot e^{k \cdot x} \text{ سره:}$$

$$f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x} (1 + k \cdot x)$$

$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow a \cdot e^{4k} (1 + 4 \cdot k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

له $x=4$ ساعته وروسته: $f(4)=5$

$$f(4) = 5 \Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$$

$$\underline{\underline{f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

د دوزي ورکونې تابع مساوات:

ث – د دوزي ورکونې تغیر ارزښت (د وخت په واکوالي کې) د لومړي مشتق سره ټاکل کیږي. د دې ماکسیموم په اوږونکي یا انعطافکي کې پروت دی.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

لومړی مشتق

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$|v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{همداسې } u' = e \text{ او}$$

$$f'(x) = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \left(1 - \frac{1}{4}x\right)$$

دويم مشتق

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

$$v' = -\frac{1}{4} \quad \text{او} \quad u' = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

همداسي

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8$$

د اوبستون ځای (د انعطاف ځای) لپاره شرایط

دریم مشتق

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

$$v' = -\frac{1}{4} \quad \text{او} \quad u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

همداسي

$$f'''(x) = u'v + uv' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16}e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4} \cdot 8) = \frac{1}{16}e^{-1} \neq 0$$

له دې لاس ته راځي، چې $x_w = 8 \Rightarrow f(x)$ د اوبستونځای (د انعطاف ځای)د گولی ورکولو Dosierung وخت له $x = 8$ ساعته وروسته خورا قوي دی.

ت - د ورکړشو گوليو يا دارو ډبريو يا ستونو سطحه د گراف او x محور ترترمنځ ده، ځکه چې $mg/h.h=mg$.

د دې سره د يوې پيچکارۍ وخت ۲۴ ساعتونه بنسټ دی.

Menge = ډبري

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow \text{Menge} = M = \int_0^{24} f(x) dx = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx$$

د په I کي او په II کي يعني $I = \int_0^{24} 1 dx$ او $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$ د انتيگرال د وېشنې په حيث

داسي چي باور لري: $K = I + e \cdot II$

$$I = \int_0^{24} 1 dx = [x]_0^{24} = 24$$

د توتو انتيگرال له لاري حل د $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$ سره.

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

ترمنځ شميرنه

د بدلون له لاري حل: $\int e^{-\frac{1}{4}x} dx$

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4 du$$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x} dx = -4 \int e^u du = -4e^u = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx &= x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4 \int e^{-\frac{1}{4}x} dx \\ &= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x} (x+4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x} (x+4) \right]_0^{24} = -4e^{-6} (24+4) - [-4 \cdot 4] =$$

$$= -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot II = 24 + e(-112e^{-6} + 16) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66,738$$

په 24 ساعته کې به نژدې د 67 mg د دواډېری یا سټ ورکړ شي.

دويم - مفصل حل

الف -

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

$$I(x) = \int f(x) dx = \int (-2x^2 + x + 3) dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$P(-2 | 0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$$

$$F(x) = I(x) + C \Rightarrow F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

ب - د انتیگریشن پولی لپاره د $F(x)$ صفرځایونه وټاکئ.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

معلوم دی.

$$x_1 = -2 \quad \begin{array}{cccc} -2/3 & 1/2 & 3 & -4/3 \\ \downarrow & 4/3 & -22/6 & 4/3 \\ -2/3 & 11/6 & -2/3 & 0 \end{array}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \mid : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4}; q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2,319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0,431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2; x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}}; x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4,995$$

په

$$\begin{aligned}
 A_2 &= -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_2}^{x_3} \\
 &= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2,522 \\
 A &\approx 4,955 + 2,522 \approx \underline{\underline{7,477}}
 \end{aligned}$$

پوښتني

مشتق او انټيگراډ شميرني ته پارامټريک پوښتني

پوښتني د e تابع سره

لومړۍ: تابع $f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$ ورکړشوی د $k > 0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره

الف-محور غوڅتکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ب- افراطي ټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

پ- اوږنتکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ت- تعريف ورشو د پولو يا حدونو لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ

ټ- د محور غوڅتکو او x -محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ.

ث- د $x \in \{-3; -2,5; \dots; 1; 1,5\}$ لپاره ارزښتجدول جوړ کړئ او د $k \in \{2; 3; 4; 5\}$ لپاره گراف په پروتولاړ- يا کواوردينات سيستم کې وکارئ.

ج- د $f_k(x)$ د ټيټ ټکو ځايکړه (ځای منځني) $f_{ok}(x)$ وشميرئ او دا په پروت ولاړسيستم کې وکارئ.

د $k = 5$ لپاره سطحه A_k وشميرئ.

دويم: د $k > 0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ورکړ شوی.

الف- په محور غوڅتکو f_k وڅيرئ او دا وشميرئ.

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ يا وشميرئ.

پ- f_k په افراطي ټکو باندې وڅيرئ او دا وشميرئ.

ت- f_k په اوږونتکو يا انعطافتکو باندې وڅيرئ او دا وشميرئ.

ټ- د تعريفور شو د پولې لپاره تابع ارزښت وټاکئ.

ث- د افراطي ټکو لپاره ځايکېزه يا —منحني $f_{ok}(x)$ وټاکئ.

ج- د محورونو غوڅتکو او x —محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ

ح- لاندې ارزښت جدول وکاروئ او په يوه پروتولار-يا کواورديانات سيستم کې د f_1 $f_2(x)$; $f_3(x)$; $f_4(x)$ او ځايوکړې $f_{ok}(x)$ لپاره گراف وکارئ. د غوره ټکو (محوغوڅتکي، افراطي- او اوږونتکو) ارزښتونه د جېشميري سره وشميرئ.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	-0,16	-0,27	-0,43	-0,7	-1,12	-1,75	-2,62	-3,59	-3,94	-1,13	12,7
$f_2(x)$	-0,16	-0,26	-0,42	-0,67	-1,03	-1,5	-1,94	-1,74	1,08	12,5	49,8
$f_3(x)$	-0,16	-0,26	-0,41	-0,63	-0,94	-1,25	-1,26	0,11	6,1	26,2	86,9
$f_4(x)$	-0,16	-0,25	-0,4	-0,6	-0,85	-1	-0,58	1,95	11,1	39,8	124

خ- $k = 1$ لپاره سطحه A_k وشميرئ او دا په يوه پروتولار سيستم کې په نڅېنه کړئ.

حلونه

مشتق او انتيگراڻ ته پارامٽريڪ پوښتنې |

نتيجي او مفصل حلونه

اول - نتيجي

الف -

$$P_{k_y}(0 | 1-k) \quad P_{k_x}(\ln(k) | 0)$$

ب -

$$P_{k_{\min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) | -\frac{1}{4}k^2\right)$$

ٽيٽيڪي:

$$P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right) | -\frac{3}{16}k^2\right)$$

پ - اوڀرونتيڪي:

ت -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty$$

ٻ - مفصل حل وگوري

$$A_k = \left| -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2} \right|$$

ث - سطحه:

ج - ڊٽولونيٽيڪو لپاره د دڄايمنحني د تابع مساوات: $f_{ok}(x) = -\theta^{2x}$

چ - د $k = 5$ لپاره سطحه 8 FE (۸ يوونه يا واحد) ده.

دويم - نتيجي

الف -

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y -محور سره يو غوڅټکی شتون لري $P_{k_y} \left(0 \mid \frac{k}{4} - 2 \right)$

د ټولو $k > 0$ لپاره د x -محور سره يو غوڅټکی شتون لري $P_{k_x} \left(2 \cdot \ln \left(\frac{8}{k} \right) \mid 0 \right)$

ب -

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د ټول $k > 0$ لپاره يو نسبي خورا ټيټټکی شتون لري

$$P_{k_{\min}} \left(2 \cdot \ln \left(\frac{4}{k} \right) \mid -\frac{4}{k} \right)$$

ت - د ټول $k > 0$ لپاره يو اوږونټکی يا د انعطافټکی شتون لري

$$P_{k_w} \left(2 \cdot \ln \left(\frac{2}{k} \right) \mid -\frac{3}{k} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty \quad \text{ټ -}$$

ټ -

د ټيټټکي ځايکړه يا منځني ده. $f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}$ د $f_k(x)$

$$A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right| \quad \text{ج - سطحه :}$$

چ - مفصل حل وگوری.

$$A_1 = 12,25 \text{ FE} \quad \text{ح - سطحه}$$

اول - مفصل حلونه:

الف - د y - محور سره غوڅتکي

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$

$$y_s = f_k(0) = e^{2 \cdot 0} - k \cdot e^0 = 1 - k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 | 1 - k)}}$$

د x - محور سره غوڅتکي (صفرخايونه)

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - k \cdot e^x = 0 \mid e^x \text{ له نوکانو باسل}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0 \mid \quad \text{د صفر ضرب جمله وکاروئ}$$

$$e^x - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\) \Leftrightarrow x = \ln(k)$$

$$\underline{\underline{P_{k_x}(\ln(k) | 0)}}$$

ب - د انحراف ټکي:

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 2 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0 \mid :$$

د صفر ضرب جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

يو ممکنه افراطي خای دی

د دویم مشتق له لارې یې شمیرنه: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 4 \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = 4 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$د \quad e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{k}{2} \quad \text{سره کيږي:}$$

$$f_k''(x) = 4 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = 4 \cdot \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = k^2 - \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} > 0$$

په $x = x_E = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ کې یو نسبي خورا ټیټکی (مینیموم) شتون لري.

افراطي ارزښت:

$$y_{kE} = f_k(x_E) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}k^2 - \frac{2}{4}k^2 = -\frac{1}{4}k^2$$

له دې لاس ته راځي خورا ټیټکی (مینیموم): $\underline{\underline{P_{kMn}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid -\frac{1}{4}k^2\right)}}$

پ – د انعطاف ټکي یا اوږونټکي

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'''(x) = 8 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (8 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

د اوږونتيکي يا د انعطاف ټکي لپاره اړين او پوره کيدونکي شرطونه:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0$$

د صفر ضرب جمله وکاروئ

$$4 \cdot e^x - k = 0 + k \Leftrightarrow 4 \cdot e^x = k \mid : 4 \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{4} \mid \ln(\quad)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$$

يو ممکنه اوږونتيکي دی

د دريم مشتق له لارې يې ازمايښت: $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = f_k'''(\ln(\frac{k}{4})) = 8 \cdot e^{2 \ln(\frac{k}{4})} - k \cdot e^{\ln(\frac{k}{4})} = 8 \cdot \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} =$$

$$= \frac{8}{16} k^2 - \frac{1}{4} k^2 = \frac{1}{4} k^2 \neq 0$$

په $x = x_w = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ کې يو اوږونتيکي يا انعطاف ټکی پورت دی.

$$y_{kw} = f_k(x_w) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = e^{2 \ln(\frac{k}{4})} - k \cdot e^{\ln(\frac{k}{4})}$$

$$= \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4} = \frac{1}{16} k^2 - \frac{4}{16} k^2 = -\frac{3}{16} k^2$$

له دې لاس ته راځي، چې اوږونتيکي دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w} \left(\ln \left(\frac{k}{4} \right) - \frac{3}{16} k^2 \right)}}$$

ت - د تعريفور شو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f_k(x)$$

ټا کل کيږي:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - k \cdot e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 - k \cdot 0 = 0$$

د $x \rightarrow -\infty$ لپاره د x محور د $f_k(x)$ اسيمپټوت دی.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} - k \cdot e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(e^x - k) \cdot e^x] = \infty$$

د $x \rightarrow \infty$ لپاره د $f_k(x)$ تابع ارزښتونه اه ټولو پولو اوږي يا وده کوي.

ټ - د سطحه د د محور غوڅتکو ترمنځ:

صفر ځايونه :

$$x_1 = \ln(k) \Rightarrow$$

$$A_k = \left| \int_0^{\ln(k)} f_k(x) dx \right|$$

د سطحي انتيگرا ل دی:

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x) dx = \int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k \cdot e^x) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx}_I - k \cdot \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^x dx}_{II} = I - k \cdot II$$

$$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$ug: u(0) = 2 \cdot 0 = 0 \quad og: u(\ln(k)) = 2 \cdot \ln(k)$$

$$\int_0^{\ln(k)} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2 \cdot \ln(k)} e^u du = \left[\frac{1}{2} e^u \right]_0^{2 \cdot \ln(k)} = \frac{1}{2} e^{2 \cdot \ln(k)} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2}$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^x dx = \left[e^x \right]_0^{\ln(k)} = e^{\ln(k)} - e^0 = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x) dx = I - k \cdot II = \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} - k \cdot (k - 1) = \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} - k^2 + k = -\frac{1}{2} k^2 + k - \frac{1}{2}$$

$$A_k = \left| -\frac{1}{2} k^2 + k - \frac{1}{2} \right|$$

له دي سره سطحه كيږي:

ث – ارزښت جدول او د منحنيو گرافونه (د منحنيو پله) .

