څمککچپوهنه(هندسه)

Geometry

ليکونکی:

ډاکتر ماخان (ميرزی) شينواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

ليکونکی:
ډاکتر ماخان (ميرزي) شينواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمی

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نیمه – یا نیمهواره ۷

کونجکلیمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

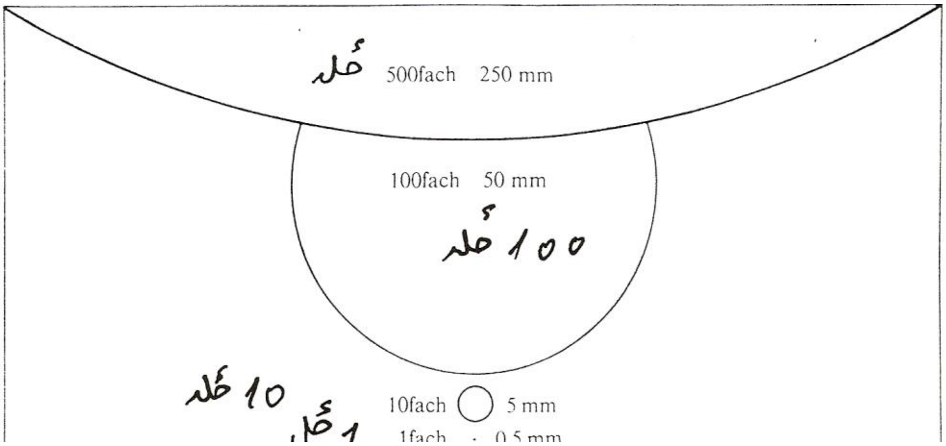
ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

پيژند(تعريف): اويکليد(Euklid) اويکليد وايي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کيدی. ددې پيژند ستونځی په دې کې دي، چی بيا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړيدلی شي. يعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتين Atom نه ويشونکی) وي بيا نو ځنګه کيدی شي چی پراخه شي يا وغزيږي؟ يا يی که مايکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نيوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ويستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزيدلی يا پراخيدلی شي، لکه څنګه چی لوييدل يعنی غټيدلی شي:
په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شميروني له لارې څومره غټيدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وایي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنیو پوهیدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چې په هندسه کی ډیرڅه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي).
لنډ: شیان یا لیدیدونکي»رانیولوړ «(یا شي ډوله ځرګندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی یي دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګوندې دا شکلونه لیدوړ او نیولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله خته کی) خورا پیچلي دي چی یواځی ور نږدې پیژند(تعریف) یی کیدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې ځیره کی د ټکی غټیدل یا لوییدل ښایو



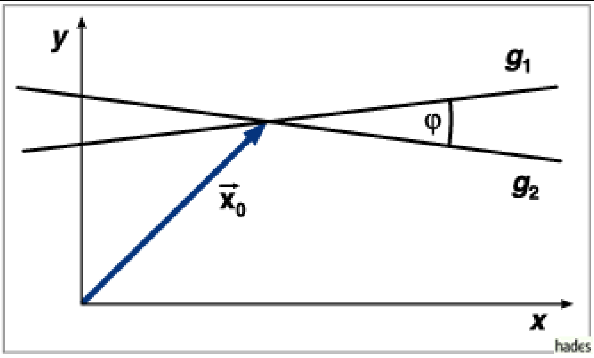
ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخیدلی شي یعني عملي ځیره ښوونه یا شکل نخښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره (ټیك) ښوونه یي ضرور ده ، یا نه پریښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کی د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکی ادیاله(خیالي)ځیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډیرۍ کنځیت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (ځیرو) لاندې ، د ټکو ډیری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیرۍ٠ داسی تعریفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند(تعريف) :
يوه هواره يا سطحه د يوې ډيرۍ په څير کلکه نيسو، چې توکی يی ټکی بللکيږي. او په غټو لاتين تورو يی ښايو لکه .....,A,B,C,P,Q ، په هواره کی يوه برخډيری په نخښنه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کيږي او په کوچنيو لاتيني تورو..... , a , b , c سره ښوول کيږي
يا په بل ډول :يوه هواره E د ناپاى ټکو ډيرۍ ده. د هوارې هره برخه (چې پخپله پاى يا ناپاى کيدی شي) د هوارې يا سطحې څيره (فيګور يا شکل) بلل کيږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بيلګې په توګه د کاغذ دمخ (تخنيکي بنديزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندۍ لپاره بايد بيا دا کاغذ هرې لور ته ناپاى غزيدل شوی وي او پنډوالی يی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې يوه هواره دوه ديمينزيونال ده) دوه اړخيز يا دلته ښه دی چې د اړخ په ځاي خوا ووايو، ځکه چې اړخ مو د-n ګوډيو لپاره کارولی دی. د لته يی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی . (په دې کتاب کی او بيا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تيريږو او هغه څه چې خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

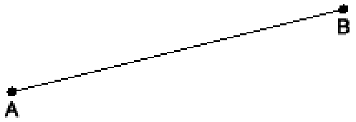
لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه ترې جوړيدی شي او له دې امله ټکی دهوارې يا سطحې، چې د ټکوډيری جوړوي، توکی دی۰



ټکی د دوه کرخو غوڅې له لارې انځوريدی شي ۰ که دوه کرښې g او h په P کې غوڅې کړي، نو د دې لپاره داسې ليکو:
h = { P □ g}
يا لاندې انځورونه
په لاندې ځيره کې g_1 او g_2
په يوه ټکي کې سره غوڅوي

پيژند :
ټوټه کرښه (پاى کرښه يا بنده کرښه) دAB ټولو ټکو هغه ډيری ده، چې له ټکيAو B ته د هوارې يا سطحې په دننه کی لنډ واټن يا - فاصله وهي، يعني که دا دواړه ټکي يو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چې د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. يعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسې ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A € AB; B € AB یا هغه کرښه، چي دوه ټکی په لنډ واټن کي سره وتړي بندکرښه بلل کیږي، ټکي د کرښي توکي دي	

که بند کرښه د «ځیرکرښي» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کیږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیدلی شي، چي موږ دا کرښه بولو۰

کرښه د ځمککچپوهني بنسټیزه کلیمه ده۰ لیدوږ د اویکلید جیومتري کي دا یوه ناپای غزیدلی کرښی ته وایي، چي ناپای نرۍ وي، د لاندي خویونو سره:
که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لنډ واټن په نخښه کوي، چي موږ ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو۰

دا کلیمه ټیک زموږ پیژند نه راکوي۰ اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چي کرښه او ټکی داسي ورکړ شوي، چي مخ د مخه یي پیژند څرګند ورکړ شوی او نیول شوی یاني موږ یي پیژنو ۰

پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپایکرښه) AB یا g ویل کیږي. بندکرښه نو بیا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخډیری ده۰

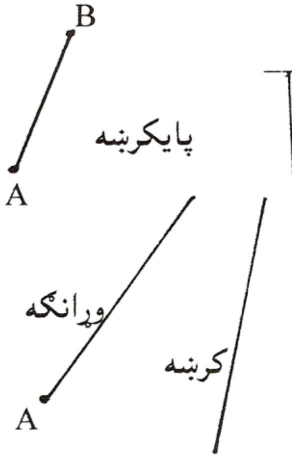
په نخښونه یې g (برخډېرۍ)□ AB

طبعآ کیدی شي، چی کرښه په یوه لور وغزول شي

پیژند :

که بندکرښه یواځي په یوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نیمکرښهشي (ناپاي) نیمکرښه یا وړانګه(شعاع) بلل کیږي. نیمکرښه یا وړانګه یوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعني پیل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

	لنډ: د بندکرښی دواړه لورې بندې ، د نیم کرښې یوه لور بنده او بله وازه او دکرښي دواړه لورې وازي دي. په پورته ځیرو کې د بند کرښی، وړانګې او کرښی توپیر څرګند دی٠ نیمکرښه د کرښی برخډیری دی

که په یوه هواره کی په یوه کرښه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کرښهgپروت دی یاgلهPتیریږي او gد هوارېEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«څخه غږیږو٠
که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار(kollinear() کومپلانار(چې په همغه هواره یا ستڅه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کرښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوځټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

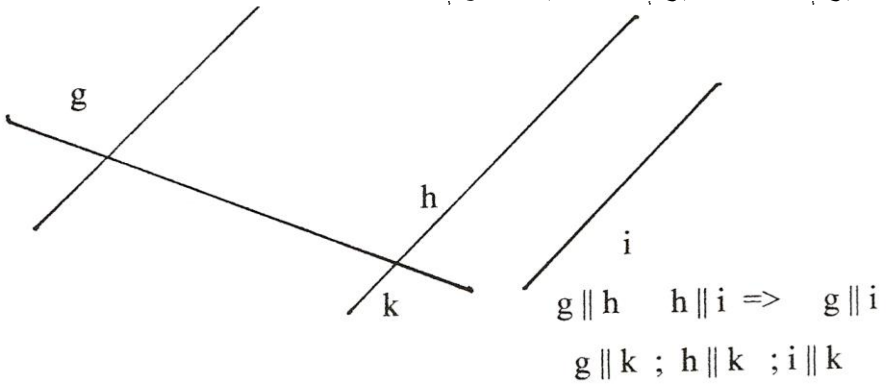
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاںکرښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوځډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکرښی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاںکرښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي٠

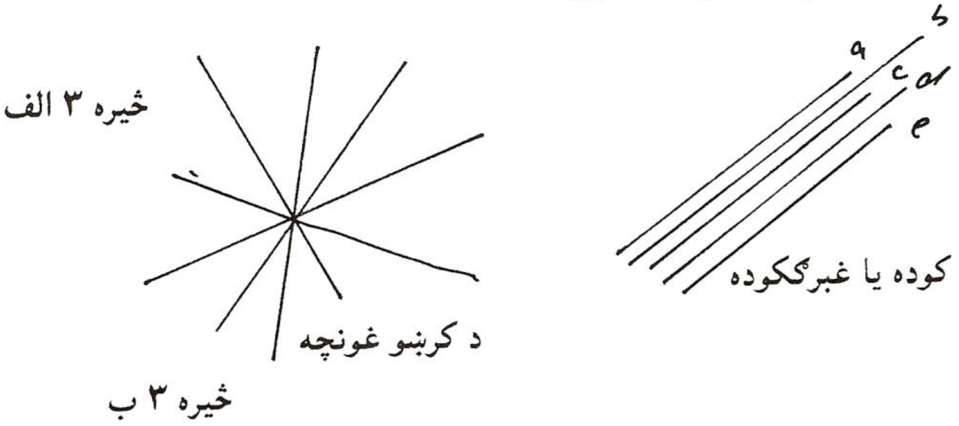
د کرښو کوده(ځېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند(تعریف) : کرښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکرښی (موازیکرښی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښی د ناپای ډیرو غوټکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی۰
ددې لپاره لیکو: g = h
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)۰
د لاندې ځیرې شننه د ځیرې کښته لیکل شوې:





هندسی ځیره : یوه هندسي ځیره یوه ناتش ټکیډیری ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي ځیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ۰ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده۰

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $A < B$ په دې مانا ده چې « A په یوه کرښه g د B تر مخ یعني ځمونږ په بلد دود، کیڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چې په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکی له لارې لوریزې کرښې ته راځو. دا په دې مانا چې داسې کرښې لوریزې کرښې دي. یعني په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یې څرګند دی.

منځ اړیکی Wz(ABC) دا مانا لري چې یا $A<B<C$ او یا $A>B>C$. دا په دې مانا، چې هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدی شي یعنی سمت یې ټاکل کیدی شي.

تعریف : g دې یوه لوریزه کرښه وي او A دې د g یو ټکی وي، نو د A بدل یا توپیري ټکی کرښه g په دوه برخېیریو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \qquad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخېیریو ته ټکی A ورزیات شي، نو له A څخه په g پیداشوې وړانګې منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیلټکی A او له دې توپیر ټکی $P(P \,|\!= A)$ له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څیرونه کی زیاته کاروول کیږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګې توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کیږي. دې AP ته مخامخ یا په څټ وړانګه په AP ښوول کیږي.

تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چی د پای کربښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکربښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کربښه په AB ښایو د کربښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکربښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په شټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

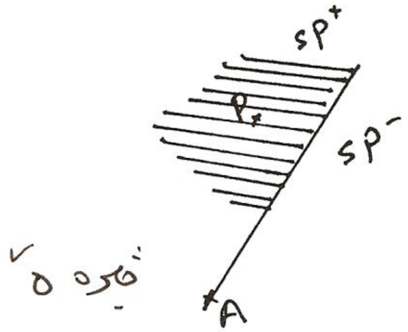
تعریف : هره کربښه g په هغي کربښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کربښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکربښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کربښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکربښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په شټ نیمهوارې بلل کیري.

که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کربښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکربښي او یوه ټکی P له لارې (چي په ژیکربښه g نه وي پروت) یواځنی ټاکلی ده، یعني له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

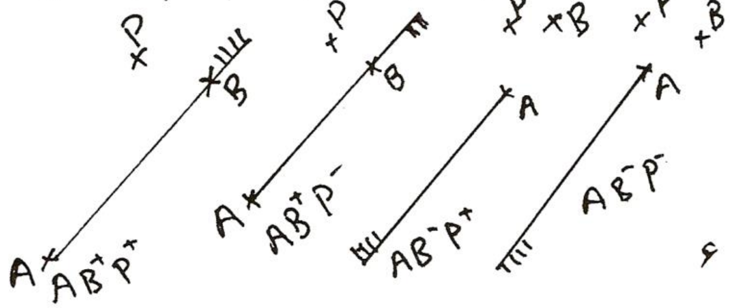
یو ټکیدیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګي، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانکی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکربښه د وړانګي وړونکی کربښه بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي. جنډه د همغې وړونکې وړانګې یا ژیوړانګي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ یا په څټ ده ، د sP^- سره ښایو. (خیره: ۵)

که په sP^+ همداسی sP^- سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینښوول شوی سومبول، چې له A و B ته خي او AB^+ همداسی AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^- ;AB^+P^+ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کارږو:

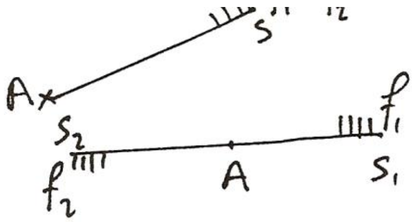


خیره ۶

دلوړ خیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دې، ځکه چې وړونکی وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په څټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي).

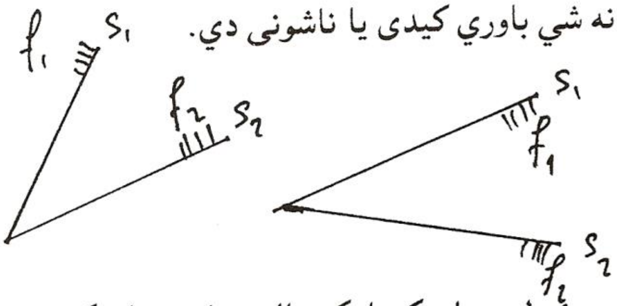
دوه بیرغونه (f_1 , f_2 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په څټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثیره ۷

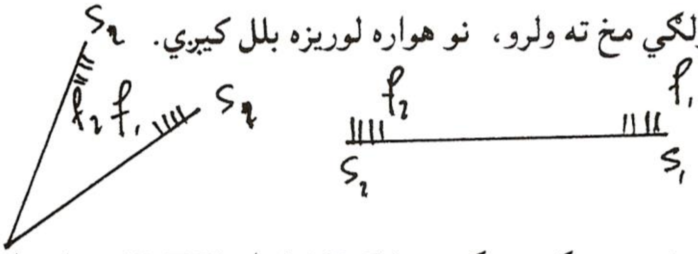
دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارې
ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي
، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.



ثیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په
دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.
هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په څټلوریز
بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په څټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



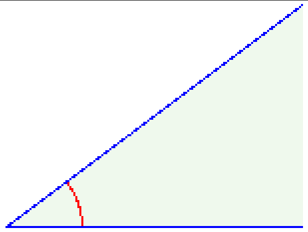
ثیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیک هلته یا
هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

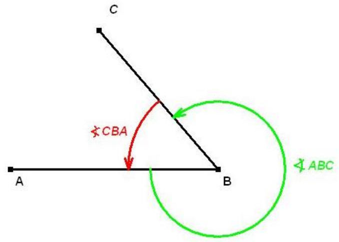
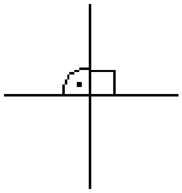
جنډې ABC او DEF همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه كولينيار يا كولايني دريګوټېكو (A,B,C) څرخونموخې لاندې د جنډې ABC لوريزتولګي پوهيږو.

کونجکلیمه

پیژند (تعریف): په یوه هواره کي، چی دوه وړانګی S 1 او S2 یاني S1/\ S2 د پیل غوښتکی S ولري په هواره یا سطحه E کی کونج β جوړوي .وړانګي د کونج پینی بلل کیږي او پیلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کیږي.	

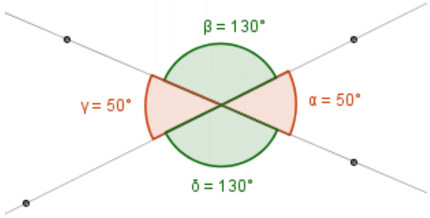
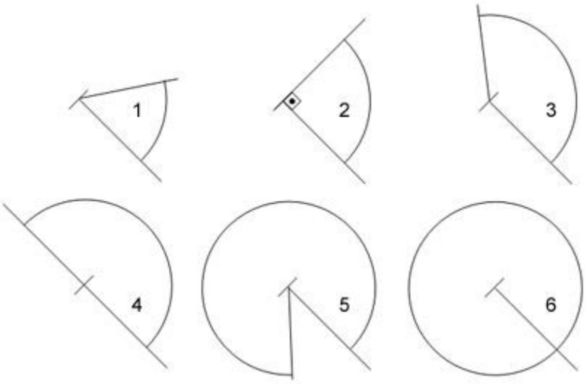
لنډ: دوه کربښي، چي په یوه ټکي کي سره غوڅي کړي، کونج جوړوي، چي کربښي د کونج پینې او غوڅټکی يي د کونج ککره یا (رآس الزاویه) بلل کړي ۰ پورته څیره دې وکتل شي۰کونجونه په ګراد (لاتین پل یا لاقدم)کچیږي

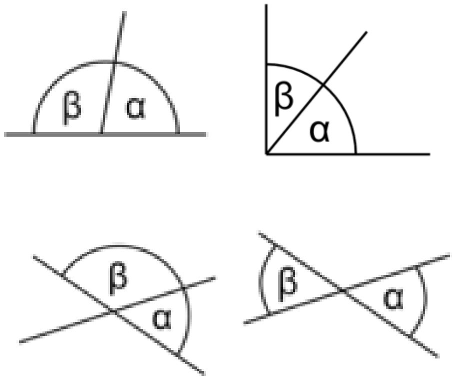
د کونجونو رسمونه او نومه وني

هغه کونج ، چي له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغي ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چي له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تیره کونج، چي له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چي پوره ۹۰ درجي دی، پڅکونج، چي له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزیدلی کونج، چي ۱۸۰ درجي دی ، له پڅ زیات- یا د پڅ په څټ- یا له پڅ اخوا کونج ، چي له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چي ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چۀ صفرکونج صفر دی۰	 

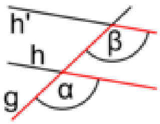
یادونه: دا مي ډیر تکرار راوړی، هیله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

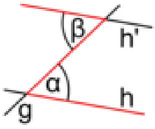
(c) ketabton.com: The Digital Library

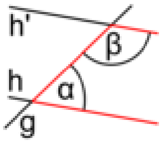
مخامخ څیره : ککر په ککر کونجونه یورنګیزدي، بدلرنګیز کونجونه ګاونډي بلل کیږي۰	
لاندې کونجونه پخپله ونوموی‌کړی ۰	

کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه(مخامخ څیره دي وکتل شي)۰ په څنګ کې يې سوپلیمنت یا ۱۸۰ درجو ته پوره کیدونکی کونجونه ۰مخامخ څیره ۰ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه۰ کیڼ لور ته : ګاونډي کونجونه	

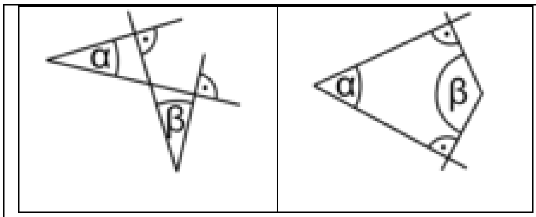
له کیڼ څخه و ښی لور : پوریز کونجونه ، ردبدلکونجونه







(c) ketabton.com: The Digital Library

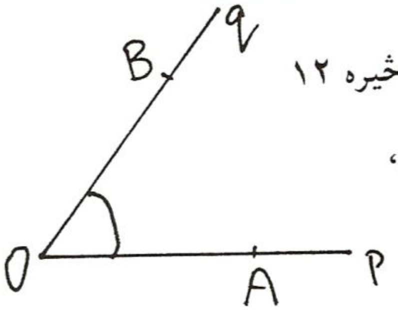
	مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي۰ په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي۰

یادونه : ګران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، ځکه چۀ په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهیږم، یواځې له قایم الزاویه ښخه پرته۰

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړی پرلپسی کره تاکلي او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده تاکلی

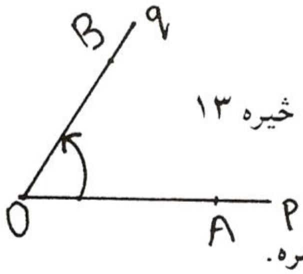


خیره ۱۲

بنسټیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښنوني

د B ∈ q , A ∈ p سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښی دي.

د پښو لړی پرلپسی کره تاکلی ده:
لوریز بنسټیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د ∢(p,q)
یا AOB ∢ په نخښنونی د A ∈ p او B ∈ q سره.



خیره ۱۳

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

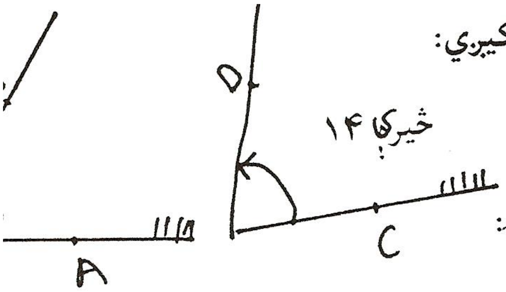
شمیرپو هنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د ځرخون لور چی د ساعت ځرخیو مخامخ یا په بل ډول په ځتې ځغلی

مثبتلوریز او هغه چې د ساعتځرخیو په لور ځغلي مفي لوریز ځرخون بلل کیږي.

دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

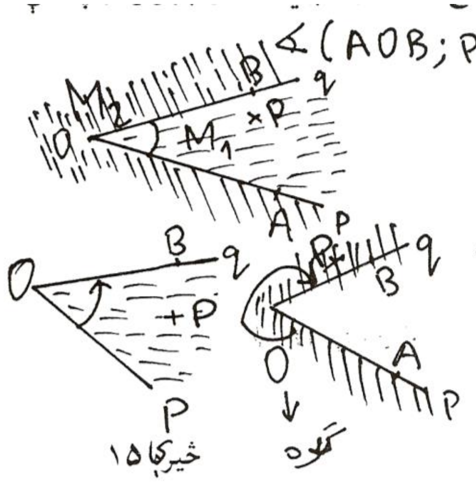
لکه په دې ځیره کی چی لیدل کیږي:



د کونج دننه په نخښنه شوی دی:

د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کونج
بنستېیز کونج هواره په دوه برخهیریو M_1 او M_2 ویشي. په نخښنه برخه
بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهواره

نخښونه کي: ∡(P,q; P)، ∡(AOB;P)
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .

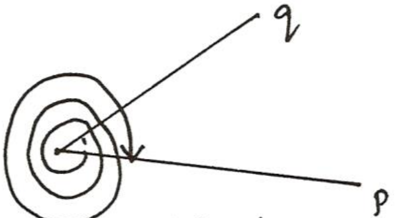


د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په نخښونه ∡(P,q;P)
لوریز بنستېیز کونج او دننه یی په
نخښونهP≠q، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. (P≠q)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:



څیره ۱۶

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.

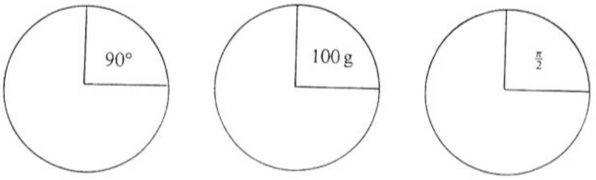
ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په ٍ360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) 1°= 60’ او کونجدقیقه په 60" کونجڅانیو(1’= 60’’).

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .څیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیرې ۱۷

لینده کچRAD　　　نوی ګراد GRAD　　　زوړ ګراد DEG

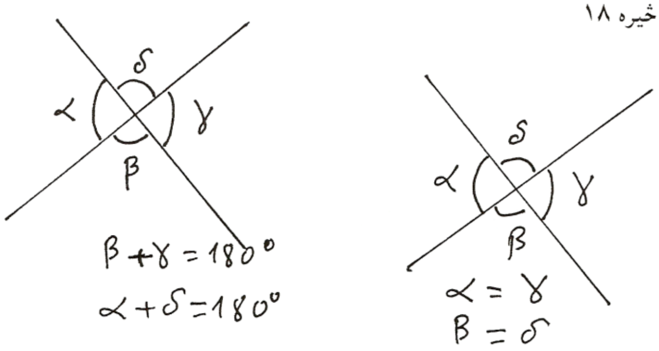
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کموننخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي څرخونلورې څخه لاس ته راځي. کیڼ څرخون (د ساعت د څرخی په څېڅرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی څرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا ځیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي۰(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |5-|$, $3 = |3|$دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په ټولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غبرګیزو نو موخه به مو وړوکی کونج وي۰

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کي کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ۰

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرېکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

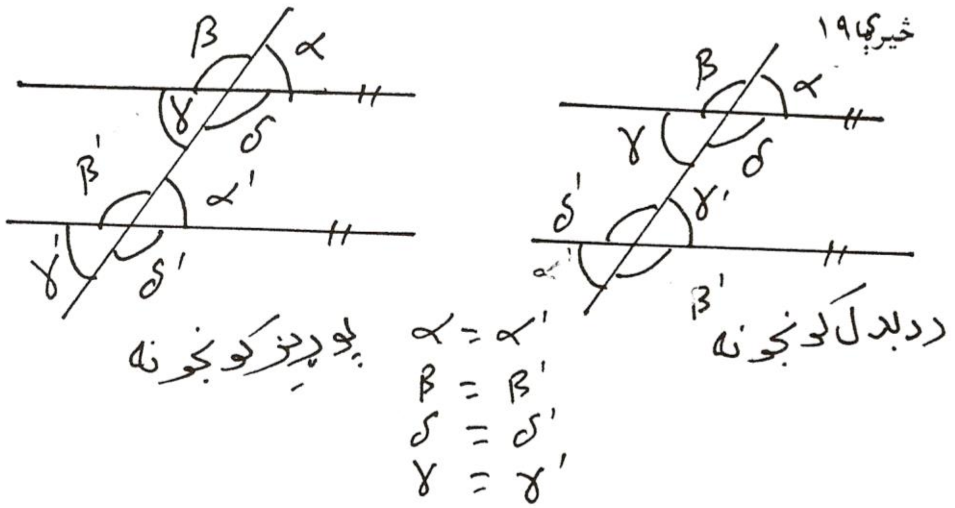
خیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيره‌کونجونه چې ځانونه 180° ته پوره کوي سوپليمينت (Supplementwinkel) بلل کيږي او کونجونه چې ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپليمينتکونجونه (Komplementwinkel)بلل کيږي. دې دواړو کونجونو ته تر يوه نامه لاندې چې راشي پوره کوونکی کونجونه وايي .که دوه غبرگی کربنی g اوh د يوې بلی ناپايکربني k له خوا غوځی شي، نو څلور دننه پريکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ، او د k په مختلفو خواوو(او څلور دباندې پريکونجونه)نه د غبرگکربنو g او hترمنځ، بلکه له دوي دباندې(د k په يوه لور يو دباندنی او يو دننه غوځ- يا پريکونجونه پوړيزکونجونه بلل کيږي، دوه دننني يا دوه دباندنی غوځ- يا پريکونجونه چې د k په بيلو لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کيږي(ځېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړيز- او رد بدل کونجونه په غوځغبرگکربنو(غبرگي کربني، چې له دې کربني غوځي شوي دي) کې سره برابر دي



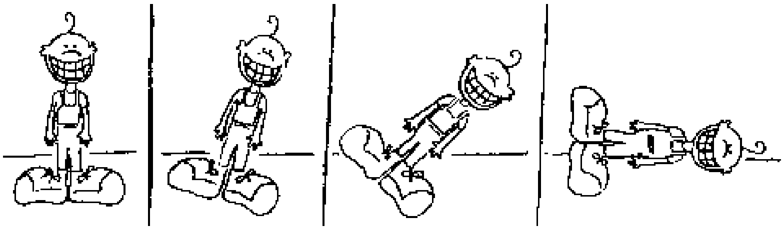
کونج کلمه

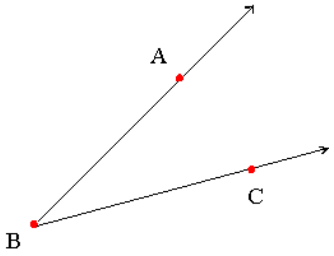
What is an Angleکونج څه شی دی ?

يادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بيا بيا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري۰

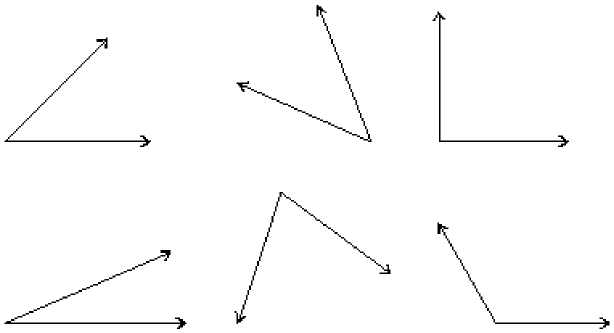
دوه وړانگی، چې يو پای لري او سره غوځي کړي کونج جوړوي۰ وړانگی د کونج پښې يا اړخونه بلل کږي او هغه ټکی، چې هلته کربنی غوځوي ککرټکی يې بولو۰

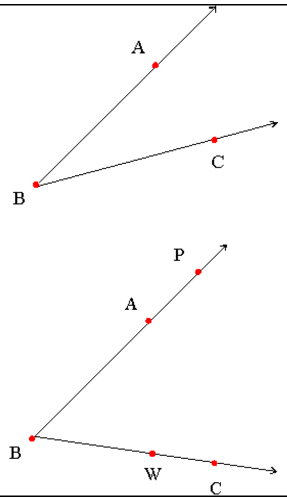
(c) ketabton.com: The Digital Library





Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .





که توري د کونج په خوله کي راشي بنه به وي، خودا هم د لیکني ستونځي دي، چي زه ورسره لاس پهګریوان یم، ABC∠ کونجونه داسي بنایو

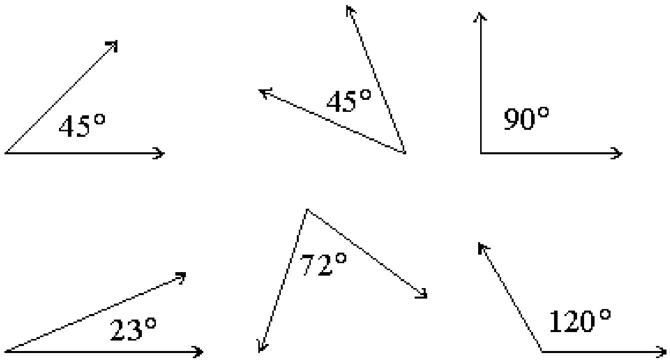
Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه

WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

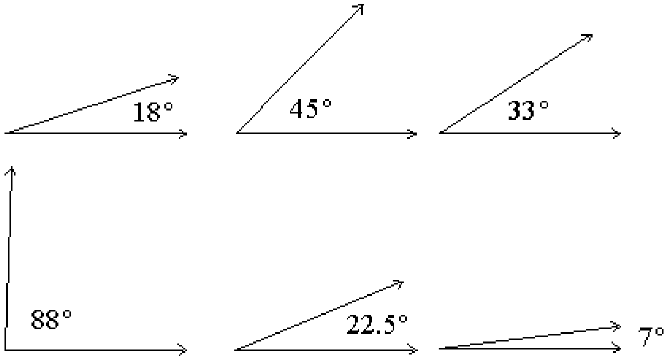
Degrees: د کونج کچوني یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیږي

Example په لاندي کي ځني بيلګي :



تیره کونج ، چي د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Acute Angles

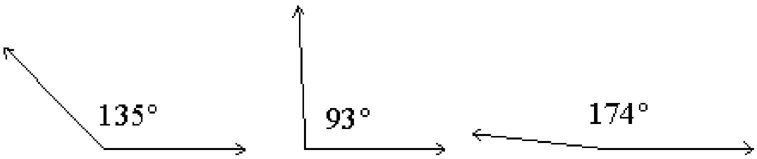
Example لاندې کونجونه تیره دي .



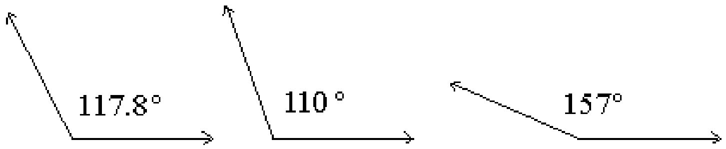
Obtuse Angles پڅ کونجونه

پڅ کونجونه ، حي د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پڅ کونجونه بلل کيږي.

Example لاندې کونجونه توليڅ کونجونه دي:

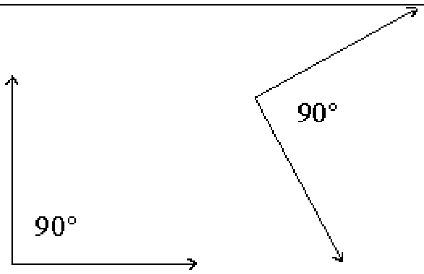


(c) ketabton.com: The Digital Library



Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چې ۹۰ درجې وي

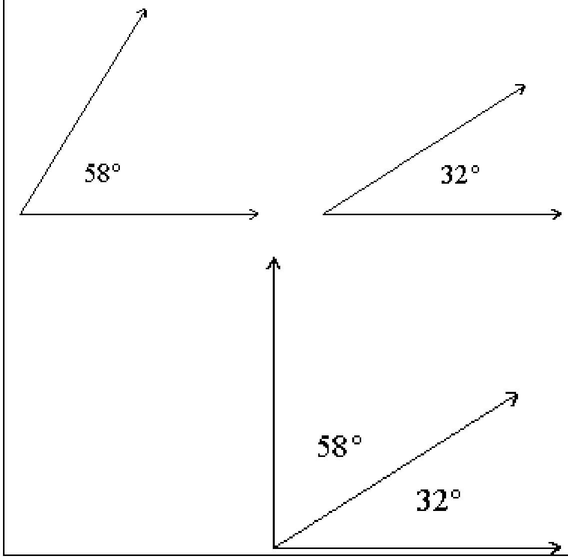
لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه دي:Example



Complementary Anglesکمپلیمنت کونجونه: هغه کونجونه، چې یو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپلیمنټکونجونه بلل کیږي٠ یو کونج د بل کونج کمپلیمنت بلل کیږي

بیلګهExample: دا مخامخ دوه کونجونه کمپلیمنت کونجونه دي

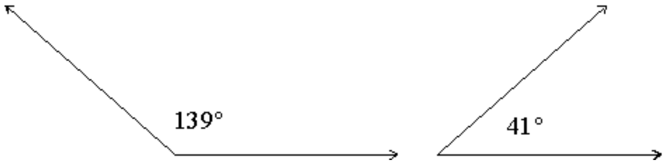
دوه کونجونه، چې داسې سره یوځای شي،چې یو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه یو له بل سره کمپلیمنت دي!



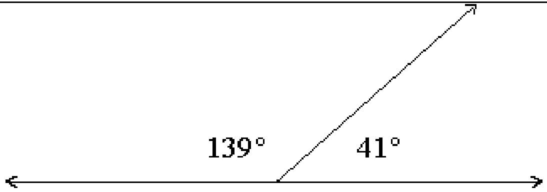
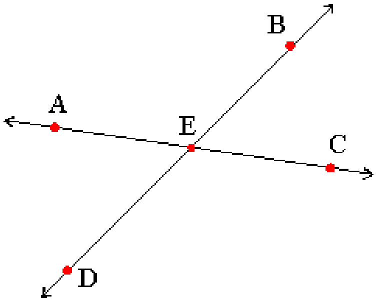
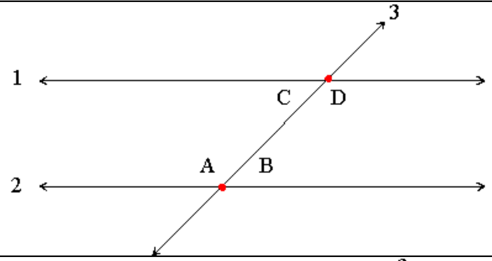
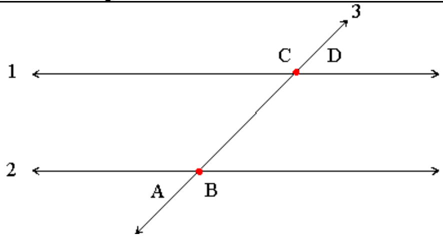
Supplementary Anglesسوپلیمنت کونجونه :

هغه کونجونه، چې ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپلیمنت کونجونه بلل کیږي

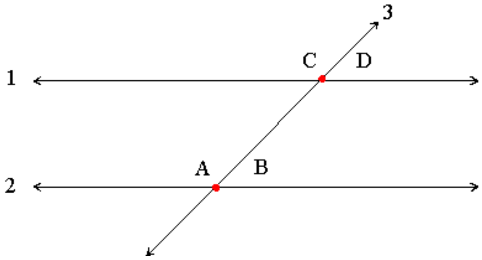
بیلګه Example: لاندې دوه کونجونه سوپلیمنت دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

 	داسي دوه سره ترلي کونجونه، چې ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي Vertical Anglesککر په ککر کوجونه: چې دوه کرښې داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندې ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.
	Alternate Interior Anglesر بدل دننه کونجونه : په لاندې کې کونجونه Aاو Dهمداسي B او C ردبدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي.
	Alternate Exterior Angles ردبدل دباندې کونجونه : په لاندې کې کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي

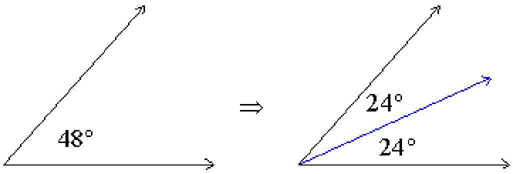
پوړيز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوړيز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



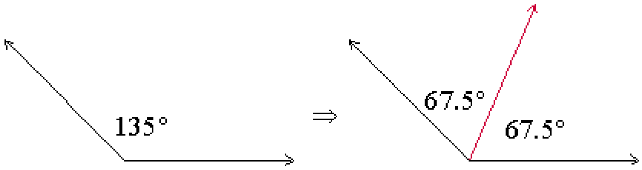
(c) ketabton.com: The Digital Library

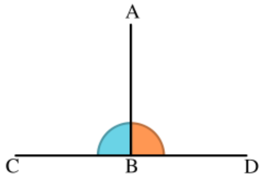
Angle Bisectorکونجنیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجنیمی یې بولو

بیلګه Example: د ښی کونج شنه کرښه ، د کیڼ کونج نیمی ده



په ښي کونج کې سره کرښه د کیڼ کونج نیمی ده .