سربېره پردې دې محور غوڅتکي، ټيټتکي او د انعطاف ټکي و ارزښت جدول وروشمېرل شي.

$$P_{k_y}(0 | 1-k); P_{k_x}(\ln(k) | 0); P_{k_{\min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) | -\frac{1}{4}k^2\right); P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right) | -\frac{3}{16}k^2\right)$$

K=2

$$P_{2_y}(0 | -1); P_{2_x}(\ln(2) \approx 0,69 | 0); P_{2_{\min}}\left(\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 | -1\right); P_{2_w}\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0,69 | -0,75\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
f ₂ (x)	-0,1	-0,16	-0,25	-0,37	-0,6	-0,85	-1	-0,58	1,95	11,1	21,6

K=3

$$P_{3_y}(0|-2); P_{3_x}(\ln(3) \approx 1,1|0); P_{3_{\min}}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0,41|-2,25\right); P_{3_w}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,29|-1,69\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_3(x)$	-0,15	-0,24	-0,39	-0,62	-0,97	-1,45	-2	-2,23	-0,77	6,64	15,85

$k = 4$:

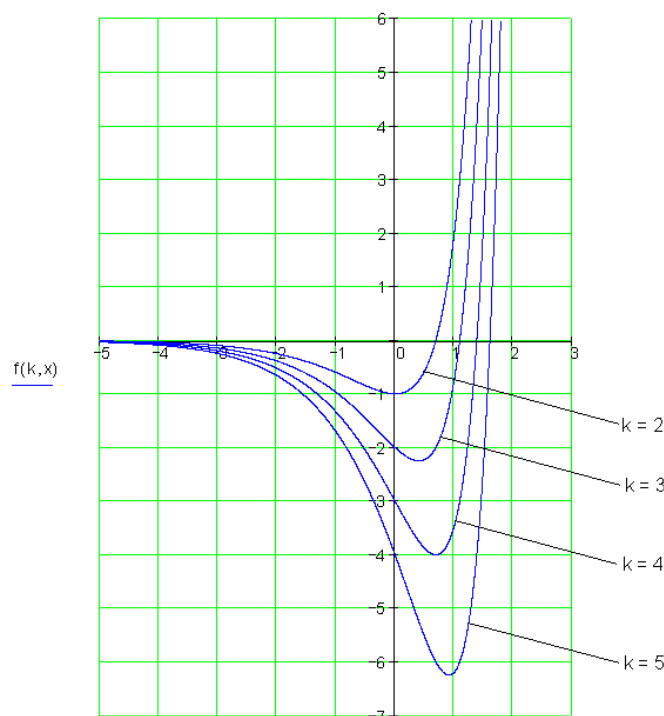
$$P_{4_y}(0|-3); P_{4_x}(\ln(4) \approx 1,39|0); P_{4_{\min}}\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right) = 0,69|-4\right); P_{4_w}\left(\ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0|-3\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_4(x)$	-0,2	-0,32	-0,52	-0,84	-1,34	-2,06	-3	-3,88	-3,48	2,16	10,1

$k = 5$:

$$P_{5_y}(0|-4); P_{5_x}(\ln(5) \approx 1,61|0); P_{5_{\min}}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,92|-6,25\right); P_{5_w}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,22|-4,69\right)$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_5(x)$	-0,25	-0,4	-0,66	-1,07	-1,7	-2,67	-4	-5,53	-6,2	-2,32	4,34



ج - د محليمنحنی لپاره ټيټکو شميرنه:

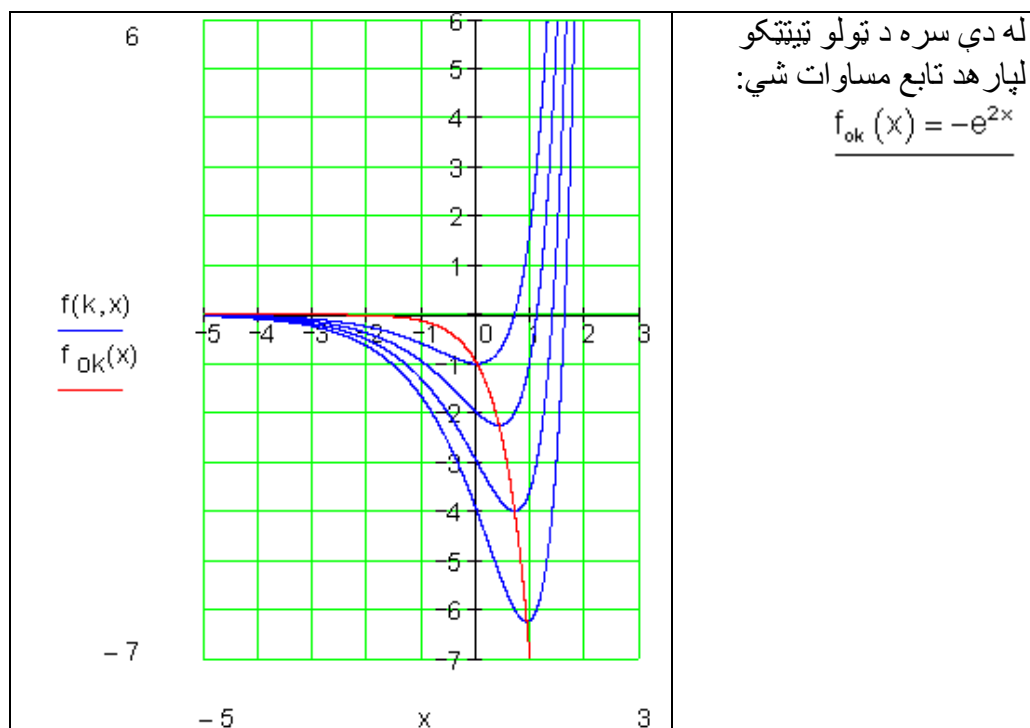
$$P_{k\text{Min}} \left(\underbrace{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}_x \mid \underbrace{-\frac{1}{4}k^2}_y \right) \Rightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{1}{4}k^2 \quad (2)$$

(۱) له k پسې حل کړئ:

$$x = \ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid e \Leftrightarrow e^x = e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2 \cdot e^x$$

نتیجه په (۲) کې کيږدئ:

$$y = -\frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4} \cdot (2 \cdot e^x)^2 = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot e^{2x} = -e^{2x}$$



چ - د $k = 5$ لپاره:

$$A_k = \left| -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2} \right| \quad \text{له } e \text{ څخه لاس ته راوړنه}$$

$$A_5 = \left| -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{25}{2} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{16}{2} \right| = |-8| = 8$$

د $k = 5$ لپاره سطحه 8 یونه یا واحد ده.

دویم - مفصل حلونه الف - د y - محور سره غوڅتکي:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = \frac{1}{4}k \cdot e^0 - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = \frac{k}{4} - 2 \Rightarrow P_{k_y} \left(0 \mid \frac{k}{4} - 2 \right)$$

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y - محور سره غوڅتکي شتون لري.

د x - محور سره غوڅتکي (صفرځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln ()$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{8}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)}}$$

د ټولو $k > 0$ لپاره x - محور سره غوڅتکي شتون لري (صفرخايونه).

پ - مشتقونه

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ث - انحراف ټکي

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د افراطي ټکو لپاره پوره کيدونکي شرطونه: $f_k'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k''(x) \neq 0$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid + e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln()$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{4}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$$

ممکنه افراطي خايونه

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= f_k''\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{2}{k} = \frac{4}{k} - \frac{2}{k} = \frac{2}{k} > 0. \end{aligned}$$

د ټولو $k > 0$ لپاره .

له دې لاس ته راځي، چې نسبي اکسترېموم (ټيټکي) په $x = x_{kMin} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$ کې

$$\begin{aligned} y_{kMin} &= f_k(x_{kMin}) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{8}{k} = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} = -\frac{4}{k} \\ &\Rightarrow \underline{P_{kMin}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) - \frac{4}{k}\right)} \end{aligned}$$

د ټولو $k > 0$ لپاره يو نسبي اکسترېموم (ټيټکي) شتون لري.

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{ت -}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی: $f_k''(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \quad | + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad | \ln (\quad)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2}x \quad | - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) \quad | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

ممکنه اوړونټکی یا انعطافټکی

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \quad | + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad | \ln (\quad)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) \cdot 2 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \text{ mög}$$

ممکنه اوړونټکي يا د انعطاف ټکي

د لاندې پېښتو: ... لپاره.

$$\begin{aligned} f_k'''(x) &= f_k''' \left(2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - \frac{1}{4} \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k \cdot \frac{4}{k^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \neq 0 \end{aligned}$$

د $k > 0$ لپاره.

$$\Rightarrow x = x_{kw} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

يو اوړونټکی يا د انعطاف ټکی دی.

$$\begin{aligned} y_{kw} &= f_k(x_{kw}) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k \cdot \frac{4}{k^2} - 2 \cdot \frac{2}{k} = \frac{1}{k} - \frac{4}{k} = \frac{1}{k}(1 - 4) = -\frac{3}{k} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{P_{kw} \left(2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid -\frac{3}{k} \right)}} \end{aligned}$$

د $k > 0$ لپاره يو اوړونکی شتون لري

ټ – د تعريف ورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ \rightarrow 0}} e^x - 2 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ \rightarrow 0}} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

د $x \rightarrow -\infty$ لپاره ټول تابع ارزښتونه د 0 په لور خُلي. له دې سره د x -محور اسمپټوت پټ ګاونډ (مجانِب) دی.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \rightarrow \infty}} e^x - 2 \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \rightarrow \infty}} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot \infty - 2 \cdot \infty$$

حلور نه دی.

مګر دا چې e^x د $x \rightarrow \infty$ لپاره نسبت $e^{\frac{1}{2}x}$ ته ګړندی له ټولو پولو اوږي، کیدی د کمون یا تفریق د پام کې لرنې له امله له دې څخه مخ ته لاړ شو، چې

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \infty$$

باور لري

ث - د ټیټیکو ځایزه یا محلي منحنی

$$P_{k\min} \left(\underbrace{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)}_x \mid \underbrace{-\frac{4}{k}}_y \right) \Rightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{4}{k} \quad (2)$$

(1) د k په لور یا پسې حل کړئ او (2) کې ځای په ځای کړئ د ځای کړې (منحنی) تابع مساوات ورکوي.

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid : 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid e^{(\cdot)} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = \frac{4}{k}$$

په څټ ارزښت يې جوړ کړئ

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{k}{4} \cdot 4 \Leftrightarrow k = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

په (2) کې ځای په ځای کړئ

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{k} = -\frac{4}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}} = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} \\ &= -\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} = -e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \underline{\underline{f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}}} \end{aligned}$$

$f_{ok}(x)$ د $f_k(x)$ د ټيټکي ځای کړه (-منځني) ده

ج - د سطحې د مساحت شمېرنه

$$A_k = \left| \int_0^{x_k} f_k(x) dx \right| \quad f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\int f_k(x) dx = \frac{1}{4}k \cdot \int e^x dx - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$\text{د } \int e^x dx = e^x + C \text{ او } \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \text{ سره باور لري:}$$

$$\int f_k(x) dx = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\text{د پوله اېښوونې وروسته لرو: } u_g = 0; \quad o_g = x_k = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right)^2$$

کيږي:

$$\begin{aligned}
 \int_0^k f_k(x) dx &= \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right)} - \left(\frac{1}{4}k \cdot e^0 - 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \right) \\
 &= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{8}{k}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{4}k \cdot \frac{64}{k^2} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \\
 &= \frac{16}{k} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{k}(16 - 32) - \frac{1}{4}k + 4 = -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \Rightarrow A_k = \underline{\underline{\left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right|}}
 \end{aligned}$$

چ - رابر تلی یا په گته شوی تکی تکی

$k = 1$

$$P_{k_y} \left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{1_y} \left(0 \mid \frac{1}{4} \cdot 1 - 2 \right) \Rightarrow P_{1_y} (0 \mid -1,75)$$

$$P_{k_x} \left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{1_x} \left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{1}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{1_x} (4,16 \mid 0)$$

$$x_{k_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{1_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{1}\right) \approx 2,77 \Rightarrow f_1(x_{1_{\min}}) = -4 \Rightarrow P_{1_{\min}} (2,77 \mid -4)$$

$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{1_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{1}\right) \approx 1,39 \Rightarrow f_1(x_{1_w}) = -3 \Rightarrow P_{1_w} (1,39 \mid -3)$$

$k = 2$

$$P_{k_y} \left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{2_y} \left(0 \mid \frac{1}{4} \cdot 2 - 2 \right) \Rightarrow P_{2_y} (0 \mid -1,5)$$

$$P_{k_x} \left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{2_x} \left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{2}\right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{2_x} (2,77 \mid 0)$$

$$x_{k_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{2_{\min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) \approx 1,39 \Rightarrow f_2(x_{2_{\min}}) = -2 \Rightarrow P_{2_{\min}} (1,39 \mid -2)$$

$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{2_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2(x_{2_w}) = -1,5 \Rightarrow P_{2_w} (0 \mid -1,5)$$

$$k = 3$$

$$P_{k_y} \left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{3_y} \left(0 \mid \frac{1}{4} \cdot 3 - 2 \right) \Rightarrow P_{3_y} (0 \mid -1,25)$$

$$P_{k_x} \left(2 \cdot \ln \left(\frac{8}{k} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{3_x} \left(2 \cdot \ln \left(\frac{8}{3} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{3_x} (1,96 \mid 0)$$

$$x_{kMin} = 2 \cdot \ln \left(\frac{4}{k} \right) \Rightarrow x_{3Min} = 2 \cdot \ln \left(\frac{4}{3} \right) \approx 0,58 \Rightarrow f_3 (x_{3Min}) \approx$$

$$\approx -1,33 \Rightarrow P_{3Min} (0,58 \mid -1,33)$$

$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln \left(\frac{2}{k} \right) \Rightarrow x_{3_w} = 2 \cdot \ln \left(\frac{2}{3} \right) \approx -0,81 \Rightarrow f_3 (x_{3_w}) = -1 \Rightarrow P_{3_w} (-0,81 \mid -1)$$

$$k = 4$$

$$P_{k_y} \left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2 \right) \Rightarrow P_{4_y} \left(0 \mid \frac{1}{4} \cdot 4 - 2 \right) \Rightarrow P_{4_y} (0 \mid -1)$$

$$P_{k_x} \left(2 \cdot \ln \left(\frac{8}{k} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{4_x} \left(2 \cdot \ln \left(\frac{8}{4} \right) \mid 0 \right) \Rightarrow P_{4_x} (1,39 \mid 0)$$

$$x_{kMin} = 2 \cdot \ln \left(\frac{4}{k} \right) \Rightarrow x_{4Min} = 2 \cdot \ln \left(\frac{4}{4} \right) = 0 \Rightarrow f_4 (x_{4Min}) = -1 \Rightarrow P_{4Min} (0 \mid -1)$$

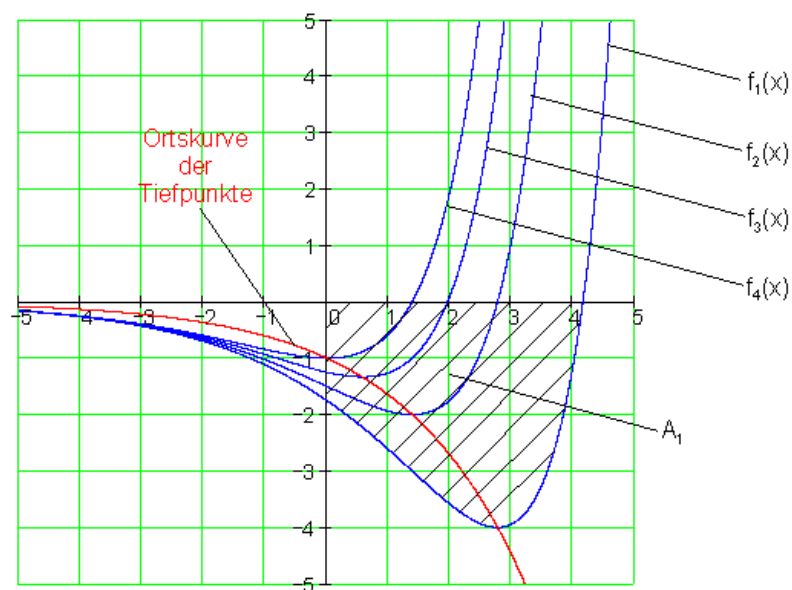
$$x_{k_w} = 2 \cdot \ln \left(\frac{2}{k} \right) \Rightarrow x_{4_w} = 2 \cdot \ln \left(\frac{2}{4} \right) \approx -1,39 \Rightarrow f_4 (x_{4_w}) = -0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{4_w} (-1,39 \mid -0,75)$$

د تابع گراف

$$f(k, x) := \frac{1}{4} \cdot k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \quad f_{ok}(x) := -e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

د ټيټکي لپاره ځای کړئ



ح - معلومه سطحه :

$$A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right| \text{ für } k=1 \text{ gilt:}$$

$$A_1 = \left| -\frac{16}{1} - \frac{1}{4} \cdot 1 + 4 \right| = \left| -16 + 4 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12,25 \right| = \underline{\underline{12,25 \text{ FE}}}$$

پوښتنې

مشتق - او انتیگرال شمیرنو ته پوښتنې

د e -تابع سره پوښتنې.

لومړۍ: د $k > 0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = (k-x) e^{\frac{1}{2}x}$ ورکړي

.....

الف- محور غوڅټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ب- افراپی ټکي، ه شتون ولري، وشميرئ.

پ- اورونټکي يا د انعطاف ټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ت- د تعريفور شو پوله ارزښت لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ.

ټ- د محور غوڅټکو او x - محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ.

ث- په يو پروتولار يا کواورد ښاتسيستم کې د $x \in \{-5; -4; \dots; 4; 5\}$ او

$k \in \{1; 2; 3; 4\}$ لپاره ارزښت جدول وکارئ.

ج- د لاندي ځايگرو يا -منحنیو مساواتابع وشميرئ:

د $f_k(x)$ د جگټکي ځايگړه يا -منحنی $f_{okh}(x)$ او

د $f_k(x)$ د جگټکي اورونټکي يا د انعطافټکي $f_{okw}(x)$ او دا په يوه پروتولارسيستم (قيمتوضعيه؟؟) کې وکارئ.

چ- د $k = 4$ لپاره سطحه A_4 وشميرئ او دا په پروتولارسيستم (يا قيمت وضعيه) کې وکارئ.

دويم: د $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره دې تابع $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ورکړ شوي وي.

الف- محور غوڅټکي، که شتون ولري، وشميرئ. د کوم k ارزښت لپاره صفرځای شتون لري؟

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه وشميرئ.

پ- $f_k(x)$ د افراطي ځايونو په هکله وڅيړئ او د افراطيت او د k په واکولي يا تابعيت باندې يې يوه وينا (دا چې وينا څه شی دی ، د سم اند يا منطق برخ کې يې کتلی شئ) وکړئ.

ت - $f_k(x)$ په اوږونځايونو بڼې د k په واکوالي کې وځيرئ.

ټ- د په واکوالي کې دې د A_k سطحه د صفرځايونو او د x -محور ترمنځ وشميرل شي.

$$\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (2x^2 - 8x + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C \quad \text{مرستموځف:}$$

ث- په يوه پروتولارسيستم يا د وضعيهقيمت سيستم کې د $k \in (-4; -2; 0; 2; 4)$ لپاره گراف وکارئ.

د لاندې ارزښت جدول څخه داتا وکارئ.

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2
$f_{-4}(x)$	0,7	1,25	1,99	2,71	2,94	4	21,75
$f_{-2}(x)$	0,69	1,21	1,89	2,44	2,21	2	16,31
$f_0(x)$	0,67	1,17	1,79	2,17	1,47	0	10,97
$f_2(x)$	0,66	1,14	1,69	1,89	0,74	-2	5,44
$f_4(x)$	0,65	1,1	1,59	1,62	0	-4	0

برسيره پردې، که غوښتوني ووو، صفرځايونه، افراطي ځايونه او اوږونتکي يا د انعطاف تکي.

ج- د سطحه وشميرئ او سطحه په پروته- ولارسيستم يا وضعيه قيمت سيستم کې په نڅښه کړئ.

حلونه

مشتق او انتيگرالشميرني ته پارامتریکي پوښتنې ||

نتيجي او مفصل حلونه

اول - نتيجي

$$P_{k_y}(0|k) \quad P_{k_x}(k|0) \quad \text{الف -}$$

ب -

$$P_{k_{\max}}\left(k-2 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}\right): \text{جگتکي}$$

ث -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = -\infty$$

ٻ -

$$A_k = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4 \right|: \text{سطحه}$$

$f_{okh}(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$	د ځايکړي يا ځايمنځني د جگتکو لپاره
$f_{okw}(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$	تابع مساوات:
	د ځايکړي يا ځايمنځني د د ټولو انعطافټکو
	لپاره تابع مساوات:

$$k = 4 \, 17,556 \, \text{FE}$$

دويم - نتيجي :

الف -

$$P_{k_y}(0|-k) \quad P_{k_{x1/2}}(\pm\sqrt{k}|0)$$

ب -

$$f_k'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د $k > -4$ لپاره د $x_1 = -2 + \sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټ ټکی پروت دی.

د $k > -4$ لپاره د $x_2 = -2 - \sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا جگ ټکی پروت دی.

ت - $x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطاف ټکی، که $k > -8$ وي.

$x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطاف ټکی، که $k > -8$ وي.

ټ -

ث - مفصل حل وگوری

ج - سطحه $A_4 = 11,772 \text{ FE}$

اول - مفصل حلونه

الف د y -محور سره غوڅټکی:

$$f_k(x) = (k - x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (k - 0) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = k \cdot 1 = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0|k)}}$$

د x -محور سره غوڅټکی (صفر ځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{k-x}{0} \right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

د پيټاگوراس (فيثاگرث) جمله وکاروئ

$$k-x=0 \mid +x \Leftrightarrow k=x \Leftrightarrow x=k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}(k \mid 0)}}$$

ب - د انحراف ټکي

$$f_k(x) = (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \quad r$$

د $u = k-x \Rightarrow u' = -1$ او $v = e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = -1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (k-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

د $u = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}$ او $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{د } u = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \text{ او } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ سره}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \text{ und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{د } u = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \text{ او } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \text{ سره}$$

$$f_k'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}k - \frac{3}{4}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

د پیتاگوراس جمله وکاروی

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 = 0 \Leftrightarrow x = k - 2$$

$$\Leftrightarrow x = k - 2 \text{ i}$$

یو ممکنه افراطي ځای دی.

د دویم مشتق (رایلیډني) سره یې ازمایښت: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''(k-2) = \left[-\frac{1}{4}(k-2) + \frac{1}{4}k - 1\right] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} < 0$$

په $x = x_E = k - 2$ کې یو نسبي خړا ټیټکی (خړا جگ ټکی) شتون لري

$$y_{kE} = f_k(x_E) = f_k(k-2) = [k - (k-2)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}$$

افراطي ارزښتونه:

$$P_{k_{\text{Max}}} \left(k-2 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \right)$$

له دې لاس ته رځي، چي ټټکي:

پ - د انعطاف ټکي

$$f_k''(x) = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'''(x) = \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}k - \frac{3}{4} \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د اوږونټکي يا انعطافټکي لپاره اړين- يا ضروري شرايط:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid$$

د پېناگوراس جمله وکاروي يا استعمال کړي

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 = 0 \Leftrightarrow x = k - 4$$

په $x = x_w = k - 4$ کي يو اوږونټکي يا د انعطافټکي شته.

$$y_{kw} = f_k(x_w) = f_k(k-4) = [k - (k-4)] \cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$$

له دې لاس ته را ځي، چي اوږونټکي دی:

$$P_{kw} \left(k-4 \mid 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2} \right)$$

ت - د تعريف ورشو پولي لپاره د تابع ارزښتونه.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_k(x)$$

ټاکو:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

د $x \rightarrow \infty$ لپاره د x -محور د $f_k(x)$ ګاونډ (مجاورت يا اسيمپټوت) دی.

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x) dx \right|$$

ټ - صفرخای: $x_1 = k$ له دې لاس ته راځي د سطحي انتیګرال

$$\int_0^k f_k(x) dx = \int_0^k (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx$$

د ټوټه - يا پارشل انتیګرال له لارې حل لومړی ټولیز يا عمومي

$$\int \underbrace{(k-x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'(x)} dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$u(x) = k-x \Rightarrow u'(x) = -1$$

$$v'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v(x) = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = \int (-1) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = -2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x} dx = -4 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\int f_k(x) dx = (k-x) \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \left(-4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) + C = 2k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x) dx = \left[2k \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^k$$

$$= 2k \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k \cdot e^{\frac{1}{2}k} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - \left(2k \cdot e^{\frac{1}{2}0} - 2 \cdot 0 \cdot e^{\frac{1}{2}0} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}0} \right) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4$$

$$A_k = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4 \right|$$

له دې سره سطحه کيږي يا ده:

ث – ارزښاجدول او د کږو يا منحنۍ کوډې (کزافونه).

محور غوڅتکي، ټيټتکي او اوږونتکي يا دا نعطاف تکی دې برسیره ارزښت جدول ته وروشمیرل شي.

$$P_{k_y}(0|k); \quad P_{k_x}(k|0); \quad P_{k_{\max}}\left(k-2 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}\right); \quad P_{k_w}\left(k-4 \mid 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k-2}\right)$$

$k=1$:

$$P_{1_y}(0|1); \quad P_{1_x}(1|0); \quad P_{1_{\min}}\left(-1 \mid 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21\right); \quad P_{1_w}\left(-3 \mid 4 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,89\right)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,49	0,68	0,89	1,1	1,21	1	0	-2,72	-8,96	-22,17	-48,73

$k=2$:

$$P_{2_y}(0|2); \quad P_{2_x}(2|0); \quad P_{2_{\min}}\left(0 \mid 2 \cdot e^0 = 2\right); \quad P_{2_w}\left(-2 \mid 4 \cdot e^{-1} \approx 1,47\right)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0,57	0,81	1,12	1,47	1,82	2	1,65	0	-4,48	-14,78	-36,55

$k=3$:

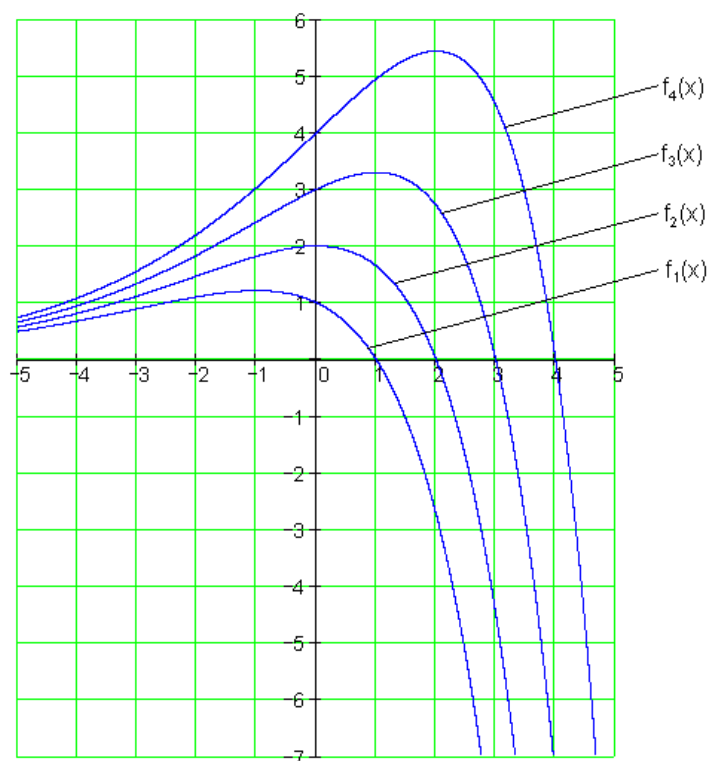
$$P_{3_y}(0|3); \quad P_{3_x}(3|0); \quad P_{3_{\min}}\left(1 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 3,3\right); \quad P_{3_w}\left(-1 \mid 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 2,43\right)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0,66	0,95	1,34	1,84	2,43	3	3,3	2,72	0	-7,39	-24,36

$K=4$:

$$P_{4_y}(0|4); \quad P_{4_x}(4|0); \quad P_{4_{Mn}}(2|2 \cdot e^1 \approx 5,44); \quad P_{4_w}(0|4 \cdot e^0 = 4)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	0,74	1,08	1,56	2,21	3,03	4	4,95	5,44	4,48	0	-12,18



ج - د خای یا محلي منحني شمیرنه :

$$P_{k_{Max}}\left(\underbrace{k-2}_x \mid \underbrace{2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}_y\right) \Rightarrow x = k - 2 \quad (1) \quad y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}k-1} \quad (2)$$

(۱) په k پسي حل کړئ: $x = k - 2 \Leftrightarrow k = x + 2$

نتخجه په (۲) کې کيږدئ:

$$y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot (x+2) - 1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x + 1 - 1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

له دې سره د ټولو جگټکو لپاره د ځای کږې يا ځای-منحنې تابع مساوات کيږي:

$$\underline{\underline{f_{okh}(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}}}$$

$$P_{kw} \left(\underbrace{k-4}_x \mid \underbrace{4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 2}}_y \right) \Rightarrow x = k - 4 \quad (1) \quad y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 2} \quad (2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ:

$$x = k - 4 \Leftrightarrow k = x + 4$$

نتيجه په (۲) کې کيږدئ

$$y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot (x+4) - 2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x + 2 - 2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

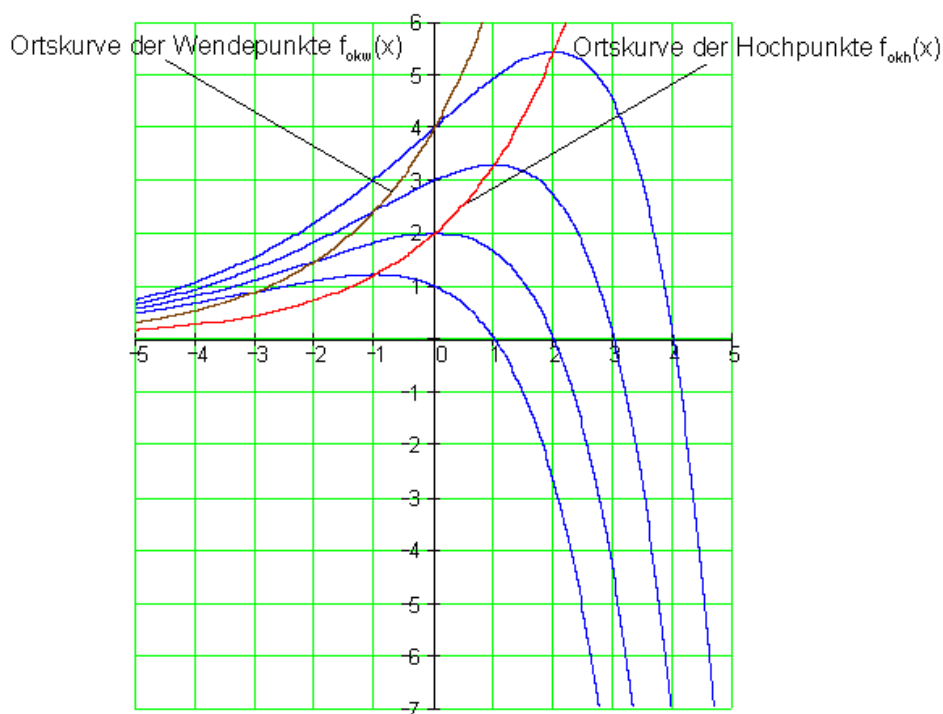
له دې سره د ټولو اوږنټیکو يا انعطافټیکو لپاره د تابع مساوات دي:

$$\underline{\underline{f_{okw}(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}}}$$

لاندې له کيڼ و ښي لور ته:

د جگټکي... ځایمنحني د اوږونټیکي يا انعطافټیکي منحنی

د الماني پښتو: له کين څخه بني لور ته: د اوروڼتکي يا انعطافتکي ځای کړه
د جگتکي ځای کړه.