	Orthogonal or Perpendicular Lines ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولاړې وي پرپینډکیولار نومیږي٠(زما وړاندیز: نیغې ولاړې کرښې)

نښلونه:

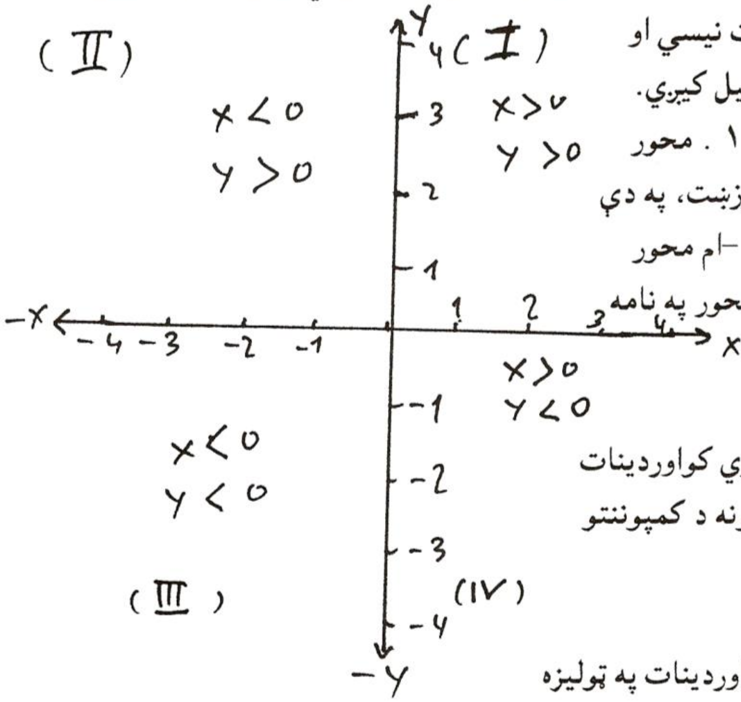
کواوردینات سیستم

یادونه: کواوردینات سیستم څخه څموږ موخه پروتولاړسیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسې یادیږي. ما دا دواړه ترمینولوژي کارولې، هیله ده چې ستونځې به پیښې نه کړي.

د شمیرپوهنې او همدا ډول د تخنیک په ډیرو څانګو کې د کواوردینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د هوارې هر ټکی P د خپلو دواړو کواوردیناتو(x,y) ورکولوسره کره یا ټیک ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا ابسخیز (Abszisse) د x –ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ : ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او

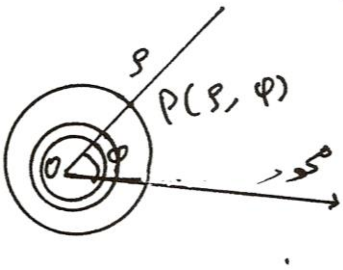


د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.

څیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

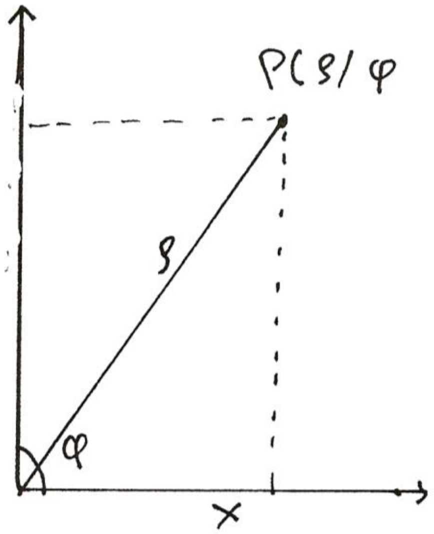
د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، ځکه چې دا کپموننتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپموننت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپموننت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنستیزی جملی شمیراړونی (څیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



څیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۴

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و کارتیزي کواوردینات ته

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کربښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړې وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

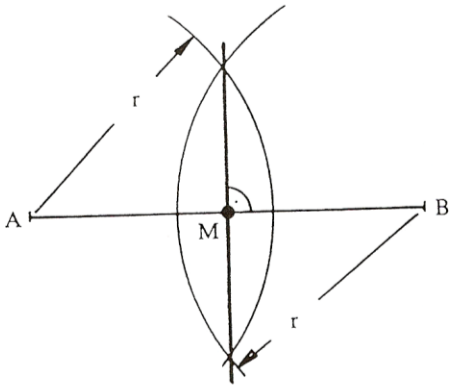
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – د AB کرښې نیمول او

۲ – د منځ ولاړکرښې کښل

د A او B په هر ټکي یوه ګردۍ د وړانګی $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی (سیومتري دوه ګردۍ ځیرې)

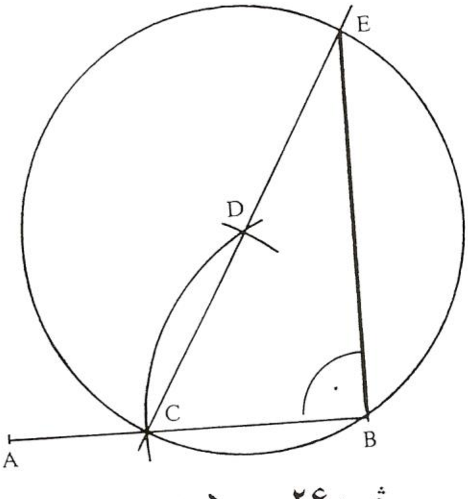
د دواړو ټکو تړلکرښه په غوځټکی M کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده او دا کرښه په M کی نیموي.



ځیره ۲۵

۳ – د یوې کرښې په سرټکي کی د ولاړکرښې جوړول (یا کښل). په B یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وروسي بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D کی پرې کړي. D د دریمی ګردۍ منځ ټکی دی د وړانګی r = CD

سره. چی CD غزولشوې تر ګردۍ په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس ګردۍ دې وکتل شي)



ځیره ۲۶

(۳ – یو دې اړمند)

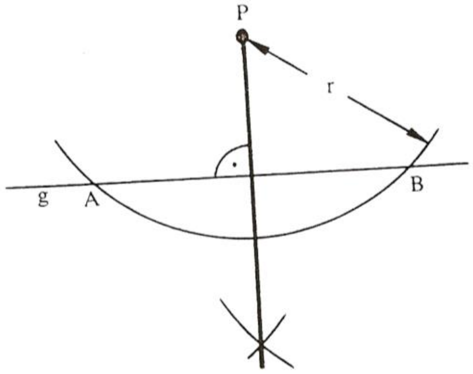
۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$).

په P کی په وړانګه r یوه ګردۍ ووهی، چی هغه د g له فاصلې (واټن) لوی وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.

اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو:

لکه د (۳) لاندې په کرښې او هندسي دریکوړي.

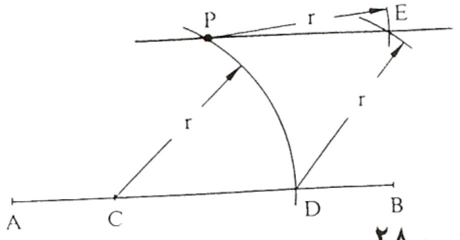
(c) ketabton.com: The Digital Library



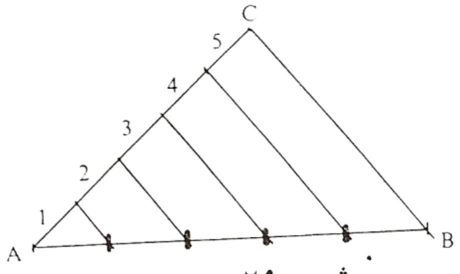
خیره ۲۷

۵ – د AB کرښې سره دټکي P ∉ AB یوه غبرګکرښه جوړول(کښل): د خوښې په یوه ټکي C ∈ AB د وړانګی |r = |CP یوه ګردي ووهی چی کرښه AB په D کی پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهی چی یو بل سره د E په ټکی کی غو څوي. دا د PE کرښه د AB کرښې سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوټي جوړول دې).

الترناتیو : لکه په(۴) کی په ټکي P کی ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسی نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.



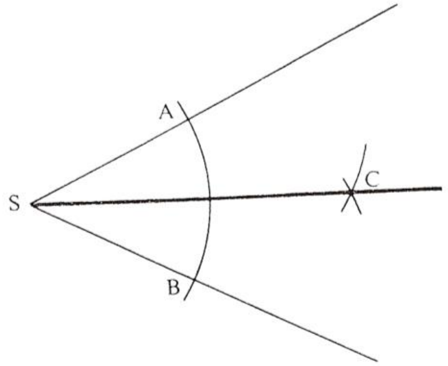
څیره ۲۸



څیره ۲۹

۶ – د یوې کرښې AB ویشل په n مساوي برخو(د بیلګي په توګه ۵) د A ټکی څخه یوه د خوښې وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوړدې کرښې ووهی. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښې سره غبرګی کرښې وکاږی، دا غبرګی کرښې د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



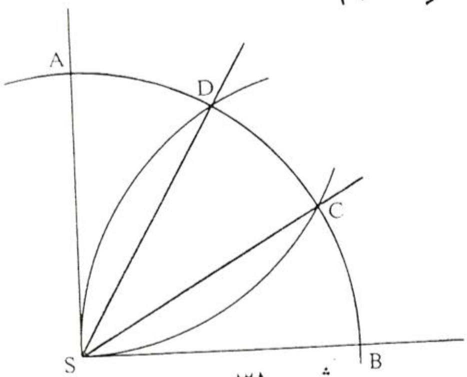
شکل ۳۲

۷ – د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښی ګردیلینده ووهئ چی یو بل سره په C کي پرې کړي، پریتکی د S سره وتړی.

۸ – یو ولاړګوډی په دري مساوي برخو هره 30° وویشی

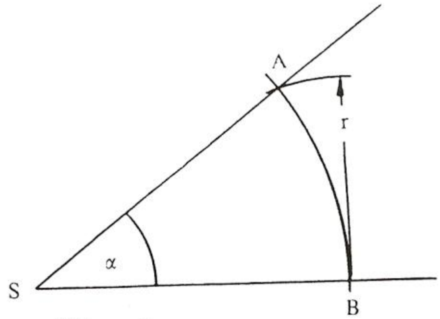
په ککره S باندې یوه د خوښی ګردیلینده وباسی چی دواړه پښی په B او B کي پری یا غوڅی کړي او له



شیره ۳۱

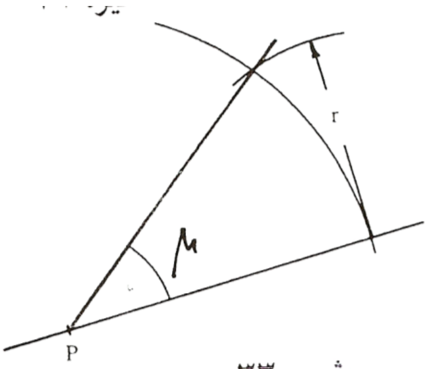
دې وروسته د څرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګی وکاږی، دا دوه وړانګی دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابو برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخی او کرښي باندې په درې مساوي برخو نه



شره ۳۲

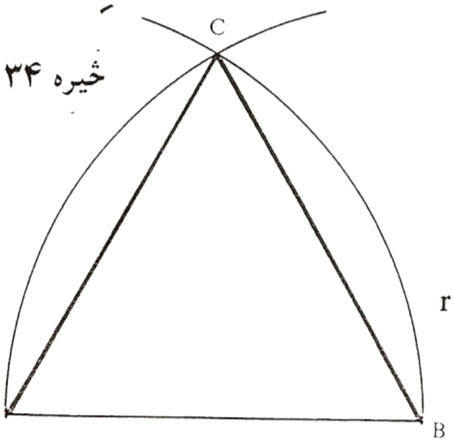
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۳۳

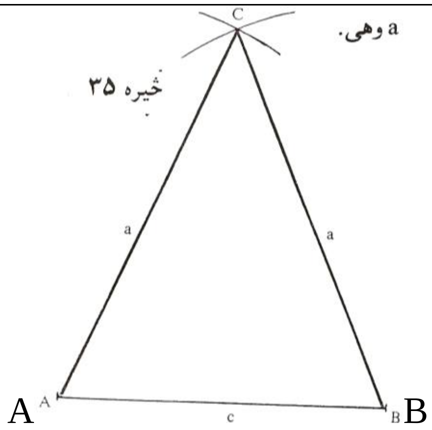
ویشل کیږي، ددې لپاره بیا الجبري
مواد په کار دي.

۹ – د µ کونج په یوه ټکي P
وغزوی، د ورکړشوي کونج په
ککره S باندې یو ګردیلینده
ووهي چې پښې یې په A او B
کې پرې کړي، بیا نو په همغه
ګردۍ ووهی چې څرخی د |AB|
په اندازه وي. اوس نو دا پریټکی
د P سره وتړی.



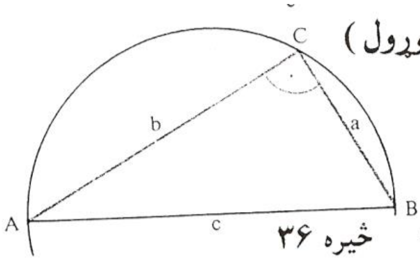
ثیره ۳۴

۱۰ – د مساوي اړخيز درېګوډي
کنبل: په A او B باندې یوه
ګردیلینده ووهی چې وړانګه یې r = |AB|
وي ، چې یو بل په ټکي C کی پرې کړي.

 خیره ۳۵	بیانوC دA او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښیز درېګوډی انځوریږي، د ورکړشوي بستټ AB=c سره. په A او B یوه یوه پښه وه,

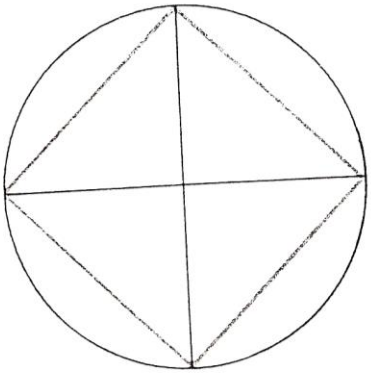
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – د ولاړکونجیز درېګوډي کښل (جوړول)



هر درېګوډی چي اوږد اړخ یی د یوه ګردي قطر وي، ولاړکونجیز درېګوډی دی.
(د تالس (Thales) جمله ودودسته راغی

څیره ۳۶



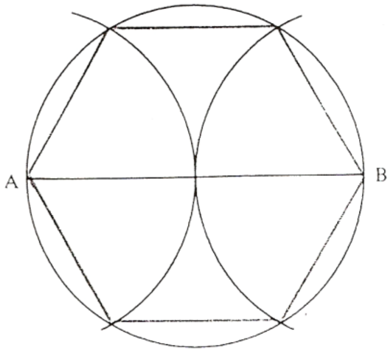
څیره ۳۷

۱۲ – په ګردی کی د یوې مربع کښل

د ګردی په منځټکي باندې لکه په (۲) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چی ګردی پرې کړی سره ونښلوی.

۱۳ – په یوې ورکړ شوې ګردی کی دمنظم پنځه ګوډی کښل:

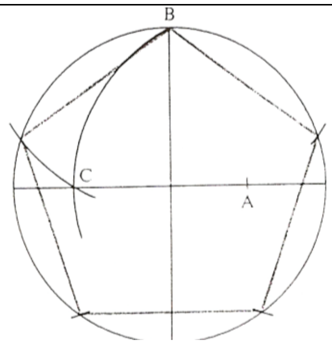
د ګردی وړانګه په A کی نیمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوډي د اړخ اوږدوالی دی.
(څیره ۳۹)



څیره ۳۸

۱۴ – په ګری کې د منظمم درېګوډي کښل:

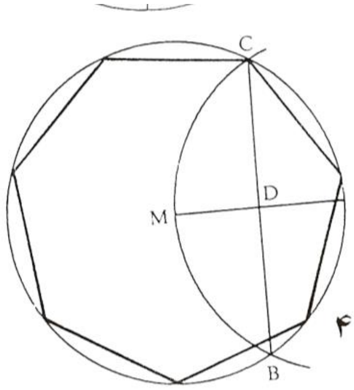
د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لینده ووهی. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوییوځای کول منظم شپږګوډۍ چوړوي.



۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

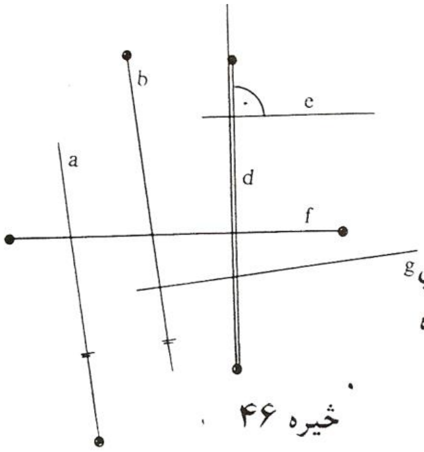
جوړول یا کښل:

د ورکړ شوې ګردي دنیمي اخر ټکی A
څخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده
ووهی چې ګردی په B او C کي پرې
کوي. د BC کرښه د AM وړانګه
په D کي په ولاړکونجي غوڅوي،
پس |BD| د مساوي اوه ګوټيز د اړخ اوږدوالی دی.



شیره ۴۰

تمرینونه



شیره ۴۶

۱ – په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

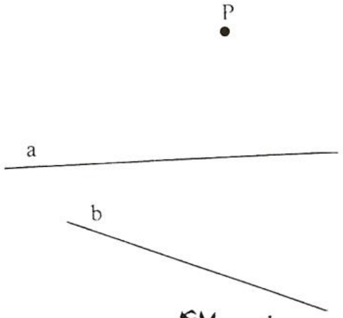
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چې له A وبه B ته ځغلي، پروت دی،

۲ – په شیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟

۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (شیره ۴۷)



شیره ۴۷

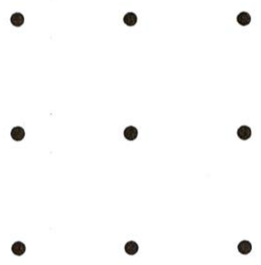
۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

الف – یوه ولاړه

ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (شیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومې لورې یو په بل
ولاړې دي؟
۶ – داسې کرښه لار (چې یو بل سره
ترلې وي) وباسې، چې له ټولو
په ځیره ۴۹ کې ورکړ شوو۹
ټکو تیرېږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



ځیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی ځیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او
په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

۱ – د یوې هندسي ځیرې (کرښې، هوارې ، وړانګې ناپایکرښې، نیمهوارې) ځیره ډېري لاندې، یوه هغه هندسي ځیره پوهیږو، د کومې چې په غوښتونکې ځیره ډېري ژیکرښې پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښې ، پیلټکي ، پایټکي باندې ځیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټيك يوه تلنه شته~~ نو ټيك يوه تلنهφ شته، د $\varphi(f_1) = f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنهφ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګې وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډېرې، د یو په بل پسې ځیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکوال الجبر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړې ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

- راکښنه ، چې د τ سره يې ښايو
- ايينونه يا هندارونه، چې د σ سره ښايو
- څرخون چې د ρ سره يې ښايو

که يو ټکی همداسې يوه کرښه ، چې په خپل ځان ځيره شي ، نودا ودې ځيرونی ته

يا نسبت ودې ځيرونی ته فيکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسې فيکس کرښه يا ځای په ځای کرښه بلل کيږي.

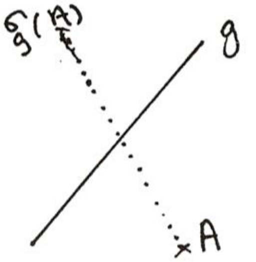
راکښنه τ يوه تلنه يا خوزيدنه ده د لاندې ځانګړو خويونو سره

تلنه ۱ (V) : د يوې په خوښه کرښې ځيره و هغې کرښې ته غبرګه کرښه ده.

تلنه ۲ (V) : که ځيرونه کتمټ ځيرونه نه وي، نو هر ځيره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپير لري .

ايينونه يا هندارونه . د ايينونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ايينونه σ_g په يوه کرښه g ، چې کرښ ايينونه ورته ويل کيږي، يوه تلنه ده، د لاندې خويونو سره

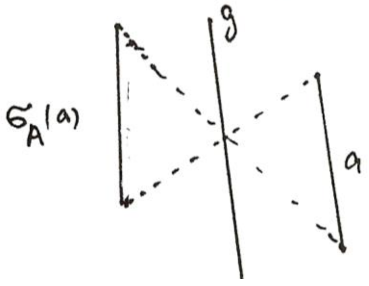


س ۱ : دکرښې g هر ټکی فيکسټکی يا په خپلځان ځيره ټکی دی ، له دې سره کرښه يوه فکسکرښه ده.

س ۲ : دواړه د کرښې g وازې هوارې يو له بل سره بدليدلی شي.

ځيره ۵۲

دوم: ايينونه σ_A په په يوه ټکی ، چې ټکی ايينونه بلل کيږي، يوه تلنه ده ، د لاندې خويونو سره : (ځيره ۵۲)

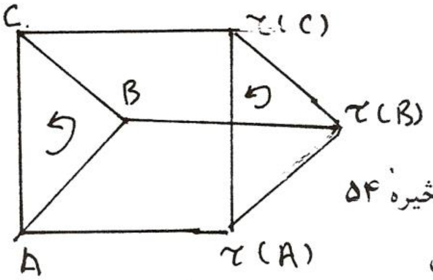


پ ۱ : هره کرښه چې له A تيريږي په خپل ځان داسې ځيره کيږي، چې دواړه له A پيداشوې وړانګې يو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ﭖ ۲ : هره کرښه و دې کرښې ته غبرګې کرښې باندې څېره کیږي. (څیره ۵۳)

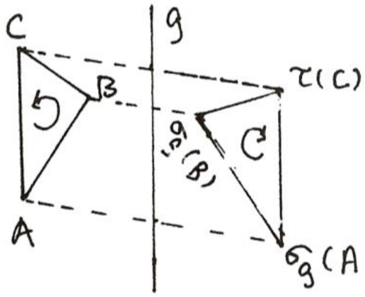
څیره ۵۳



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، تیک هلته یا هلته او هلته، کله چې هره څیره F د φ(F) سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

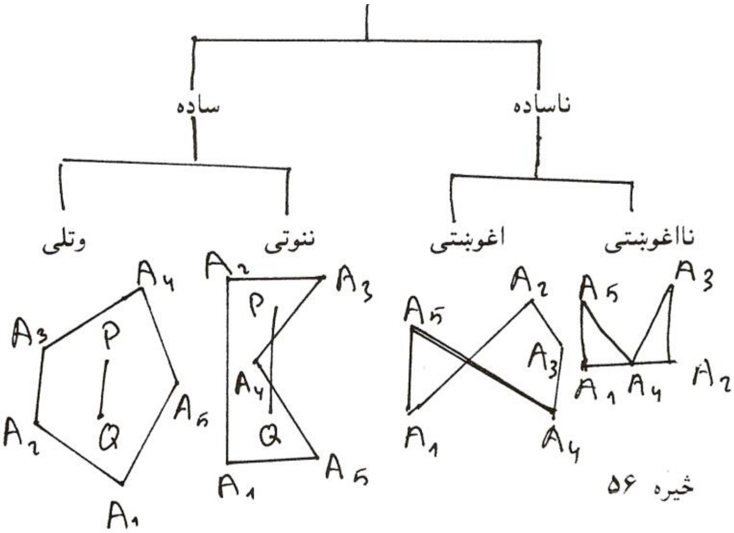
څیره ۵۴



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، تیک هلته یا هلته او هلته، کله چې هره څیره F و φ(F) ته مخامخ یا په څټ لوریز وي.

څیره ۵۵

ډېرګوډیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوډیز)

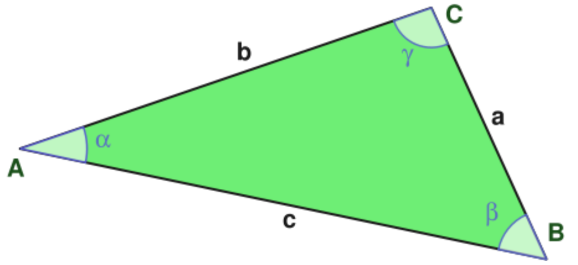


څیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وتلی n– ګوټی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یې برابر وي او دننه کونجنونه یې مساوي یا برابر لوي وي.

درېګوړی (درېګوټی، مثلث)

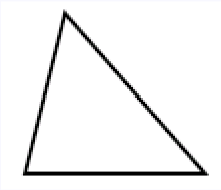
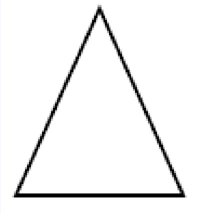
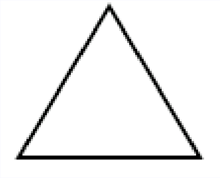
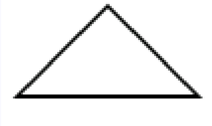
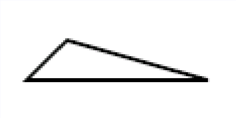
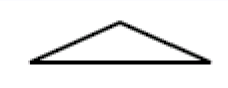
دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د خیرې د ګوډټکو په خیر ونیول شي، نو دریګوډی لا سته راځي. کرښي، چي درېګوډی په کي راګیر دی یا درېګوډی جوړوي د درېکوډي اړخونه یا هغه عربي یې ضلع بولو.	 ګورو، چي کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په خیره کي ګوډونه په لویو تورو سره په نخښه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي.

ولې درېګوډی ؟

موږ وایو، چي سپین مي د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه خیره کي یا یوه جوړښت کي دننه د دوه کرښو غوڅی کونج بولو او دباندنی ګوډ . کندهاریان وایی ګوټ. دا پروا نه لري، که څوک یي ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی یانی درېګوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته یي درېګوډی نوم ښه بریښي. پام دې وي، چي له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا خیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د ځکګچپوهني مینه والو خوښه.

د درېګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	برابرپښیز دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابردي .	برابراړخیز ټول اړخونه او کونجونه یې برابردي .
تیره کونجیز-درېګوډي **ټول کونجونه یې تیره دي یاني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجیز درېګوډی، یو کونج یې ولاړکونج دی			
پڅکونجیز درېګوډی **یو کونج یې پڅ دی یاني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بیتا او ګاما (α,β,γ) او اړخونو a,b,cله مخې د درېګوډیو مختلف تیوپونه سره بیلیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ځيرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا يو دې د بل سره برابر پام کې ونه نيول شي، يانی د يوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي٠ تيره کونجيز درېګوډی، چې درېواړه کونجونه توپير لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه يې سره برابر وي، ولاړکونيز، پڅکونجيز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ٠ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه يې سره برابر دي، اړخونه يې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي٠ دا لاندي ښه ځيړل شوي دي، د ځيرو سرهږ

د درېګوډي يو له بل بيل ډولونه

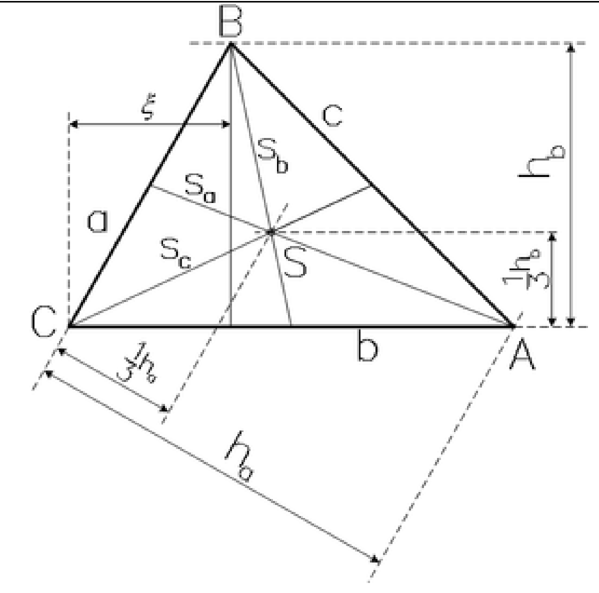
د دريګوډي د پام وړ ټکی

- د دريګوډي هر درې يوډوله کرښی ، يو بل په يوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنيمی په S کی

- د کونجنيمی يا نيموونکی په W کی-

- اړخنيمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ يې منځولاړه بولو



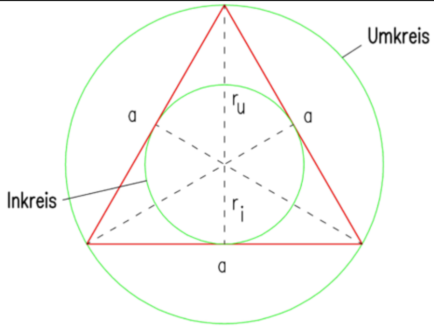
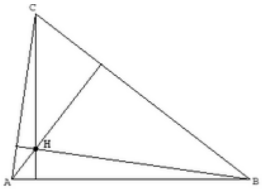
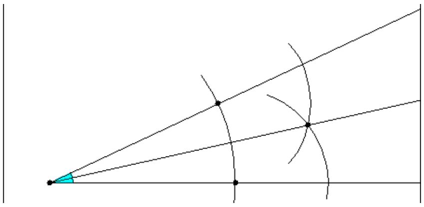
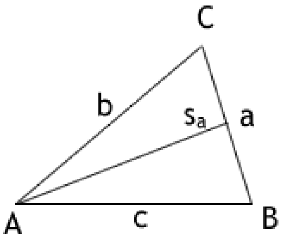
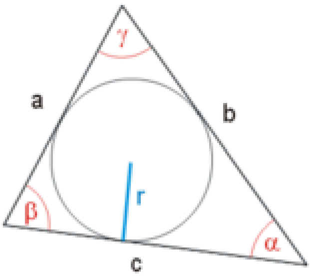
-. جګکرښی يا جګي په H کی

دا ټکی د يوه دريګوډي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي ځخه S درونډټکی(د ثقلمرکز)

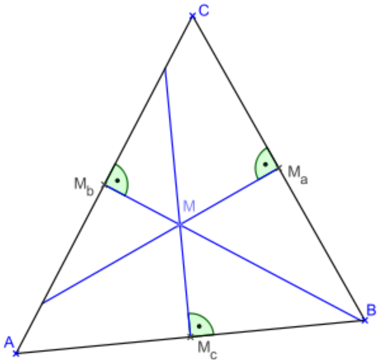
له دوي ځخه W د دننه ګردئ منځ ټکوړانګه او M د دباندې يا راګردې ګردئ يا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم يې چاپيريالګردئ منځ ټکی دئ (وړانګه) r ، د چاپيريالګردئ منځټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

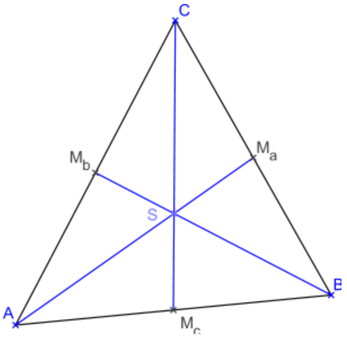
دلته هڅیرو، چې څیرې راوړو، د څیړنې سره یې : Umkreis Inkrei ای ې‌دڼرګـيخوړ ای دهراتاو-یا په راتاوګردی	
په لاندې څیره کې جګې کرښې وینو. دا هغه کرښې دي، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګی لري او دا کر په یوه ټکی کې غوځوي.	
په مخامخ څیره کې کونجنیمی ګورو او وینو، چې څنګه کښل یا رسم کیږي.	
په مخامخ څیره اړخنیمی کتل کیږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نیمی.	
په مخامخ په درېکوړی کې د خوندي ګردی منځټکی د وړانګی سره کتل کیږي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځيره په درېګوډي کې په منځولاړې ګربښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي کې سره غوځوي

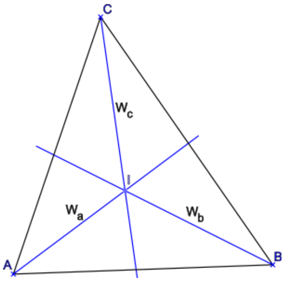


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې اړخنيمی ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې سره غوځوي

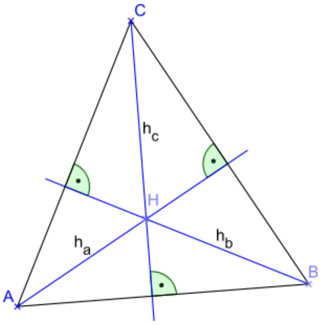


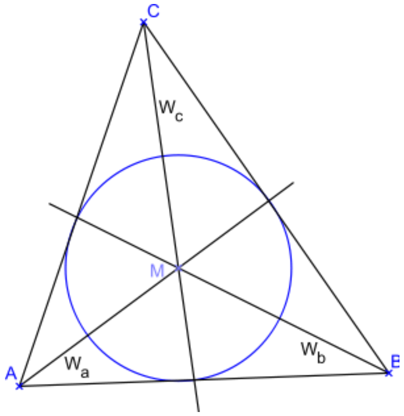
په مخامخ ځيره کې ګورورڼ چې کونجنيمی ی خونديګردی منځټتي کې سره غوځوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمی ديو جې په يوه ټکي سه پرې کوي

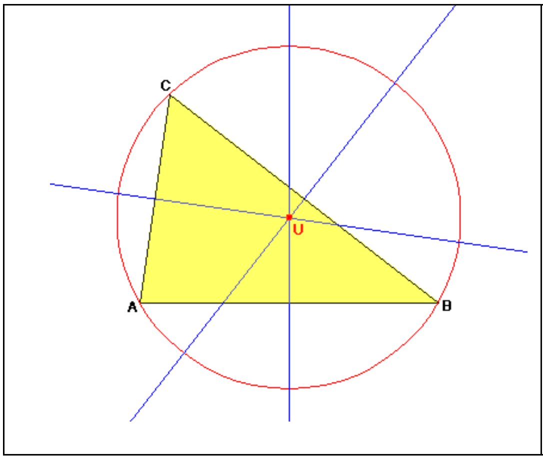


په لاندې ځيره کې د درېګوډي درې جګي ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره غوځوي

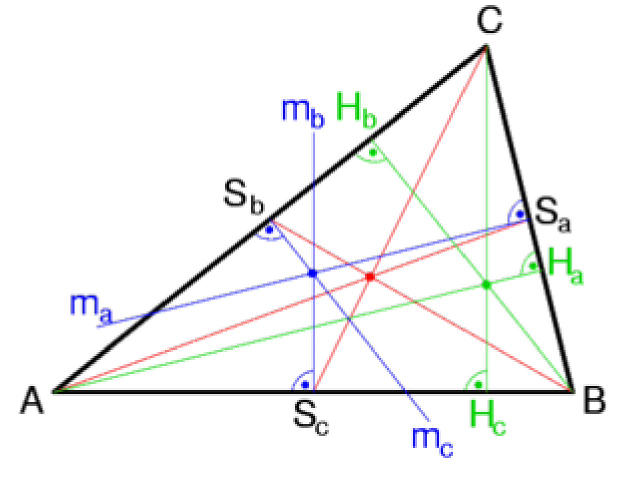




(c) ketabton.com: The Digital Library



په مخامخ ښیره کې د درېګوډی منځولاړې ګوروو چې غوښتککی یې ی راتاوګردی منځټکي دی



په مخامخ ښیره کې هغه اړخنیمی، چې په اړخ ولاړې دي کتل کیږي، په اړخنیمی ولاړې، جګی او اړخنیمی کتل کیږي، چې دریواړه په یوه کرښه پرتي دي ٠

د جګو غوښتکی (شین)، راتاوګردی منځټکی(اسماني یا زرغون)، دروندټکی(سور) په یوه کرښه پراته دي.

د درېګوډیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېګوډي یواځنی جوړیږي (همدا یو درېګوډی او بل، چې له دې درېګوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی) ،

-که د دریګوډیو دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اخرونو کونجونه وپیژنو

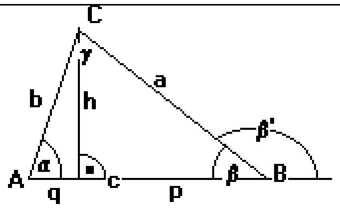
(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چې دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروانیڅ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

	۱ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه 180° لري $\square + \square + \square = 180^\circ$ په مخامخ څیره ګي 'β د β ګاونډی کونج دی

۲ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا څیره له پ ورتـ ه ځ برې څخه پوره کړي ۰:

۳ – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دئ

$$a + b > c \; ; \quad a + c > b \; ; b + c > a$$

۳ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت څخه کوچنی دئ

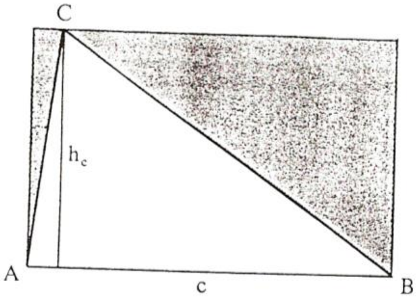
$$|a - b| < c \; ; \quad |a - c| < b \quad ; \quad |b - c| < a$$

۴ - د درېګوډي چاپیرـال د دریواړو اړخونو زیاتون دئ $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ - د درېګوډی منځهواره (د هوارې دننه) لنډ : هواره (، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نیغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نیمایي دی

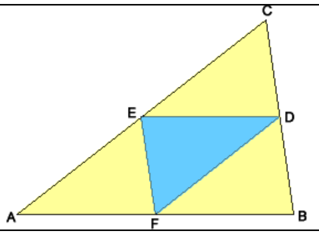
F =a.ha/2 = b.hb/2=c.hc/2



د ښووني لپاره یي د یوه لنډ چل ځخه کار اخلو: موږ درېګوډی د جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجیو غوځوو او د درېګوډي په اړخ یی څیره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجیز دریګوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېګوډي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته څیرې ځخه هم څرګندیږي.

۶ - د درېګوډي اړخونو نیمایي هغه منځنی درېګوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نیمایي دومره اوږده وې لکه د پیل شوې درېګوډي(د و ړانګي جمله دې وکتل شي

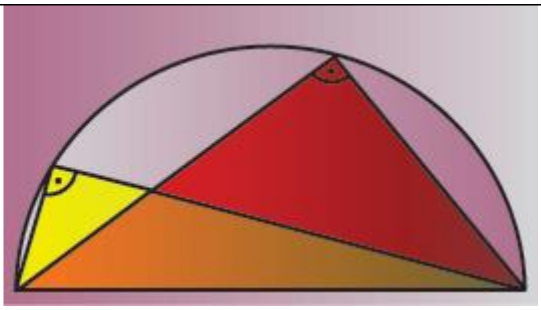


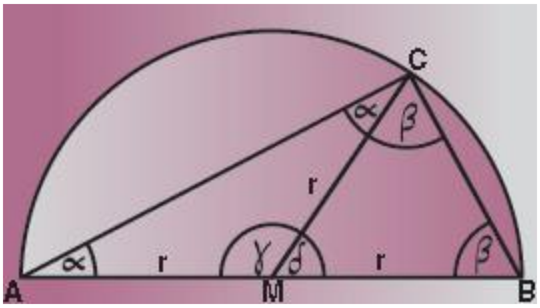
ګورو چی د یوه دریګوډي جګی تل څرګند نه دی. مګر دا چی د یوه جګي له لارې یو دریګوډی په دوه برخو ویشل کیږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجیز دریګوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بیا د پیتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او یا د تریګونومتري یا کونجکچ متودو یا لارو له لارې ، چی هغه وروسته څیړل کیږي، لاس ته راوړی شو .