ح - د $k = 4$ لپاره سطحه:

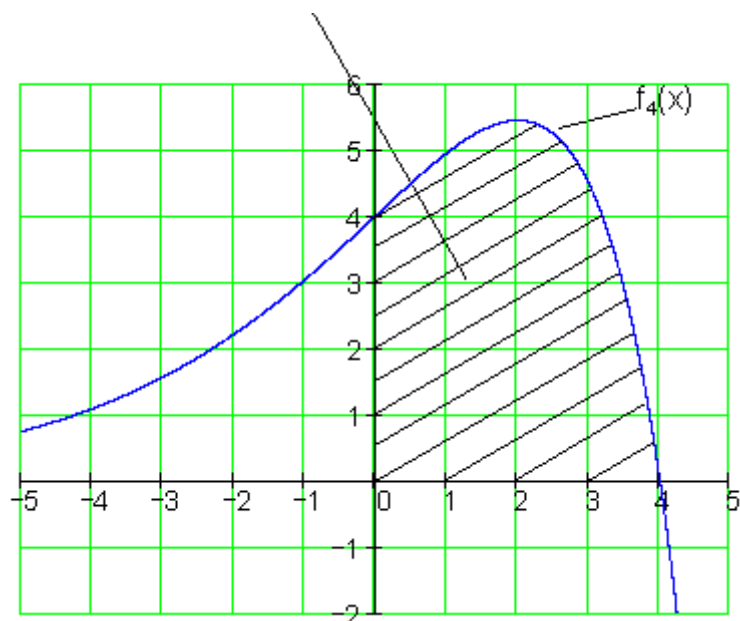
$$A_k = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4 \right|$$

نېجه له ب څخه

$$A_4 = \left| 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - 2 \cdot 4 - 4 \right| = \left| 4 \cdot e^2 - 8 - 4 \right| = \left| 4 \cdot e^2 - 12 \right| \approx 17,556$$

د $k = 4$ لپاره سطحه 17,556 FE (يونه يا وحدونه) ده.

د A_4 محور غوڅتکو او x -محور ترمنځ سطحه.



دویم - مفصل حل

الف -

د y -محور سره غوڅتکی:

$$f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (0^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -k \cdot 1 = -k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 | -k)}}$$

د x -محور سره غوڅتکی (صفرخایونه):

د پیتاگوراس جمله وکاروئ

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$x^2 - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow x^2 = k \mid \sqrt{} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow x_{k \mid 1/2} = \pm \sqrt{k} \text{ für } k \geq 0 \Rightarrow \underline{P_{k \mid 1/2}(\pm \sqrt{k} \mid 0)}$$

صفر خايونه فقط د $k \geq 0$ لپاره شتون لري.

ب - مشتقونه

$$f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv'$$

$$\text{د } u = x^2 - k \Rightarrow u' = 2x \text{ او سره } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x^2 - k) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{د } u = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \Rightarrow u' = x + 2 \text{ او سره } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

$$\text{د } u = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}x + 2 \text{ او سره } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د افراط ټکي:

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right)}_0 \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k = 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - k = 0$$

$$p = 4; \quad q = -k \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + k \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4+k}$$

د $k \geq 0$ لپاره شتون لري

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$	$\begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{4+k} \\ x_2 = -2 - \sqrt{4+k} \end{cases}$	د $k \geq 0$ لپاره
---------------------------------------	--	--------------------

د $k \geq -4$ لپاره x_1 او x_2 ځایونه دي د پراته-ولار تانجنت سره

د $k < 0$ لپاره پروت-ولار تانجنت نه شته

د افراطیت ډول: $f_k''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k''(x_{1/2}) = \left(\frac{1}{4}x_{1/2}^2 + 2 \cdot x_{1/2} - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x_{1/2}}}_{>0}$$

که $0 < (\dots)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې مینیموم یا خوراتیت ټکی لرو.

که $0 < (\dots)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې ماکسیموم یا خورا جگ ټکی لرو

منځسیرنه:

$$: x_1^2 = (-2 + \sqrt{4+k})^2 = 8 - 4 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = (-2 - \sqrt{4+k})^2 = 8 + 4 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\left(\frac{1}{4}x_1^2 + 2 \cdot x_1 - \frac{1}{4}k + 2 \right) = \left[\frac{1}{4} \cdot (8 - 4 \cdot \sqrt{4+k} + k) + 2 \cdot (-2 + \sqrt{4+k}) - \frac{1}{4}k + 2 \right] =$$

$$= \sqrt{4+k} > 0$$

د $x_1 = -2 + \sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي مینیموم پروت دی، که $k > -4$ وي.

$$\left(\frac{1}{4}x_2^2 + 2 \cdot x_2 - \frac{1}{4}k + 2 \right) = \left[\frac{1}{4} \cdot (8 + 4 \cdot \sqrt{4+k} + k) + 2 \cdot (-2 - \sqrt{4+k}) - \frac{1}{4}k + 2 \right] =$$

$$= -\sqrt{4+k} < 0$$

د $x_2 = -2 - \sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټکی پروت دی، که $k > 0$ وي.

د $k = -4$ لپاره $\sqrt{4+k} = 0$ دی، یعنې $f_k''(x_{1/2}) = 0$ په دې حالت کې د $x_{1/2}$ په ځای کې په حقیقت کې یو پروت-ولار تانجنت شتون لري مګر نه افراطي ارزښت.

ت – د انعطاف ټکی یا اوږونټکی

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2}_{=0} \right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 = 0 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow x^2 + 8x - k + 8 = 0$$

$$p = 8; \quad q = -k + 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = 16 - (-k + 8) = 16 + k - 8 = 8 + k$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -4 + \sqrt{8+k} \\ x_1 = -4 - \sqrt{8+k} \end{array} \right. \text{ für } k \geq -8$$

د $k \geq 0$ لپاره x_1 او x_2 ممکنه اوږونتکي يا د انعطاف ټکي دي.

د $k < 0$ لپاره اوږونتکي نه شته

د اوږونځايونو ازمايښت: $f_k'''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k'''(x_{1/2}) = \left(\frac{1}{8}x_{1/2}^2 + \frac{3}{2}x_{1/2} - \frac{1}{8}k + 3 \right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x_{1/2}}}_{\neq 0}$$

که $(...) \neq 0$ وي نو لاس ته راځي، چې اوږونتکي په $x_{1/2}$ کې.

منځميرنه:

$$x_1^2 = (-4 + \sqrt{8+k})^2 = 24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = (-4 - \sqrt{8+k})^2 = 24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\frac{1}{8}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}(24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k) + \frac{3}{2}(-4 + \sqrt{8+k}) - \frac{1}{8}k + 3 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

د $x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$ لپاره يو اوږونځای يا د انعطاف ځای دی. $k > -8$

$$\frac{1}{8}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}(24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k) + \frac{3}{2}(-4 - \sqrt{8+k}) - \frac{1}{8}k + 3 \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

د $x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$ لپاره يو اوږونتکي يا د انعطاف ټکي دی. $k > -8$

ټ- د سطحې د مساحت ټوليزه شميرنه

$P_{k \times 1/2}(\pm\sqrt{k} | 0)$ صفرخايونه فقط د $k \geq 0$ لپاره شتون لري

دا انټيگرال غواړو وشميرو:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx}_{I} - k \cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} e^{\frac{1}{2}x} dx}_{II} = I - k \cdot II$$

ټوليز حل I مخ له مخه ورکول کيږي

$$\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = (2x^2 - 8x + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

حل II:

$$\int e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2 \cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot \int e^u du = 2 \cdot e^u = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

سره راټولول يا يوځای کول:

$$\int f_k(x) dx = I - k \cdot II = (2x^2 - 8x + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}x} - k \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C =$$

$$= (2x^2 - 8x + 16 - 2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

د پولو ځای په ځای کونه يا ايښونه:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx &= \left[(2x^2 - 8x + 16 - 2k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \\
 &= (2k - 8\sqrt{k} + 16 - 2k) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - (2k + 8\sqrt{k} + 16 - 2k) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}} \\
 &= (-8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - (8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}}
 \end{aligned}$$

د فزيکي سطحې پاره باور لري:

$$A_k = \left| \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx \right| = \left| (-8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - (8\sqrt{k} + 16) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}} \right|$$

الف-

$$K = -4$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-4_y}(0|4) \quad \text{صفرخای نه شته، ځکه چې } k < 0$$

افراطي خای نه شته، ځکه د $k = -4$ لپاره شرط $k > -4$ پوره نه دی

$$x_{k_{w1}} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-4_{w1}} = -4 + \sqrt{8-4} = -4 + \sqrt{4} = -2 \Rightarrow f_{-4}(x_{-2_{w1}}) \approx 2,94$$

$$x_{-4_{w2}} = -4 - \sqrt{8-4} = -4 - \sqrt{4} = -6 \Rightarrow f_{-4}(x_{-6_{w2}}) \approx 1,99$$

$$K = -2$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-2_y}(0|2) \quad \text{صفرخای نه شته، ځکه چې } k < 0$$

$$x_{kMin} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-2Min} = -2 + \sqrt{4-2} = -2 + \sqrt{2} \approx -0,59 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2Min}) \approx 1,75$$

$$x_{-2Max} = -2 - \sqrt{4-2} = -2 - \sqrt{2} \approx -3,41 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2Max}) \approx 2,48$$

$$x_{kw1} =$$

$$= -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{-2w1} = -4 + \sqrt{8-2} = -4 + \sqrt{6} \approx -1,55 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2w1}) \approx 2,03$$

$$x_{-4w2} = -4 - \sqrt{8-2} = -4 - \sqrt{6} \approx -6,45 \Rightarrow f_{-2}(x_{-2w2}) \approx 1,73$$

$$k = 0$$

$$P_{ky}(0|-k) \Rightarrow P_{0y}(0|0)$$

$$P_{kx1/2}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{0x1/2}(0|0)$$

$$x_{kMin} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{0Min} = -2 + \sqrt{4+0} = -2 + \sqrt{4} = 0 \Rightarrow f_0(x_{0Min}) = 0$$

$$x_{0Max} = -2 - \sqrt{4+0} = -2 - \sqrt{4} = -4 \Rightarrow f_0(x_{0Max}) \approx 2,17$$

$$x_{kw1} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{0w1} = -4 + \sqrt{8+0} = -4 + \sqrt{8} \approx -1,17 \Rightarrow f_0(x_{0w1}) \approx 0,76$$

$$x_{0w2} = -4 - \sqrt{8+0} = -4 - \sqrt{8} \approx -6,83 \Rightarrow f_0(x_{0w2}) \approx 1,53$$

$$k = 2$$

$$P_{ky}(0|-k) \Rightarrow P_{2y}(0|-2)$$

$$P_{kx1/2}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{2x1/2}(\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41|0)$$

$$x_{kMin} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{2Min} = -2 + \sqrt{4+2} = -2 + \sqrt{6} \approx 0,45 \Rightarrow f_2(x_{2Min}) \approx -2,25$$

$$x_{2Max} = -2 - \sqrt{4+2} = -2 - \sqrt{6} \approx -4,45 \Rightarrow f_2(x_{2Max}) \approx 1,92$$

$$x_{k_{w1}} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{2_{w1}} = -4 + \sqrt{8+2} = -4 + \sqrt{10} \approx -0,84 \Rightarrow f_2(x_{2_{w1}}) \approx -0,85$$

$$x_{2_{w2}} = -4 - \sqrt{8+2} = -4 - \sqrt{10} \approx -7,16 \Rightarrow f_2(x_{2_{w2}}) \approx 1,37$$

$$k = 4$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{4_y}(0|-4)$$

$$P_{k_{x1/2}}(\pm\sqrt{k}|0) \Rightarrow P_{4_{x1/2}}(\pm\sqrt{4} = \pm 2|0)$$

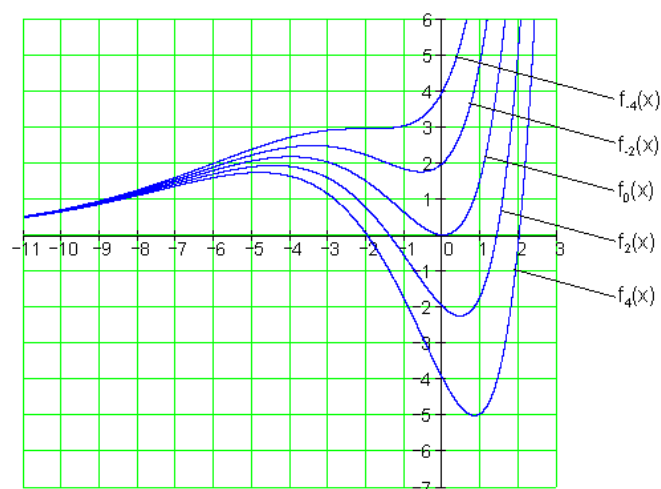
$$x_{k_{Min}} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{4_{Min}} = -2 + \sqrt{4+4} = -2 + \sqrt{8} \approx 0,83 \Rightarrow f_4(x_{4_{Min}}) \approx -5,01$$

$$x_{4_{Max}} = -2 - \sqrt{4+4} = -2 - \sqrt{8} \approx -4,83 \Rightarrow f_4(x_{4_{Max}}) \approx 1,73$$

$$x_{k_{w1}} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{4_{w1}} = -4 + \sqrt{8+4} = -4 + \sqrt{12} \approx -0,54 \Rightarrow f_4(x_{4_{w1}}) \approx -2,84$$

$$x_{4_{w2}} = -4 - \sqrt{8+4} = -4 - \sqrt{12} \approx -7,46 \Rightarrow f_4(x_{4_{w2}}) \approx 1,24$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ او } k \in \mathbb{R} \text{ د } f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

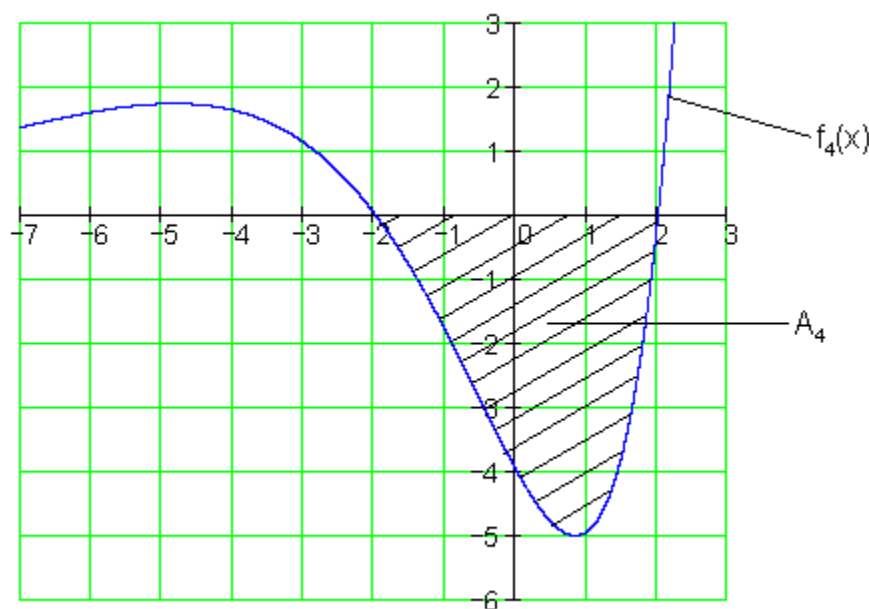


د فزیکي سطحي لپاره باور لري:

$$A_k = \left| \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x) dx \right| = \left| \left(-8\sqrt{k} + 16 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k} + 16 \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}} \right|$$

په ځانګړې توګه د $k=4$ لپاره باور لري:

$$\begin{aligned} A_4 &= \left| \int_{-\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} f_4(x) dx \right| = \left| \left(-8\sqrt{4} + 16 \right) \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{4}} - \left(8\sqrt{4} + 16 \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4}} \right| \\ &= \left| \left(-8 \cdot 2 + 16 \right) \cdot e - \left(8 \cdot 2 + 16 \right) \cdot e^{-1} \right| = \left| -32 \cdot e^{-1} \right| \approx \left| -11,772 \right| = \underline{\underline{11,772FE}} \end{aligned}$$



ساده مشتق- او انټيګرال شميرنه (د يوه ساده تابع رابيلونه او ورګډونه)

تابع	مشتق	بنسټيزه تابع
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x + C$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C \quad (x > 0)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$F(x) = \ln x + C \quad (x \neq 0)$

د مشتق - او انټيگرالشميرنو سره مخامخ کول

د ثابتې قانون

$f(x) = k \cdot u(x)$ mit $k = \text{konstant}$ $\int f(x) dx = \int k \cdot u(x) dx = k \cdot \int u(x) dx$ $= \text{ثابته يا همغه}$	$f(x) = k \cdot u(x)$ mit $k = \text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$ $= \text{ثابته يا همغه}$
---	--

بيلگه: $f(x) = 3x^2 \Rightarrow k = 3 \quad u(x) = x^2$ $\int f(x) dx = 3 \cdot \int u(x) dx = 3 \cdot \int x^2 dx$ $= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \underline{\underline{x^3 + C}}$	بيلگه: $f(x) = 3x^4 \quad k = 3 \quad u(x) = x^4$ $\Rightarrow u'(x) = 4x^3$ $f'(x) = k \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$
بيلگه: $f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\int f(x) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$	د جمعې قانون Summenregel $f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
بيلگه: $f(x) = x^2 + x + 1$ $\int f(x) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int 1 dx$ $= \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C}}$	بيلگه: $f(x) = 5x^2 + 3x$ $u(x) = 5x^2 \quad v(x) = 3x$ $\Rightarrow u'(x) = 10x \quad v'(x) = 3$ $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$

د مشتقشميرني لپاره نور قوانين

د ضرب قانون: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow$ in Kurzform: $\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$

بيلگه: دالمانې پښتو: د... او... سره

$$f(x) = x \cdot e^x \text{ mit } u(x) = x \text{ und } v(x) = e^x$$

$$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u'(x) = 1; v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

د وېش قانون: دالمانې پښتو: په لنډه بڼه:

$$f' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{لاس ته اورنه په لنډه بڼه}$$

$$\text{بيلگه: } f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{د } u(x) = e^x \text{ او } v(x) = x \text{ سره}$$

$$f' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u'(x) = e^x; v'(x) = 1; v^2 = x^2$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

ځنځيزي قانون: د الماني پښتو: کين: د باندني مشتق بنی: دنننی مشتق

$$f(x) = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

دنننی مشتق دباندي مشتق

$$\text{بيلگه: } f(x) = e^{2x}$$

$$\text{د } z = 2x \text{ سره } f(z) = e^z \text{ لاس ته راځي}$$

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

$$f'(z) = e^z; z'(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = e^z \cdot 2 = \underline{\underline{2 \cdot e^{2x}}}$$

تمرینونه: د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځيري قانونو سره

د لاندي توابعو مشتق تاسو ته د معلومو قوانینو له مخي وشمېری.

.....

$$f(x) = (1 - e^{ax})^2 \quad \text{دويم} \quad f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \quad \text{اول}$$

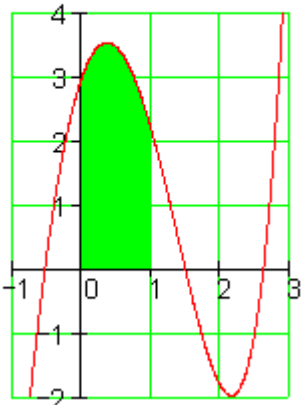
$$f(x) = (x+1)e^x \quad \text{څلورم} \quad f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2 \quad \text{درېم}$$

$$f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \quad \text{اوم} \quad f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{پنځم}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4) \quad \text{لسم} \quad f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{نهم} \quad f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \quad \text{اتم} \quad f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$$

د انتيگرال شميرنې لپاره نورې لارې يا قوانين

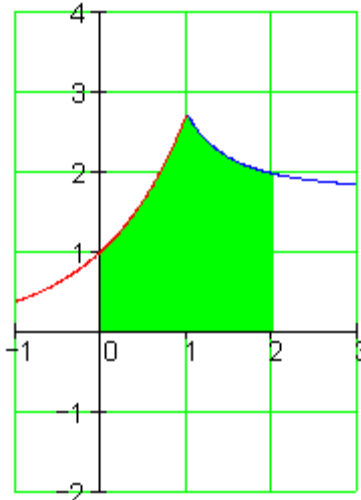
د انتيگرالونو پوله بدلونه:

$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{oder} \quad - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$	د انتيگرېشن پولو بدلون له لارې د انتيگرال مخنځېنه تغير خوري
$f(x) := 3e^x - 6x^2$ 	دا په نخښه شوي سطحه دي وشميرل ش $\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (3e^x - 6x^2) dx \\ &= 3 \int_0^1 e^x dx - 6 \int_0^1 x^2 dx = \\ &= 3 \int_0^1 e^x dx + 6 \int_1^0 x^2 dx \\ &= [3e^x]_0^1 + [2x^3]_1^0 \\ &= 3e^1 - 3e^0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ &= 3e^1 - 5 \approx \underline{\underline{3,155}} \end{aligned}$

صفر انتیگرال

که په ټاکلي انتیگرال کې کښته او پورته پولې سره برابري یامساوي وي، نود ټاکلي انتیگرال ارزښت صفر دی.	$\int_a^a f(x) dx = 0$
--	------------------------

د انتگرال جمع

د ټول انتیگرال ارزښت په برخه ساحو انتیگرالونو د جمع کونې یا یو پر بل زیاتونې له لارې منځ ته راځي.	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
	په نڅېنه شوې سطحه دې وشمیل $\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + e - 1 \right) dx \\ &= \left[e^x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} + e \cdot x - x \right]_1^2 \\ &= e^1 - e^0 + \left[-\frac{1}{2} + 2e - 2 \right] - \left[-1 + e - 1 \right] \\ &\approx \underline{\underline{3.937}} \end{aligned}$

تمرینونه: مشتق — او انتیگرال شمېرنه د e تابع سره.

د لاندې توابعو مشتق وشمېری.

اول - $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$ دویم - $f(x) = \frac{3}{2} e^{-5x^2 - 3x}$

دریم - $f(x) = -4e^x(e^{-x} + 3)$ خلورم - $f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx}$

پنجم - $f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3}$ شیرم - $f(x) = t(e^{-x} - 3x^2)$

د لاندې توابعو انتیگرال ونیسی او د مشتق له لارې یې ټیکوالی و ازمایی

اوم - $f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x)$ اتم - $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$

نهم - $f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e$ لسم - $f(x) = t^2x(x^2 - 8x)$

خوابونه:

د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځیري قانونو سره

نتیجې او مفصل خوابونه. نتیجې:

لومړی - $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2(x+a - e^{2x-3})$

دویم: $f(x) = (1 - e^{ax})^2 \Rightarrow f'(x) = -2a \cdot e^{ax}(1 - e^{ax})$

دریم: $f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2 \Rightarrow f'(x) = 2(e^{2x} + e^{-x}) \cdot (2e^{2x} - e^{-x})$

خلورم: - $f(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x$

پنجم: $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$

$$f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \Rightarrow f'(x) = a \cdot e^{4x-3}(4x-11) \quad \text{شپږم:}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{e^x} \quad \text{اووم:}$$

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{اتم:}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{نهم:}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} \quad \text{لسم:}$$

مفصل ځوابونه

لومړۍ:

د لاندې الماني پښتو: زنځيري لار يا قانو

$$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

$$\text{Kettenregel: } u(x) = (x+a)^2 \Rightarrow u'(x) = 1 \cdot 2(x+a)$$

$$v(x) = e^{2x-3} \Rightarrow v'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$$

$$f'(x) = 2(x+a) - 2 \cdot e^{2x-3} = \underline{\underline{2(x+a - e^{2x-3})}}$$

دويم:

$$f(x) = (1 - e^{ax})^2 = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

$$z(x) = (1 - e^{ax}) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax} \quad \text{دننې مشتق:}$$

$$z(x) = (1 - e^{ax}) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax} \quad \text{دڻننى مشتق:}$$

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2(1 - e^{ax}) \quad \text{دبانڊنى مشتق:}$$

$$f'(x) = 2(1 - e^{ax}) \cdot (-a \cdot e^{ax}) = \underline{\underline{-2a \cdot e^{ax} (1 - e^{ax})}}$$

$$f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2 = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) \quad \text{دريم:}$$

$$z(x) = (e^{2x} + e^{-x}) \Rightarrow z'(x) = 2e^{2x} - e^{-x} \quad \text{دڻننى مشتق:}$$

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2(e^{2x} + e^{-x}) \quad \text{دبانڊنى مشتق:}$$

$$f'(x) = \underline{\underline{2(e^{2x} + e^{-x}) \cdot (2e^{2x} - e^{-x})}}$$

څلورم:

$$f(x) = (x+1)e^x = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (x+1); u' = 1; v = e^x; v' = e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = [1 + (x+1)]e^x = \underline{\underline{(x+2)e^x}}$$

پنجم:

$$f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (3-2x); u' = -2; v = e^{-\frac{1}{2}x}; v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (3-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(3-2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \\ &= \underline{\underline{\left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}} \end{aligned}$$

شپيرم:

$$f(x) = a(x-3)e^{4x-3} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = a(x-3); u' = a; v = e^{4x-3}; v' = 4e^{4x-3}$$

$$f'(x) = a \cdot e^{4x-3} + a(x-3) \cdot 4e^{4x-3} = \underline{\underline{a \cdot e^{4x-3} (4x-11)}}$$

اووم:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x^2 + 1; u' = 2x; v = e^x; v' = e^x; v^2 = e^x \cdot e^x$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - (x^2 + 1)e^x}{e^x \cdot e^x} = \underline{\underline{\frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}}}$$

اتم:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = e^x - 1; u' = e^x; v = e^x + 1; v' = e^x; v^2 = (e^x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x[(e^x + 1) - (e^x - 1)]}{(e^x + 1)^2} = \underline{\underline{\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}}}$$

نهم:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x; u' = 1; v = x-1; v' = 1; v^2 = (x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{(x-1)^2}}}$$

لسم:

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - 4) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - (-1 \cdot 4x^{-2}) = 1 + \frac{4}{x^2}$$

خوابونه

د کور د e - تابعو مشتق او انتيگرالونه I

نتيجي او مفصل خوابونه . نتيجي:

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4e^{-4x} - 4e^{4x} = -4(e^{-4x} + e^{4x})$$

لومړی:

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}$$

دويم:

دريم:

$$f(x) = -4e^x(e^{-x} + 3) = -4\underbrace{e^x \cdot e^{-x}}_1 - 12e^x = -4 - 12e^x \Rightarrow f'(x) = -12e^x$$

$$f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx} \Rightarrow f'(x) = e^{t-x} + 2t^2 \cdot e^{-tx}$$

خلورم:

$$f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = -3t \cdot e^{2-3x} - 12x \cdot e^{x^2+3}$$

پنځم:

شپږم:

$$f(x) = t(e^{-x} - 3x^2) = t \cdot e^{-x} - 3t \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = -t \cdot e^{-x} - 6t \cdot x = -t(e^{-x} + 6x)$$

اووم:

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{16} \int (x^2 - 3e^x) dx = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x \right] + C$$

$$F'(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) = f(x)$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \Rightarrow F(x) = \int \left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln |x| + C$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \Rightarrow F(x) = \int \left(t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C$$

$$F'(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

$$f(x) = t^2x(x^2 - 8x) = t^2(x^3 - 8x^2) \Rightarrow F(x) = t^2 \int (x^3 - 8x^2) dx =$$

$$t^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 \right) + C$$

$$F'(x) = t^2(x^3 - 8x^2) = t^2x(x^2 - 8x) = f(x)$$

مفصل جوابونه:

لومړی:

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4e^{-4x} - 4e^{4x} = -4(e^{-4x} + e^{4x})$$

مشتق د ضرب قانون له مخې ته بېول کيږي

دویم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} &\Rightarrow f'(x) = (-10x-3) \cdot \frac{3}{2} \cdot e^{-5x^2-3x} \\
 &= \frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x}}}
 \end{aligned}$$

دریم:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -4e^x(e^{-x} + 3) = -4 \cdot e^x \cdot e^{-x} - 4 \cdot 3 \cdot e^x \\
 &= -4 \cdot e^{x-x} - 12 \cdot e^x = -4 \cdot e^0 - 12 \cdot e^x \\
 &= -4 - 12 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-12e^x}}
 \end{aligned}$$

څلورم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx} &\Rightarrow f'(x) = (-1)(-e^{t-x}) - (-t \cdot 2t \cdot e^{-tx}) \\
 &= \underline{\underline{e^{t-x} + 2t^2 \cdot e^{-tx}}}
 \end{aligned}$$

پنځم:

$$\begin{aligned}
 f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3} &\Rightarrow f'(x) = -3t \cdot e^{2-3x} - 2x \cdot 6e^{x^2+3} \\
 &= \underline{\underline{-3t \cdot e^{2-3x} - 12x \cdot e^{x^2+3}}}
 \end{aligned}$$

شپږم:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= t(e^{-x} - 3x^2) = t \cdot e^{-x} - 3t \cdot x^2 \\
 \Rightarrow f'(x) &= -t \cdot e^{-x} - 2 \cdot 3t \cdot x = -t \cdot e^{-x} - 6t \cdot x = \underline{\underline{-t(e^{-x} + 6x)}}
 \end{aligned}$$

اووم:

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) dx = \frac{1}{16} \int (x^2 - 3e^x) dx = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x \right] + C$$

$$F'(x) = \frac{1}{16} \left(3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 3e^x \right) = \frac{1}{16}(x^2 - 3e^x) = F(x)$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) &= \int \left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 3 \cdot \ln |x| + C \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln |x| + C \end{aligned}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \text{ und } f(x) = \ln |x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \text{ يادونه:}$$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \left(t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \right) dx = \frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C$$

$$F'(x) = \frac{2}{2}t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= t^2 x (x^2 - 8x) = t^2 (x^3 - 8x^2) \\
 \Rightarrow F(x) &= t^2 \int (x^3 - 8x^2) dx = t^2 \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{8}{3} x^3 \right) + C \\
 F'(x) &= t^2 \left(\frac{4}{4} x^3 - 3 \cdot \frac{8}{3} x^2 \right) = t^2 (x^3 - 8x^2) = t^2 x (x^2 - 8x) = f(x)
 \end{aligned}$$

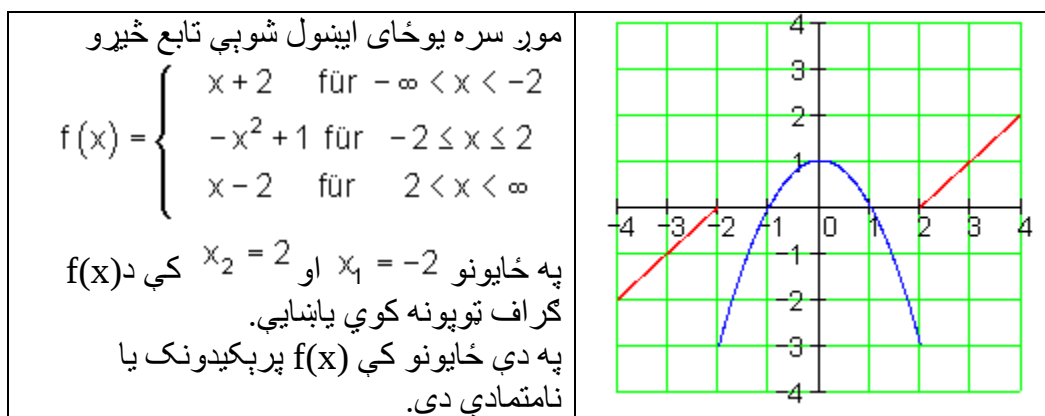
اتم: ناپرېکيدنوالی يا متماديت، مشتق وړوالی او انتيگراوړوالی

د ناپرېکيدنوالی يا متمادين کلمه دې ليدور روښانه يا تشریح شي.

يو تابع $f(x)$ هلته په يوه انتروال $[a; b]$ کې متمادي يا ناپرېکيدونکی دی، که چيرې څوک وکړای شي، چې د تابع گراف د انتروال له يوه سر څخه تر بله سره پورې داسې وکښلای شي، چې د پنسل څوکه له ځايه پورته کيدو ته اړ نه شي.

يا که چيرې تابع $f(x)$ د گراف ټکي د يوه انتروال $[a; b]$ په دننه کې بې له کنډلو يا نښلولو يو بل سره نښتي وي، بې له دې چې کوم ټوپونه ترې رامنځ ته شي، نو بيا تابع $f(x)$ په انتروال $[a; b]$ کې ناپرېکيدونکی يا متمادی دی.

بيلگه:



 د متمدني يا ناپرېکيدونکو توابعو لپاره بيلگي:

هر ټولراشنل تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی.

هر مات-يا کسري تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی. (يعني فقط هلته پرېکيدونکی دی، چيرته چې ماتلاندې يا مخرج صفرخپونه لري، ځکه چې هلته تابع تعريف نه ده).

د طبيعي پوهنو ټولگيزي يا کلاسيکي څيړنو لپاره باورلري: طبيعت ټوپونه نه وهي.

د وخت سره د نباتاتو او نورو ژونديو وده.

له دې امله ټولي طبيعي پيښي ناپرېکيدونکي يا متمدني ځغلي. په يوه بخار دېک کې د تودوخې جگوالی.

پرېکيدونکي يا نامتمدني (ټوپډوله) تغيرات هم شته لکه د پوست قيمت جگيدل يا د شيانو په نرخ کې ارزاني.

د ناپرېکيدونکي يا متمدني شميرپوهنيز تعريف ياپېژند:

د $f(x)$ تعريفېږي يا سټ دې D_f وي او ارزښتېږي يې W_f .
 تابع $f(x)$ د $x = x_0$ په ځای کې د $x_0 \in D_f$ سره ټيک هلته ناپرېکيدونکي يا متمدني ده، که

← تابع ارزښت $f(x_0)$ شتون لري، دا په دې معنا چې $f(x_0) \in W_f$,

← د $x = x_0$ لپاره د $f(x)$ پوله ارزښت شتون لري

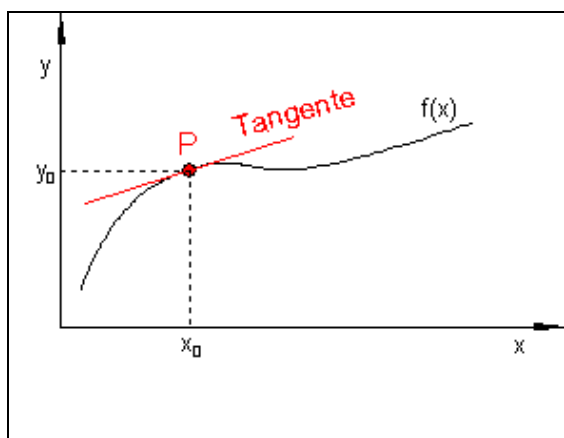
او د يوه ټاکلي عدد g سره برابر دی او که

← $f(x_0) = g$ باور ولري.

که له دې شرايطو فقط يو هم پوره نه وي، نو بيا تابع $f(x)$ د $x = x_0$ په ځای کې پرېکيدونکي يا نامتمدني دی.

مشتقروالی (رابیلیدوروالی)

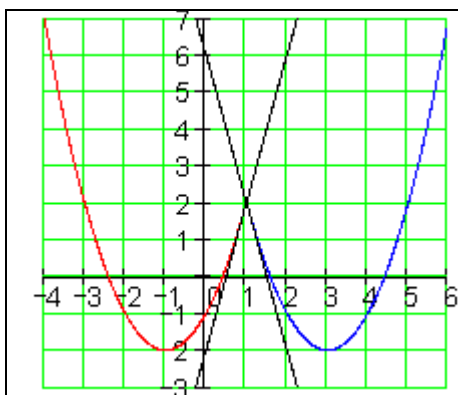
مور لومری دیوه فنکشن مشتقروالی فقط لیدنیز راورو



بیلگه: د لومری مشتق د x_0 په ځای کې د فنکشن جگوالی راکوي، چې د فنکشن گراف په ټکي $P_0 (x_0 | y_0)$ کې لمسوي او له دې سره په همدې وخت کې په ټکي $P_0 (x_0 | y_0)$ کې د فنکشن گراف جگوالی دی. سړی د فنکشن جگینه هم وایي. له دې لاس ته راورنو سره تابع د x_0 په ځای کې ټیک هلته مشتقورده، که یو یواځنی جگوال شتون ولري

د x_0 په ځای کې دیوه فنکشن مشتقروالی شرطونه: فنکشن باید د x_0 په ځای کې ناپرېکښونکي وي.

دا شرط اړین دی مگر نه پوره کیدونکی، لکه چې لاندې بیلگه ښايي.



بیلگه: دا ترڅنګ څیرونه (فنکشن) د د فنکشن گراف د

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{د } x < 1 \text{ لپاره} \\ x^2 - 6x + 7 & \text{د } x \geq 1 \text{ لپاره} \end{cases}$$

سره ښايي.

په ټکي (1, 2) کې یواځنی تانجنت شتون نه لري

$$t_1(x) = 4x - 2$$

$$t_2(x) = -4x + 6$$

.....
بیلگه: فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ کې متمدی یا ناپرېکیدونکی دی، هلته ټوپ نه شته.

مگر موږ په ټکي $P(1 | 2)$ کې دوه مختلف تانجنتونه لرو. دا په دې معنا چې د $x = 1$ لپاره هم دوه مختلف تانجنتونه جگوالی لرو، یعنې دوه مشتقونه یا رابیلیدنې.

دا په دې معنا مشتق فنکشن په $x = 1$ ځای کې یواځنی نه دی.

دا په ځان پسې لري، چې فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ ځای کې مشتق ور نه دی.

لیدنیز یا د لیدلو له مخې دا په دې معنای چې:

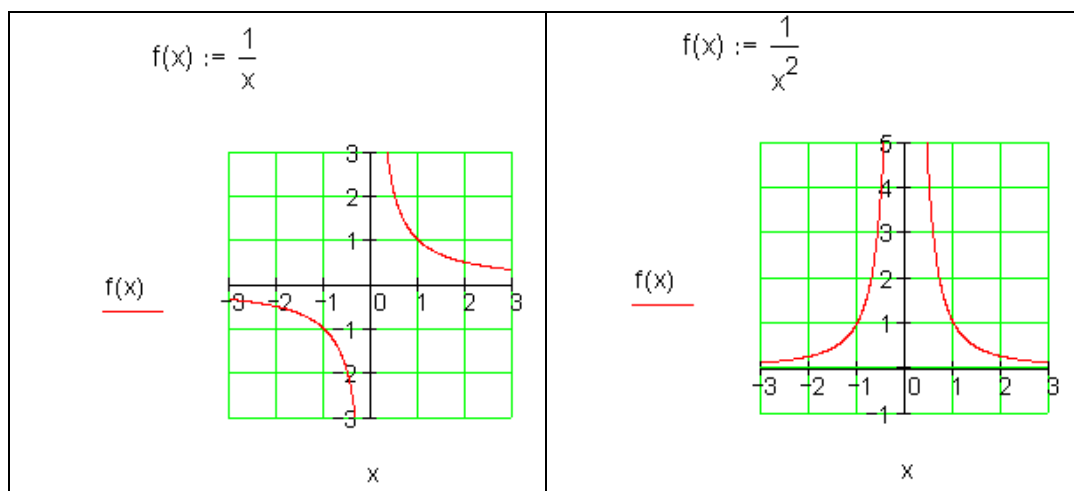
یو فنکشن $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتق ور یا رابیلیدور دی، که په دې ځای کې یې مشتق یا رابیلیدنه یواځنی وي، یعنې ټیک یو تانجنت شتون ولري.

سړی دا هم ویلی شي، هغه ځای کې چې گراف څوکه ولري یا را مات شوی یعنې گوډ ولري (را مات وي)، فنکشن وشتقور نه دی.

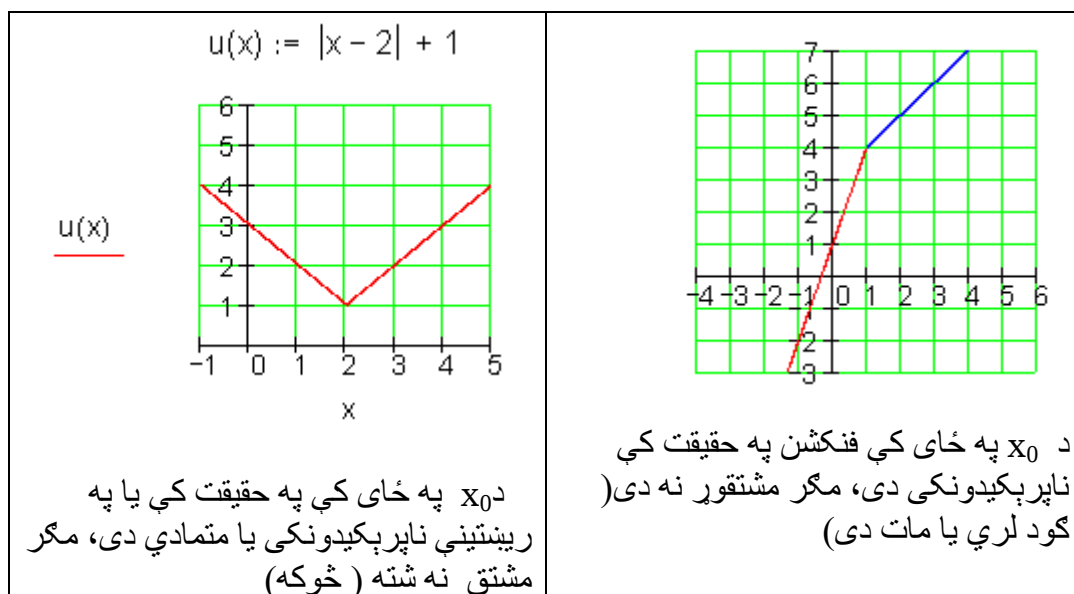
په څټ (برعکس) دا د ناپرېکیدنې یا متمدیت لپاره په دې معنای:

که فنکشن د x_0 په ځای کې مشتقور وي، نو دا هلته ناپرېکیدونکی یا متمدی هم دی.