د تالس جملهSatz des Thales:

که AB د یوې ګردی(دایرې) یوه نیمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېګوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>




</td>
<td>

ABC په C کې ولاړکونجيز دی٠

د دې جملې په څټ يا برعکس دی:

که چيرې درېکوډي ABC په C کې ولاړکونجيز وي، نو C په ګردی پرته ده د نيمې AB سره

د جملې د ښووني لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي٠

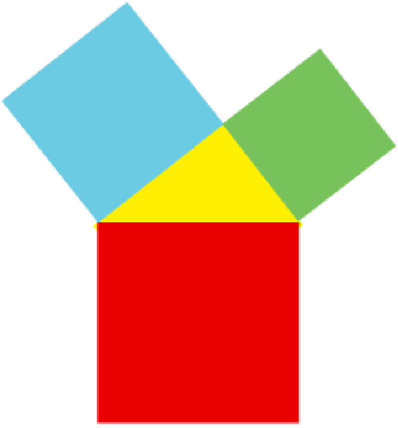
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90°$$
</td>
</tr>
</table>

د پيتاګوراس (فيثاغورث Satz des Pythagoras)

<table>
<tr>
<td>

</td>
<td>

په يوه ولاړکونيجز درېکوډي کې ، چې کاتيتونه يا ولاړ اړخونه يې a او b وي، د هيپوتينوزی يا اوږد اړخ يې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$a^2+b^2=c^2$

د دې جملې په څټ يا برعکس

که د يوه درېکوډي ABC د اړخونو a, b, c لپاره باور ولري

$a^2+b^2=c^2. F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$
</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجیز دی یا د پیتاګوارس جمله وایي، چې په یوه ولاړکونجیز درېګوډي کې د هیپوتینیوز(لوي اړخ) څلوری یا مربع د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو د زیاتون سره برابره ده.

ولاړکونجیز درېګوډی یو ولاړ کونج لري یانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هیپوتینوز *Hypotenuse* یا لوی اړخ بلل کیږي

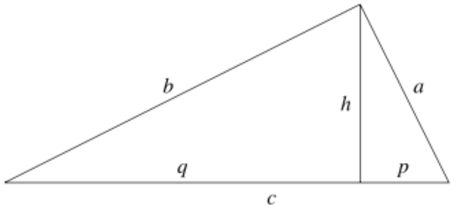
نور دوه اړخونه کاتیتونه *Katheten* یا ولاړ اړخونه بلل کیږي.

لاندې جملې ښایو:

دا جملې ټولې یوځای راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجیز درېګوډی   a + b + c = U

a.b / 2 = c . hc / 2 = F

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پیتاګوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اویکلید د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اویکلید د جګیو جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښيز درېګوډی جګی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

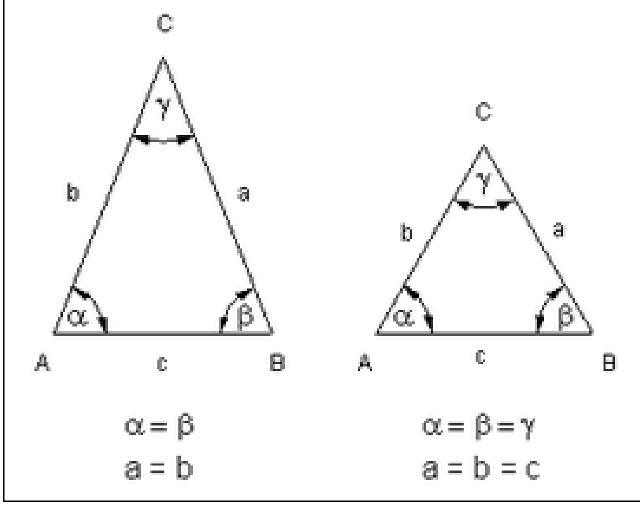
$$U = 2a + b$$

$$F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګوری)

جمله : برابر اړخيز درېګوډی :
د یوه برابر اړخيز درېګوډي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخيز درېګوډي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري۰) پولیګون لاتین ډیرکوډیز(<u>Polygonen</u>).

د برابر اړخيز درېګوډي هر کونج ٦٠ درجي دی۰ برابر اړخيز درېګوډي تره کونجیزو ډریوګوډیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابرااړخیزه درېګوډیوه برابرپښیزه درېګوډی هم ده۰
ټول برابراړخیزدرېګوډي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

	په یوه برابراړخيز درېګوډي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی –یو په بل پریوځي۰ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندي ګردی او دروندټکی اړخ جګیو غوښټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز درېکوډي کې باور لري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څیره کې کیڼ لور ته برابر پېنیز - او ښي لور ته برابراړخیز درېګوډۍ دی۰ هر برابر څه یې کښل شوي۰

د یوه برابراړخیز درېګوډی، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

Fläche *A* هواره یا سطحه	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
جګوالیHöhe *h*	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
د چاپیریالګردی وړانګهUmkreisradius *r*	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$
د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
چاپیریالUmfang *u*	$u = 3 \cdot a$

د برابراړخیز درېګوډي خوېونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې یو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري۰ یا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړګوډیو هوارې یو له بل سره برابرې دي۰

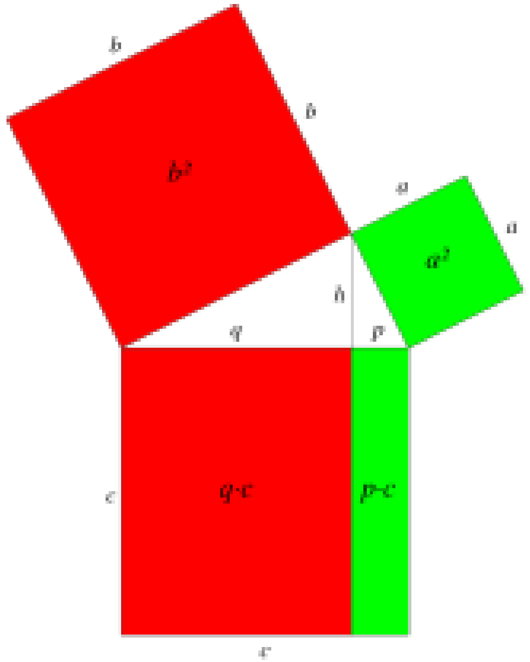
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجیز درېګوډي اړخونه وي، د هیپوتینوز c سره٠ که دا درېګوډی په جګي h په دوه برخو وویشل شي او p یې هیپوتیوز ټوټه په a ده او qهمداسې ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aخلوری د p او cولاړکونجیز خلورکوډي او په bخلوری د ولاړکونجیز خلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده یانې هواري یا سطحی یې برابرې دي٠

لاندې ځیره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو یواځی ځیرې یې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠



فرمول یې :

$a^2 = p.c$

$b^2 = q.c$

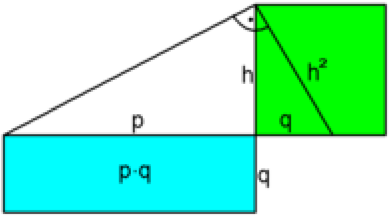
Kathetensatzد کاتیتیونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شنې هواري هم *د اړخ او خلوری د فرمول په ځیر په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اویکلید جګجمله Höhensatz des Euklid

 	$h^2 = p \cdot q$ د جګجملی د بیاتیوني ښوونه(دا لړ ستونځمنه ده، خو زما يي دا څیره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مینه وړاندي کیږي) :

د جګجملی ښوونه : د پیتاګوارس له جملي $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه ښوونه لاس ته راځي

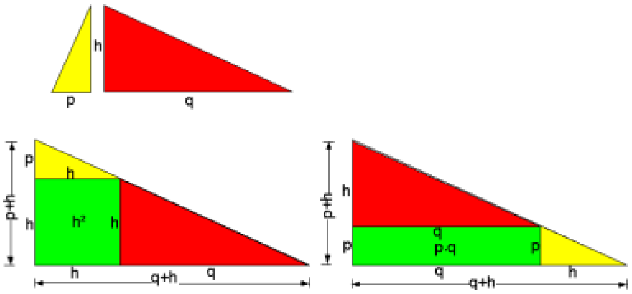
په دیاګرام کې دري درېګودي لیدل کیږي، یو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دي هریوه درېګودي لپاره د پیتاګوارس جمله باور لري٠:

$h^2 = p.q \Leftrightarrow q^2 = pq+q^2 + h^2$

د پورته بیاتیوني له لارې ښوول کیږي٠

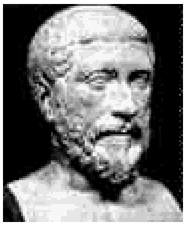
جیومتریکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا خیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښوونې کار مخ ته ځي

(تمرین)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکودي کي د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د ځلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلوری سره برابر دی٠

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځاي نیسي٠ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو٠

دا یو له مانا ډک انسان دی »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
لودویګ بورنې د هغهٔ په هکله وایې« کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، Ludwig Börne
هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل٠ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاګوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلارلر يې سامي زرګر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

د پيتاګوراس جمله

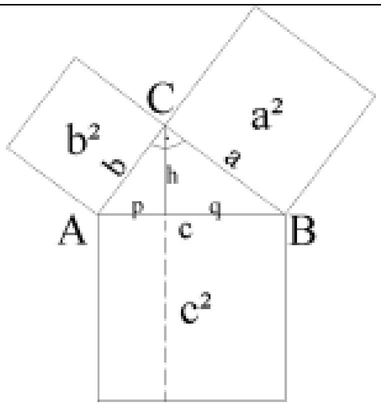
په يوه ولاړ کونجيز درېګودي کې د کاتيډونو(ولاړو اړخونو) څلوری زياتون د هيپوتينوز (اوږده اړخ)له څلوری سره برابر دی

c^2	=	$a^2 + b^2$
(د کاتيتونو جمله) $p \cdot c$	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
Kathetensatzد کاتيت جمله		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېړه وګوری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه) شته



پیلونې او ښوونې

د یوونځلورى یا یوون مربع ځیره

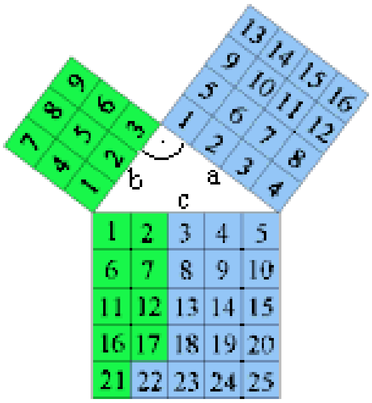
یو ولاړ کونجیز درېګوډى لرو، چې اړخونه يې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

په هر اړخ ځلورى جوړوو، لکه لاندې ځېره

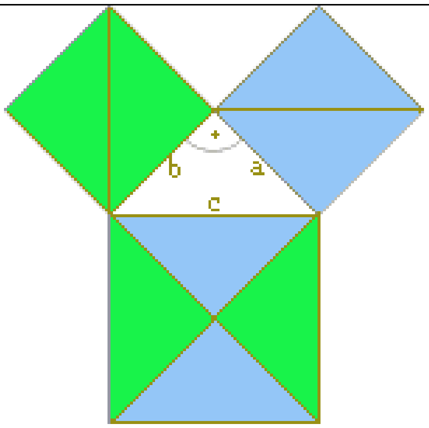
$$25cm^2 = 9cm^2 + 16cm^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

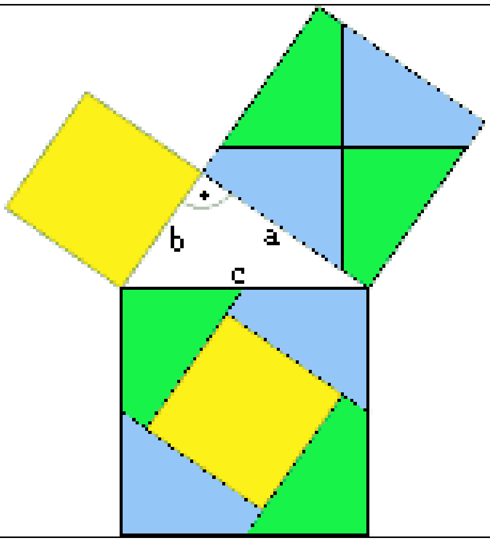


(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې يو برابرپينيز ولاړکونجيز درېګوډى لرو:

	ولاړکونجيز برابرپينيز درجګوډى، چې اوږد اړخ يې دى (z.B. c=5cm). اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي ياني ځنې ځلورى نيمې شوي او ځنى بيا په ځلور برخو ويشل شوي. که څير Jته وګورو، څه کره کولى شو؟

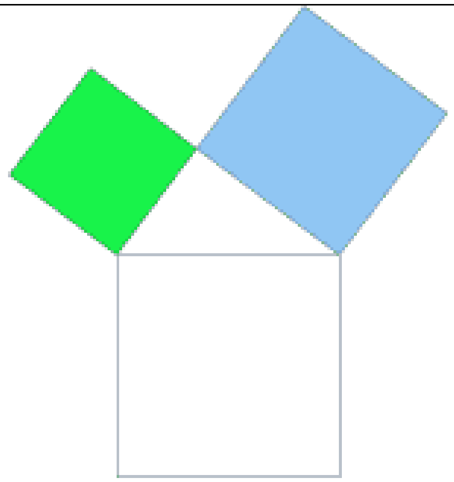
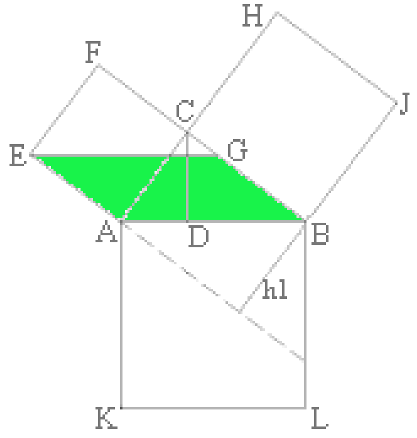
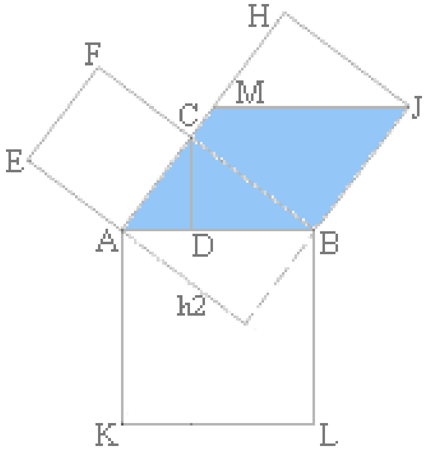
2.2 په خوښه ولاړګوډيز لرو

	دا په خوښه ولاړکونجيز درېګوډى دى (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردى د لويې کتيت ځلرى له منځ څخه لوي اړخ ته يوه غبرګهکرښه وکاږى او هيپوتينوز ته يوه ولآړه a^2 غوڅه کړي. ګران لوستونکي دې له څيرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ ځلورى د نورو اړونو د ځلوريو سره برابره ده

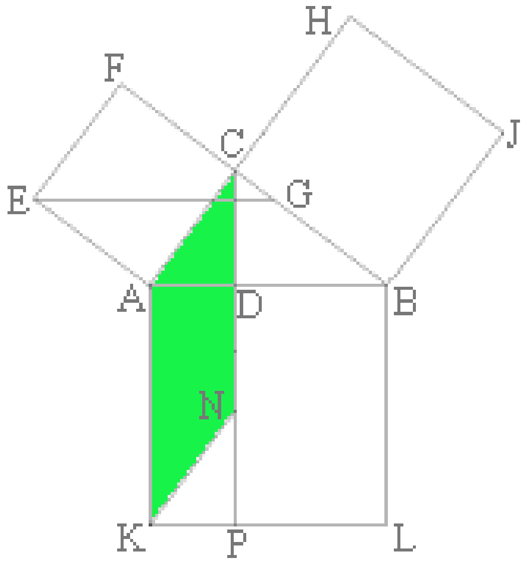
.3 د څيرې ځمککچيزه لاربنودنه

د لوړو ګوډونو يا کاتيتونو ځلورى په درېګوډې ABC کې دننه د غبرګ اړخيز په څېر غوڅ کړى

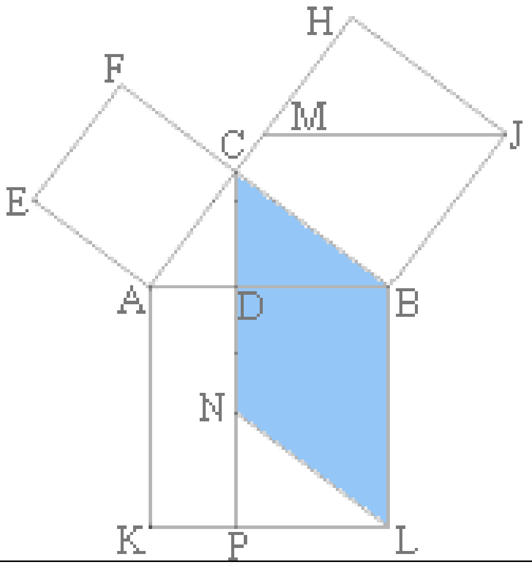
(c) ketabton.com: The Digital Library

	غبرګ اړخیز د لوی اړخ څلوری(مربع) کډېکي باندې د هغې تر یوه اړخ پوری و څرخوی . غبرګ اړخیز(مایلګوډیز) یوه ولاړګوډیز په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هوارې کې دننه بیاتي کړی
 	ښوونه :الف : بیاتیونه: EACF = EABG . 1 ځکه, جې برابر بنستلاین EA او برابر حګی BJHC = BJMA . 2 ځکه،برابر بنستلاین BJ او برابر جګی(h) JHلري

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب . ځرخون : ۳ . EABG = AKNC
ځکه پهA باندې EA = AC (د
يوې ځلورى اړخونه) AB = AK
(ديوې ځلورى اړخونه)

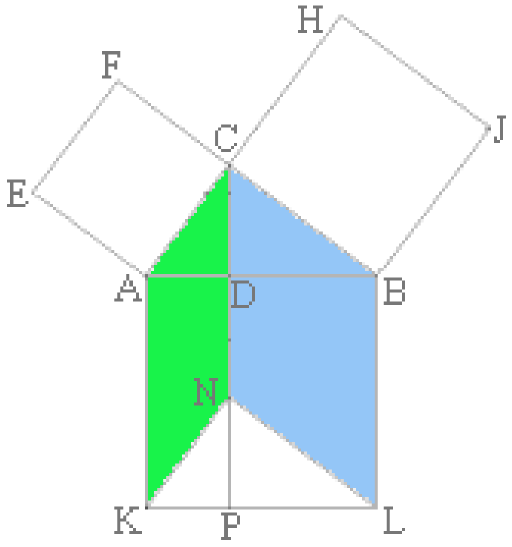


۴ . BJMA = BCNL
ځکه، چې پهB باندې BJ = BC (
د يوې ځلورىاړخ اوړوالى) BA = BL
(د يوې ځلورى اړخونه)

پ . بياتيونه:

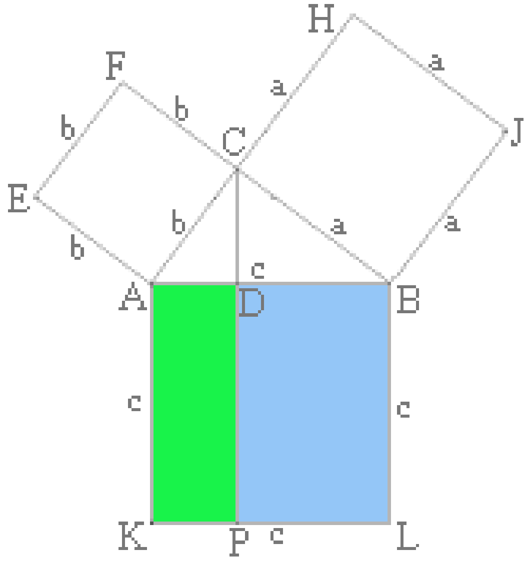
۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنستلايد AK شر ه نغه جگې KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



۶ . NLBC = DPLB څکه،چې
همغه بنسټلاين BL اوهمغه جګۍ PL
لري

د پورته دواړو لپاره لاندې څېره وګورئ



له مخامخ څيرې

لاس ته اځي

$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$

بياتيونه پيل(لاندې څيره)

۱ - په هر دې اته دربګوډيو څلورئ داسې کيږدئ،جې برابر اوږده اړخونه يو په بل پريوزي، لکه چې ګور د يوې څلورئ اړخونه د يوه دريکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

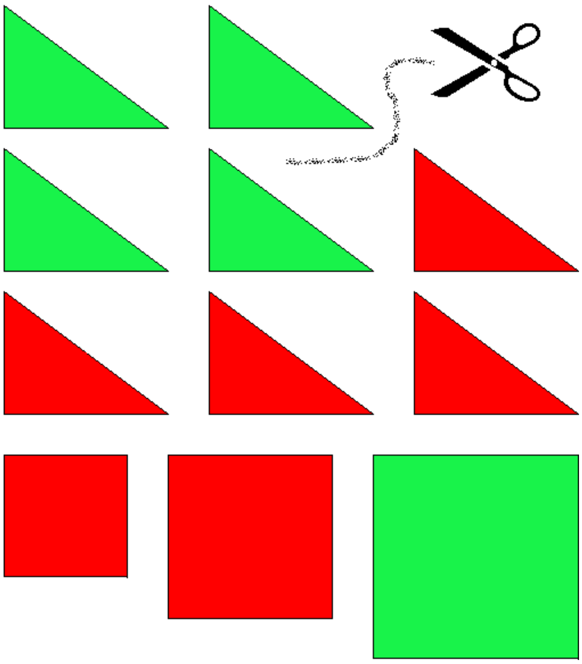
۲ - ټولې سرې څېرې (دوه ځلورى اوځلور درېګوډي) داسې یوځاى کېږدى، چې یوه لویه ځلورى منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څېرې (یوه ځلورى او ځلور درېګوډي) داسې یوځاى کېږدى، جې یوه لویه ځلورى منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پیدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې ځلورى یو بل پټه وي.

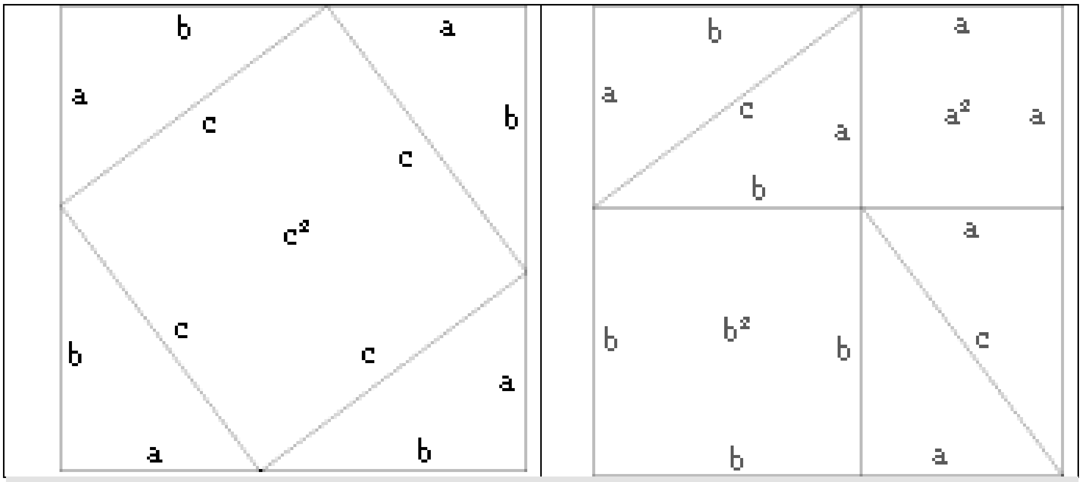
۵ - ټول درېکوډي لرې کړه، نو دا پاتې شنه ځلورى، د هوارې یا سحې له مخې کوچنى یا برابره ده دې نورو دواړو سرو ځلویو سره.

د ځواب لپاره دلایل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شمیرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4\cdot \frac{1}{2} \cdot a\cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا ځیرې دې د ځمککچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې ځیره کې د،پیتاګوراس ونه، لیدل کیږي

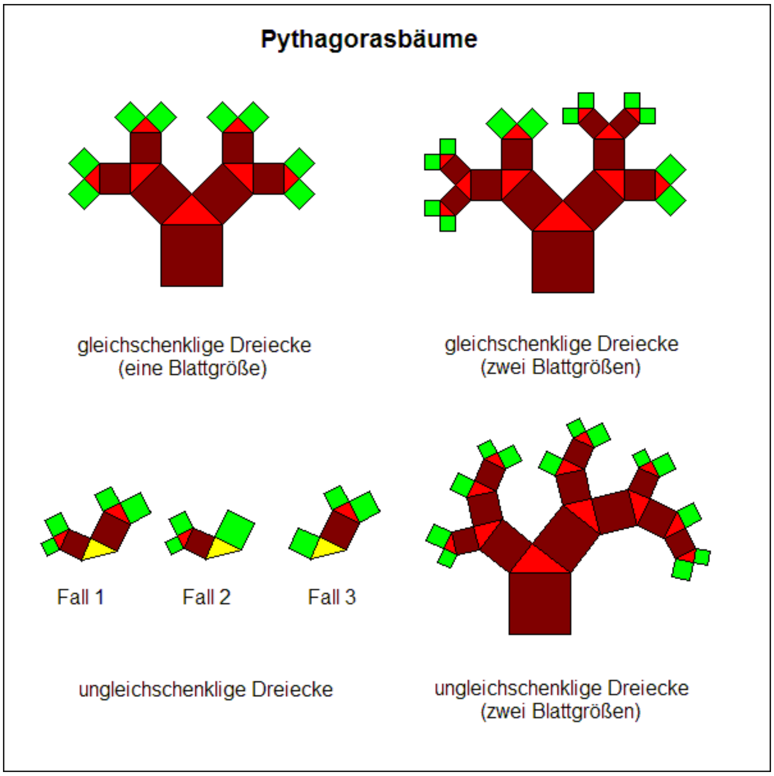
له کینې و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښیز درېګوډی (یوه پاڼه لویوالی)

- برابرپښیزدرېګوډی(دوه پاڼې لویې)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښیز درېګوډي- نابرابرپښیز دېګوډی(دوه پاڼې لویی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرینونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږئ :

a) $a = 4$ cm ; $b = 8$ cm ; $c = 9$ cm

b) $a = 8$ cm; $b = 8$ cm ; $\beta = 50°$

c) $a = 8$ cm ; $\beta = 40°$; $\gamma = 50°$

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايي: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او ګڼې ، يو له بل سره په ځت اړيکو يا ځانتيونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټي د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) $a = 7$ cm ; $h_a =$ m6 cm

b) $c = 3$ cm ; $h_c = 5$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $ß = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندریي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a + b + + c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې ګردی همداسی دننه ګردیو وړانګو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho.U/2 = \frac{\rho.U}{2}$$

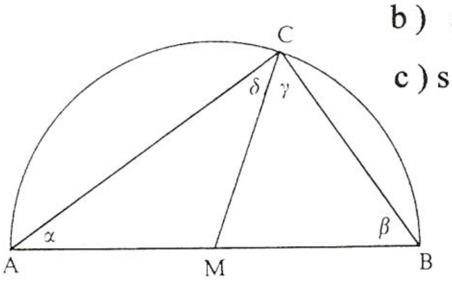
دلته د دننه ګردی او r د دباندې ګردی وړانګی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریګوټیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;

$h_a = 13$ cm $= h_b$

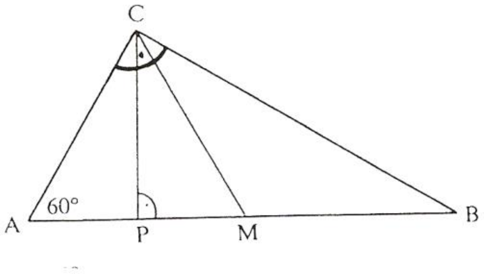


خیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی.
(څیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – څیره ۸۴ یو ولاړکونجیز دریګوړی
ښايي د کونج $= 90°$ سره، وښايي
چې کرښې $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په
دري مساوي برخو ویشي.



څیره ۸۳

۷ – وي دې a,b,c د پیتاګوراس
(فیثاغورس) ګڼون دریګونی.
وښايي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوړي پاتې برخې وښايي(نښوونه لکه په لیکنه کې):

a) $h = 4$ cm : $q = 5$ cm ;

b) h) 7 cm; $b = 10$ cm

c) $p = 4$ cm: $q = 12$ cm

۹ – د کانتې یا اړخ یا ژۍ a اوږدوالی څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوړي
جګوالی وښایی.

۱۰ – وښايي : په یوه مساوي اړخیز دریګوړي کې د دباندې ګردۍ
وړانګه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\rho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردۍ وړانګه په
لاندې توګه ده: $\rho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

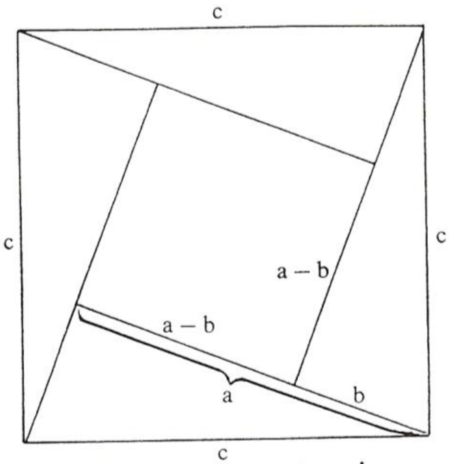
۱۱ – د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوړي هواره کله خورا
لویه ده؟ دا په دې مانا چې بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوړي کې یوه کانتې یا ژۍ ۳ سانتي متره اوږده ده،
بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیرئ.

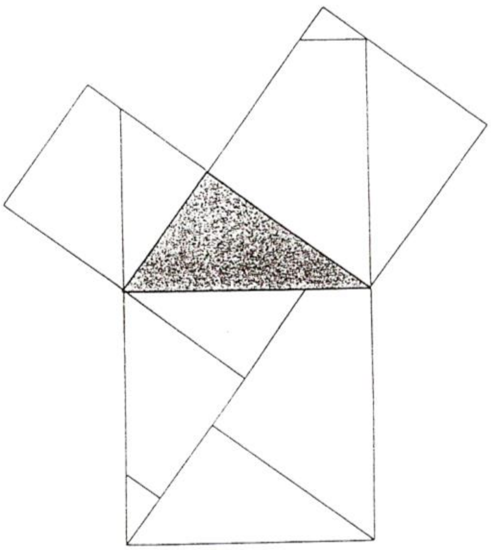
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده، کیدی شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

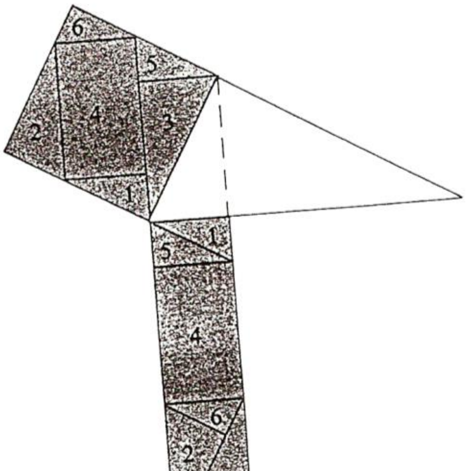
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



څیره ۸۵



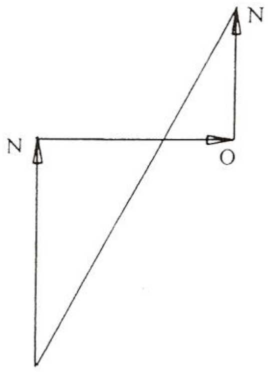
څیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع څخه چې د یوې کانتې یا ژۍ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ– کونجي جوړ کړۍ، چې د یوې ژۍ یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملی سره

ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

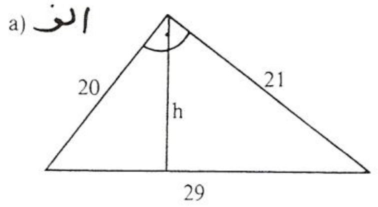


خیره ۸۷

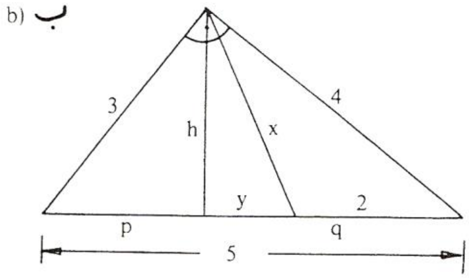
۱۶ – د کاتیت جملی صدق د خیرونی په مرسته، د برخه هوارو د مساویوالی ښوونی له لارې وښايي« (خیره ۸۶)

۱۷ – په برخه دریګوډیو MPC (خیره ۸۳/) د پیتاګوراس جمله استعمال کړی، او په دې بنسټ د پیوتاګوراس جمله وښايي .

۱۸ – د مساوپښیز ولاړکونجیز دریګوډیوپښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟

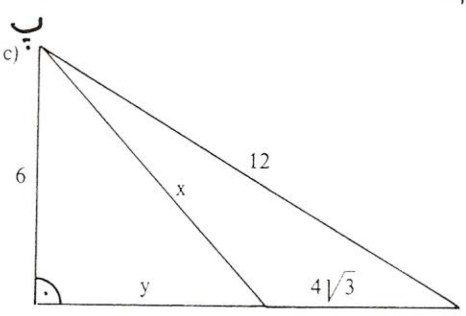


۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا ۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې دی؟ (خیره ۸۷)



۲۰ – د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي، که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته وځغلي؟

۲۱ – دا نامعلومی کربښی په خیره ۸۸کی وښايي.

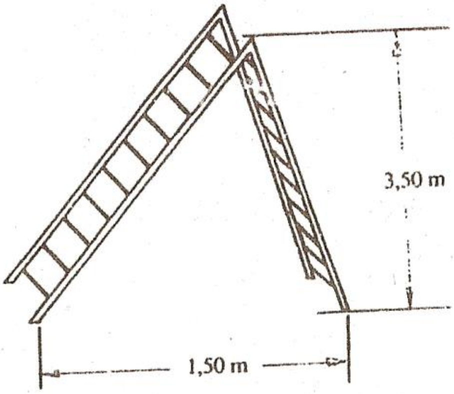


خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
اېښول شوې د زینې بېخ له دیوال
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره
جګه رسیږي؟

۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دی د ځنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونې
څومره اوږده ده ؟



څیره ۸۹

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساویپښیز
دریکوڼی دی
الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .
ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره
جګوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرئ.

۲۵ – په یوه رامارته زینه کې تولې پوړۍ مساوي
اوږدوالی لریهغه په څیورونه ۶۴ کې کښېنل
شوې د پوړیو واټن وشمیرئ.

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریکوڼي کې چې
چاپیري یې ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی
یې ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اېرخونه خومره اوږده دي او جګوالي یې خومره اوږد دی ؟

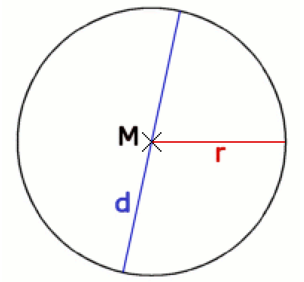
۲۷ – هر يو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی ترلی، چی د ترلو ټکی يي
د يوه مساويپښيز دريګوټي
کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره
اوږد او ۱ متر يو له بل لرې په کښتی
ترلي وي، نو کښتی ټال خومره لرې ټال
وهلی شي، که دريګوټيېنسټ منځټکی د
لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د
خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

۲۸ – کوم يو د لاندې دريګوټيو څخه نه شي کښل کيدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ;
c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm
d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اېرخيز دريګوټی هيڅوخت ولاړکونجيز دريګوټی نه شي کيدی؟

ګردی (دايره)

	پيژند ياتعريف د يوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له يوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- يا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاين يا لنډ: ګردی بلل کيږي (مخامخ ځيره) $k = \{X \in E \mid \lvert\overline{MX}\rvert = r\}$ ګردی سطحه يا - هواره او ګردی چاپيريال يا - محيط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M څخه د r کوچنی یا د r سره برابر وي ګردۍ (موخه ترې ګردۍ منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردۍچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردۍ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره ترې، هغه د ګردۍ وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو٠
پیژند: او هغه کرښه، چې ګردۍ نیموي د ګردۍ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښه کوو٠

پیژند
دګردۍ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجې لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردۍمنځهواره د وړانګې r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردۍ ګڼ بلل کیږي
: $\pi = 3{,}14159265$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پیښې نه کړي.
په پورته کې ورکړ شوی ګردۍ ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی٠ له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کي یی موږ نزدې شمرني ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

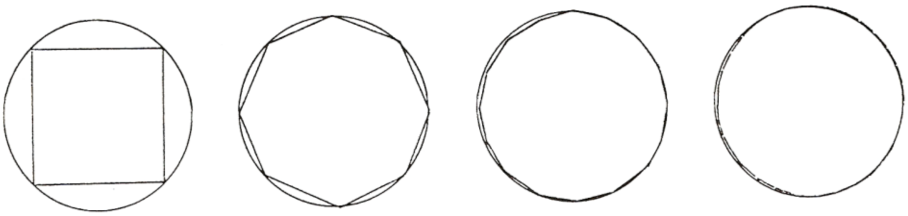
څنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

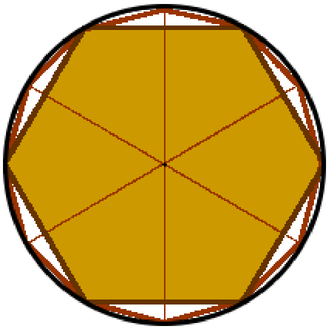
دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار   داسی پیل کیږي، چی په ګردۍ کی یو ه څلورۍ یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو سوکڅیسیف یا یو په بل پسی ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

ځیره ۱۱۹



یوې ګردۍ ته د یوه   n –ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

ځیرې ۱۱۹ ښاګ ځې،

په مخامخ ځیرو کې نهه ګوډۍ ورپسې شپږګوډۍ کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردۍ ته نږدې کیږي	

په پورته ځیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته ځیرو کې یوې ګردۍ ته د یوه   n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډۍ، چې ګورو نږدې یا تیک ګردۍ ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژی یا اړخونه تل کوچني کیږي، چي پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځنکی څخه د په همغه واټن د ټکو ګڼون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډټکوتعداد یا ګڼون) د مربع پیلګردۍ سره دا څیره تل نزدې کیږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالګردي ته نزدې کیږي. د ګوډټکو زیاتیدو سره د ګردۍ وړانګه هم لوییږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کیږي چې د چاپیر یالګردۍ او د منځ هوارې د ناپای ډیر n ګوډونو سره د n - ګوډي سره یوځاي پریوځي یا یوځای کیږي.

په لاندې جدول کې د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستابیل (په خپل حالت، چې ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندوړ دی:

منځهواره Fn	چاپریال Un	پیدایښتي ګڼ n
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چې څنګه د ګردۍ چاپیری او ګردۍ منځهواره د تریکونومتري یا دریګوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبیلګه:

د بانك مدیر ښاغلی کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښې میز جوړ کړي چې په هره لور یی ۸ کسان ځاي نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چې ۲ متره نیمی(قطر) ولري

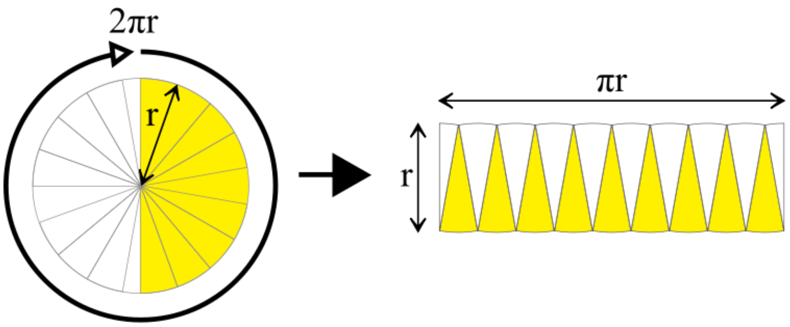
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسیا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ ښخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځاي په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به څومره ګران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی U = pi.1m=6,248m² په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی : 8.75= 600cm

د ۸۰سانتیمتره ځاي د نفر په سر 80.8 = 640cm . منځ ازښت یې 6,2m دی. پس د نېکو هیلو سره ټول خاي نیولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله 3,142.250=785,40 یاني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې څیره کې کتل کیږي، چې د ګردی منځهواره نزدې



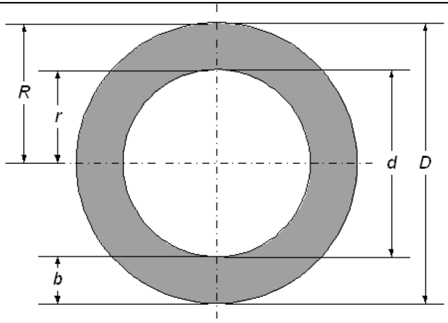
$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څیره کې د څیرې کوچنیوالي له امله د ګردی څیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي٠

ګردنیوټه او ګردبیرخه، ګردیکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیر وخت دننه- یا خوندیګردۍ له
چاپیریالګردۍ کوچنۍ وي. نو له دې امله د
دوي ترمنځ یوه کړۍ منځ ته راځي، چی د
هغي منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا
توپیر څخه شمیرل کیږي٠



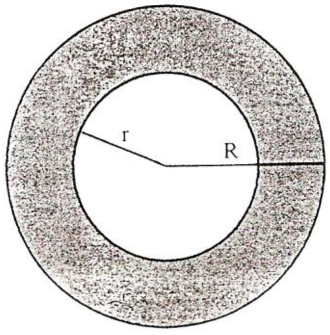
جمله : موږ دوه ګردۍ لرو، چې د
چاپیریالګردۍ یا دباندې ګردۍ وړانګه R
او د دننه ګردۍ یا خوندې ګردۍ وړانګه r

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

ده، نو د

$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$



خیره ۱۲۰

بل ډول یې: یوې ګردیکړۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړۍ منځهواره د ګردیبرخې د سور او دننه او دباندې ګردۍ د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چی له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي.
ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتي کیږي او ګردیکړۍ چی له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

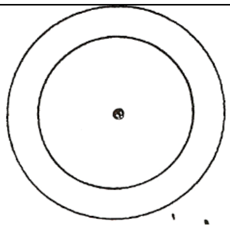
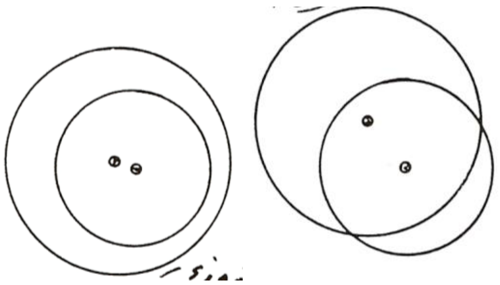
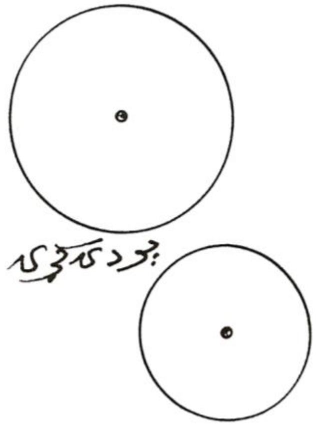
F = (0,9m)².Pi = 2,835m²

د ګردیکړی منځهواره او چاپیریا په لاندې ډول دي

F = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m²

U' = 2,095m.Pi = 5,969m ; U' :8 = 74,6 cm

د داسې لړ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځاي نیولی شي۰

هغه ګردۍ، چې منځټکي یې یو پ بل پریوځي کونځنتري یا راټول یا یومنځي بلل کیږي او پرته له دې دکسځنتري یا نه یومنځي بللکیږي.	
تر هغې چې یوه ګردۍ ټوله په بله کې پرته وي، یدی شي چې د راکښلو له لارې په یومنځي یا کونځنتري ګردیو بدله شي	
	دا یو نایومنځي ګردۍ دي

هغه دوه یا زیاتې ګردۍ چی منځ ټکي یې یو په بل پریوځي کونځنتري Konzentrie یا راټول او په غیر له دې اکسځینتري Exzentrieیا ناراټول بلل کیږي .تر څو یوه ګردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی د راکبنلو له لارې په کونخینتري کرديو یا راټولګرديو بدلی شي.

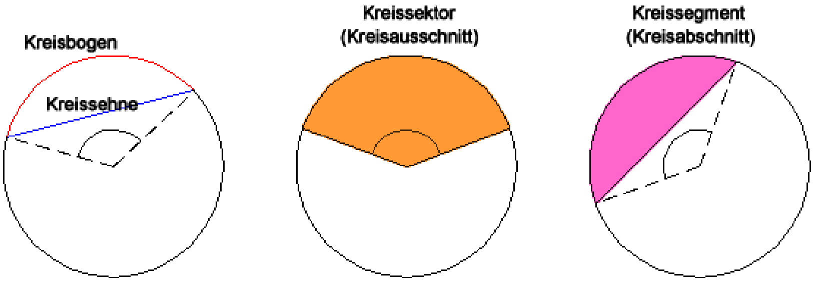
که ګردی یوبل پوره پټي نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو(= غوځدېريو) یا ګډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو سره مخامخ کیږي .که ګردی یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردی یو دبل سره پردی بلل کیږي.

ځو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردی هغه برخه ګرديټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل کیږي، که چیرې یوه ګردی د یوې کربښی له لارې یا کربښه باندې غوځه شي . داسی یوه کربښه غوځکربښه یاغوځوونی یا ټوټه وونې (سیکانت) Sekante بلل کیږي. غوځکربښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کربښه د ګردی له منځ ځخه تیره شي، نو ګردی په دوه برابرو برخو ویشي، چې دا بیا ګردی نیموونی بلل کیږ. هغه غوځوني چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردی نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کربښه تانجنت بلل کیږي او که له ګردی ځخه دا کربښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کربښه بلل کیږي .په ګردی د غوځکربښی دننه پرته برخه د ګردی ټوټوني (Sehne) یا وتر بلل کیږي .ټوټونی یا Sehne بندکربښه ده په داسی حال کی چی غوځي ، تنجنت او تیریدونکی ناپای کربښي یا ـلکه، چې ورسره بلد یو ـ کربښي دي .د یوه ګردی ځخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوځه شي دا برخه ګرديبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یامنځني کونج او لیندې (Bogen) b سره. مخامخ ځیره ده

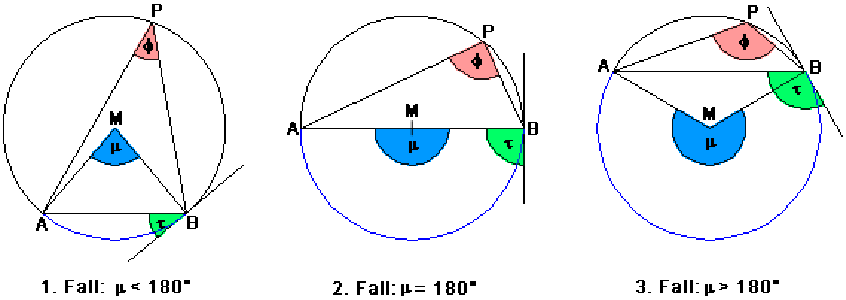
په لاندې ځیرو کې د نومونو له الماني ځخه په پښتو کوونه له کینې وښی لورته:
ګردیلینده Kreisbogen د ګردی ټوټه وونې(ټوټوونې) Kreissehne ،
ګردی برخه Kreissektor ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

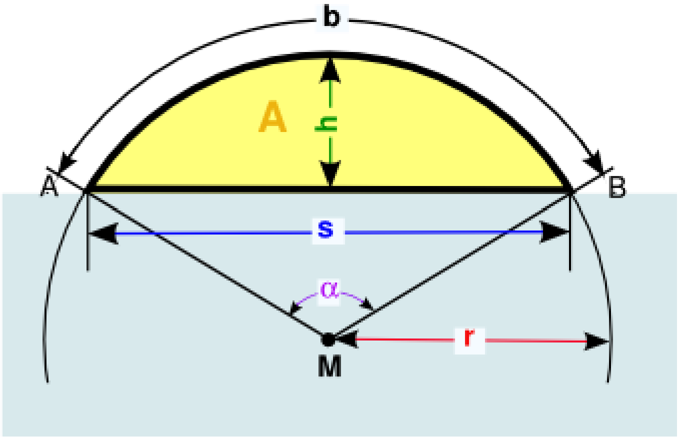


د
پورته ژباړه له کیڼ خخه و ښي لور ته: گردی- لینده تونه وونې، گردي برخه، گردی تونه
.

په گردی کې د کونجونو ډولونه:



د گردی تونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

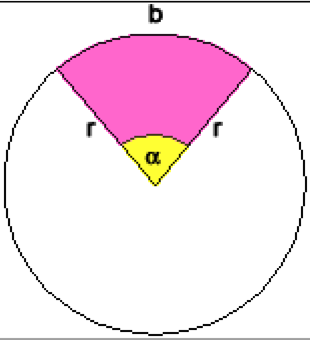
ګردی ټوټه Kreissegment ,
د ګردی ټوټی لویې:

- Mittelpunktswinkel منځټکیکونج = α
- Kreisbogen ګردیلینده = b
- Segmenthöhe ټوټي جګی = h
- Radius وړانګه = r
- Kreissehne ګردی ټوټه ووني یا - وتر = s
- Segmentfläche ټوټي هواره = A
- Kreismittelpunkt ګردی - منځټکی = M
- Verbindung ترنه A-M-B = برابرپنیز دربګوډی
-

د ګردیټوټي فرمولونه	
سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt	!Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$
وړانګه Radius	$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$
Kreissehne ګردی ټوټه ووني (د ورروسته لپاره دي په پام کې وي	$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

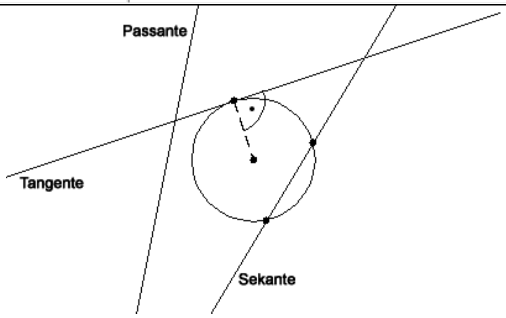
	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د ټوټي جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دليندي اوږدوالی Bogenlänge
	α , $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکيکونج په درجه کچ (Gradmaß)

	Kreissektor ګردی برخه يا قطاع

د ګردی برخي يا قطاع فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	سطحه يا منځهوارهFlächeninhalt

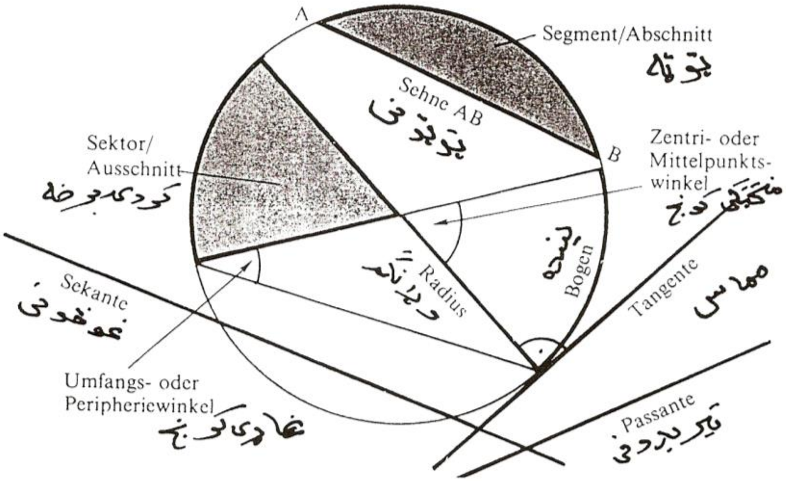
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردی لیندې اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ)	α
Kreiszahlګردیګڼ یا - عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$

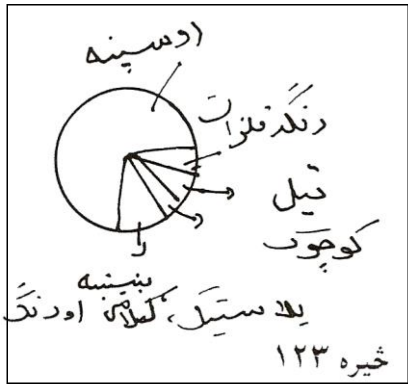
په لاندې ځیره کې نومونه: تیریدونې Passante ، تانجنت یا مماس Tangente، غوڅوونې Sekante، لاندې ځیره کې خو هرڅه روښانه دي.	

د پورته ځیرې کې راوړي څه په لاندې ځیره کې ټول په لاندې ځیره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



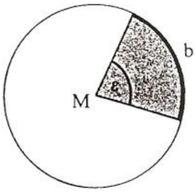
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یامصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دۀ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردۍبرخه وي د منځکونج سره 360°:100=3,6° وی .

	یعني 4%~14,4°;6%~21,6°;9%32,4°;75%=270° ځیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردۍ کې وکښل شي یا لاندې

د ګردۍ برخې ځیره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره یې په نخښنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360°}$	ε لويوالي b ده ټکی د یوه یا ګردی راغوځي 

د ډبل برابرون د دويمې برخې ځخه باوري دي:

جمله : د ګردی برخې د لیندې اوږدوالی داسی دی:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360°} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r \varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سیکتور یا ګردیبرخی لپاره باوري کیږي

جمله: د سیکتور یا د ګردیبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°} = \frac{rb}{2}$$

اړیکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندونې څخه منځ ته راغلي

بیلګه: د خام موادو برخی (بیلګه مخ) هواره ځومره لویه ده، که د ګردی دیاګرام ۵ سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = (25 π : 360°).270 = 0,218.270 = 58,905 cm³

F پلاستیك = 0,216.32,4 = 7,069 cm³

F رنګه فلزات = F ربړ = 0,218.21,6 = 4712 cm³

F تیل = 0,218.14,4 = 3,142 cm³

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د ګردی سطحه یا هواره ورکړي:

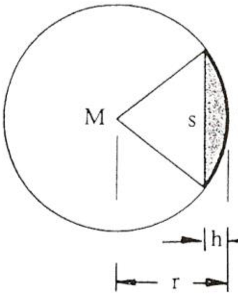
(c) ketabton.com: The Digital Library

$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$

د برخهوارۍ ددې فرمول سره نور د برخهوارۍ شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بیا د برخهوارۍ او د دوه وړانګو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښیز دریګوډي کمون دی.

څیره ۱۲۵

ګردکه ټوټه



د دریګوډي هواری لپاره باور لري:

$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$

(تریګونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه یا هواره

جمله: د ګردیټوټی یا سګمنت هوارۍ په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon / 180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوټه هوارۍ لپاره ګټور نزدې ارزښت $F_{sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پیلبیلګه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د ګردیمیز په ځاي به یو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیری به څومره لوي وي؟

لمړی ګردیټوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د ګردي نزدې شمیرلو لپاره، د مربع څخه و ډیرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د دګردیتهوتي جګولی h د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

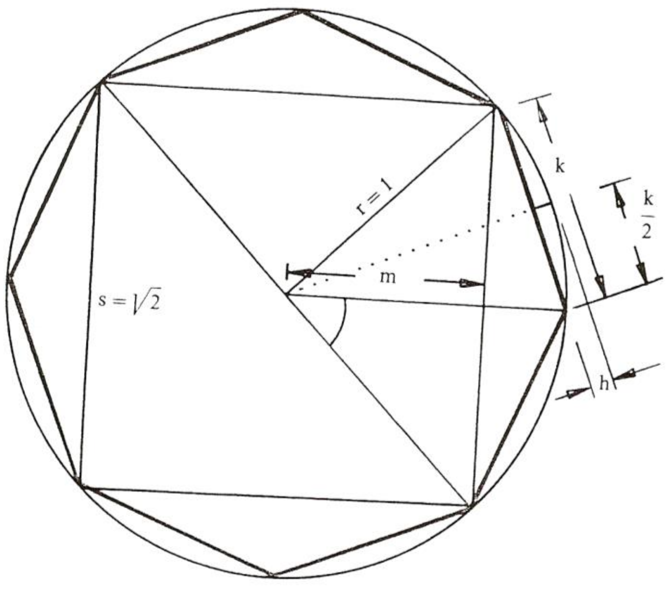
$s = \sqrt{2} \,.\, 1 = 1{,}414\ m$; $m = \sqrt{a-(1{,}414 : 2)^2} = s / 2 = 0{,}707\ m$

$k = \sqrt{(1 - 0{,}707)^2 + 0{,}707^2} = 0{,}756\ m$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0{,}765 : 2)^2} = 0{,}076\ m$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0{,}393\ m$ دی. او له دې سره

$F_{\text{ټوټه}} = 0{,}5.[0{,}393.1 - 1{,}414(1-0{,}076)] = 0{,}039\ m^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښيښې ميز جوړيږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0,312\ m^2$.ميز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{غورزولشوې} = 2,828\ m^2$$

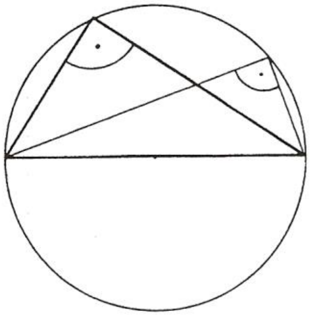
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګرديهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کيناستلوځاي سور (k) حتي زيات شوی ، چاپيری اوس $U = 8.0,765 = 6,123\ m$

دی. نزديونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0,765.0,076 = 0,039\ m^2$ او داسی نور.

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$$

او داسی نور . خيره

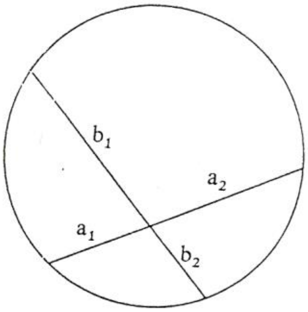


خيره ۱۲۷

ګرديجملی او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کی هر پريفري– يا ژی کونج ولاړکونج دی(خيره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونی جمله

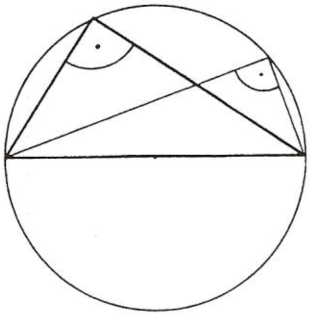
که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کی دننه يو بل غوځی کړي نو د غوځبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi .1.45:360 - 0,5.\sin 45° = 0,039m^2$$

او داسي نور . ځيره

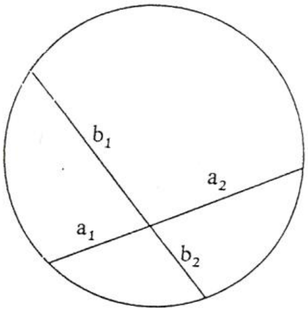


خيره ۱۲۷

ګرديجملی او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردی کی هر پريفري- يا ژی کونج ولاړکونج دی(ځيره)



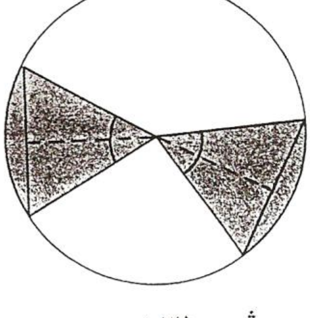
$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

خيره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه ګردی ټوټونی په ګردی کی دننه يو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو خل (ضرب) يې يو ثابت دی

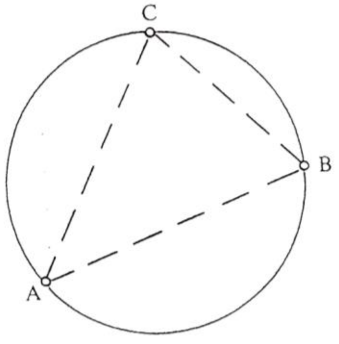
د مساوي ټوټوونو جمله



ځيره ۱۳۱

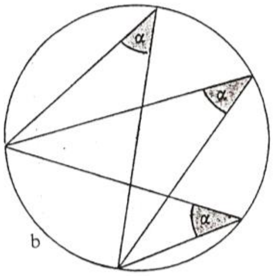
مساي اوږدې ګرديټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلی لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګرديلينده، او مساوي ګرديټوټې او مساوي ګرديبرخی لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library



د چاپیرګردی جمله

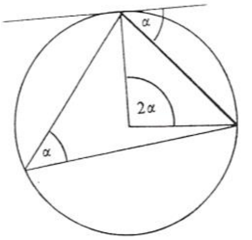
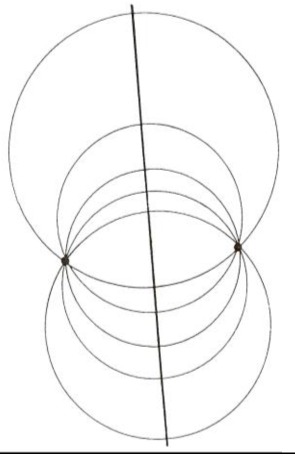
د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود
ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي
څیره



د پریفري – یا ژیکونج جمله

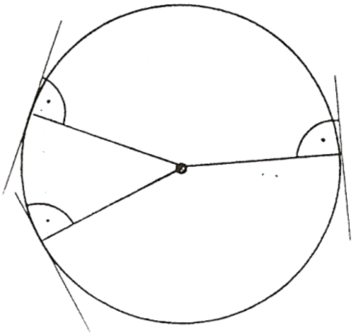
څیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

د منځېکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله: یو منځېکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ څیره. د منځېکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله: د منځېکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه وونې کونج. **د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوڅوي:** د ټولو ګردیو یا دایرو منځېکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوڅوییو ناپای کربنه باندې، چې ځایلاین (ځایکربنه) وایي پراته دي. مخامخ څیره.	 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



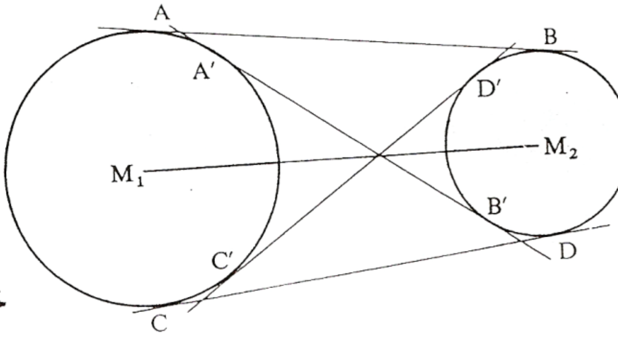
خیره ۱۳۶

په لمستکي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

د تانجنت جمله:

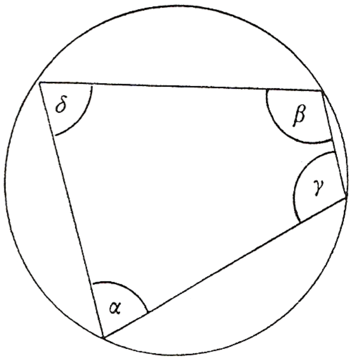
د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دننني (دباندني) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه M_1M_2 غوځه (غوځه نه) کړي. که چیرې دوه ګردي ګډ دننني او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوځټوټې همغه اوږدوالی لري.

$|AB| = |CD|$ په همدې ډول $(<=>)$ $|A'B'| = |C'D'|$



خیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

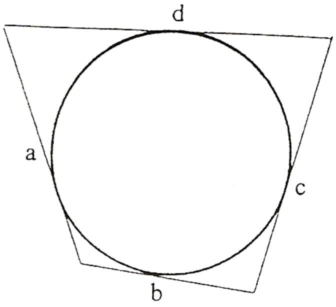


خیره ۱۳۸

د ټوټوونو څلورګوټي جمله

د ټوټونوکونجونه چې مخامخ پراته دي یو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$$



خیره ۱۳۹

د تانجنتونو څلورګوټي جمله

د تانجنتونو په څلوکونجي کې د مخامخ کونجونولویوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

$$a + c = b + d$$

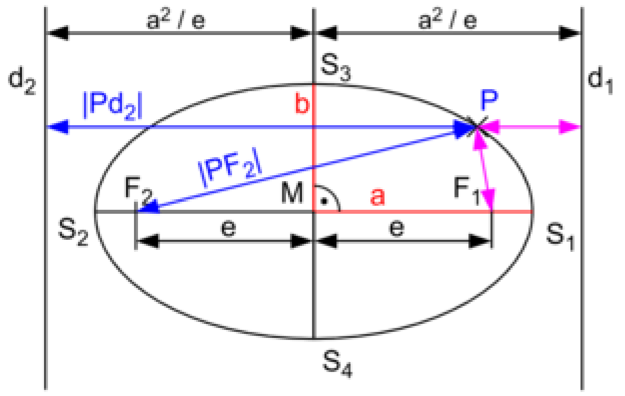
ایلیپسی(بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چې په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چې : داسې یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چې ګردی نه وي او منظم غوخ وي، شته، چې د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسې یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چې لاندې څیره ښایي .چې هر د غاړې ټکی دوه ټکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

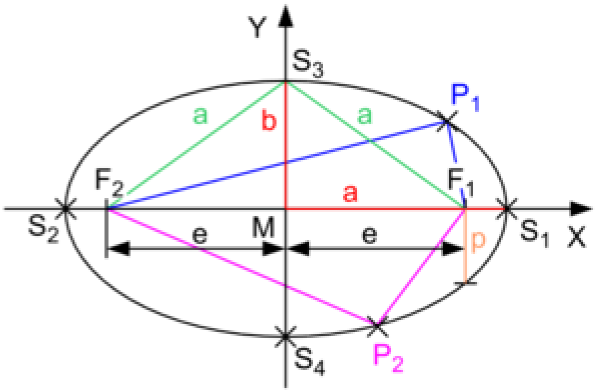
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري،   ایلیپسی نومیري

لاندې واټونو یا فاصلو ته سوزونوړانګی وايي. $|PF_2|=r_2 \wedge |PF_1|=r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای،   e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لاینی ایکسځنتریځیتایت (lineare Exzentrizität) یا لاینی ناراټوله   وايي .ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r + r = 2a \wedge II.........a^2 - b^2 = e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

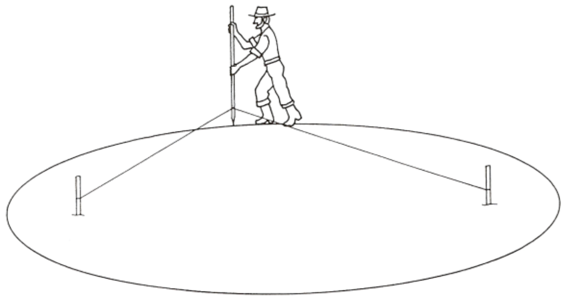
دا څیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسۍ، چی په 2 aاوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذد کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردئ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردئ په Pb او دباندنی ګردئ په Pa کی غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دئ. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه

$$\cdot r \Rightarrow \pi r.(k.r) = F(hagai, baizawy)$$

او له دې چی r = a او k.r =b) د لته r د ګردئ » لویه نیمه اکسی(محور) ده

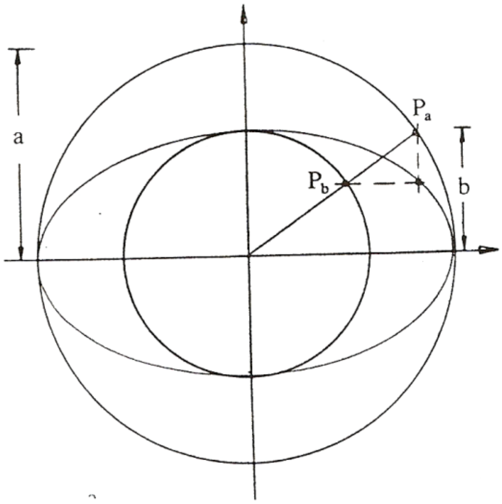
جمله : دایلیپسی هواره ده $F = \pi ab$:



خیره ۱۴۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایلیپسی چاپیرونی په ساده ډول نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې شمیرنه بسیا کوي.



شیره ۱۴۲

جمله : د ایلیپسی چاپیری:

$$U \sim \pi(1{,}5 \, . \, [a+b] - \sqrt{ab})$$

او یا ګردي ته ورته ایلیپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$$U \sim \pi \, . \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپیري ته ځي:

$$U = \pi(1{,}5 \, . \, [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توګه یا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi \, . \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi \, . \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلګه:

کوم خورا لویوالی د بڼاغلی ګړاو میز په ایلیپسي یانیضوي یا هګي شیره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی میز باید د درځ ژوروالي پورې غوخ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi \, .1.0{,}95 = 2{,}985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیری کیږي:

$$U \sim \quad 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردۍ فورم ته یا ګردیځیرې ته نزدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارك Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یی هغه ونه لري چې وړانګه یي ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه)، څوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونی، یوه کال کی څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیری یی څومره دی ؟

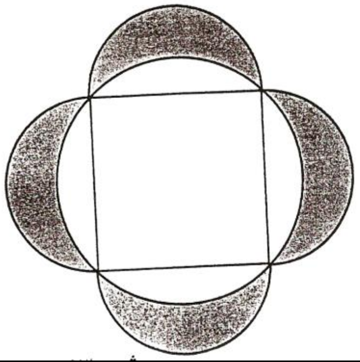
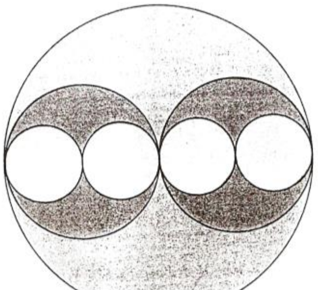
۴ – په خیال کی دې ولرو، چې له اکواتور یا قطب څخه یو پیری غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چې د اکواتور یا قطب له چاپیري څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکی چمتووالی له لارې په هرځاي کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چې سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځاي کړای شي؟

۵ – د غوځهواره به یی د ځمکي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په

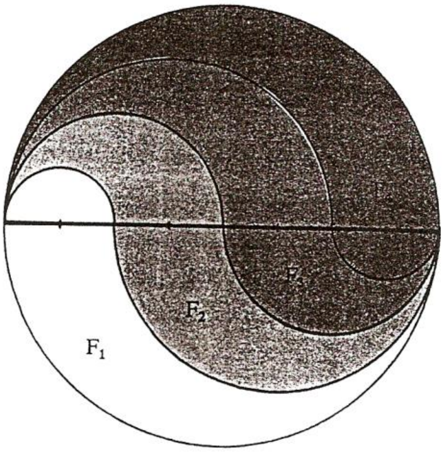
انداه لرې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

	۷ – د ګردۍ [اپریا ل څنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟ ۸ – وښایې: د مربع هواره د څلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟
	د څیرې سره سم د ګردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکې. د ا هره یوه د لویې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایې، چط څلورو واړو ګردیو چاپړۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې ګردۍ چاپړي. ۱۰ – د یوې مربع د باندې او دننه یوه ګردۍ راګرځیدلې. د دواړو ګردیو هوارې یو بل ته څنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟

۱۱ – د دوه ګردیو منځ ټکی د مساوي وړانګي $r = 7{,}2\ cm$ سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګردیو ګډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟

۱۲ – په یوه ګردی ، چی وړانګه یی $r = 10\ cm$ ده، که یوه ګردیکړی کینبول شي، چی هواره یی دومره لویه ده لکه د دننه ګردی هواره. د دباندې ګردی وړانګه به څومره وي؟



څیره ۱۴۵

۱۳ – د یوې ګردی برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په څیره ۱۴۵کي چی ورکړ شوي، وښایی، چی وړانګه یی $r = 4\ cm$

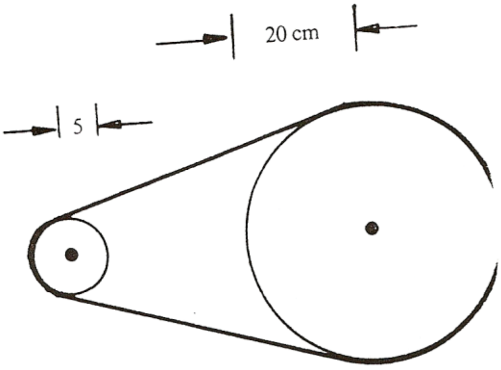
(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي
هوارو ټوټه شوې ده (څيره د ۱۴۵)

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :
الف) يوه مربع، چې داړخ اوږدوالی يې ۵ سانتي متره وي.
ب) يوه روتی چې نيمي يې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .
پ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د يوه پنډ پينسيل سره يوه ګردی وهل کيږي، چې دننی وړانګه يې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتينی يوه ګرديکړی ده. د دې ګرديکړی هواره وشميری.

۱۶ – يوه ساتليت يا جوړه، يعنی مصنوعي سپوږمی، له ځمکی په يوه ګردی راڅرخي، چې سرعت يې په سانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتليت يا جوړه سپوږمی يا مصنوعي سپوږمی له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟



څيره ۱۴۶

۱۷ – د يوه څرخونکړی يا بهتره څرخونپټی په مرسته کيدی شي څرخونحرکت يا څرخونخوزون د يوې څپی په بلی څپي راوړل يا واړول شي. په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه يعنی ډيره ټيك اره په بريښنا ماشين چلول کيږي يا په حرکت راوړل کيږي. د ارې خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټك دی، که د ماشينڅرخونڅرخی يا ګاډيل (r = 20 cm) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هګیخیره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1,r_2) = 90°$

۱۹ – وښایي: په یو په بل پرتو الیپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دنني ایلپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلیپسي یا هګیخیرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې ګردی په څیر راڅرخي. ددې چاپیري وړانګه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

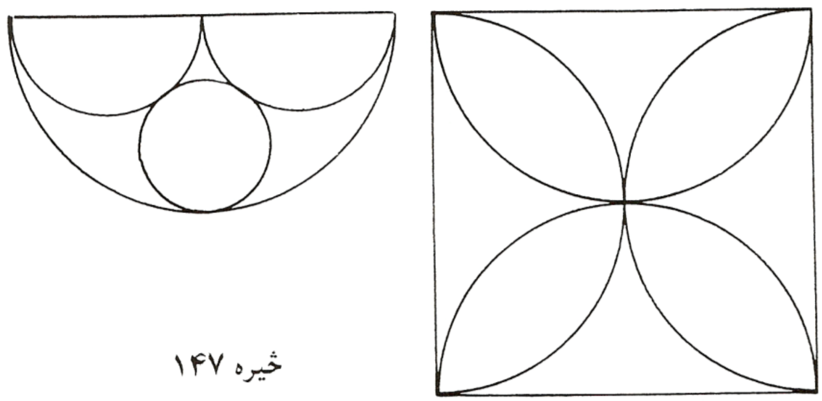
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

ب) په کوم منځنی سرعت (کیلو متره په سانیه کی) ځمکه په خپل چاپیري راڅرخي؟

پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزیات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښایي، او همدا ډول د ایلیپسي یا بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱ – د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟



څیره ۱۴۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګردیو وړانګې ځان داسې نیسي یا په تنساب کې سره پرتې دي،
لکه 5 : 8 په لویه ګردۍ کې یو ګردیبرخه موجود ده ، چې د هغې لینده
دومره لویه ده لکه د کوچنې ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشمیرئ

الف– منځتڼکي کونج
ب – د ګردیبرخې هواره.

۲۳ – کوم منځتڼکي کونج په لیندۍ پورې اړه لري، چې
الف) ټیك همدومره لوي وي لکه وړانګه ؟
ب) دوه واره دومره لوي وي لکه وړانګه ؟
پ) نیم دومره لوي وي لکه وړانګه ؟

۲۴ – د یوې ګردیټوټونې منځ ټکي کونج وشمیرئ ، چې هواره یې همدومره لویه وي، که په وړانګه یې چې مربع .

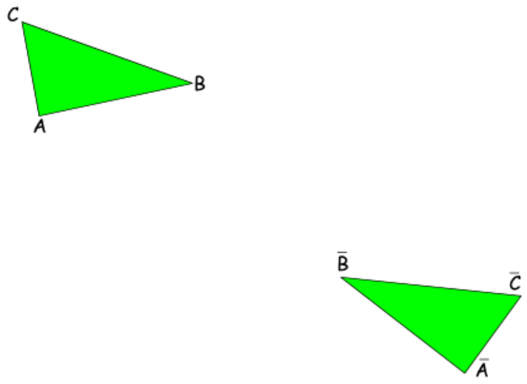
۲۵ – یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جګوالي راګردوي یعني له ځمکې راګرځي یا بهتره له ځمکې راڅرخي. د راڅرخونوخت یې ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیې دي.
الف – سرعت یې څومره لوي دی؟
ب – په یوه دقیقه کې څومره لار وهي؟

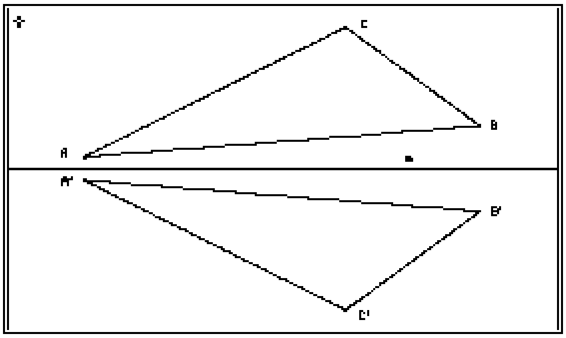
(c) ketabton.com: The Digital Library

کونګروائنخ خیرونی(برابرې خیرونې)

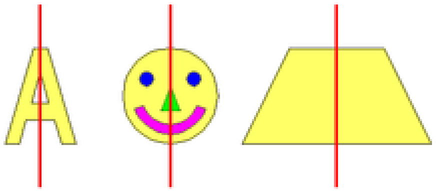
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping





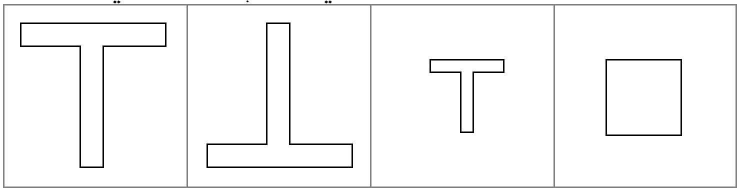
Symmetrische Figuren سیومتري خیرې یا شکلونه



د هوارو ښخه مو ولیدل، چې د هغو ترمنځ سیومتري خیرې یا شکلونه، یعنی داسي په نامه برابرې یا مساوي او نیمايي خیرې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

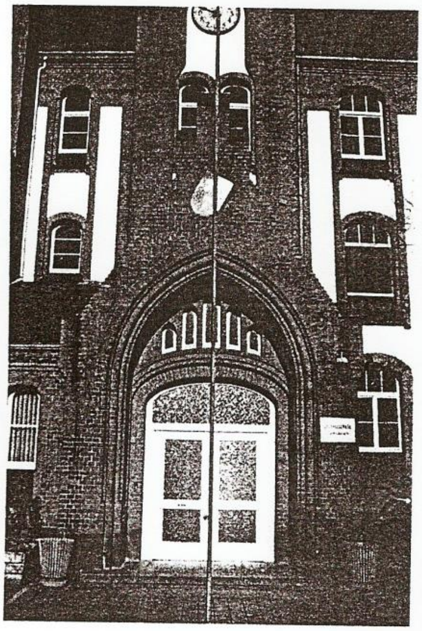
د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیرورتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د ښکلا له مخی، د هغو د همغسي خیرې ځرگندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)



په پورته خیره کې کیڼ لور ته دوه د تې خیرې یو بل پټوي، کیڼ لور دې د کښلی تې سره برابرپټوونی تې وکښل شي٠ دا محور سیومتري خیرې دي٠

په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو څخه کتل کیږي چې سیومتري تل دا مانا نه لري چې شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چې د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چې څنګه ضربالمثل وایي چې داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروا‌ینځ یو پل دی

خیره ۱۴۹



خیره ۱۴۸

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینځ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (خیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګروانېنغ ځېروني » ورته برابرې ځېروني » وبولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابرې هم دې یانې که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي٠

د دوه شیانو A او B د کونګروانېنغ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

A ~ B <=> A ~ B

د کونګروانېنغ خویونه :

١ - کونګروېنغ ځیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پټوي .