نورې



دواړه فنکشنونه، که غوتری توابع، د په ځای کې مشتقور نه دي، ځکه چې دا هلته تعريف نه دي يا پيژند نه لري.



د مشتقوروالي شميرپوهنيز پيژند يا تعريف:

کينه ناپرېکيدونکي پوله د کمښتوېش فنکشن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x < x_0$	بنی ناپرېکيدونکي پوله د کمښتوېش فنکشن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x > x_0$
--	---

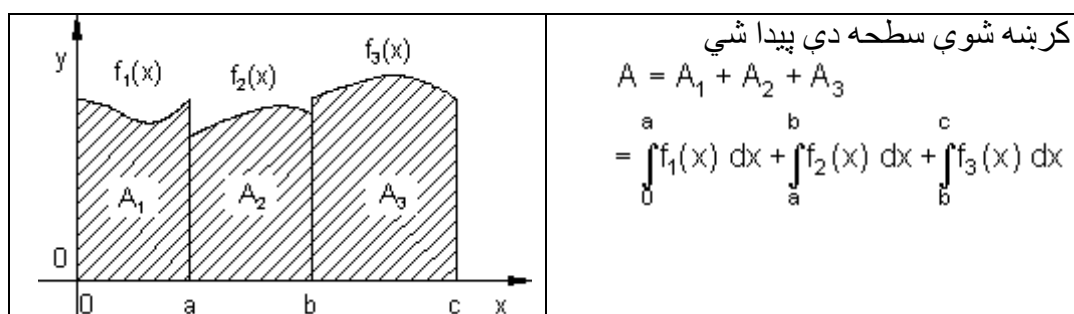
که د کين اړخ او د بني اړخ کمښتوېش فنکشنونه سره برابر وي، نو $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقور دی.

بيا نو يو مشتق $f'(x_0)$ شتون لري، د تانجنت جگوالی د گراف په ټکي $(x_0; f(x_0))$ کې.

انتیگرال وړوالی:

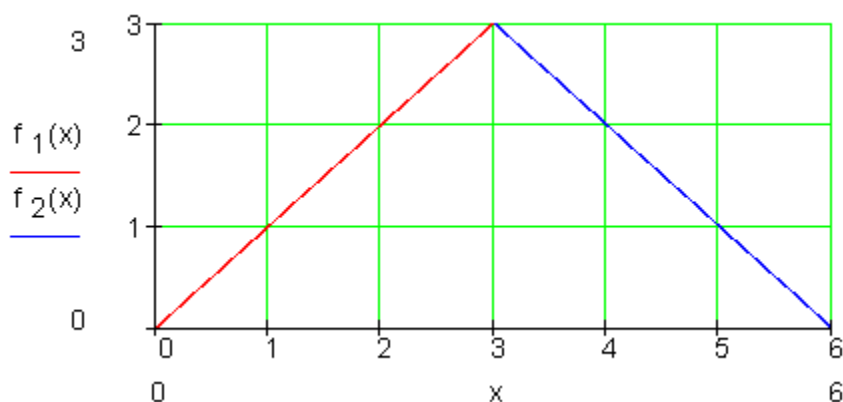
تابع انتیگرال وړ دی، که دا لږ تر لږه ټوټه ډبرله یا ټوټه په ټوټه متمادي یا ناپېرېکډونکی وي.

پلټه:



د درې ګوډي يا مثلث سطحه غواړو پيدا کړو.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x & \text{für } (0 \leq x < 3) \\ f_2(x) = -x + 6 & \text{für } (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^6 f(x) \, dx = \int_0^3 f_1(x) \, dx + \int_3^6 f_2(x) \, dx \\
 &= \int_0^3 x \, dx + \int_3^6 (-x + 6) \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x \right]_3^6 \\
 &= \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left[\left(-\frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 \right) \right] = \underline{\underline{9FE}}
 \end{aligned}$$

(پورته FE د سطحې يوون يا واحد)

سره له دې ي تابع د $P(3 | 3)$ په ځای کې مشتقور يا رابيليدور نه دی، کيدی شي
سطحه له دوه برخه - انتيگرالونو پيدا شي.

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلگه:

بيلگه:

عوارو د $f(x) = e^x$ مشتق پيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) \, dx = \int e^x \, dx = e^x + C$$

گورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څير لار شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) \, dx = \int e^{2x} \, dx \neq e^{2x} + C$$

$$F(x) = e^{2x} + C \text{ که دی، } F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x) \text{ وي}$$

له دې امله د بدلون قانون ته اړيو:

د ناپاکلو انتيگرالونو حل د بدلون له لارې

تراوسه مو فقط د هغو انتيگرالونو پوښتنې ځواب کړي، چې د اده توابعو مشتق باندې
بیرته اړول کيده. دا سي له دې لارې لاسته رغلي بنسټ انتيگرالونو د نورو ټول حلونو

بنسټ کيښود. د بنسټ انټيگرا لرونه يا استعمال ټل شونې نه دي، لکه لاندې بيلگه چي ښايي.

بيلگه: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انټيگرا ل ونيسي

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

بدلون: $u(x) = 2x = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{د بدلون برعکس:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \quad \text{ازماينست:}$$

بيلگه: وښايي چي باور لري.

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx$$

بدلون $u(x) = x+1 = u$ جوړ کړي

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x) dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C \quad \text{بیرته- يا په څټ بدلون:}$$

$$\int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C \quad \text{نو:}$$

بيٺگه :

و بنيادي ڇڻي باور لري:

$$f(x) = (3x + 6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx$$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x) dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بهرته بدلون: $\frac{u^4}{12} (3x + 6)^4 + C$

$$\int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx = \underline{\underline{\frac{1}{12} (3x + 6)^4 + C}}$$

بيٺگه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x^2 = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

جوړوو:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

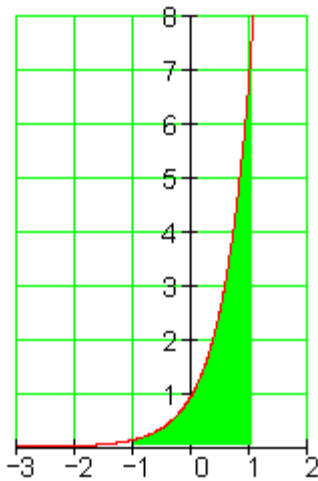
بهرته بدلون:

$$\int (x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}}$$

نولو:

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کېږي.

$f(x) := e^{2 \cdot x}$ 	بیلګه : وېنایاست: $f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$ د انتیګرال حل د بدلون له لارې: ۱ - بدلون $u(x) = 2x$ ۲ - د dx په ځای کېږدی $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ ۳ - د پولو بدلون - لاندې پوله $u(-1) = -2$ - پورته پوله $u(1) = 2$ ۴ - په انتیګرال کې څا په ځای کړی $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [e^2 - e^{-2}] = \underline{\underline{3.627}}$
--	--

بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ - بدلون $u(x) = x^2$

۲ - د خای په په خای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولي بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

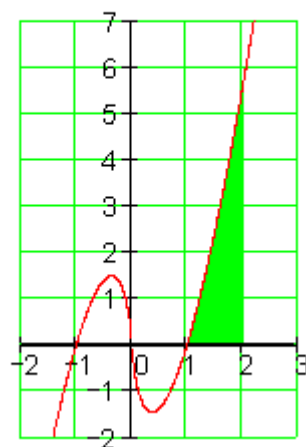
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ - په انتیگرال کې خای په خای کری

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

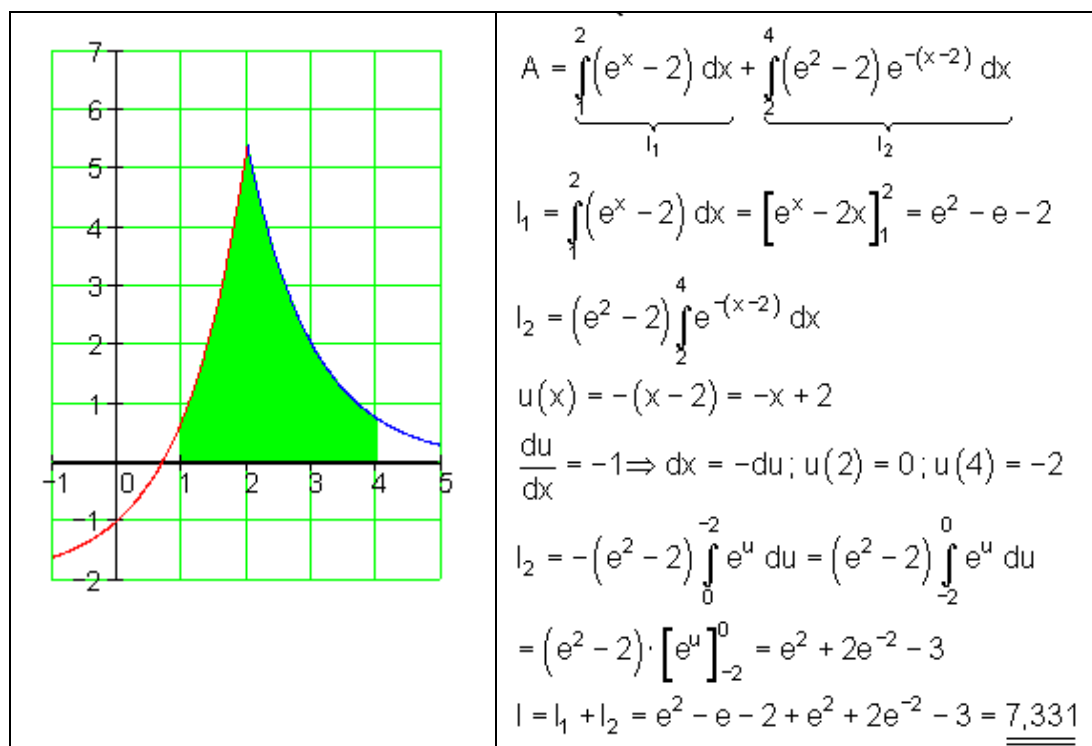
$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بیلگه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره
---	---



تۆتە انتیگرالونه Partialy Integration

تۆتە انتیگرالونه، چي ضرب انتیگرالونه هم بلل کیري، په انتیگرالشمیرنه کي د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کیدی شي د مشتقشمیرني د برعکسکونی په څیر وگڼل شي.

د تۆتە انتیگرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیري، چي د متمادی (نه پرېکیدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

دا قانون ټیک هلته گټور دی، که df مشتقنیولو سره یو ساده تابع منح ته راځي.

د ضرب قانون (د ضرب مشتقيونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیگرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیدا کړي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

د دې مخ ته حدونو یا ترمونو لپاره ګټور دی، چې لومړۍ ځان په ناټاکلي انتیگرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:

د بیلګې په توګه لاندې انتیگرال شمېرو.

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقیمدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د $\ln(x)$ انتیګرالونه نوې $\ln(x)$ راځي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو(مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \text{ او } f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکښه:

اوس دی u او v په خوښه توابع وي. U او V دې د u او V لومړني توابع وي، او همداسې دې u' او v' د u او v مشتقونه وي. u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیگرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx &= u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \\ &= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \end{aligned}$$

توټه انتیگرالونې لار (طریقې)

د توټه انتیگرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :

کله کله کیدی شي ګټور وي، چې د مساوات بنی لور ته توټه انتیگرال د څو واره انتیگرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کین لور انتیگرال سره یوځای کولی شو.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

که کېږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیگرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos^2(x)$$

که واره لوري په 2 ووبشل شي، نو بالاخره لاس ته تري راځي:

$$+ C \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x)$$

بیلگه ۲ :

د ځنو انتیگرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د $g'(x)$ له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیگرالونو کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلگې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم، له منځه یووړل شي،،

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

که هر ځل $g'(x) = e^x$ کېږدو او د $f(x)$ له پاره، د انتیگرال لاندې ترم، نو تری لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot (2 - x^2) dx &= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x) dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x] \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)] \\ &= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C \end{aligned}$$

بیلگه ۳ :

که له انتیگرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنۍ تابع یې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسېږي (نه پایول کیږي) (نه ختمیږي) کیدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې (ناڅرګند شته) ضریب "1" ټوټه انتیگرال شي.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = \int g'(x) \cdot \ln(x) dx$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

جمله :

موږ د دې لاندې انتيگراډ نيسو:
 ږدو $u = x$ ، نو لرو $du = dx$
 ږدو $dv = \cos(x) dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو
 په لاندې توگه مخ ته څو:

$$\begin{aligned}\int x \cos(x) dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتيگراډ الوڼي يوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتيگراډ الوڼي د استعمال سره د انتيگراډ الوڼو لکه

$$\int x^2 e^x dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x) dx$$

کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

.....
 که په پوره کره والي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.
 دا بېلگه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x) dx$

$dv = e^x dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$

$v = e^x; dv = e^x dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو (بې له مخ نڅښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کین لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيگريالوني يوه په خوښه ثابته ده

د کور کار:

انتیگريال د بدلون له لارې د لاندې انتیگريالونو ځوابونه، همداسې شمیرنه

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx \quad \text{لومړۍ:} \quad \int \frac{3}{4x+1} dx \quad \text{دویم:}$$

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx \quad \text{څلورم:} \quad \int \frac{2}{(1-x)^2} dx \quad \text{درېم:}$$

$$\int_{-2}^2 e^{1-x} dx \quad \text{شپږم:} \quad \int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx \quad \text{پنځم:}$$

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{اووم:} \quad \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{اتم:}$$

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx \quad \text{نهم:} \quad \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx \quad \text{لسم:}$$

ځوابونه

انتیگريال د ساده بدلون له لارې

نتیجې: لومړۍ:

$$\int \frac{3}{4x+1} dx = \frac{3}{4} \cdot \ln(4x+1) + C$$

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx = 4 \cdot \ln(4) - 4 \cdot \ln(2) = 4 \cdot \ln(2) \approx 2,773$$