٢ - کونګروېنغ ځیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوځولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځی٠

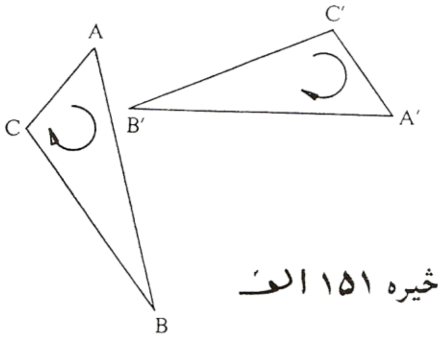
پورته ځیره تکی سیومتري ده ٠
غوځول د شمیر پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کیدی شي وي.

لنډ : محورهنداروني او کربنهنداروني ، ځرخون، ټکیځیره ونې او راکښني ګونګروانېنغ ځیره ونې دي٠

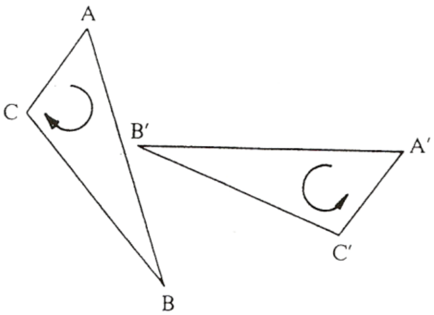
پوښتنه کیږي چې :
په شمیرپوهنه کی عملیي شته چې د هغي په مرسته یا د هغي له لارې یا د هغی په وسیله ځیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کاروني یا عملیي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونګروانېنغ ځیره ونې یا ځیره کوني بلل کیږي.
هر کونګروانېنغ ځیره یا شکل او لویوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کربښوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننیونه) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج ځرخونلور یا سمت تغیر خوړونکي دی، که ځرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګروېنغ بلل کیږی او که ځرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په ځټ یا برعکس کونګروانیغ بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰



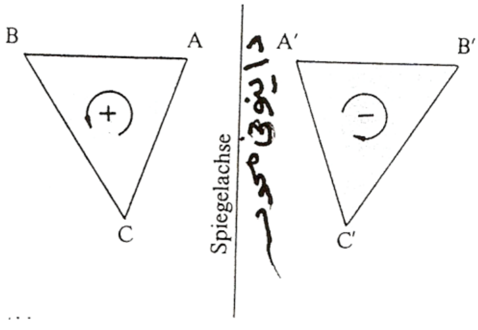
ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

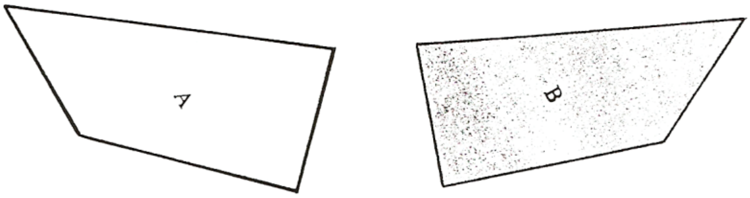
یو کونګرواینځ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینځ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

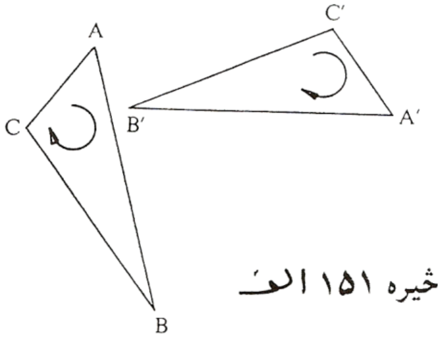


ثیره ۱۵۲

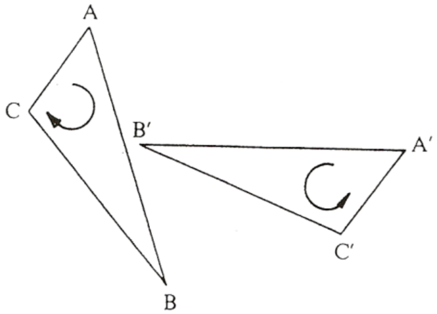
(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰



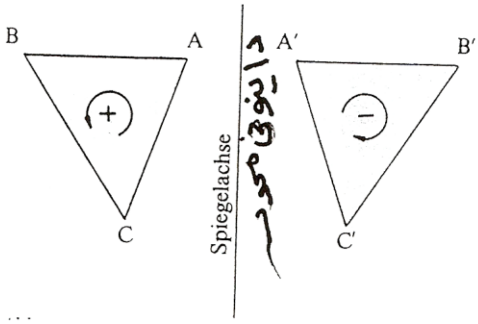


ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

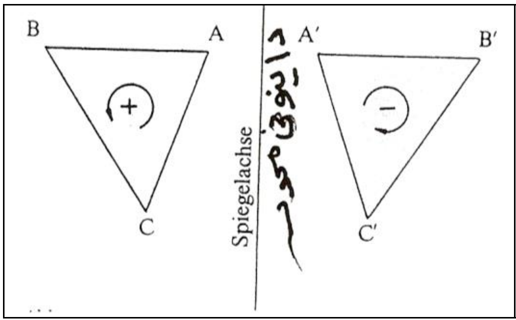
کربنهندارونه(په کربنه منعکسونه) Geradenspiegelung



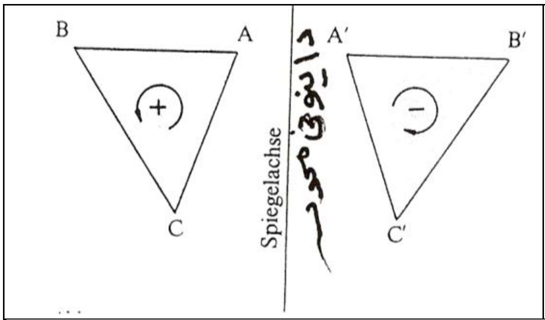
ثیره ۱۵۲

یو کونګروابنځ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کربنی اینونه یا کربنهندارونه یواځنی مخامخ کونګروبنځ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

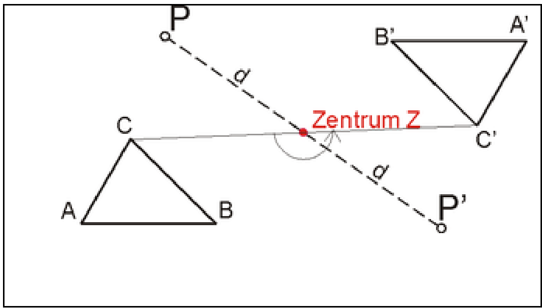


په کربنه هنداورنه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.



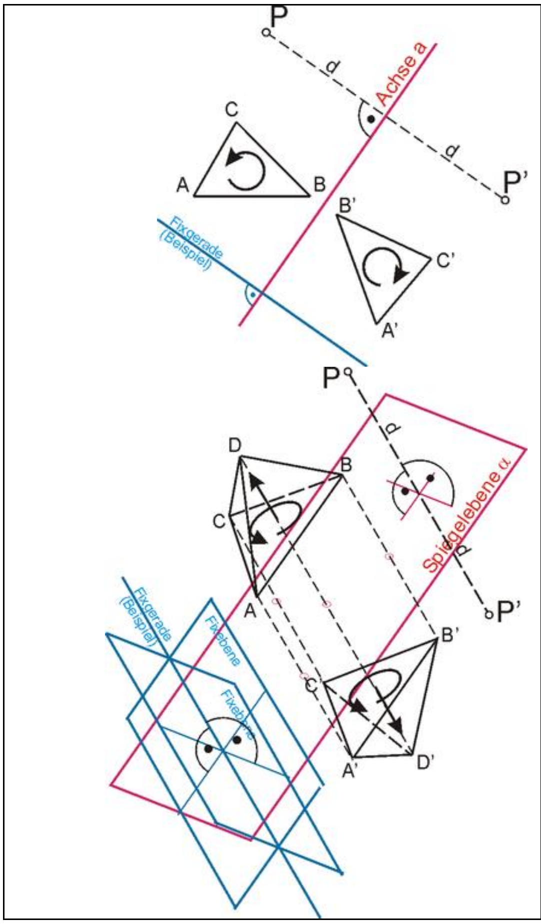
په کربنه هنداورنه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځیره دې وکتل شي

د درې ګوډې ABC مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی A'B'C'جوړېږي .پخپله کربنه g په اینونکی کربنه یا په اینونکربنه یا په هنداروونکربنه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځاي په ځاي ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، له دې امله کربنی g ته د ځاي په ځاي ټکوکربنه هم وایي. ټولی په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کربني د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان ځیره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثني یا بی له غوڅټکي کربني ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځاي بدلوي. له دې امله دا کربني ځاي په ځاي کربنی بلل کیږي ۰
په لاندې ځیره کې کیڼ لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کښلې کربنی منځ ټکی دی ، ښي لور ته ځیره کیږي او دا په همدې ټکي۰ کتک کیږي، چې د هر ځیره ټکی واتن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د ځیره کوونې ټکی واټن له دې منځټکی څخه .

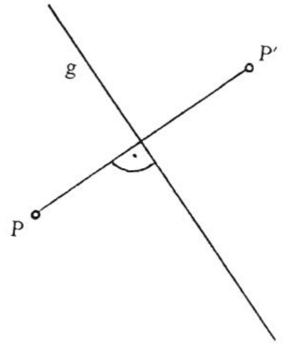


په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د ځیرې او ځیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې څرخون لور یې همغه څرخونلور نه ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	په مخامخ ځیره کي اینه ونې کښل شوي دي

د کرښ اینوونو(هنداروني یا انعکاس) جوړښتځیرنه

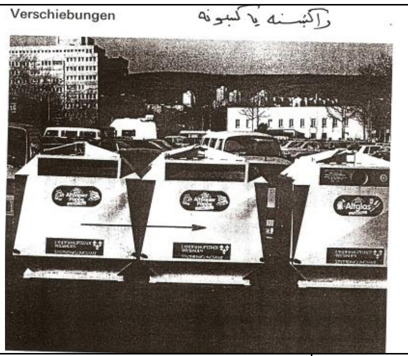
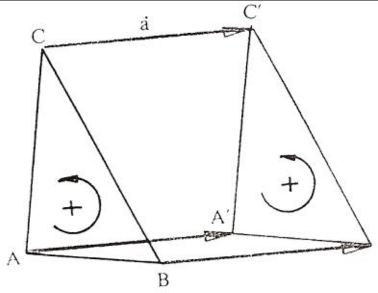
 ځیره ۱۵۳	۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ یا زوړند پریوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .) ۲ – ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتړی(په ګردی کی : په M'یو ګر دی د r'=r په وړانګه ووهی). د ځیرې او پخواځیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا g سیومتریمحور دی، دا په دي مانا، چی ټوله ځیره د اینونې سره په خپل ځان ځیره کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چې په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په څټ څیره ونه یا مخامخ څیره ونه بیرته Sg دی. دا دڅیرو زیاتواره څیره ونو ځانګړی حالت د۰

دلته بیا سړی د څیره ونو د ځنځیرونو څخه خبرې کوي او د دې لپاره ترلنځښه »°« په کار اچول کیږي. کرښ اینوونه د ګونګراینځو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چې ټولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چې په لاندې کی به وګورو.

راکښنه یا کښونی   Verschiebungen

	پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری۰
څیره ۱۵۵	د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چې د څیرې وتلتکي په څیرټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونګرواینځڅیروني دي، دا په دې مانا چې د څرخونلور ساتلی پاتي کیږي۰

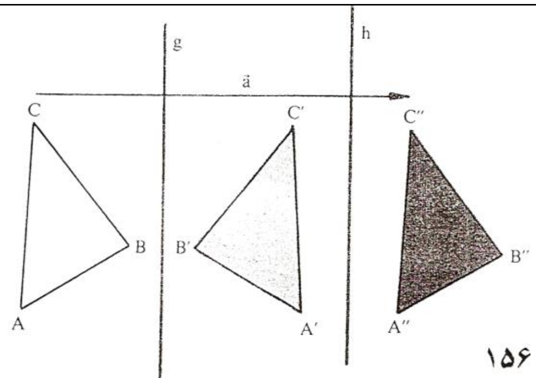
د کښولو جوړښتڅیړنه

۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردی کی منځټکی)د ګښولو وکتور a وکاږی (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)

۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي   په اندازه ګردی ووهی)کښونه ځاي په ځاټکي نه لري(که د صفر وکتور دې په نامه   identität ایدنتیتي یا کتمټ څیرونی څخه تیر یا صرف نظر شو)

ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کربښي ځاي په ځاي کربښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان ځیره کيږي .هر کښول یا نوه هم ښه هره کښه ونه Va د V-a کښولو له لارې بيرته راوګرځول کیدی شي.

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په څټ لور .هره کښونه په دوه کربښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لاری بيرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چيرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.



۱۵۶

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کربښ اینونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، ځکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا

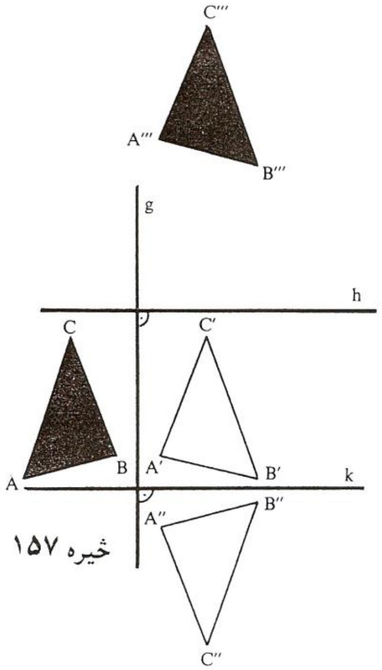
اووښتونی – یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښوونی اینونه. ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښوونی اینونه ده،

که $a \parallel g$ وي.

هره کښووني اینونه یا هندارونه د درې کربښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ تړل دي، چیرته چی کربښي h او k ، کوم چی دکښوونی ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:

$$h \parallel k ; h \perp g .$$

یوه کښوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د ځیروونی ځاي په ځاي کربنه ده. هره کښوونی اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بيرته راکرځول کیدی شي.



خیره ۱۵۷

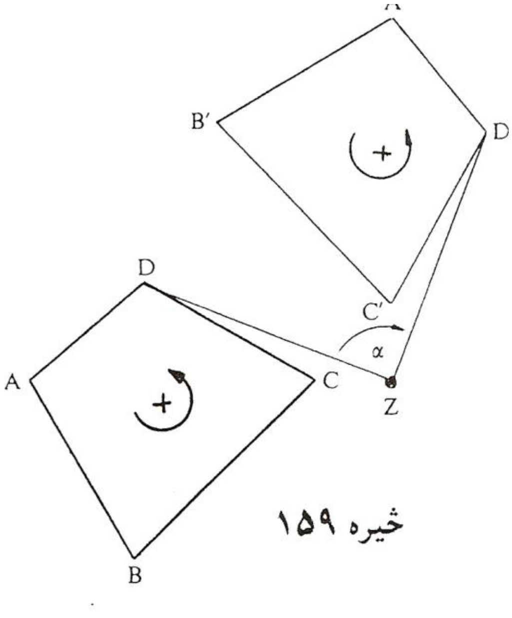
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرخونونه (ځرخونونه)

خيره ۱۵۸

تعريف : ځرخون $D_{Z;\mu}$ هغه ځيرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي Z (ځرخونټکی يا ځرخونمنځ) هر اصلي ټکی P په يو ځيره ټکي P' داسې تنظيم کړي، چې $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چې μ يو د مخه ځاي په ورکړ شوی کونج دی، د ځرخونکونج.



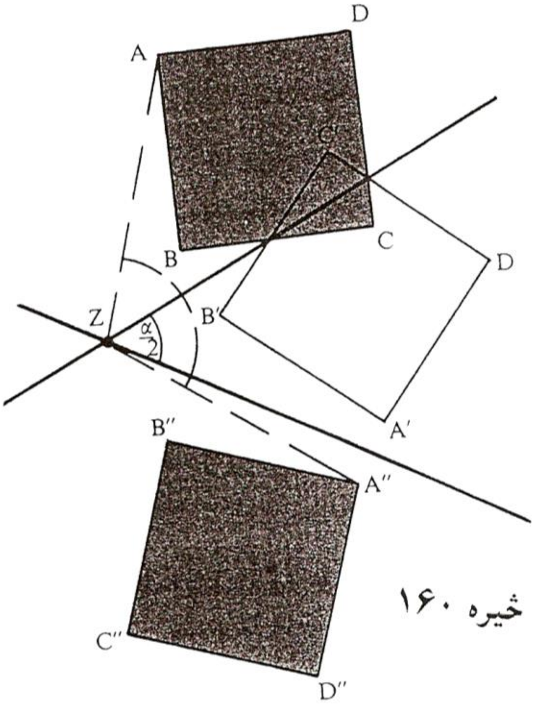
ځيره ۱۵۹

پس يو ځرخون د ځرخونټکي Z او ځرخونکونج ځخه يواځنی ټاکلی دی. د ځرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی. (ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کې وي).

دځرخون جوړښت ځيرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډيرکونجيز کونجټکي، په ګردی کې منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۰

حرخونمنځ Z يوه وړانګه کيږدی . د هرټکي P واټن PZ په يوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چی له PZ سره کونج جوړوي.

۲ –لاس ته راغلی ټکی P′ په اصل پرلپسي ترتيبيو د بل سره ونښلوی (يا په همدې ډول په P′ يو ګردی د r′ = r په وړانګه ووهی).

څرخون D_z يوه همغه لوريز کونګروا ينځ څيرونه ده.

که څرخون D_z له څرخون په $0°$:

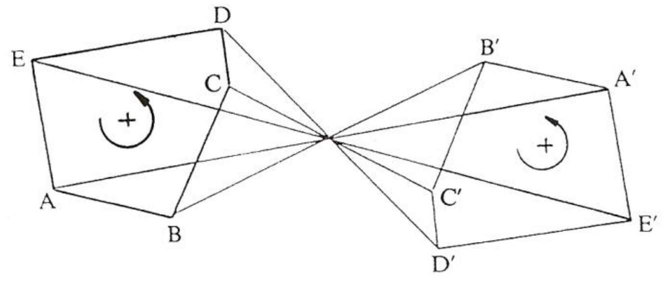
ايدنتيتي يا کټمټ، توپير ولري، نو دا يواځي يو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر څرخون D_z د پر کونج کیدی شي چی په څرخون D_z په کونج - بیرته راوګرځول شي. د جوړښت څیړنی څخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون D_z د دوه کرښي اینوني چی په ټکی Z کی په کونج /2 یو بل غوڅوونکو کرښو g اوh ځاي نیونکی کیدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$ د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (څیره)

تعریف : یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا په دې مانا چی په ټکي اینه کیږي.

په دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیڅ څیرونه ده. (څیره ۱۲۸)



څیره ۱۶۱

په ټکي اینوني جوړښت څیړنه

۱ – د اصلي څیرې هر په نخښه ټکي څخه یوه کرښه وکاږي، چي له اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z په بله لور وباسی.

۲ – داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوئ. (همداسی په 'M یو د r' = r وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروانیخ ځیرونه د کرښې اینونې د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه ځرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرښ اینونو (ځرخونو یا کښنونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروانیخ ځیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښنونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروانیخ ځیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروانیخ ځیرونو کارونه بیرته کونګروانیخ ځیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروانیخ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروانیخ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروانیخ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروانیخ ځیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځاي کیدی شي. الجبري ټول کونګروانیخ ځیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ ځیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی ځیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ ځیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګوټ ی کونګروانیخ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

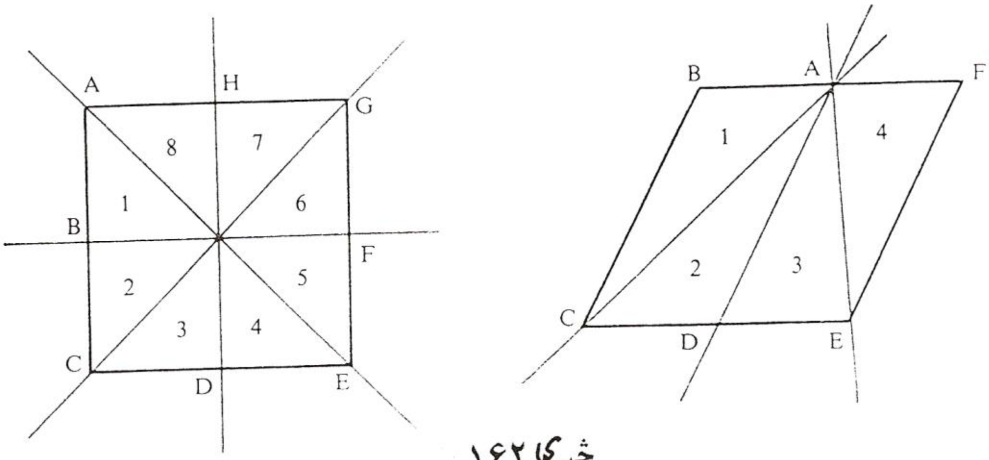
کونګروانیځجملی: الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په یوه غبرګ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږئ.

۲ – د کونګروائنخ جملو په مرسته وښايي، چی غوڅکرښی پیلڅیرې په کونګروائنخ برخو ټوټه کوي.



څیرۍ ۱۶۲

۳ – په یوه بیلګه وښايي :

الف) $S_g \circ S_h \models S_h \circ S_g$

ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

۴ – د «هیلګولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کینبتی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلګولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي (N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلاینی حرکت کوي او «کوین ماري» په ۸۲ درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کې د «هیلګولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost

الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟

ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅټکی څومره لرې وي؟

۵ – وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوڼی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو∝ او ß کونجنیمي دي. وښايي چې دریګوڼي ABP اوABQ کونګروواینت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅټکي دي).

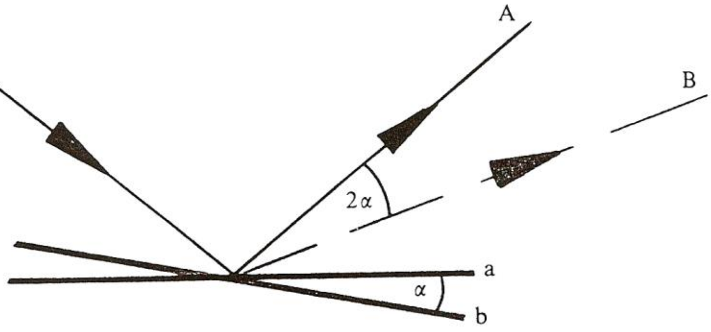
۶ – څومره کورونتځیروني موجود دي چې لاندې څیرې یې په خپل ځان ځیره کوي: کرښې ، ګردي، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوڼي ، ولاړ ګوڼی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریګوڼي ؟ کتمتځیرونه دې نه په کې شمیرل کیږي.

۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چې په یوه خپله اینښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ اینښوول شوي. ترتیب په څیره کې له پورته لور انځوریږي.

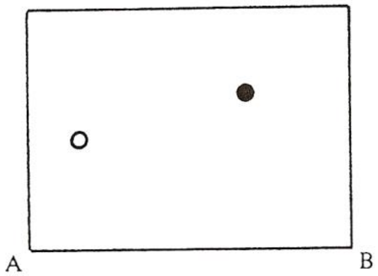
د نور له چینې L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کې پریوزي او د هنداروني یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راڅرخیږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

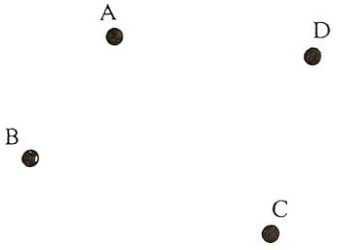


خيره ۱۶۳



خيره ۱۶۴

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ايښول شوي يو سپين او بل تور. د کوټې له ديوالونو څخه توپ بلې لور ته نه شي تللی سپين توپ دې داسې ووهل شي چې تور توپ ووهي.دا د اينه ونې يا انعکاس د قانون سره سم په ديوال AB لګيږي. (حيره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اينه ټکی یاانعکاسټکی – سپين توپ»

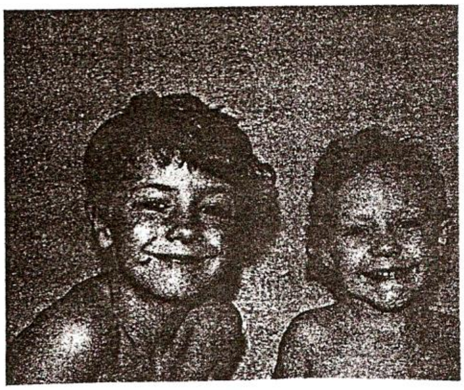


خيره ۱۶۵

۹ – دا د يوه کور څلور برجونه دي، چې په A,B,C,D سره يې ښايو (خيره) داسې يو ځاي S شته ، له کوم چې برج A د برج C څخه يا سره پټ شي او برسيره پر دې له دې ځاي څخه A د B او D د منځتې په خير ښکاره شي يا ځان وښايي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

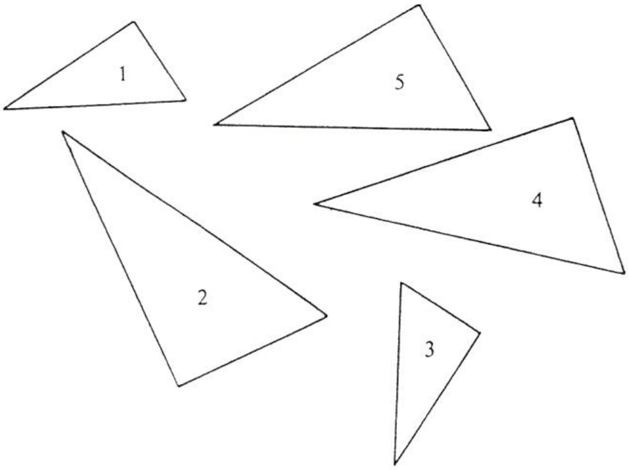
ورته واليځيرونه Ähnlichkeisabbildung



ځيره ۱۶۶

که چيرې دوه غبرګوني کوچنيان وکتل شي ،نو سم د لاسه ويل کيږي، چی دا دوه يو بل ته ورته دي. شيان يا ليديدونکي هم يو بل ته ورته بلل کيږي، که ګډ خويونه يا ګډې نخښې ولري، يعني څرګند يو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم يو له بل توپير کيدونکی وي. په شميرپوهنه کی داسی نه شو ويلی چی دا شيان يا ليديدونکي يو بل ته زيات يا کم ورته دی، دا خيالي قضاوت دی چی په شميرپوهنه کی داسی قضاوت ځاي نه لري.

پيلبيلګه:



ځيره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې دریګوڼی د کونجونو $\gamma = 90°$ او $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له یوه زیات دریګوڼي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه یواځیوالی یا یواځیتوب نیول کیدی یا فرض کیدی شي.
دریګوڼي ۱ او ۲ کونګروانیځ دي، دریګوڼي ۲ او ۴ هم، مګر دریګوڼي ۱ او یا ۱ او ۴ کونګروانیځ نه دي. سره ددې هم دوي زیاتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»یا «شکل» یا ځیره) دوي یو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي یا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانیځجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښایو چه د اړخونو ځاننیونه یا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعریفوو

تعریف : هوارې ځیرې یا شکلونه هلته یو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننیونه یا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) یو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بیلګه : کونګروانیځ ځیرې د ورته شکلونو یو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځانښیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروانیڼځ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو درېګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځانښیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د درېګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول- د کونګروانیڼځ ځخه پر مخ ځو- چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: درېګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د درېګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځانښیونه.

$$a : a' = b : b' = c: c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځانښیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چي

$a : a' = b .: b'$ او $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $ß = ß'$ د $a < b$ لپاره او یا

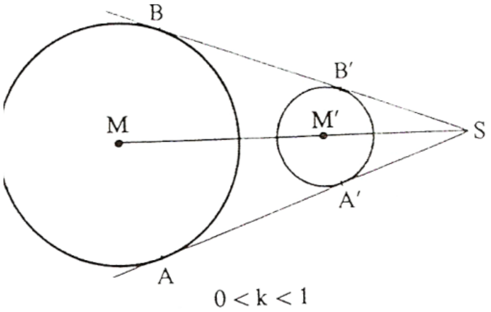
۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي.
دا په دې مانا چی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو شیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. شیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني شیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي شیرونی منځني راکښنه ده

> **تعریف:** منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.



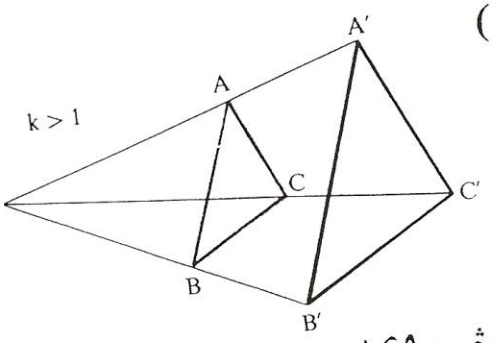
شیره ۱۶۸

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی شیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غږیږو. شیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که $k = -1$ وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ $|k| = -1$ لپاره کیدی شي k په $k = (-1).|k|$ باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښني جوړښتڅيړنه(توضيح)



خيره ۱۶۹

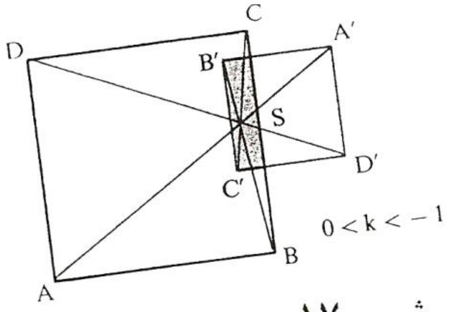
۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کيږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقايسه خيره) او نوې پای کرښه

|'SP|.k = |SP|

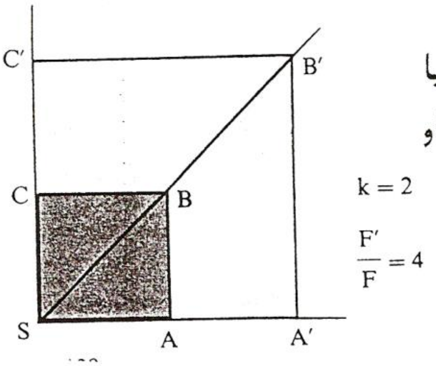
په کرښه چی دټکي S څخه پيل له P, S او 'P تيريږي وکاږی.

۳ – د اصل په ترتيب یا اصل ته ورته ټول خيره ټکي سره ونښلوی.



خيره ۱۷۰

دا چی ورته خيرې (بی له 1 = |k|) کونګروانيځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغير خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بيلګي په توګه k = 3 , k = 2) تغير کړو، نو خيروونکی هواره بايد په فاکتورk^2 (يعني $k^2 = 4$,همداسی $k^2 = 9$) تغير وخوري.



خيره ۱۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چی فاکتور k ولري د ځيرې هواره 'F او له ځيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب یا ځانتیونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لرې ځکه چی منفی ځل منفی بیرته مثبت دی

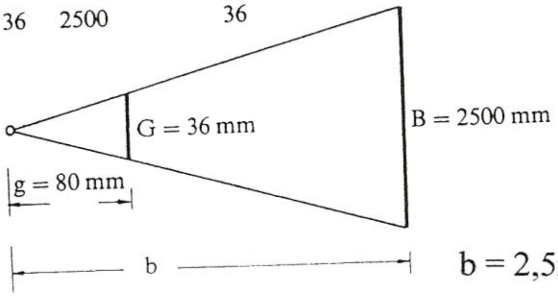
پیلبیلګ:

دياس(دفيلم دياس) (فورمات یا لويوالی 24mm.36mm)
په يوه ديوال چی لويوالی يی 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې ځيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يی له عدسي واټن 8cm دی. پريوستوني يا پرويکتور د ځيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟
د دياس دځيروني لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د ځيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د ځيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

ځيره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56 \text{ mm}$$



ممکن ډك په دې مانا، چی 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی:

$$b = 2{,}5\text{m}.0{,}08\text{m} : 0{,}036\text{m}$$
$$\sim 5{,}56\text{m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

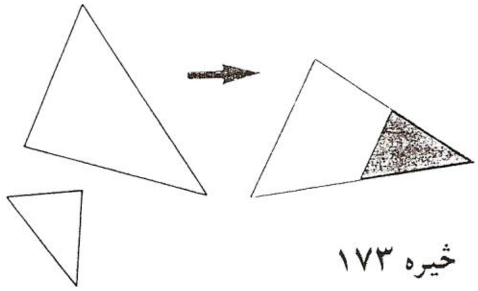
د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

$k = 2{,}5: 0{,}036 \sim 69{,}44$

له دې امله د څیرې هواره ده:

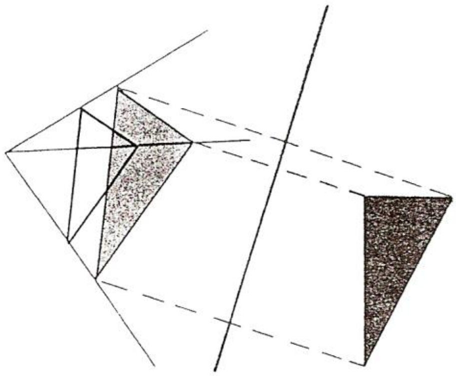
$F' = 69{,}44^2 . 0{,}036 . 0{,}024 = 4{,}17 m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.



څیره ۱۷۳

دا روښانه ده، چی ورته څیرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اینونی له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږي، په کوم چی سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



څیره ۱۷۴

تعریف : هره کونګروایننځ څیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر ترلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې څیرونی ورته څیرونی بلل کیږي.

دا چی هره ورته څیرونه بیرته یوه داسی څیرونه باندې راګرځي، نو بیبخي باور لري : د ورته

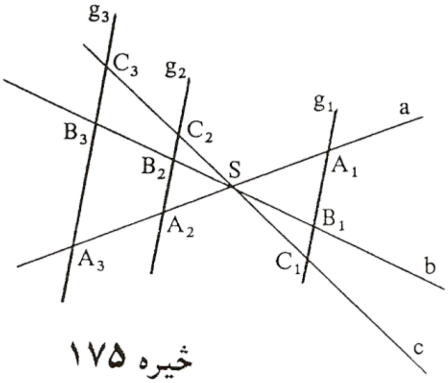
(c) ketabton.com: The Digital Library

والي خیروني ډیری چی پرلپسی سره وتړل شي یا ځنځیري شي ګروپ جوړوی (د ګروپ لپاره دې، چی شمیرپوهنیزه کلیمه ده، د کتاب پای وکتل شي)

او خیرې او همداسي پیل بیلګه (ډیاسپرویکتور) څخه د وړانګي جمله ټولیزه یا عمومي کیدی شي.

۱ . وړانګي جمله: که له یوه ټکي S وتلی وړانګي $a,b,c,\ldots$ له غبرګو کرښو ..... g_2,g_2,g_3 غوڅي شي، نو د یوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه

د بلی وړانګي ټوټی: دا په دې مانا چی:



خیره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړیزکونجونو او د دریګوډیو ورته والي چی SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره یی لري.

برسیره پر دې باور لري:

۱ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپای کرښو.... g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې یا بهتره ستورې کرښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځانتیونې یا تناسبات څرګندوي، نو دا کرښې یو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګې جمله:

که له یوه ټکي وتلې وړانګې د غبرګو ناپاکرښو څخه غوڅې شي، نو د دوې ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسې یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکې څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|}=\frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|}=\frac{|SB_1|}{|SB_2|}=\frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|}=\frac{|SC_1|}{|SC_2|}=\frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|}$$

۳ . وړانګې جمله:

په یوه غبرګې ټوټو ځانتیونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځانتیونه یا تناسب:

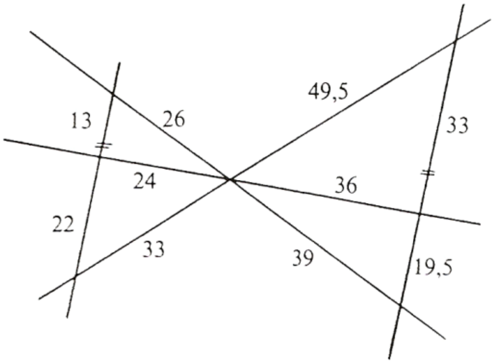
$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}=\frac{|A_2B_2|}{|B_2C_2|}\quad \text{oder}\quad \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|}=\frac{|A_2C_2|}{|B_2C_2|}\quad \text{oder}\quad \frac{|A_1B_1|}{|A_1C_1|}=\frac{|A_3B_3|}{|A_3C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګې جملې پسې لړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسی یا له امله باور لري:



خیره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39}=\frac{24}{36}=\frac{33}{49{,}5}=\frac{2}{3}$

لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22}=\frac{36}{33}$ oder

۲. وړانګی جمله

$\frac{33}{22}=\frac{49{,}5}{33}$ oder

$\frac{26}{35}=\frac{39}{52{,}5}$

3. Strahlensatz: $\frac{13}{22}=\frac{19{,}5}{33}$ oder

۳. وړانګی جمله

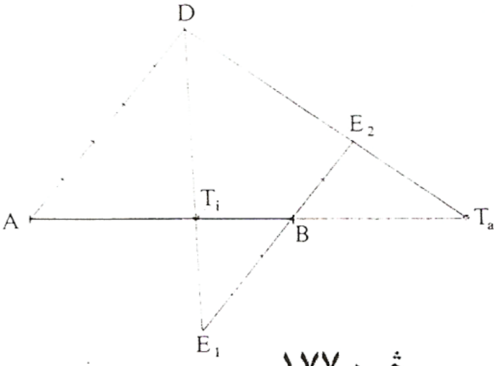
$\frac{35}{22}=\frac{52{,}5}{33}$

۲ . د یوې کرښی AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځانګړي يا تناسب 5:3 او دباندي (T_a) په تناسب یا ځانګړي 2 : 5 ویشل کیږي. د دي لپاره د ۲ . وړانګي جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|}=\frac{|AT_i|}{|T_iB|}=\frac{5}{3}$$



خیره ۱۷۷

– د باندي ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|}=\frac{|AT_a|}{|T_aB|}=\frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنی برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلایي غوڅی یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالي همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$$x = \sqrt{a^2 - ax}$$

$$x^2 \; a^2 - ax$$

$$0 = x^2 + 1x - a^2$$

$$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$$

$$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$$

$x_1 = 0{,}5a(\ 5 - 1)$ په کار نه راځي

$x \sim 0{,}618a$ نو لرو:

د طلایي قاعدې لګه لارې

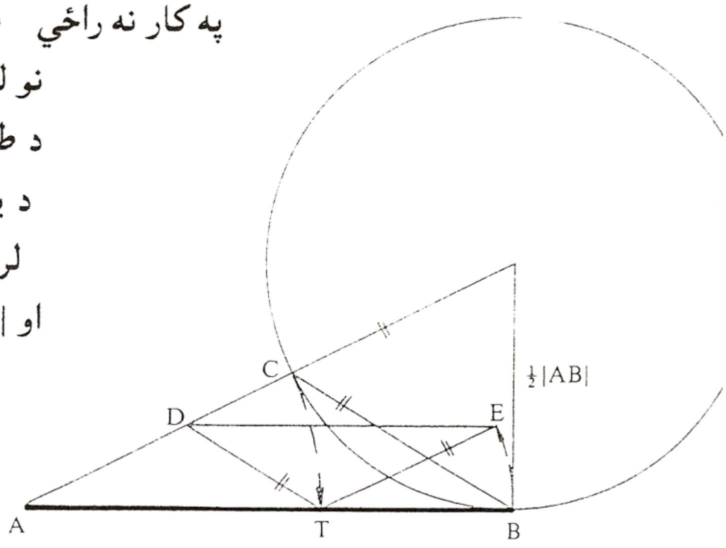
د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

$|AC| = |AT|$ لرو

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\boxed{\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}}$$

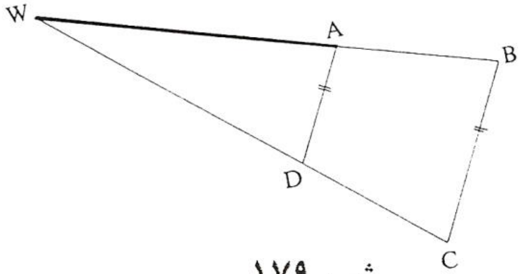
خیره ۱۷۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

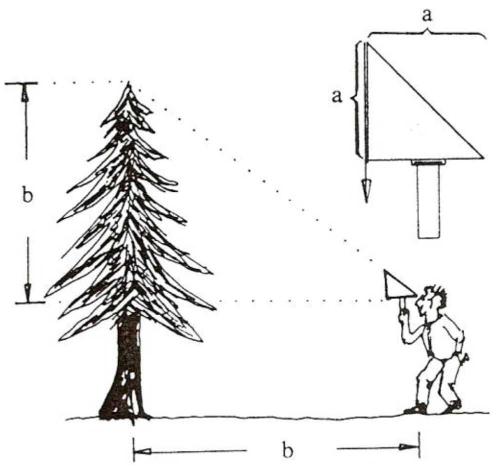
۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوړی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوړی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوړی په (S(-2 | -3 وڅرخوی د 140° = ∝ سره. دا ځیره دریګوړی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوړی په ۴ یوونو سره لمړی کینڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په x– محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي (6-|0) د k = -1 سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوړی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په ځیر، څنګه تغیرېږي؟
۴ – کرښه AB | =10 cm | دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځانښیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي.



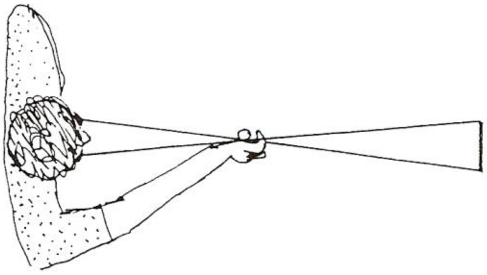
ځیره ۱۷۹

۵ – کرښه CD| =6,5 cm | د «طلای غوځي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.
۶ – د یوه کتونبرج A (ځیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW | یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: |AB|=75 m : |BC| = 125 m او |AD|= 100 m , نو |AW | څومره اوږد دی ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۰

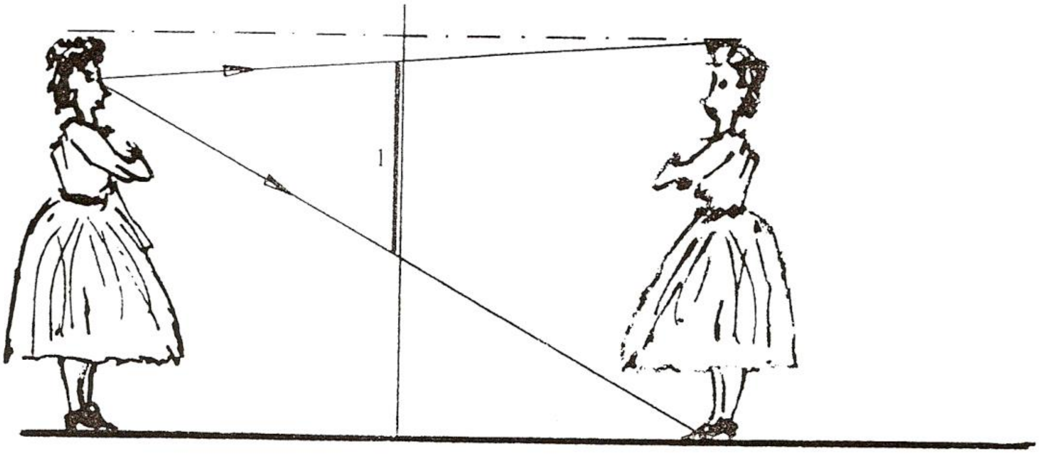


ځیره ۱۸۱

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي»
سره (ځیره) د یوې ونی
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکی څخه ۱،۷۰
متره جګه وي، او دی له ونی
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟
ب) ځنګه (د یوه څرګندېه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
متې په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لاربښود: ۷ الف وګوری)
پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټی کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسی صورت نیسی چی
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسی،
لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغۀ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی ځنګه راځي؟
۸ – میرمن څانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادې توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هنداري

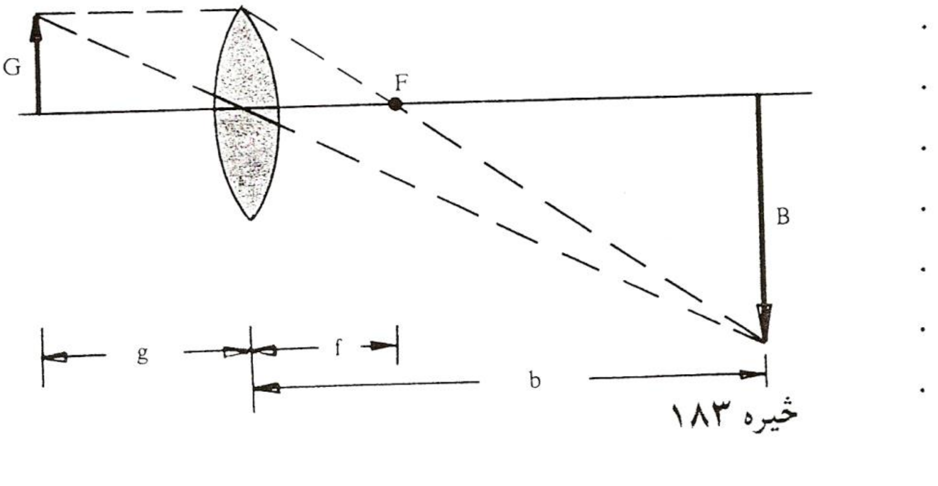
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودرېږي.دا هنداره باید ځومره کم له کمه جګه وي چې میرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لویوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟



ځیره ۱۸۲

۹ – د یوې لینزې یا عدسی یا سترګی له لارې په ځیره کی د نور ځیرونی



ځیره ۱۸۳

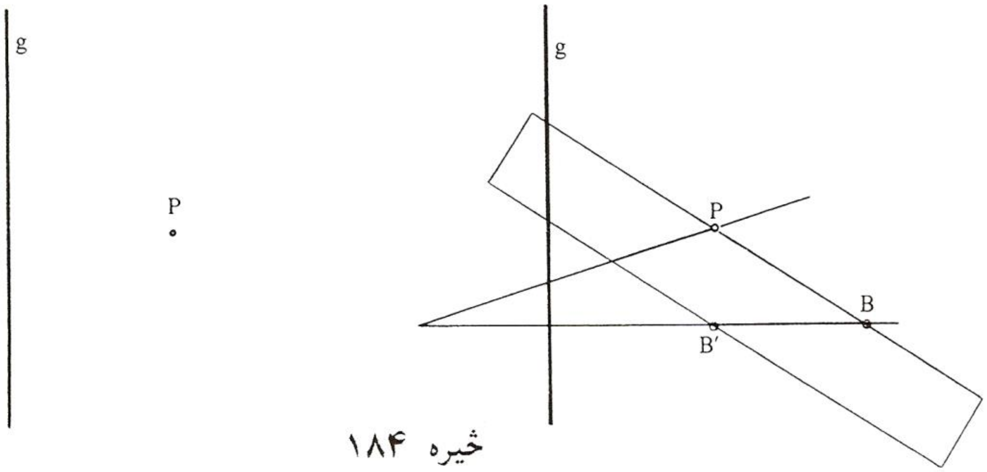
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د څیروني لپاره مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د ځیرې جګوالی د شي جګوالی سره ځان داسې نیسي لکه د ځیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزي . ځیوروني لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

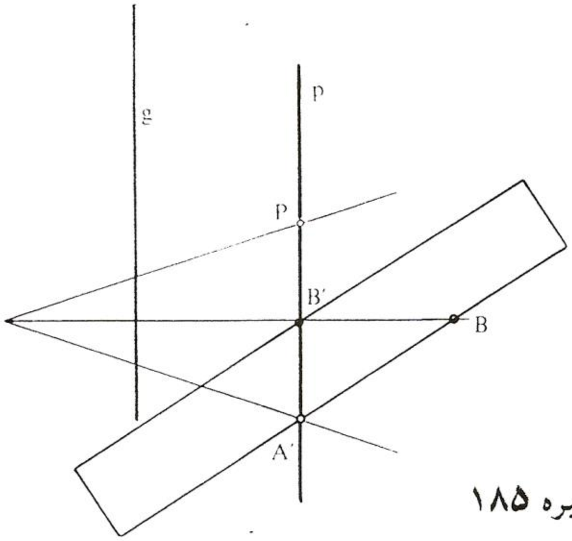
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکۍ څخه څومره لرې باید یوه د پرېښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزي غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې ځیره شي؟ ګردۍ هوارې یو بل سره



ځیره ۱۸۴

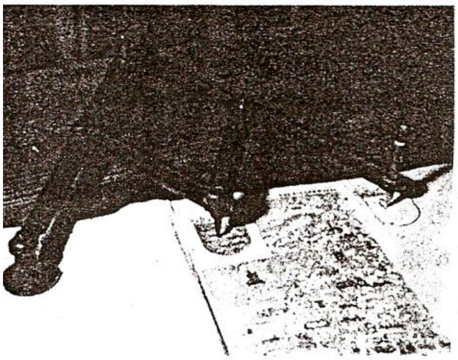
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۵

په کومه ځانیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ - د دیسارګ (Desarues) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرګي مټه وي (د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځمور په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی ځیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



ځیره ۱۸۶

۱۴ - وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P ځخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځاښی ټونګی دا یوه د رسمولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي شیرې باندی حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته شیره رسم کوي (شیره.) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سرې کتلی شي

الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکری

ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوښکی یاهوا بالون،

پ) د یوه الوتونکی کوټګی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

۱۷ – د شکل ۱ (شیره ۱۸۷

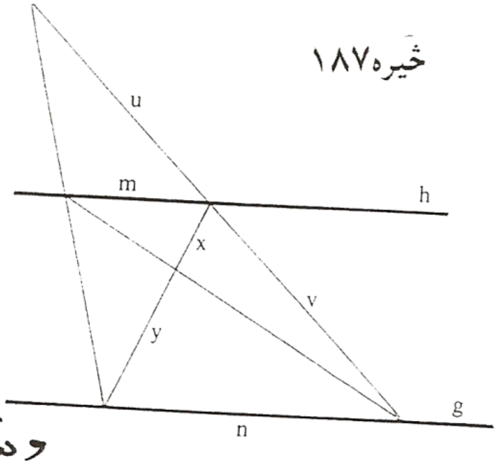
الف) لپاره صدق کوي h || g او

a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0,5$

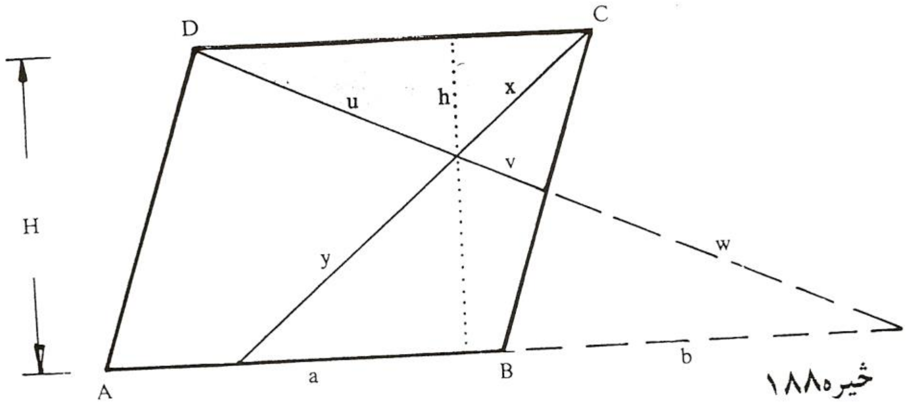
c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. وشمېرئ



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ځیره ب)
د غبرګاړخیز څومه برخه رنګه ده؟



ځیره۱۸۸

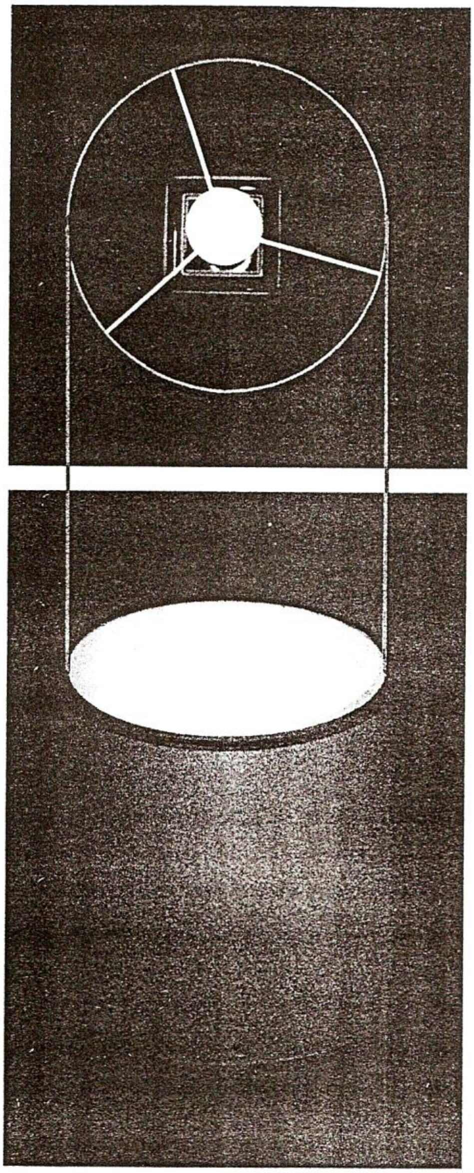
افینی ځیرونی (Affine Abbildungen)

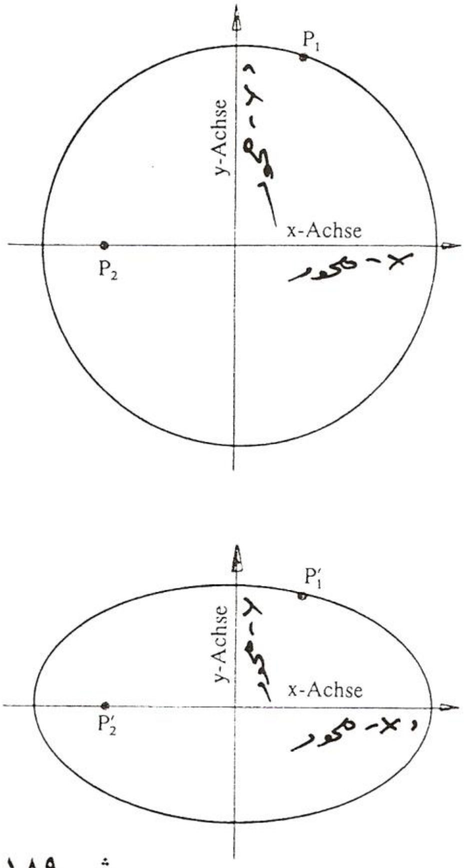
محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې ښیښنې ټوټې چې لږ څنډه یې ماته ده یوه بله ګرډی ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی





شیره۱۸۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چې ایا یوه ځیرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟
د ځیرې ۱۸۹/ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګوندې د ګردۍ او
ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې
یوه ځیرونه باید موجود وي چې د ګردۍ ځیرونه ایلیپسی شي.
دا ځیرونه باید کوم خویونه ولري؟
موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړې رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته (افقي) x– محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتیږي: پس
د x– محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې ځیرونه ده. د دې په څټ د y – محور ټول
ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y–محور سره غبرګه کرښه ځای په ځاي کرښه ده.
له دې سره موږ د نوې ځیرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي
محورهa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې(کرښه چې لوری یې
څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور k |= 0 مخ ته پراته دي، که
لاندې شرایط پوره وي :
۱ – هره کرښه 'PP چې له ټکو P او 'P تیره وي د g سره غبرګه څغلي.
۲ – که *P د'PP او a غوڅټکی وي ، نو لرو : |P*P'| = |k|.|PP*|.
په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب یا ځانښیونه
ریښتونی ده. اخرنی دا وایي چې په اصلي پایکرښی درې ټکي دا پایکرښه په همغه
تناسب یا ځانښیونه پرې کوي، لکه د ځیره ټکی په ځیره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت ځیرنه لاس ته راځي
۱ – له اصلي کرښي په نخه شوي ټکي (د بیلګي په توګه P) څخه وg سره یوه
غبرګه کرښه وباسی او ددې غوڅټکی د افینیتي محور سره د بیلګي په توګه *P
وبولی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P خخه |PP*|. k = |P'P*|

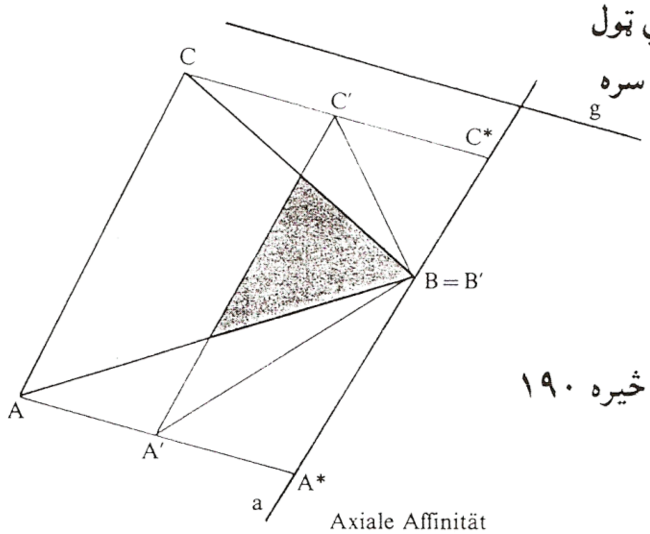
و g ته غبرګي مناسبي کربنې

وکارېږي.

۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول

ټکي اصل ته په ورته توګه سره

ونښلوي.

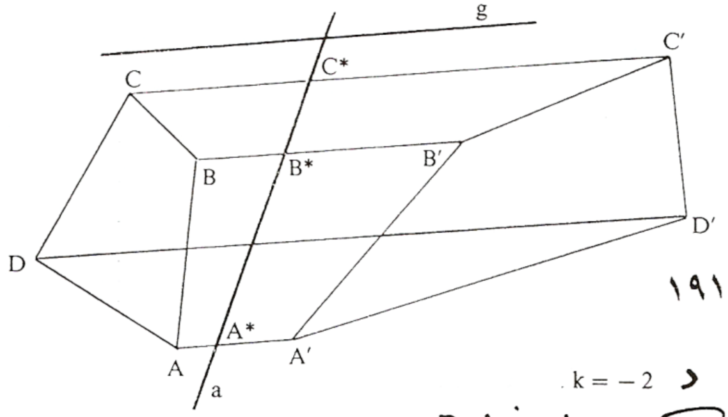


ځیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$ سره

اکسیال افینیتي



ځیره ۱۹۱

د $k = -2$

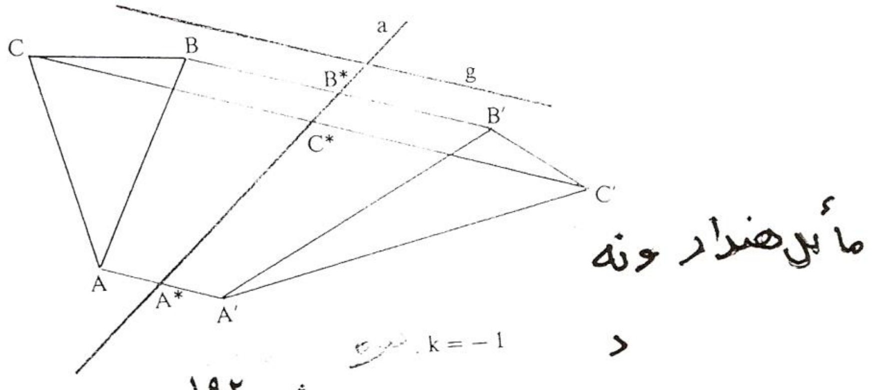
اکسیال افینیتي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او P* د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(ځيره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیرووني $A_{a;g\,1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |PP*| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |P'P*| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



ځيره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

: محوري افينيتي(يو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

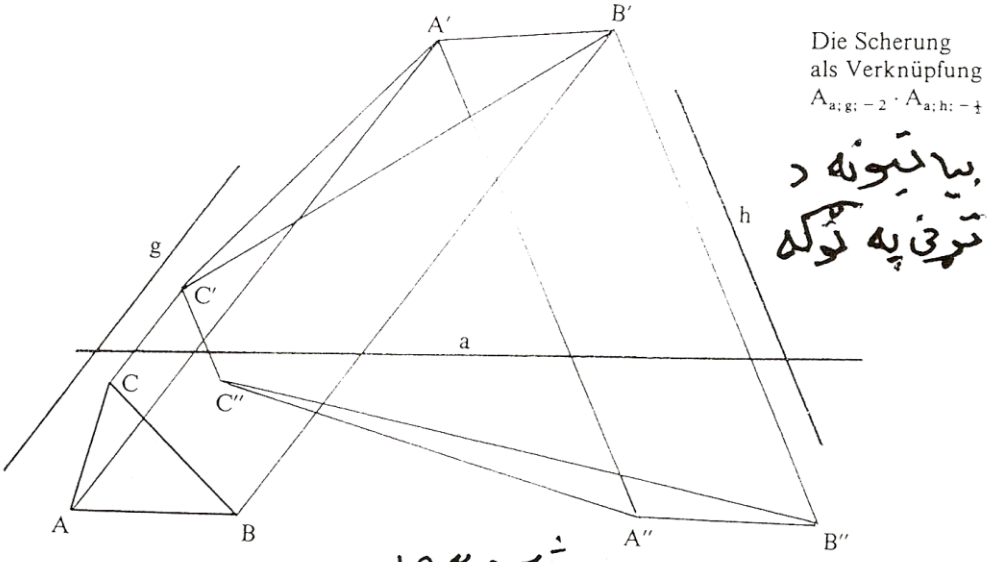
بياتي كوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افينيتى(يوبل سره) تړل، چى همغه افنيتي محور a ولري،g او h مختلفلوري محورونه او يو بل ته مخامخ افينيتي فاكتورونه k او 1 / k ولري، نو بياتيونه(بياتي كونه) ورته وايو.

بياتيونه(يوبل سره)

: تړلو په څير:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



شمېره ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه څنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری)
په عمومي توګه د ځیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$, او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول
$F' = |k.\ldots.k|.F$:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. (ځیره ۱۹۲ وګوی)

کونګروا ینخ ځیرونه
هره کونګروا ینخځیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افقینه ځیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروا ینخ ځیرونو، ورته ځیرونو او محوري ځیرونو ډیري، د ټولو افقین ځیرونو ډیری ورکوي. که افینځیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریگوډی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسی واړول شي، چیرته چی | AB | = | AB' | او .

۲ – په دریگوډي A(3|5) ,: B(5|4) ; C(3|1) باندې یو محوري افنیتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی A'(-3|1) او y– محور د افنیتي محور وي.

۳ – د گردی ځیره د M(2|3) او r = 3 cm سره وټاکی ، که د x–محور د افنیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او k = 2 د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریگوډی په هوار مساوي پنځه گوډي واړوی.

۵ – یوه گردی دې د نیمي d = 12 cm او د افنینیتي فاکتور k= ½ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له a = 8 cm ; c = 3 cm ; d = 5 cm او ∢ = 40° . په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی k = 3 /2 دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

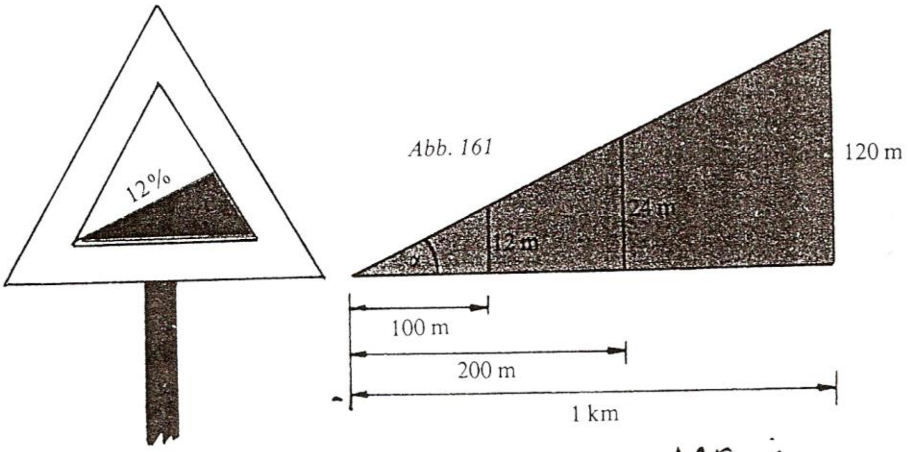
د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کې دریګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکي یعنی په منظمه فاصله پرلپسې تکراریدونکې پیښې(مور یې تل راګرځیدوني بللې شو) څیړل کیږي.
تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پورې تعقیبیدې شي، وروسته له مصري پتولیموس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بیا له هندي او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونې یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادۍ او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کې مومي.
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحې یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه ثابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه



ځیره ۱۹۴

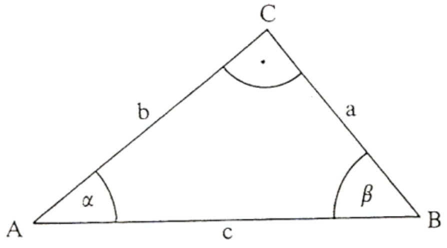
(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.

په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.

تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په ښرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي ښرګندېږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانیونه د کونج په بلواکسی یا اړتوب ښاییی. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

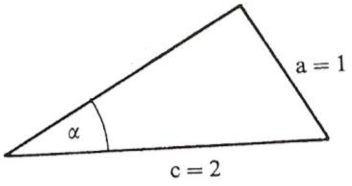


ښیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سواینبلواک sinusfunktion: بلیګه:

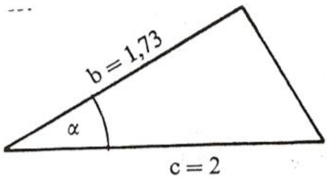


$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوسایبلوک Cosinusfunktion بیلګه:

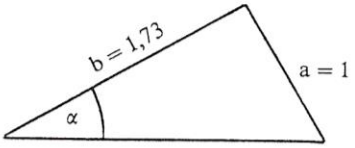


$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلګه:



$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$

خیره ۱۹۸

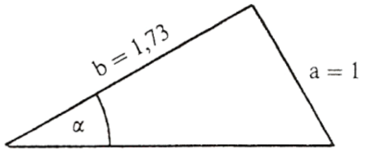
$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څمورږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې مورږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلګه



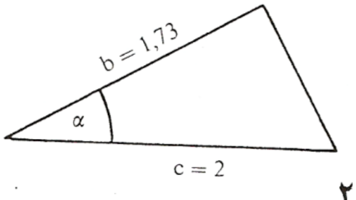
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

خیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم ، د بیلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلګه



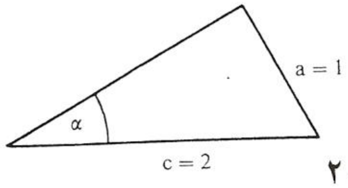
$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

خیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$\cos ec\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

څېره ۲۰۱

$\operatorname{cosec} 30° = \frac{2}{1} = 2$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په خوبنه دریګوډیو کی شمیرنه

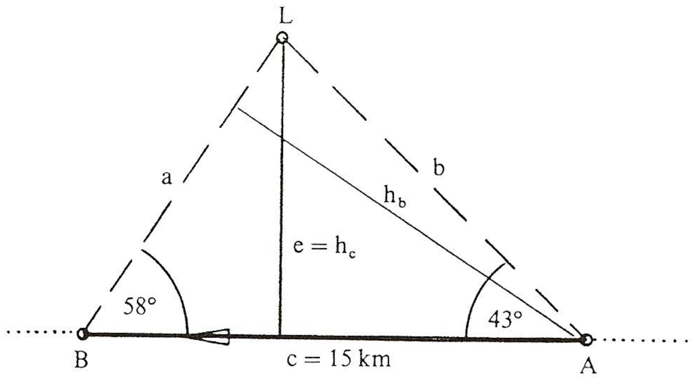
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکربني وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکرښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ \text{km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43^\circ = 8{,}838\ \text{km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58^\circ} = 10{,}421\ \text{km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

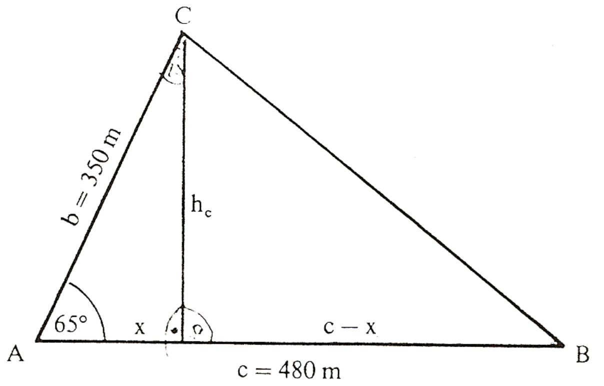
په خوبنه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$
$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



ځیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راگرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده گردی ډوله یا منظم بیرته راگرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې املە باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر یوه دریگوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاگوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرگوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریگوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرگند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورگوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

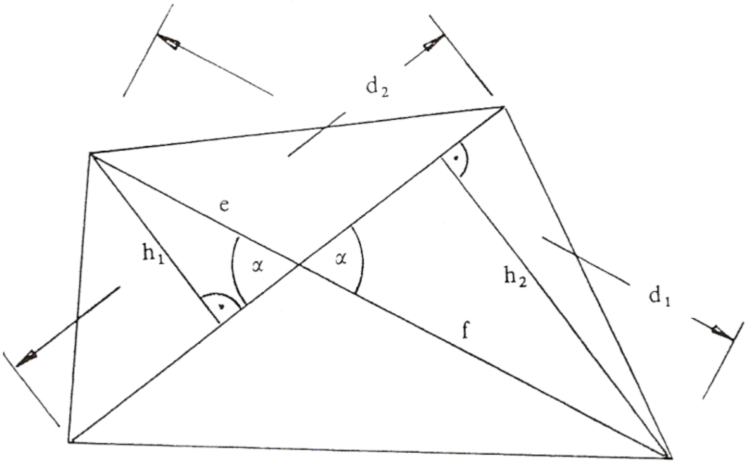
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواک، نه یواځی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم
هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

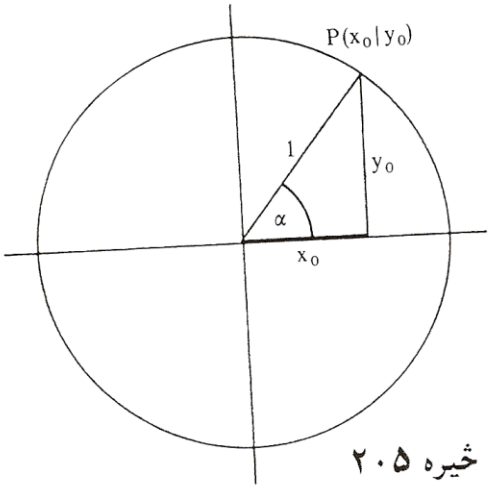
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ښنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ښنتر پروت دی، (ښیره ۲۰۴ |) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ښخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ښلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ښیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ښیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشي.



ښیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

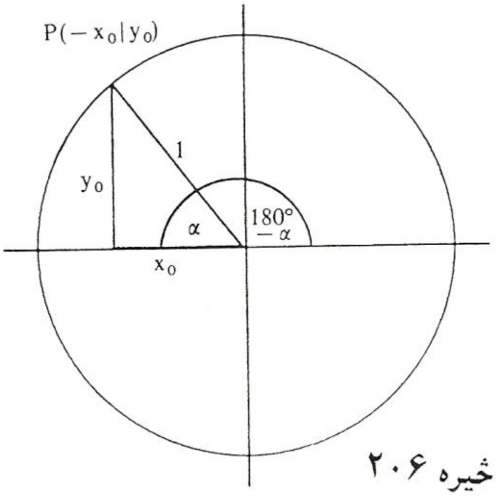
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو
کونج α جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی α - $180°$ وي.
د « سیوروڅیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښايي.



څیره ۲۰۶

په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

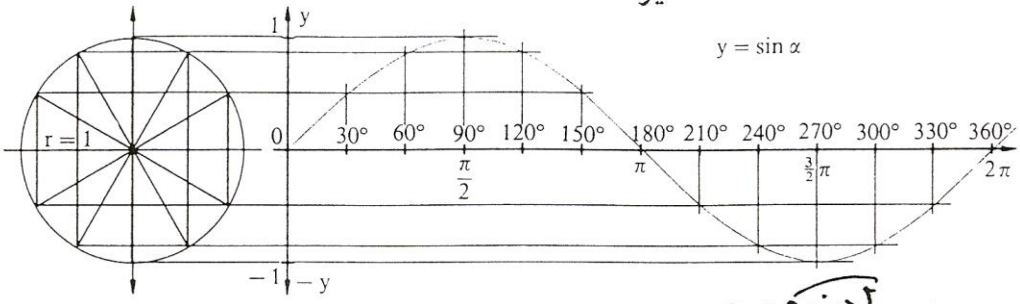
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج α+$360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د α+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

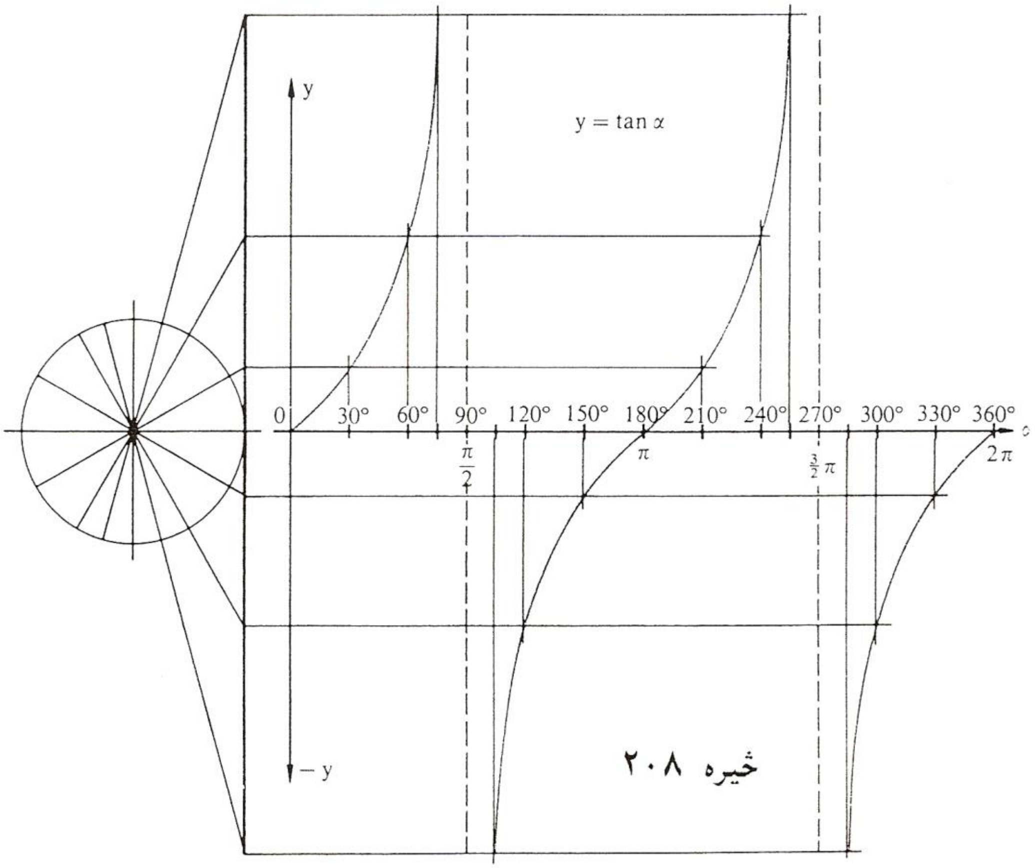
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

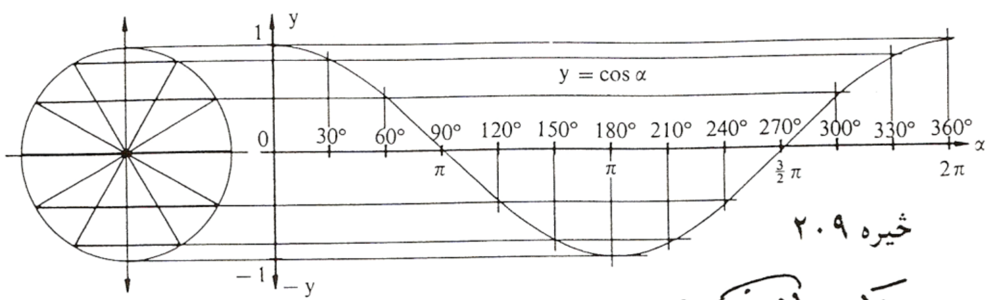
د ساین کږه



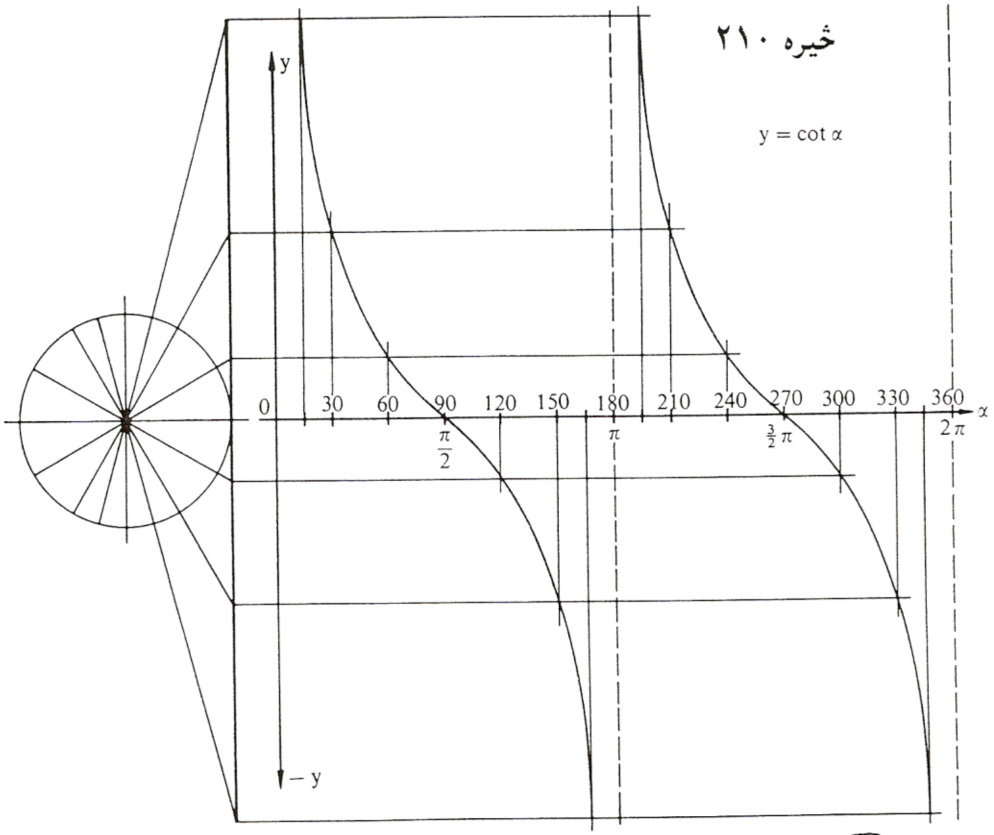
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

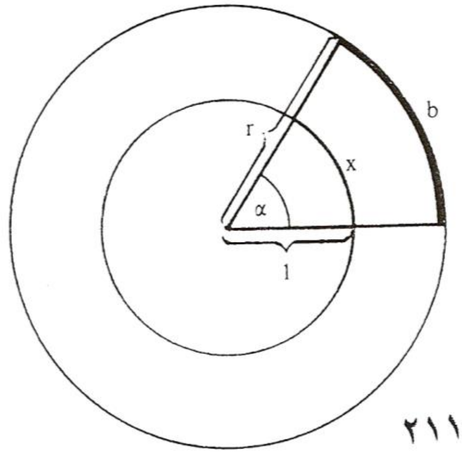


Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره ګردی ښايي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتڼیری ریيلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



خیره ۲۱۱

کونج لويي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پوري یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پوري ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پوري بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېری کی ځانته همداسی نیسي لکه په پیل کی ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3{,}14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $60° = ∝$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi .\ 60° : 360° = 10{,}47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62{,}83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5{,}236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31{,}416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi .\ 60°: 360° = 1{,}047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6{,}283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څېره شوي، لینده کې بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کې لپاره په خوښه ریيلګڼونه پرېښوول شوي.
بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفډیري ته، په لینده کې راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

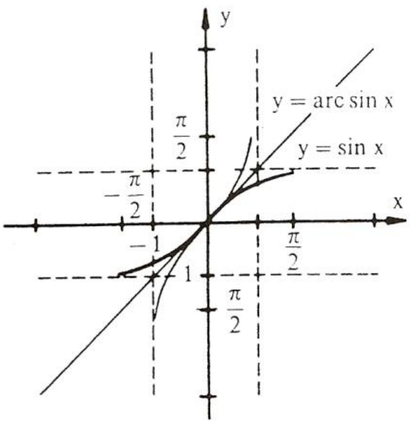
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تكرارېږي. د دې لپاره چې په څرګندنه ممكن شي، نو بايد د خپل تعريف ډېرى په يوه برخه ډېري رابند يا محدود شي.