دويم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2} dx = \frac{2}{1-x} + C$$

دزيم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

خلورم:

$$\int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx = -\frac{5}{2} \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296} \right] = -\frac{25}{162} \approx -0,154$$

پنجم:

$$\int_{-2}^2 e^{1-x} dx = e^3 - e^{-1} \approx 19,718$$

شپيرم:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = 2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778$$

اووم:

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,195$$

اتم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = 2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,788$$

نهم:

لسم:

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = -2 \cdot e^0 - \left(-2 \cdot e^{-1} \right) = -2 + 2 \cdot e^{-1} \approx -1,264$$

خوابونه

انتیگرال د ساده بدلون له لارې

مفصل خوابونه

لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1} dx \quad \text{Substitution: } u = 4x+1 \quad \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4} du$$

$$\text{سر ه } u = 4x+1 \quad \frac{3}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{4} \cdot \ln(u) + C$$

$$\int \frac{3}{4x+1} dx = \underline{\underline{\frac{3}{4} \cdot \ln(4x+1) + C}}$$

دویم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx \quad \text{Substitution: } u = 4-x$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du \quad u(0) = 4 \quad \text{پورته پوله } u(2) = 4-2 = 2$$

$$-4 \int_4^2 \frac{1}{u} du = 4 \int_2^4 \frac{1}{u} du = \left[4 \cdot \ln(u) \right]_2^4 = 4 \cdot \ln(4) - 4 \cdot \ln(2)$$

$$= 4[\ln(4) - \ln(2)] = 4 \cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) = 4 \cdot \ln(2) \approx \underline{\underline{2.773}}$$

دزیم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2} dx \quad \text{Substitution: } u = 1-x \quad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$\text{د } u=1-x \text{ سره} \quad -2 \int \frac{1}{u^2} du = -2 \int u^{-2} du = -2 \cdot \frac{1}{-1} \cdot u^{-1} = \frac{2}{u}$$

$$\int \frac{2}{(1-x)^2} dx = \underline{\underline{\frac{2}{1-x} + C}}$$

څلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx \quad \text{Substitution: } u = 2x-1 \quad \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\text{د } U=2x-1 \text{ سره} \quad \frac{6}{2} \int \frac{1}{u^3} du = 3 \int u^{-3} du = 3 \cdot \frac{1}{-2} \cdot u^{-2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx = \underline{\underline{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2x-1)^2} + C}}$$

پنځم:

$$\int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx \quad \text{Substitution: } u = x-4 \quad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

$$\text{لاندې پوله} \quad u(-2) = -2-4 = -6 \quad \text{پورته پوله} \quad u(2) = 2-4 = -2$$

$$\begin{aligned} 10 \int_{-6}^{-2} \frac{1}{u^5} du &= 10 \int_{-6}^{-2} u^{-5} du = \left[10 \cdot \frac{1}{-4} \cdot u^{-4} \right]_{-6}^{-2} = -\frac{5}{2} \cdot \left[\frac{1}{u^4} \right]_{-6}^{-2} \\ &= -\frac{5}{2} \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296} \right] = \underline{\underline{-\frac{25}{162} \approx -0,154}} \end{aligned}$$

شپيرم:

$$\int_{-2}^2 e^{1-x} dx \quad \text{Substitution: } u = 1-x \quad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

$$u(2) = 1-2 = -1 \text{ پورته پوله} \quad u(-2) = 1-(-2) = 3 \text{ لاندي پوله}$$

$$-\int_3^{-1} e^u du = \int_{-1}^3 e^u du = [e^u]_{-1}^3 = e^3 - e^{-1} \approx 19,718$$

اووم:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx \quad \text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$u(4)=2 \text{ پورته پوله} \quad u(0)=0 \text{ لاندي پوله}$$

$$2 \int_0^2 e^u du = 2[e^u]_0^2 = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = 2 \cdot e^2 - 2 \approx 12,778$$

اتم:

$$\int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{Substitution: } u = 4-2x \quad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

$$u(2)=4-4=0 \text{ پورته پوله} \quad u(1)=4-2=2 \text{ لاندي پوله}$$

$$-\frac{1}{2} \int_2^0 e^u du = \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du = \left[\frac{1}{2} e^u \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,195$$

نهم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx = 4 \int_1^2 e^{4-2x} dx \quad \text{Substitution: } u = 4 - 2x \quad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} du$$

$$u(2) = 4 - 4 = 0 \quad \text{پورته پوله} \quad u(1) = 4 - 2 = 2 \quad \text{لاندي پوله}$$

$$-4 \cdot \frac{1}{2} \int_2^0 e^u du = 2 \int_0^2 e^u du = \left[2e^u \right]_0^2 = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 = 2 \cdot e^2 - 2 \approx \underline{\underline{12.788}}$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx = \int_0^2 (x - 1) dx - \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$1. \text{ Integral: } \int_0^2 (x - 1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 - (0) = 0$$

$$2. \text{ Integral: } -\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx \quad \text{Substitution: } u = -\frac{1}{2}x \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

$$u(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \quad \text{پورته پوله} \quad u(0) = 0 \quad \text{لاندي پوله}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)(-2) \int_0^{-1} e^u du = 2 \int_0^{-1} e^u du = -2 \int_{-1}^0 e^u du = \left[-2e^u \right]_{-1}^0 \\ &= -2 \cdot e^0 - (-2 \cdot e^{-1}) = -2 + 2 \cdot e^{-1} \approx \underline{\underline{-1.264}} \end{aligned}$$

د توتۀ انتيګرالونء لپاره خو نورېط بيلګي

که چیرته د دوه توابعو انتیگرال غواړو وشمیرو، نو په زیاتو حالتونو کې دا تراوسه روښانه یا معلومه د انتیگرال لار مو بریا ته نه بیایي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

$$\text{Substitution: } u(x) = x^2 = u$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

جوړوو:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$\frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

د بدلون په بیرته په څنډ:

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}}$$

نو:

دا انتیگرال د بدلون قانون سره حل کیدی شي، دا چې د بدلون له لارې ضریب له منځه ځي. په عادي ډول دا حالت نه دی.

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x)) dx = ?$$

دا انتیگرال د بدلون له لارې نه شي حل کیدی. موږ د صرب قانون لپاره د مشتقشمیرني څخه یوه ایښوونې یا په ځای کونې ته وده ورکوو.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

د ثابتې په پام کې نه نیولو له امله د دفرنخیال او انتیگرال بنسټ حملي له لارې باور لري:

$$\int f'(x) dx = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ سره په دې پسي بايد هم باور ولري

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x)$$

د $\int u(x) \cdot v'(x) dx$ پسي د بڼه بدلون له امله راکوي:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

د $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ پسي د بڼه بدلون له امله راکوي:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

د دې بڼه بدلون په ريښتوني يا حقيقت کې دا د دوه ضربيونو انتيگرا ل حل نه شو، مگر د u او v' او په همدې توگه د u' او v هوښياره ټاکنه کيدی شي دا ويينه يا افاده داسې بڼه بدل شي، چې انتيگرا ل يې کيدی شي حل شي

بيلگه ۱

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx = \underbrace{x}_u \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{(x-1)e^x + C}}$$

بيلگه ۲

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{k \cdot x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{k \cdot x} \Rightarrow v = \int e^{k \cdot x} dx$$

د بدلون له لاي حل

$$v = \int e^{k \cdot x} dx$$

$$u = k \cdot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$$

بدلون

$$v = \int e^{k \cdot x} dx = \frac{1}{k} e^{k \cdot x}$$

په څټ يا بيرته بدلون:

$$\int x \cdot e^{k \cdot x} dx = u \cdot v - \int u' v dx = x \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} - \int 1 \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} dx = \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k} \underbrace{\int e^{k \cdot x} dx}_{\frac{1}{k} e^{k \cdot x}}$$

$$= \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} e^{k \cdot x} = \frac{x}{k} e^{k \cdot x} - \frac{1}{k^2} e^{k \cdot x} = \underline{\underline{\left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2} \right) e^{k \cdot x} + C}}$$

بيلگه ۳ :

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \ln(x) \Rightarrow v = x \cdot \ln(x) - x$$

$$\int x \cdot \ln(x) dx = x \cdot (x \cdot \ln(x) - x) - \int 1 \cdot (x \cdot \ln(x) - x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int x \cdot \ln(x) dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 - \int x \cdot \ln(x) dx + \int x dx \quad | + \int x \cdot \ln(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int x \cdot \ln(x) dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 + \frac{1}{2} x^2 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow \int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + C}} \quad (x > 0)$$

بیلگه ۴

$$\int \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' v dx \quad u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x} dx$$

منح شمیرنه

$$\int e^{2x} dx \quad \text{Substitution: } u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\boxed{\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}} \Rightarrow \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u$$

په خت بدلون

$$\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \underbrace{x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x}}_{u \cdot v} - \int \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_v dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \int x \cdot e^{2x} dx$$

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' v dx \quad u = x \Rightarrow u' = 1 \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

(پورته وگوری)

$$\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \underbrace{\int e^{2x} dx}_{\frac{1}{2} e^{2x}} = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \underbrace{\int x \cdot e^{2x} dx}_{\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}} = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 1) e^{2x} + C}}\end{aligned}$$

دا بيلگه ښايي، چې په انټيگرال کې زيات وخت ډېرې تلنلارې يو په بل پسې کارول کيږي. دا چې د ټوټه انټيگرال منځنۍ پايله (لاس ته راوړن) زيات وخت څرگند يا معلوم دي، سړی دې دا د يوه انټگرېشن جدول په بڼه په ياد کې وساتي.

د انټيگرېشن نورې تلنلارې او تخنيکونه هم شته، چې په دې ځای کې دې ترڅيړني لاندې دې نه نيول کيږي. د بيلگې په توگه دې ماتنسبي انټيگرېشن د ټوټه مات يا کسر ټوټه ونې په گوته شي.

يوڅو ناټاکلي انټيگرالونه:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \text{لومړۍ:}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad x \neq 0 \quad \text{دويم:}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{دريم:}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0; a \neq 1 \quad \text{څلورم:}$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad n \neq -1 \quad \text{پنځه}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad \text{شپږم:}$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{a(n+1)x-b}{a^2(n+1)(n+2)}(ax+b)^{n+1} + C \quad n \neq -1, -2 \quad \text{اووم:}$$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)} dx = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C \quad \text{ا تم:}$$

$$\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax+b| + C \quad \text{نهم:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx = 0 \quad \text{لسم:}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad \text{يولسم:}$$

$$\int x \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax-1) e^{ax} + C \quad \text{دولسم:}$$

$$\int_{-1}^1 a^x dx = \frac{a^2-1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0 \quad \text{ديارلسم:}$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C \quad x > 0 \quad \text{څوارلسم:}$$

$$\int [\ln(x)]^2 dx = x \cdot [\ln(x)]^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x + C \quad x > 0 \quad \text{پنځلسم:}$$

$$\int x^n \ln(x) dx = x^{n+1} \left(\frac{\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + C \quad x > 0; n \neq -1$$

شپارسم:

$$\int \frac{[\ln(x)]^n}{x} dx = \frac{[\ln(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad x > 0; n \neq -1$$

اولسم:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C \quad x > 1$$

اتلسم:

$$\int \frac{1}{x \cdot [\ln(x)]^n} = -\frac{1}{(n-1)[\ln(x)]^{n-1}} + C \quad x > 1; n \neq 1$$

نولسم:

يوڅو ټاکلي انتيگرالونه:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \pi \quad \text{دويم:} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

لمری:

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{څلورم:} \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \pi$$

دریم:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{شپږم:} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

پنځم:

$$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} dx = \frac{3}{8}a^2\pi \quad \text{اتم:} \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$$

اووم:

$$\int_0^{2b} \sqrt{2bx-x^2} dx = -\frac{b^2\pi}{2} \quad \text{لسم:} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx = 0$$

نهم:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n! \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{دولسم:} \quad \int_{-1}^1 a^x dx = \frac{a^2 - 1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0 \quad \text{يوولسم:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{خوارلسم:} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad \text{ديارلسم:}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1} dx = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{شپارلسم:} \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{پنځلسم:}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} \cdot \ln(2) \quad \text{اتلسم:} \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{اوولسم:}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{نولسم:}$$

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Interpolation und Aproximation durch Polynime in
Universalen Algebren . Diss . Uni. Wien

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

[2003 Bonn \(Germany\):](#)

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

[2003 Bonn \(Germany\):](#)

اتم: دفرنخیال برابر وړ (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

[Bonn \(Germany\): 2003](#)

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

[2003 Bonn \(Germany\):](#)

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

[1997 Bonn \(Germany\):](#)

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا

ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کېږي

بن- المان، کابل - افغانستان ۲۰۱۲ ز ک

ژباړې:

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

-
- ۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړۍ ټوک
 - ۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک
 - ۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک
 - ۴ - د احتمالي شمیرنه
 - ۵ - احصایه یا ستاتیستیک

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - انالیزی ۱
 - ۷ - انالیزی ۲
 - ۸ - کرینیز الجبر
 - ۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه
 - ۱۰ - د فرمولونو ټولګه
 - ۱۱ - فنکشنل انالیز
 - ۱۲ - وکتور شمیرنه
- نورې ژباړې
- ۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرینیز الجبر
 - ۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنی

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه
۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.
نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اومم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميري شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کي د شینوارو هسکه مینه کي دې نړۍ ته سترگي راغړولي.

د هسکي مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه وو) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سېپتمبر د کابل طب پوهنځۍ. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

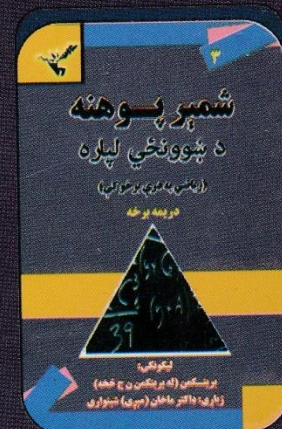
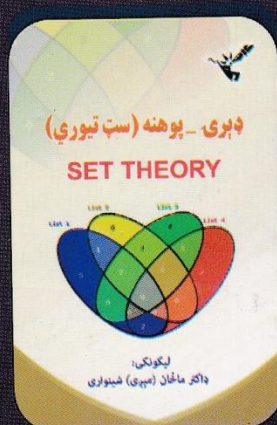
ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لري د میرمن ښاپیری سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانگه او اباسین نومیري. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه ساتي.



ډاکټر ماخان (مېري) شينواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه - جرمني

VEREIN ZUR FÖRDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۲۹)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library