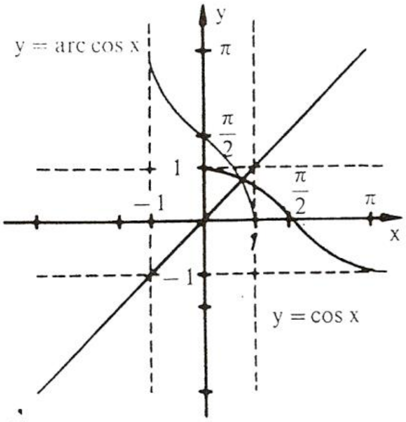
> تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريكي بلواك په څېر بلواكونه اركوس بلواك Arcusfunktion بلل كيږي يا څيكلومتريكي بلواك (لاتين :اركوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل كيږي »دx اركوس ساين. د كونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده اركوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څېر اركومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دى.

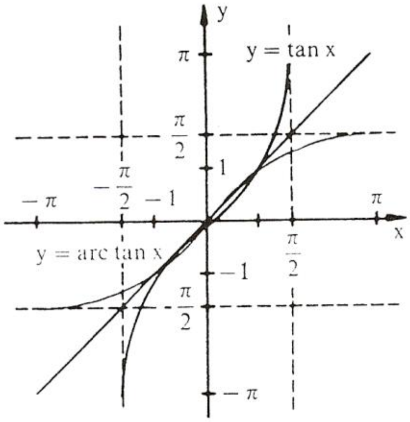
Trigonometrische Funktion ټریګونومتریکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
$f\colon\ x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$f^{-1}\colon\ x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
$f\colon\ x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$f^{-1}\colon\ x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
$f\colon\ x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}\colon\ x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f\colon\ x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	$f^{-1}\colon\ x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

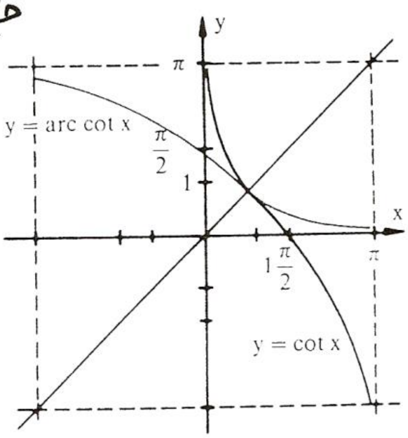
(c) ketabton.com: The Digital Library





څېره ۲۱۲





Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°

2. arccos (1) = 0 (rad) = 0°

3. arctan (−100) = −1,5608 (rad) = −89,43°

4. arccot (−70) = −0,0143 (rad) = −0,82°

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په ځپ بلواك دي نو باور لري.

$\sin(\arcsin(y)) = y;\quad \arcsin(\sin(x)) = x$

$\cos(\arccos(y)) = y;\quad \arccos(\cos(x)) = x$

$\tan(\arctan(y)) = y;\quad \arctan(\tan(x)) = x$

$\cot(\operatorname{arccot}(y)) = y;\quad \operatorname{arccot}(\cot(x)) = x$

یعنې په ټول ندي کې توګه هم

$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$

$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$

$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$

$\operatorname{arccot}(\cot(60°)) = \operatorname{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دی او دنده يی ايلكترونيكي ماشينونو نيولی ده، غواړو چې د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو

كوركمپيوتر زيات وخت داسی فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفی په كلك اختيار کی لري، چې د درجي اوړون په لينده كچ او په څپ كوي، مگر شميردرځ په توگه بايد د شميرونكی په پروگرام کی ځای په ځاي شوی وي.

پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمی د < .... > سره په نخښنه شي:

په قاعده کی دريی بلواك وركړشوي دي : < cot > ; < cos > ; < sin > كوتنجنت بيا داسی شميرلكيدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړی اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دی. په عمومی توگه كونج – بي پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

بيلگي

١ لاندې جدول همغه د كارونی يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونجیچ	TR-Modus په تخښنونه	Beispiel بېلگه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لینده کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^{g} = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.

Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1{,}047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه <MODE>.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د <<- DRG> سره سورت نیسي.

بیرته یا په ختې سړی داسی راځي– لکه چی لرل مو– د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنی جشمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په ګراد دقیقی، ثانیي اویا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26°45′ 30.25°

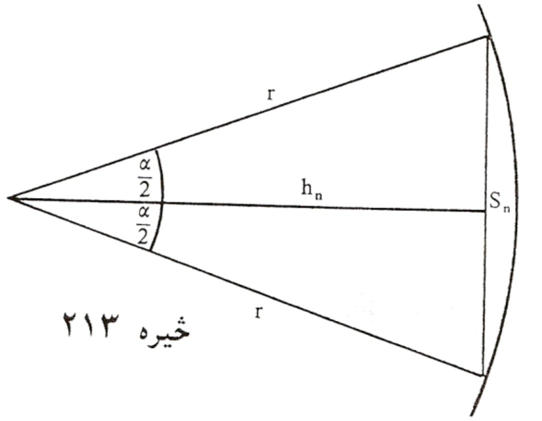
د " "15 °30 " ورکړه کیدی شي د جبشمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشمیری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان موږ متآسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت يي لیکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پریښوولی)

پیلبیلګه: دلته دې S_n د یوه منظم n– ګوڼي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه ګردی کی چی وړانګه یی r = 5 cm ده، راګیر دی.

الف) وښایي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د یوه داسی n– ګوڼي چاپیری U_n وشمیری ، چی n = 8;16;32;128 وي، او په نږدې توګه یا تقریبي د دې ګردي چاپیری د دې وړانګي r سره وښایی .



خیره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایي .

اوبې (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د ځینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c
د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د ځنتریکونج
یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 8⟨·⟩10⟨=⟩ 30.614675
⟨RCL⟩⟨:⟩ 16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 16⟨·⟩10⟨=⟩ 31.214452
⟨RCL⟩⟨:⟩ 32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 32⟨·⟩10⟨=⟩ 31.365485
⟨RCL⟩⟨:⟩ 64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 64⟨·⟩10⟨=⟩ 31.403312
⟨RCL⟩⟨:⟩ 128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 128⟨·⟩10⟨=⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره نږدې

360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279

د يوه جشميرې سره ، چي له يوې زخيرې زياتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګرامور ماشين سره کيدي شي چي د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چی يوه کونج بلواك تعريفډيری يا ≁ او يا x وي. ددې لپاره چی د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.
د لاندې خويونو لمړی ډله يواځي له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتيت}}{\text{پرته کاتيت}} = \frac{\dfrac{\text{مخامخ کاتيت}}{\text{هيپوتينوزي}}}{\dfrac{\text{پرته کاتيت}}{\text{هيپوتينوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسيره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په ټريګونومتريکي بلواکو کې هيله ده ، چې د پوتنځ ليکدود په پام کې ونيسي.
په لاندې پاملرنې سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کې gegeben ورکړې او gesucht غوښتونې يا پلټونې په مانا دي

gegeben ورکړې / gesucht غوښتونې	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

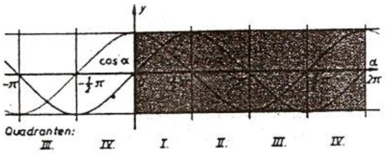
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چی د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چی تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دي، دا په دې مانا، چی د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکرارېږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري،
کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

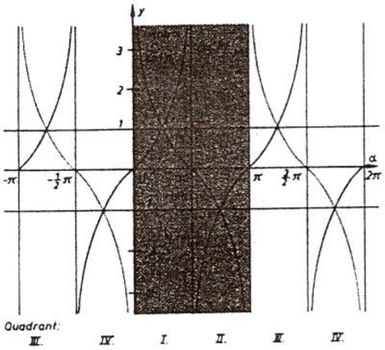
$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\}\ k \in N$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\}\ k \in N$$



خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریود د پائی راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګې:

بیلګې:

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یوازې د جبشمیرې یا کمپیوټر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداړول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$$\sin x = \cos(\quad/2 - x) \qquad \cos x = \sin(\quad/2 - x)$$
$$\tan x = \cot(\quad/2 - x) \qquad \cot x = \tan(\quad/2 - x)$$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin\quad = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $\quad - 90° = ß$ له امله لاس ته راځي :

$\sin\quad = \cos(90° - \quad)$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو   څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د /2 = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري ځغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساين – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

يادونه : په دې نلواکو کي کيدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بيلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زياتون قضيي يا تيورمونه

دا چي کونجبلواك لايني نه دي(د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعريفېدري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زياتونمسئلی په مرسته ممکن کيږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو يا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زياتولو د يوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بيلگی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

2 '. $\text{cis}\,(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

3 . $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

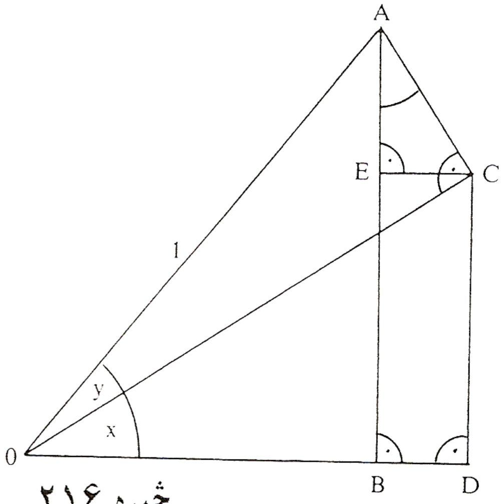
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه مونږ ته لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x; z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2}; t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس نو

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$
$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ همداراز

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. مونږ ته پوره توګه نه ځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریښه نیونې له لارې ښوونه لرو

په (*) کې $\sin^2 z/2$ کې $1-\cos^2 z/2$ کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

بلواك یا فنکشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لکه چی په پیل کی مو وویل په طبیعت او تخنیك کي ډیرې پیښې شته دی چي تل بیرته راکرځي یا لنډ: راګرځي، یعني پریودیکي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواك بسیا نه کوي.
دا زیات علتونه لري : لمړی د ساینبلواك د ‎-۱ او ۱ ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك کي دي د یوې راګرځیدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره باید موډیفیخیر شي یا یی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثیر په لاندې لیدنه کی راټول شویدي، ګراف یی ورزیاتی خیرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر یواځي د ساینبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د کوسائن بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له لاندې لوري څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
څېره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
څېره ۲۱۸	د یوه مساوي او بدل شپیالونه یو په بل بدلوي	د y - لور پلاندې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

y = sin(x+c)	د فاز تغیر یا ځای بدلون	په بدل بریښنا جریان کې د بریښنا او ښیالونک تغییر دوښانونه	شکل ۲۱۹
y = a . sin(x)	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	د یوه پندول خوځېدنه	شکل ۲۲۰
y = sin(bx)	د پریود تغیر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کرار کېدل b <0 په شا ګرځېدنه کم محور دی	د یو بنسټیزې ګړۍ څېرونه په یوه وخت دا د پړه ره ډهغې بوږ لمبزه له ټکي په د ښوزنګ الوېه او زولوکی	د شکل ۲۲۱
y = a . sin(bx+c)+d	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	شکل ۲۲۲

تمرينونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څېره بله کړی

4°6' = 4,1° ; 10° , 5' = 10°30

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44" =

۲ – په درجه کچ ي وليکی

a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x (2/3)\pi$

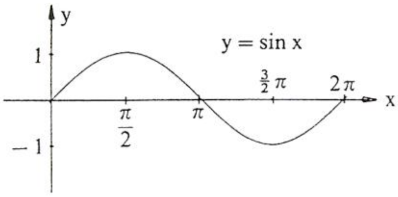
d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

۳ – په لينده کچ يې وليکي

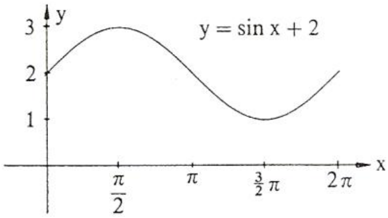
a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

(c) ketabton.com: The Digital Library

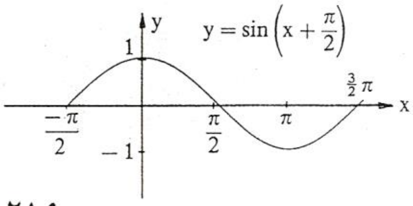
(c) ketabton.com: The Digital Library



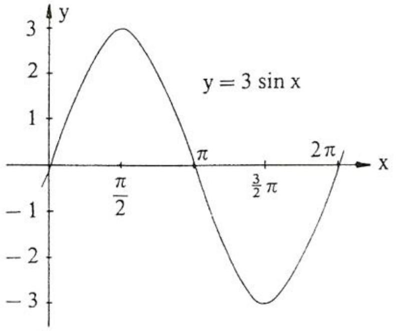
ښيره ۲۱۷



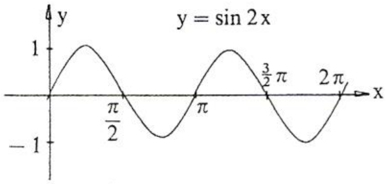
ښيره ۲۱۸



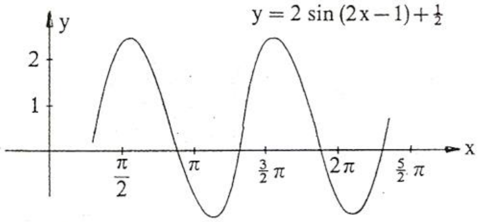
ښيره ۲۱۹



ښيره ۲۲۰



ښيره ۲۲۱



ښيره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

١ – د ارزښت دوه څله کيدل

٢ – د نيمى راګرځيد اوږدوالى باندې پرسيدنه

٣ – په يوه يوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په يوه ولاړکونجيز دريګوډي کی لرو γ = 90° او په دې برسيره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټی وشميری

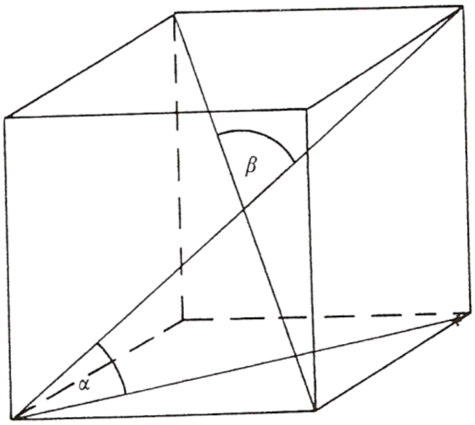
۶ – په مساوي پښيز دريګوډي
کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشميري



شيره ۲۲۳

۷ – د يوه پڅکونجيز (α > 90°)
دريګوډي لپاره ساين وشميری

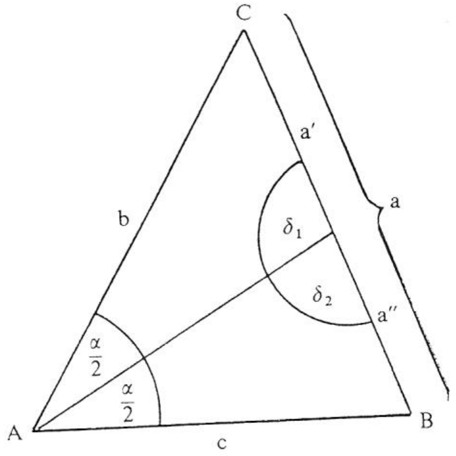
۸ الف) کوساين د يوه پڅ کونجيز
دريګوډي لپاره وشميری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟
۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
ځیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کڼې غوځونی اوږدوالی .
۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوځوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(ځیره۲۲۴).



ځیره ۲۲۴

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۵۰ ،۱ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج $\measuredangle$ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟
۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوځه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج ∡ = °25 لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج °60 دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی ∡ = °18,5 او پښیتڼکی یی °8=ß لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۴، ۵۰ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

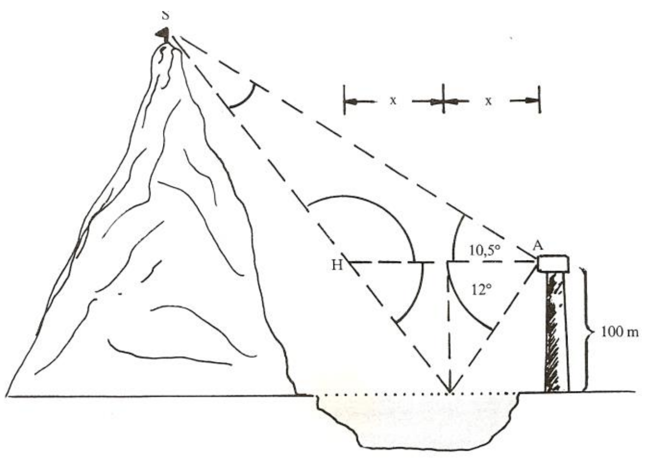
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

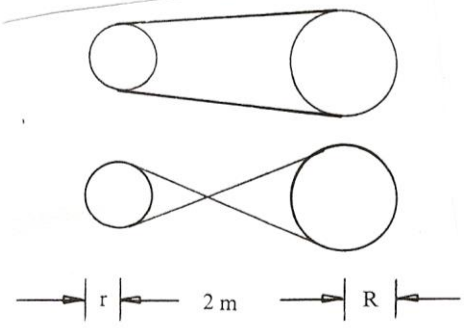
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته °14 میلان لري، د دننه لور ته °28 میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د °12 پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج °11 لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



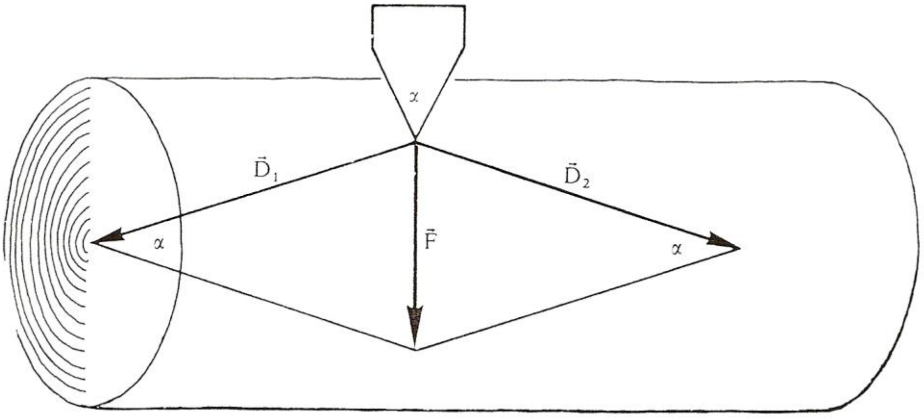
خیره ۲۲۶

۲۳ – الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو واکی څیدلی وي ؟

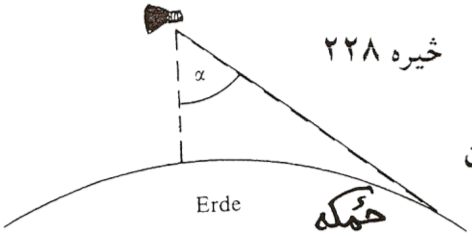
۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موږی (په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چې د ستې درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

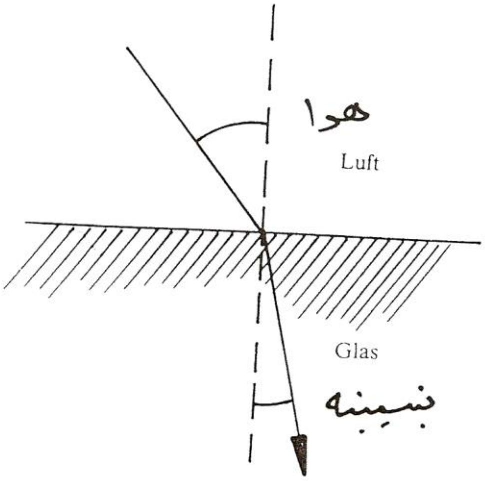
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\propto} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $115° =$ کونج



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

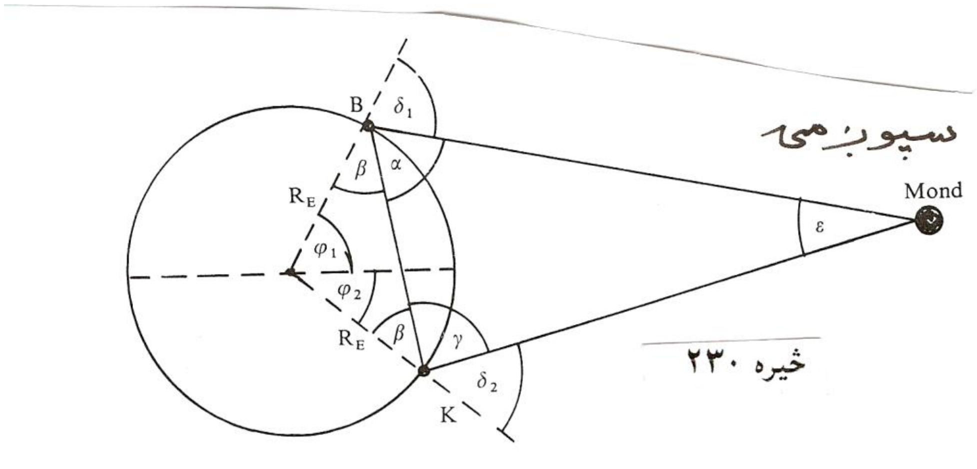
$$\sin \propto \ / \ \sin ß = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5\ (1,33)$ دی وښایي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
. $\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندي دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2\pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi / T) t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکې یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

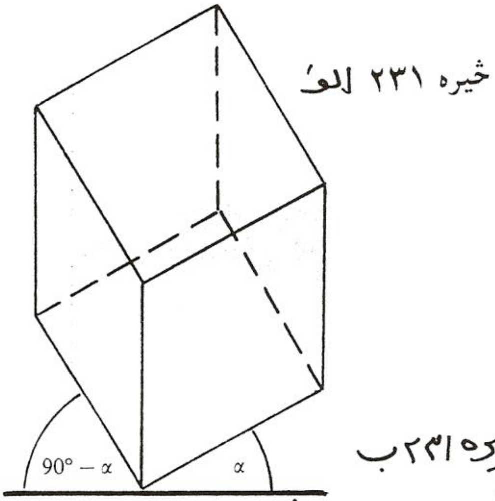
$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

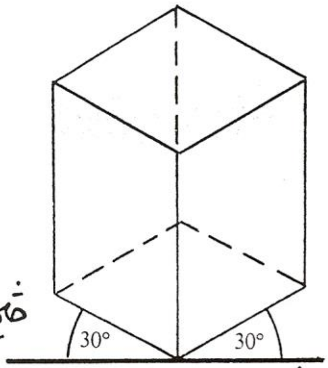
د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او دربتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.

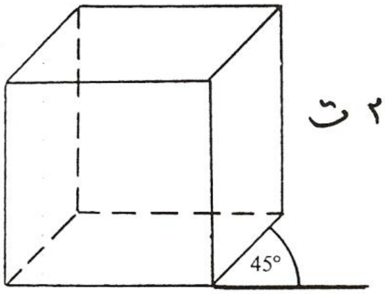
(c) ketabton.com: The Digital Library



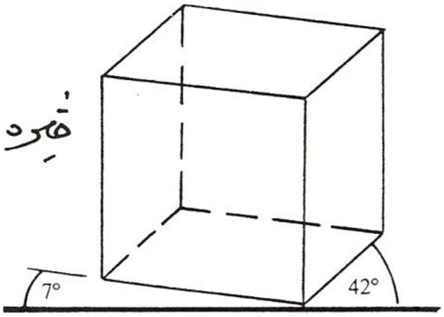
Parallelperspektive:
Militärperspektive



Parallelperspektive:
Isometrie



Parallelperspektive:
Kavaliersperspektive

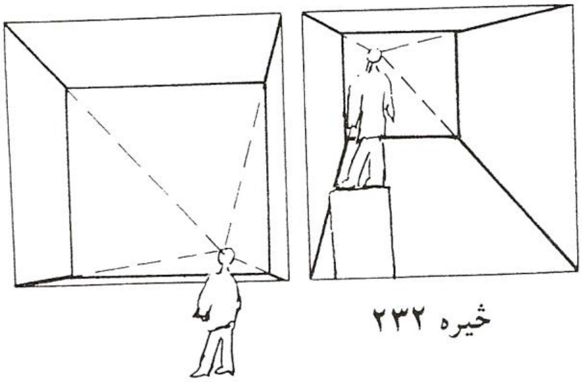


Parallelperspektive:
Dimetrie

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مايلځيره کښل دي. دا هوايي پراخيدنه واضح کوي. دلته د کاواليږ پرسپکتيو (مائيل له پورته) او يوه (چينړښی پرسپکتيو (مائيل له ښکته) ترمنځ توپير کيږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: ليدونکي ته جبهيي (فرونتال) ځغليدونکی لاينونه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

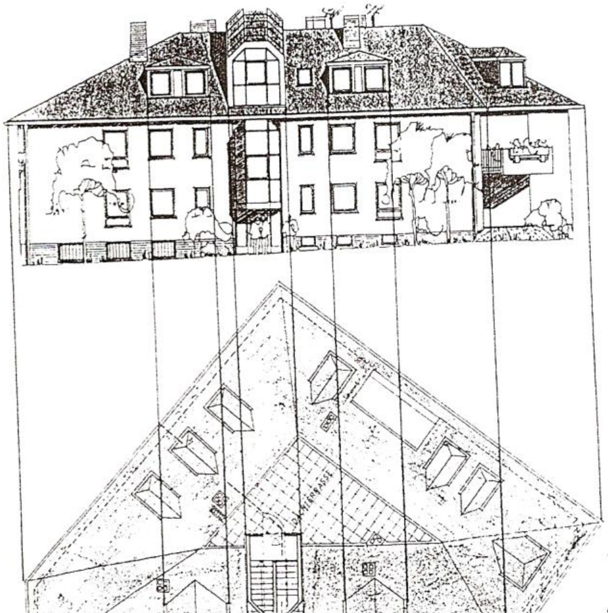
نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت كونج	30°	45°	60°
لنډوونكى فاكتور	2/3	½	1/3

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كى طبعاً ځني برخى او نه څيره شوې د شا خواوي وركيږي، دا په دې مانا چي په كښلو كى نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن (پريوستون) ګټور دی.
دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوځي هواره، (ب) اړخيزغوځي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوځي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كى استعماك مومي.



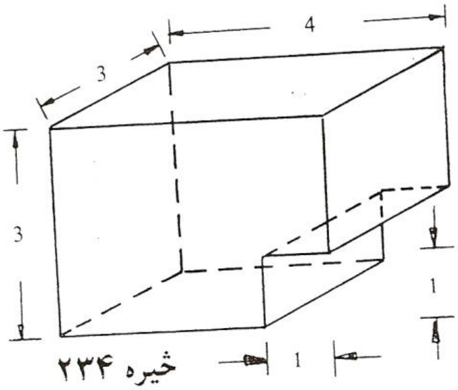
خيره ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – د دې شېره بدن څخه درېتختهييز پريوستون وکاږئ

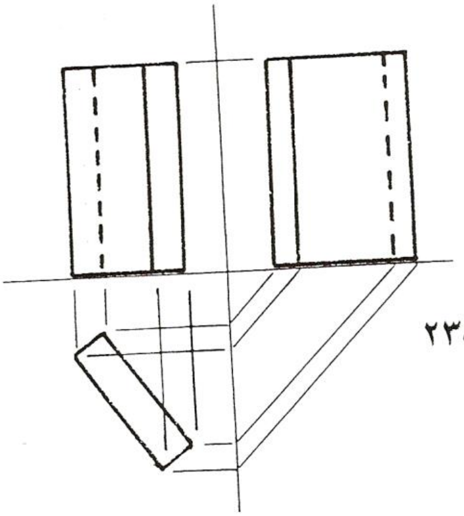
۲ ۰ ددې بدن مائئله شېره وکاږئ، کوم چی درېتخته ئيزه شېره پورې اړه لري.



شېره ۲۳۴

۳ – د يوې ولاړې ګردې توتی یا استوانی مايیلی شېرې غوښتل کيږي، چی د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – يو شپږاړخي نل يا شپږڅنډيز نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو انځورونی سره.



شېره ۲۳۵

.
.
.
.
.
.
.

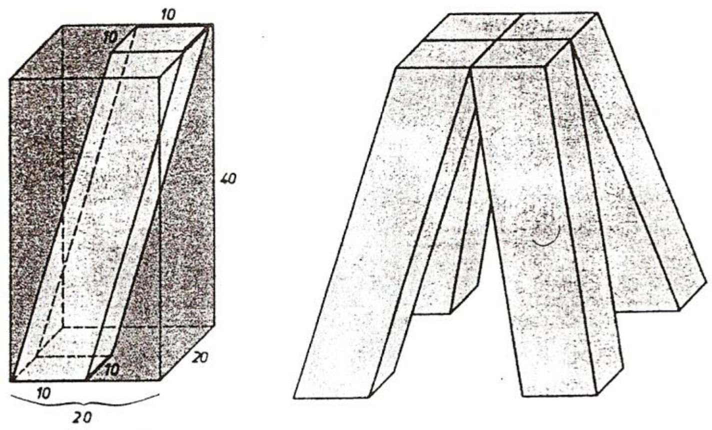
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوربښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

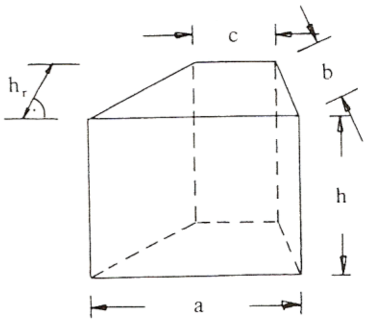
د اړخونو د اوږدوالي $a = 10$ cm , $c = 6$ او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تریخ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384 \ cm^3$$



څیره ۲۳۷

د دباندې هوارې لپاره د تریخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47 \ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G+ (2.b +a\ c),h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

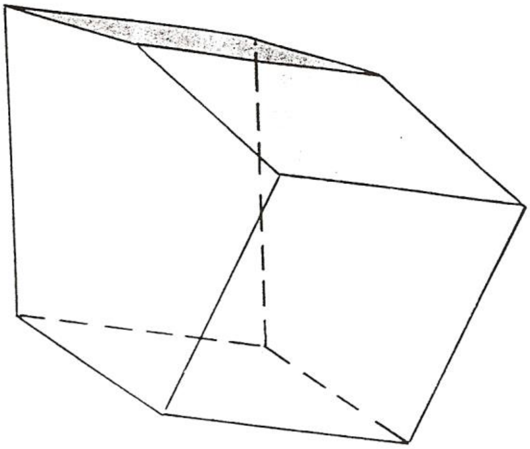
$$O = 363,28 \ cm^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چې یواځې په ډیرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځې له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګې په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسې یو هندسي بدن، کوم چې له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګروانیځو پولیګونو یا ډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانیځ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي. د پورته هوارې(چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چې د

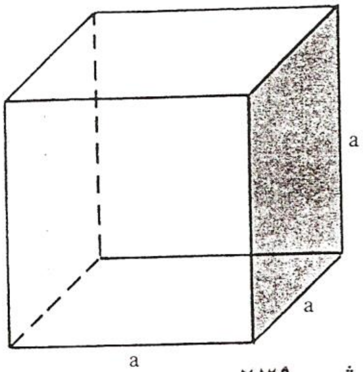
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۳۸

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرېږو.

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی (وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروایڅ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه(کانتی) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

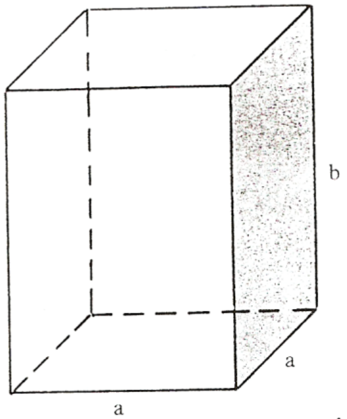
بیلګه : څه شی درونډ دی یو کورك(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په پټیږي) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورك ٧ سختوالی g/cm³ ٥,٦ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د يوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی يا ډيبنزتی يی د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0,2g/cm^3 = 5400\ g$



شيره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3\ .7,86\ g/cm^3$

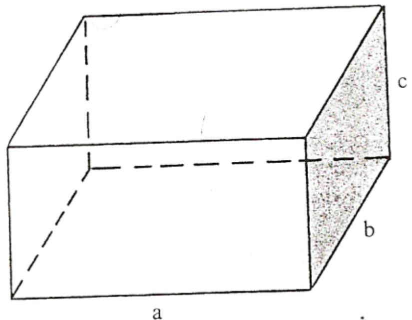
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نژدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. يا په بل عبارت، د کورك مکعب نژدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب ستېه (ځمکه) يا بستې او چتې يا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې يی تغير کړي نو يوه مربع ستن (پښه) لاس ته راځي.



شيره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم يوه ولاړکوډيز ته «ټوليز» شي يا « عموميت » پيدا کړي، نويو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنيمي، مګر مساوي هوا نيمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکي (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمیو اوږدولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

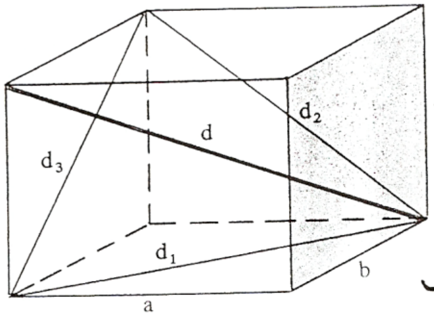
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

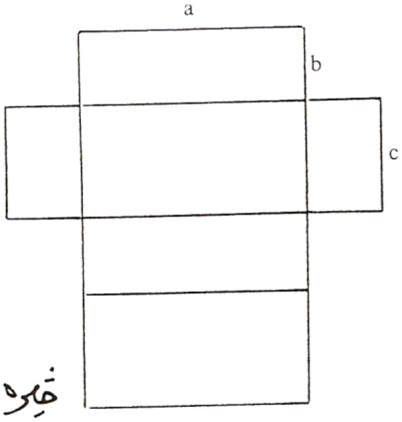
د هوانیمیو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف





خیره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټیز هواره $a.b$)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12 + 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

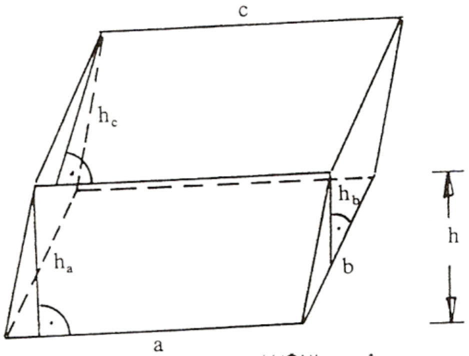
ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240 cm^3$

نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$=> d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروا ینڅ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یی له دې ورسته همداسی وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ- پورته – او اړخهوارې دوه ځله ده.



ځیره ۲۴۳

دا د غبرګ اړخیز په ځیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:

> **جمله:** د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:
>
> $O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$
>
> $V = G.h$

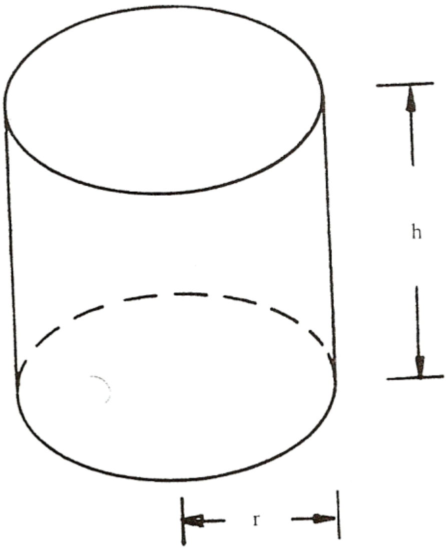
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروانیځ ډیرګوډیز پریښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

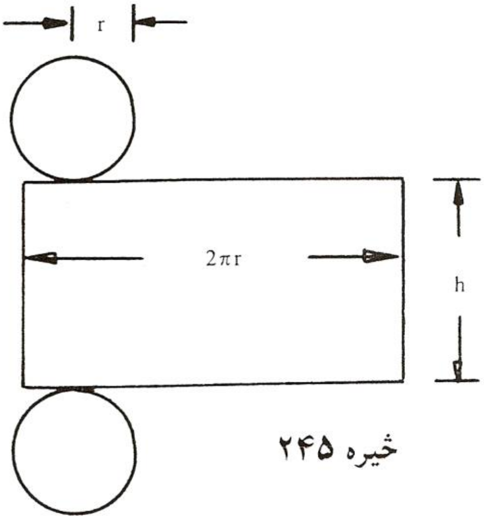
سیلیندر(توته یا استوانه یا ستن)



ځیره ۲۴۴

د هغی نیغي(سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یي
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروانیځ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان څرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



څیره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا
گردیسیلیندر د پریزما سره
خپلوان دی.
۲ – گردي استوانه یا توته پخپله
د په خوښه فورم شوې پورته –
او لاندې هوارو لپاره یو
ځانگړی حالت دی
۳ – لمړنی ځرگندونه د ولاړ
گردي سلیندر یا توتی یو
ځانگړی مهم حالت وو،
ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ
له لارې کیږي لکه د پریزما .
د جال ښوونه یی د
پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چې لاندې
او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

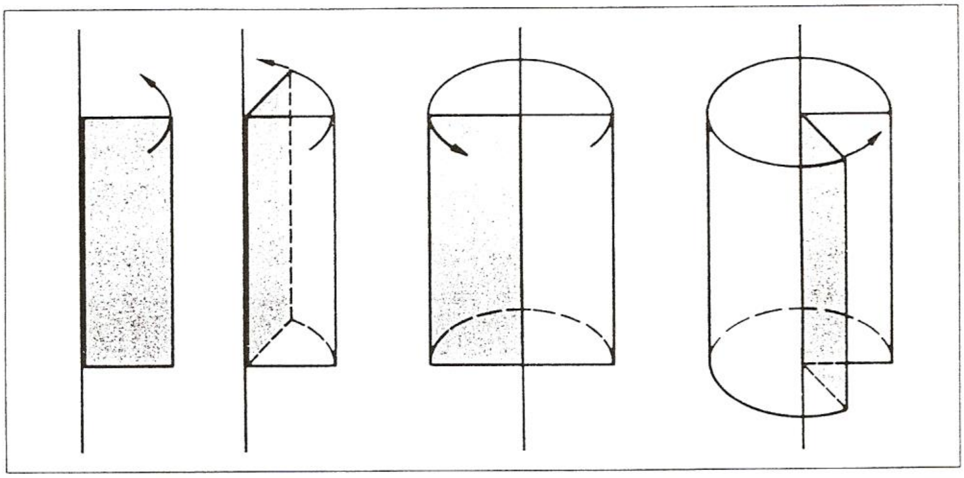
$$V = \pi r^2h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځتکي سیومترې استوانه چی وړانگه یي له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

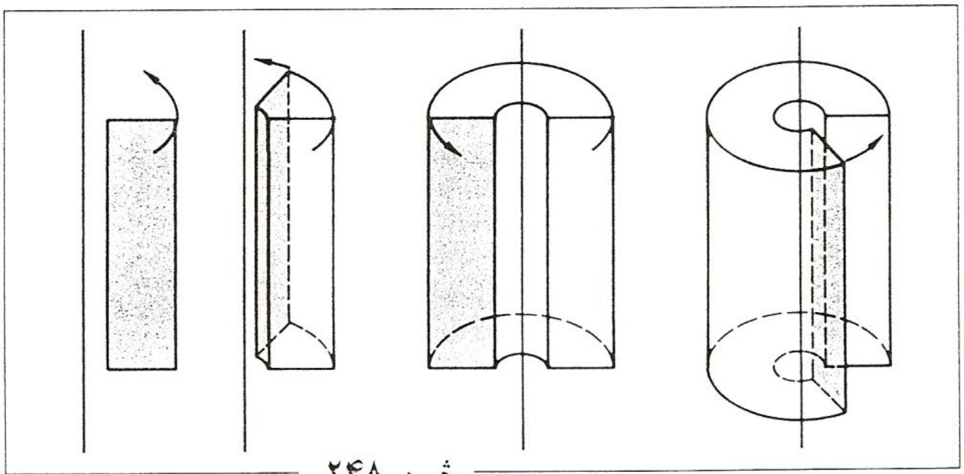
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چې دا سليخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی،
نو دلته باید ټول $0,491 . 10000 = 4910,m^2$ کاغذ سليخ شوی وي.

د ګردي – او سوري استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز
څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونډیز بنسټ – په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښايي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغییر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ۱ مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ (a , V , O) یی وشمیری.

۶ – د شکو موټر کي چی د بارهوااندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟ د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیبنتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کربنه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کربښتهوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنستهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوي او په سرك یي څرخوي) ۱٫۵ ، ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره څومره لویه ده، چې څرخې یې په یوه څرخون وهې؟

۹ – یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اورږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاړکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګیلاس توته په پروتغوځي باندې ځیرو یا معاینه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه یې ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهیږو، چې توته هر ځای کی همغه دننني نیمی لري. دا نیمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – یوه کچتوته دې، د یوه 5 cm دننه نیمی سره داسې په کچکربنو په ننبه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربنو وي د 5 cm³ ډکی وښایي. د دوه څنګ په څنګ کربنو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د یوه ولاړګوډیزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې یوه کوټی ، بی له سرپوښ او بیښ څخه جوړه شي. ډکی یې وشمیری که الف) چاپیری یې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپیری یې د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښایي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته څومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یې څومره دي؟

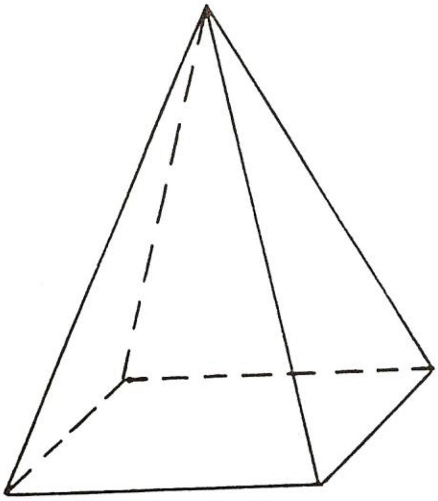
۱۵ – د یوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r =) 3 : 2 نیسی. ډکی یې 2000 cm³ دی. h , r او M یې وټاکی.

۱۸ – یو ولاړډوله توته یزه ګل کوټی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بیښ ایلیپسی د دواړو نیممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

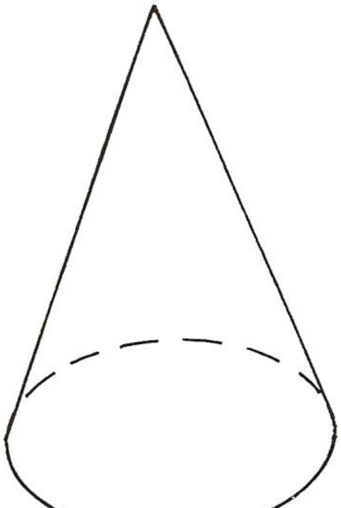
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري– اهرام یواځې هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یی یه ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹

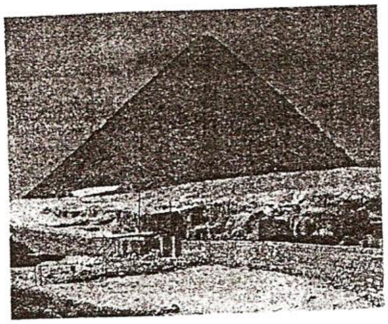


خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

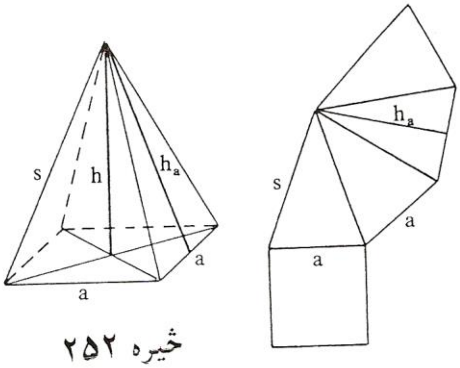
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۱

د تیگو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل او یو په بل یې طبقه په طبقه یا پوړی په پوړی باید اینښوولي وی. دا د خیوبس اهرام ځومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یې ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره ځومره ده ؟

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چې د هغې تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چې په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چې د جالښوونه یې ښایي، نو دباندې هواره یې له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي څخه لاس ته راځي، چې وروستی یې پوښ هم بللي شو یا بولو.



خیره ۲۵۲

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوبس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چې د پوړی جګوالی یې h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:

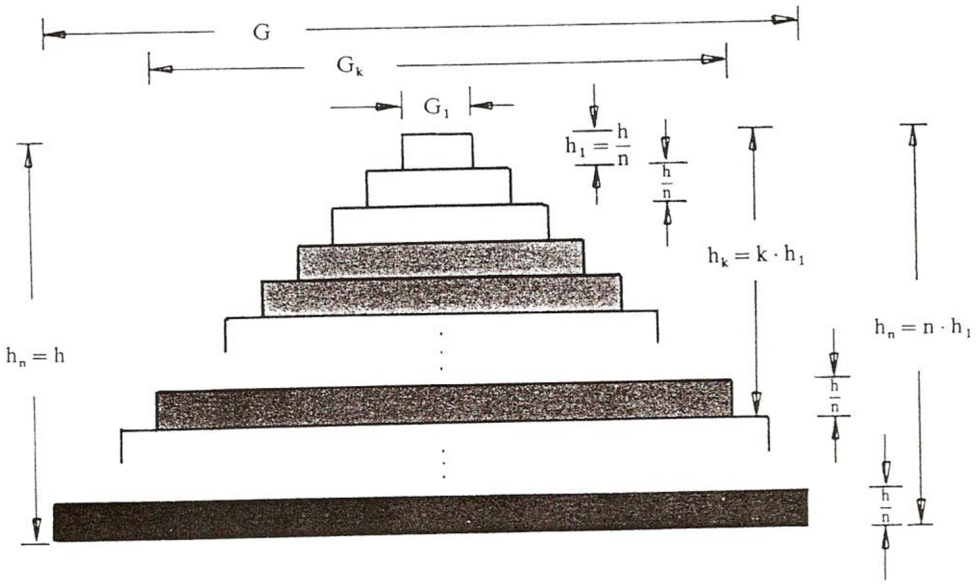
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G : (h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړي ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{\text{پوړی}} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي)

$$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.
په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

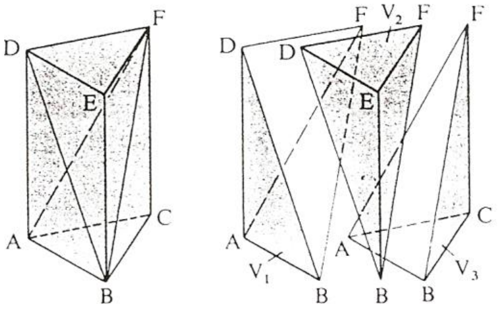
$$V = G.h / 3$$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :
د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$
په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$
د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.
ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

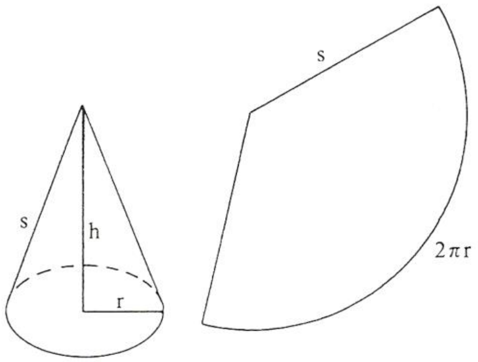
جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:
د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M
O = M + بنسټهواره
V = بنسټهواره . جګوالی / 3

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۴

دا فرمولونه طبعآ د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعآ یو څه اندازه ستونځي لریکه چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه ګردۍ ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځټکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په څیره ۷ کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه یی د بنسټګردي وړانګه ده او لینده یی د ګردۍ چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:



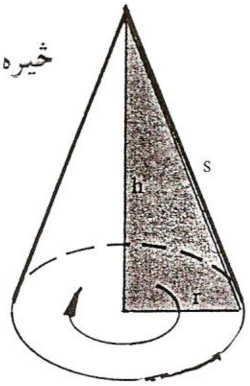
خیره ۲۵۵

$$F_S = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2 \pi r.s / 2 = s.\pi .r$$

خیره ۲۵۶



(c) ketabton.com: The Digital Library

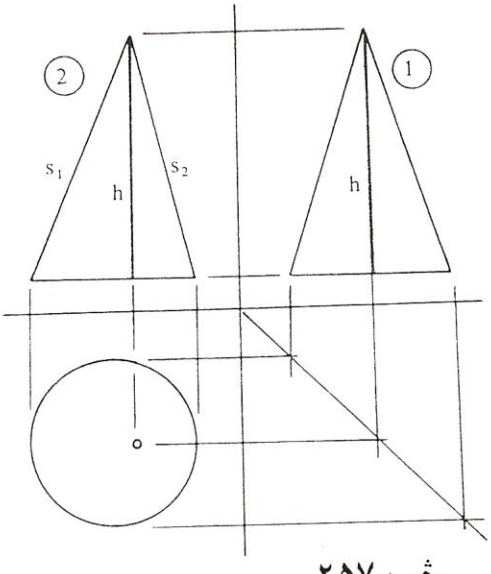
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi . r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



خیره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د ځرخون په څیر هم په خیال کی راوړل کیدی شي: چی په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دریګوډي ځرخون ځخه لاس ته راځي.

بیلګه : د ولاړ ګردیمخروط ډکی وشمیرئ چی د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا زیات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون دریګوډي فرمول سره سمی د غوځهوارې په متن یی اخر ته رسوي. (۲)»

$$F = \sqrt{19(19-12)(19-15)(19-11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

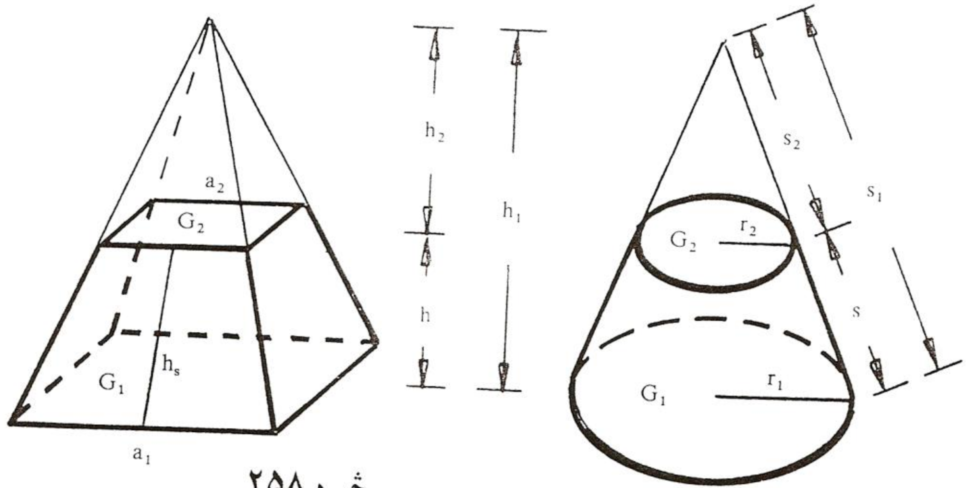
$$F = 65,238\ cm^2$$

$$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87\ cm$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 cm^3$$

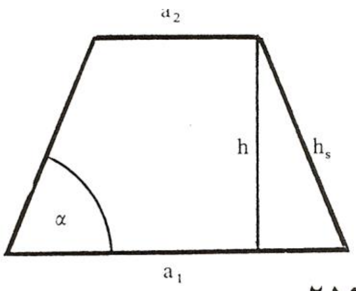
پڅ اهرامونه او پڅ مخروطونه

که يو اهرام او يا مخروط په يوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرګ پرې کړی شي، نو پڅ اهرام او پڅ مخروط ترې راجوړيږي) راپيداکيږي يا منځ ته راځي.
د پڅ اهرام پوښهواره د يوه تريخ څخه عبارت دی چې د دوه دريګوډيو له کمون څخه لاس ته راځي.



څيره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۹

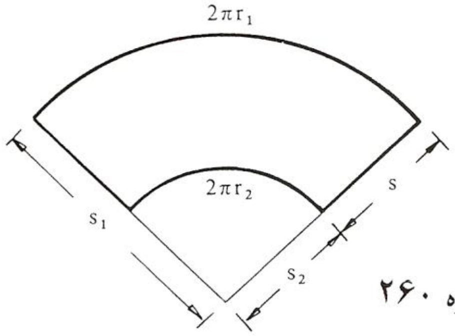
د دوي اوږدوالی د پیوتاگوراس له جملی او یا د میلانکونج α څخه ټاکل وړ دي.

$h_s = h / \sin\alpha$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز فرمول هدفمند نه دی.که بنسټهواره یو منظم n–گوړی وي، نو لرو :

$M = (U + u). h / 2$

د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.



خیره ۲۶۰

په همدې ډول د سم مخروط د دوه گردیبرخهوارو کمون دی:

$M = (s_1 2\pi r_1 / 2) - (s_2 .2\pi r_2) / 2)$

$= \pi (s_1 r_1 - s_2 r_2)$

د وړانگي جملی په مرسته لاندې اړیکی پیداکیږي:

$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \Leftrightarrow s_2 r_1 = s_1 r_2$

$\Rightarrow M = \pi (s_1r_1 - s_2r_1 + s_2r_2 - s_2r_2)$

$= \pi [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$

$= \pi s(r+r)$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخڼکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چی دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (څیره √ وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2] / 3$$

دا چي په n–ګوټي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنستهوارې او سرپوښهوارې یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښول شي، نو د ترڅنګ بیا یواځي هوارې G_1 , G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډونی څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پخمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پخ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

$M =$ د ټول تراپخ هوارو زیاتون

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پخمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلګه

د برنس مجسمی لپاره دي یوه متپه د همغه موادو جوړه شي. دا دي ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دي ولري چي ۱۰ ټنه وي(د برنس دینښتي یا کلکوالی) $\rho = 8,7\ g/cm^3$ په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دي ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟

د دواړو متپو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149\ m^3$$

دا چي جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 \qquad = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1 .1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3,598\ G + 1,687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 /2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3,044m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چی لاندې هواره به له پورته ښخه کوچنی وی)

له دې ښخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

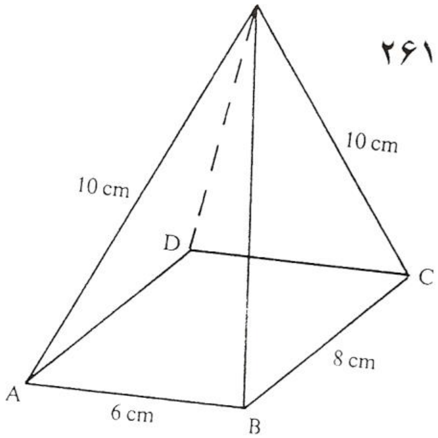
$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m ; \quad r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56,42 \text{ cm}$$
$$=> d_2 = 112,84 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745 \text{ m} ; \quad r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98,42 \text{ cm}$$
$$=> d_1 = 196,85 \text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملی څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2 / 4} = 1,546 => M = 8,488 \text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575 \text{ m}^2$$



خیره ۲۶۱

تمرینونه

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7$ cm ; $h = 14$ cm

ب) $s = 15$ cm ; $a = 10$ cm

پ) $V = 80$ cm³ ; $h = 10$ cm

ت) $h_a = 13$ cm: $h = 10$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ) h = 12 cm ; s = 18 cm

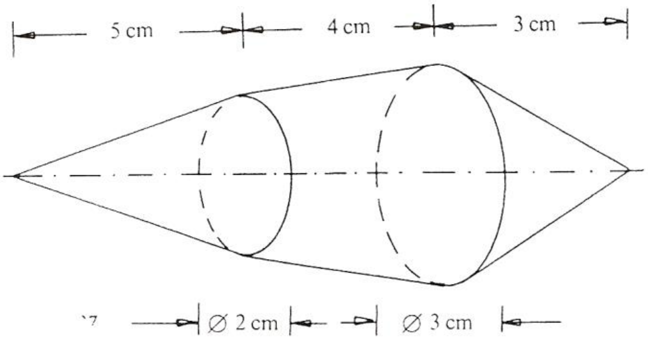
ث) h_a = 12 cm; M = 400cm²

۲ – د څیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی ترونکربښه له ټکي A څخه د جګوالی پښیګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواري ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یې نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپږکونجي سره بنسټ لاندې هوارې اړخ یا کانتی a = 4 cm لري او خوا اړخ اوږدوالی یې s = 12 cm دی. V او O وشمیری ؟

۵ – د څیره شوي بدن ډکي وشمیری.



څیره ۲۶۲

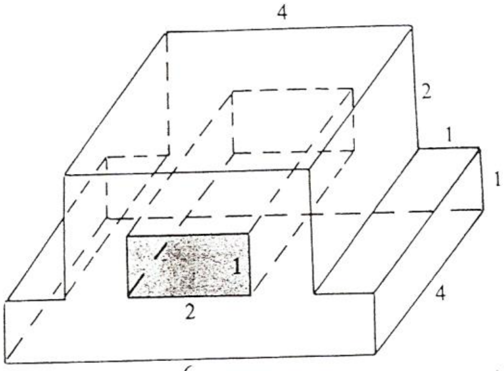
یادونه: ∅ د نیمي یا قطر په مانا ده، چې د دورانې ګرد دلوی ښودنه

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چې ټیک د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج څخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یې ۸۰ ، ۱ متره دی.

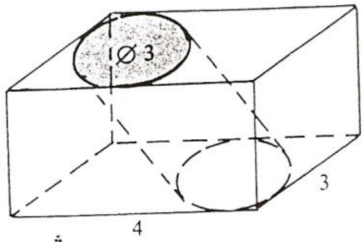
(c) ketabton.com: The Digital Library

٧ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواره یې څومره ده؟
دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

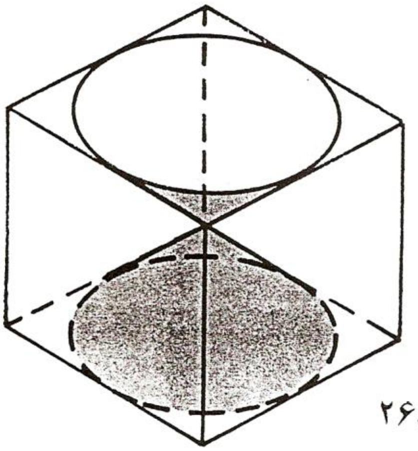
٨ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیرئ(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

٩ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.

١. –په مختلف کارېږو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چی اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یی $a = 60$ cm دی، یو مخروط د جګوالی $h = d = a$ سره

ب) په یوه مکعب کی د $a = 60$ cm یو سیومتري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو دیابولو، دا موږ د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځای ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام (h = 2a = 10 cm) بنسټهوارې ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنسټهوارې ته 0,25h ; 0,5h ; 0,75h وي.
د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ – ددې لپاره چی یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردی باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیك ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردی) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یی څومره لوي دي؟

۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

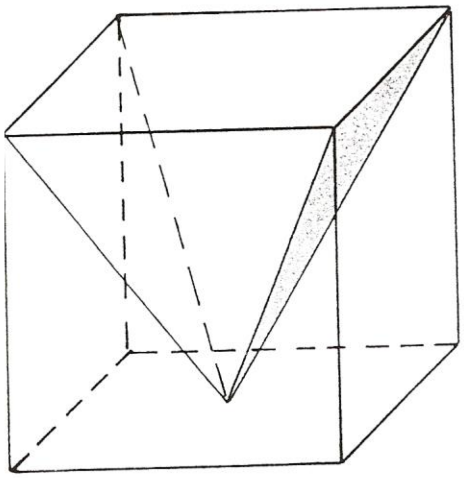
۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۲۷۴ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټووني، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی اینښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

(c) ketabton.com: The Digital Library

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپټووني ډکی وشمیرئ او همداسی د چتپټي سرهواره هم وشمیرئ.



خیره ۲۶۶

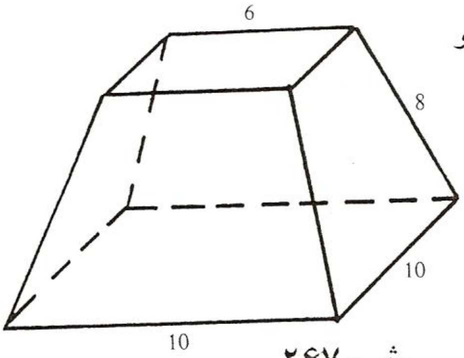
۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره څومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰ درجی وي؟

۲۰ – د یوه هواډکی څومره مائیلوالی لري، که د یوه ونی ستنی هوا ډکی شمیرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټی قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm



خیره ۲۶۷

۲۱ – څومره مسو ټوټه په کار ده، چی خیره شوې مسخولی جوړه کړای شو (وکړنی په ضیس متر؟ خیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټې حومره درنې دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیرۍ

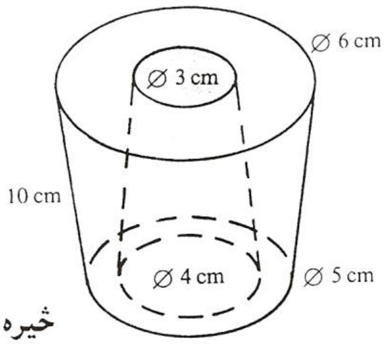
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12\,cm$; $r_2 = 10\,cm$; $h = 8\,cm$

b) $r_1 = 9\,cm$; $r_2 = 7\,cm$; $s = 6\,cm$

c) $r_1 = 5\,cm$; $h = 7\,cm$; $s = 8\,cm$



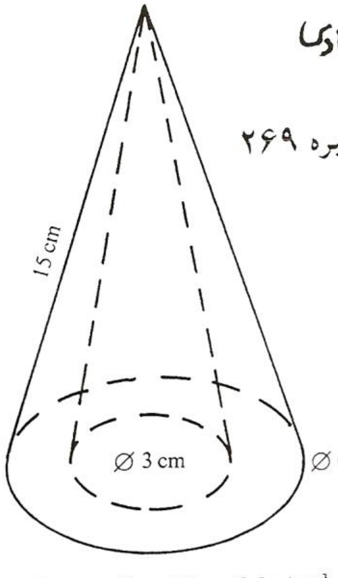
خیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5\ g/cm^3$

د اوسپنې کار ټوټه

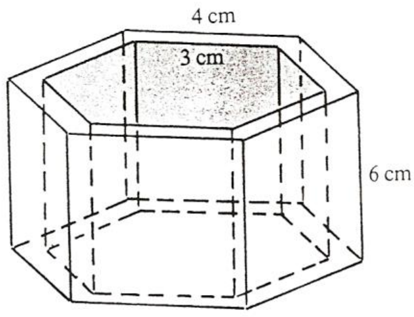
څو په دې ځایونو کې هم دګلګي پرسانا دی
با غلطت

خیره ۲۶۹



Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5\ g/cm^3$

پلاستیک مودل



خیره ۲۷۰

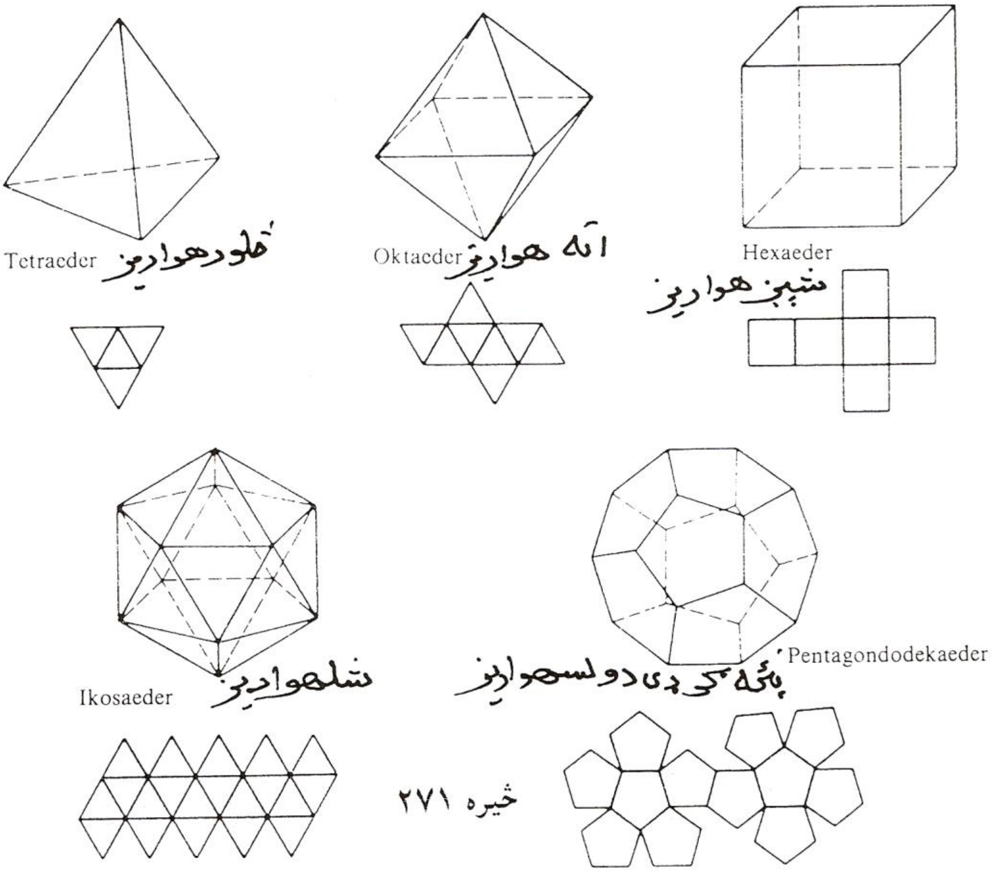
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3\ g/cm^3$

د مسنګ شپږ اړخیزه ټوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډیرهواریز

ټول بدنونه ، کوم چې یوائي بندهواري لري یا له‌وارو رابند وي، پولوئیدر (یوناني : ډیر هواریز) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو. د دوي ترمنځ ټیك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چې پاس هوارې او ډکي یي بند دي، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چې طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا ځیرې لري.



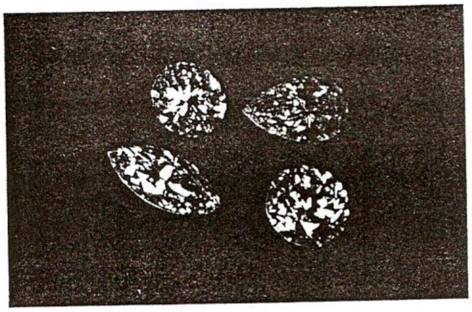
خیره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

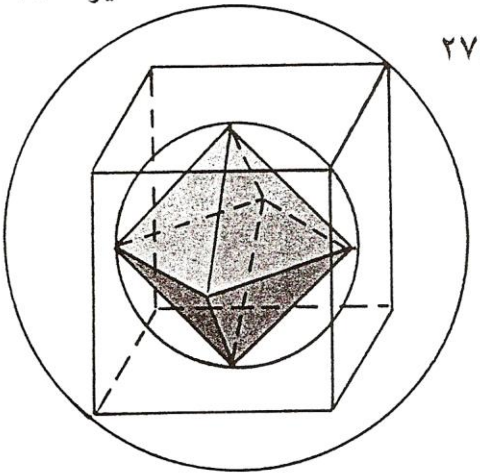
دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهگ هواربندیزدي : تیترائیدر (څلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) څیرې په تیر مخ کی.

بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.



څیره ۲۷۲



څیره ۲۷۳

Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

منظمهیرهواریز پلاتوني (خیالي platonische) بدنونه هم یادیږي، ځکه چې یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چې څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لرووه. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي یوه ګردی دننه او دباندې وکښل شي. که دا یو په بل کی دننه شي یا په بل عبارت دننه راګیر شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چی کیپلر Kepler دې عقیدې ته راوستی شو ، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانیت به په داسی لاره ګرځي، چی د هغوي نیممحورونه د داسی دننه – او دباندېغونډي وړانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئیدر ډیرهواریزومعلومو لویو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانتې یا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ(تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هرکونج کی د کانتو یااړخونو ګڼ، α = د ګاونډیو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپیرګردي وړانګه ، ϱ = د دننه ګردي وړانګه ، O = پاس هواره یا پورته یا ټوله هواره ، V = ډکي.

پنځه یوون ډیرهواریز(Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اويلر د ډيرهواريز جمله، د په خوبنه ډيرهواريز لپاره يو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګښون e ، اړخګښون k او هوارګښون f لپاره:

د اويلر ډيرګوډي يا پولوئيد جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله يواځي د کونوکس يا ننوتو پولوئيد يا ډيرهواريز لپاره باور لري، يعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نيمي د بدن په دننه کی ځغلي، يعنی منظمو ډيرهواريز لپاره.

بيلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائيد : $6 + 8 - 12 = 2$

دوديکائيد $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری يا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری يا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرةّ قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري يا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټيک نومونه نه ده.)

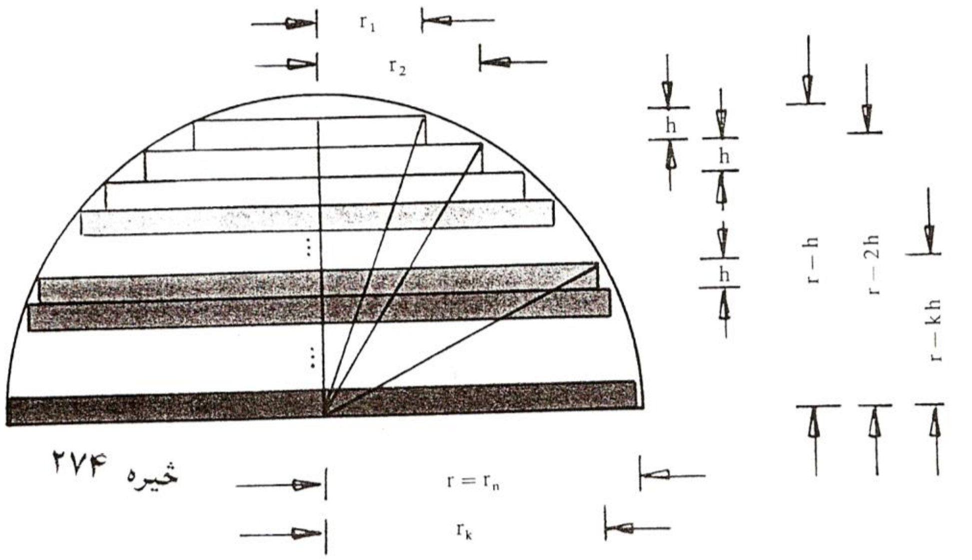
(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډارى یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چې د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډۍ نه یواځې د ځګدرځئیز یا لوړ سیومتري (هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چې ځمکه (نږدې) یو غونډۍ شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانکی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډۍ) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټې، چې موږ ورته په هسکه مینه کی چیټرو وایو . د مات منګی څخه ګردې ځیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چې ځګوالی یې h = r / n دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي (د پیتاګوراس جمله) : کیدی شی د چیترو په ځای ټیکالی ولیکو

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



خیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2 h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^3}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی‌او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

$V_{\text{نیمغونډۍ}} = (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{\text{غونډۍ}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډۍ د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډۍ ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چي دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډۍ پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکيو زياتون = r. (1 / 3) .

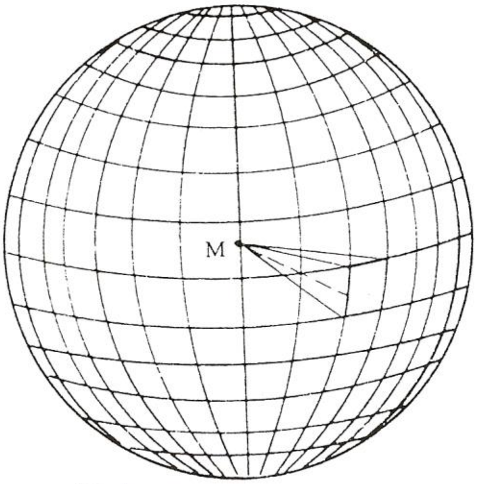
د غونډي پاس يا ټوله هواره

(1/3). r. O د غونډۍ = $(4/3)\pi r^3$

O د غونډي = $4\pi r^2$

په ټوليزه يا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2$, $V = (4/3)\ \ r^3$



ځيره ۲۷۵

پيلبيلګه:

منځنى ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کيلو متره ده . د ځمکى پاسهواره او ډکى ځومره دي؟ ځمکه ځومره کتله لري،که د ځمکي منځنى سختوالى $5{,}514\ g/cm^3$ د مخه ونيول شي يا فرض شي؟

$O = 5{,}10.10^8\ km^2$,

$V = 1{,}08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5{,}97.10^{24}\ kg$

د خاليغونډي ډکى همداسى لاس ته راځي لکه د يوې خالي استواني ډکى (د مخه لوستل شوى دى) د دوه يو په بل کى پرتو کونځينتري غونډيو توپير يا کمون:

$$V_{\text{خاليغونډى}} = (4/3)\ \pi\ (r_1^3 - r_2^3)\ .$$

پيلبيلګه:

د اوسپنى خاليغونډى کومه کتله لري ، که د باندنينيمى يي ۱۲ سانتيمتره او

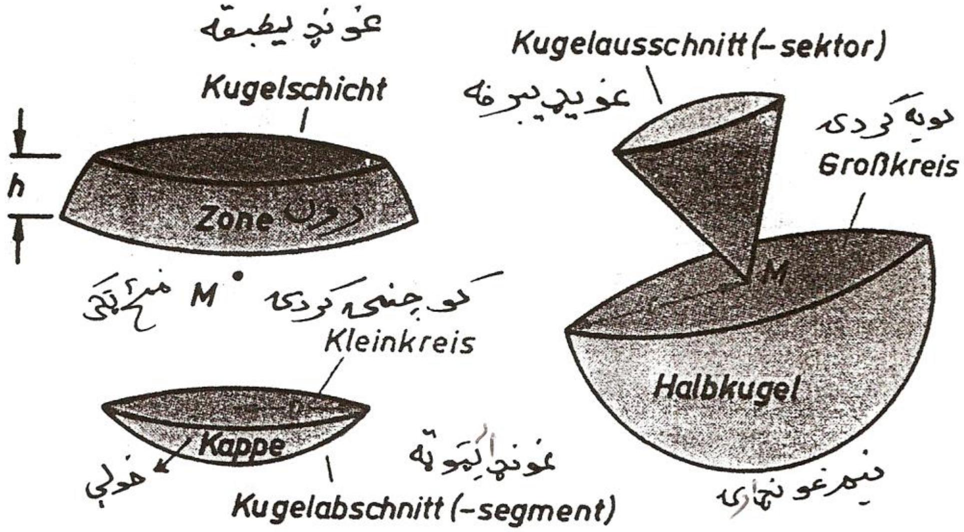
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیبنتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$$V = (4/3)\pi(6^3 - 5{,}2^3) = 315{,}8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463{,}25\ g$$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته

له: ګرو!



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډي له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډي او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډي یو مخروط ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\rho_1^2 h_2 - \rho_2^2 h_1 + hh_1h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیتوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3} + \frac{\pi \rho^2(r-h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي $\rho^2 = h(2r-h)$. په دې توګه د ρ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3} + \frac{\pi h(2r-h)(r-h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له د (*) په مرسته ځ کاږه ځای نښی لوړ لاس ته راځی

$$V = \frac{2}{3}\pi h\left(\frac{\rho^2 + h^2}{2h}\right)^2 = \frac{\pi}{6h}(\rho^2 + h^2)^2$$

د غونډیتوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډې پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کیږه ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \iff M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi . (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بيا يواځې د بنسټګردی هواره ور زياته شي. د غونډيطبقی پوښهوارې ته د غونډيزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره يا پاسهواره يې داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې وززيات شي. د غونډيټوټي پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډيکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزيات شي.

د غونډاري برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډاري ټوټه غونډاري خولی	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډاري ټيکلی غونډاري زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډاري برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بيلګه:

۱ – د پنيرڅرخ د يوه غونډيطبقي فورم يا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشميرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \text{ cm}^2$$

$$= 34,458 \text{ dm}^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملي په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \text{ cm}$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59\text{cm2} = 73,11 \text{ dm}^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

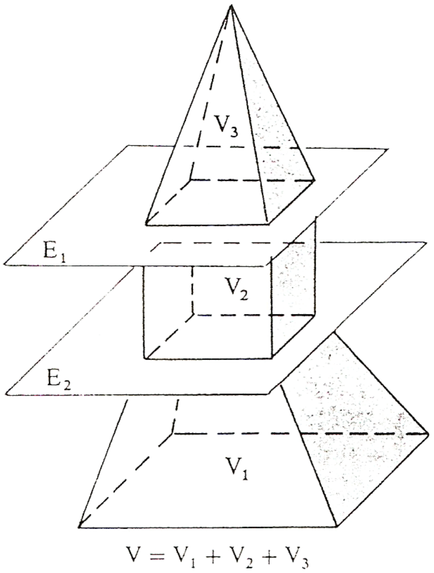
$$V = 2\pi . 16^2 . 0,8 : 3 = 428,93 \text{ cm}^3$$

$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75 \text{ cm}^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټي ټوټي کړو.

په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.

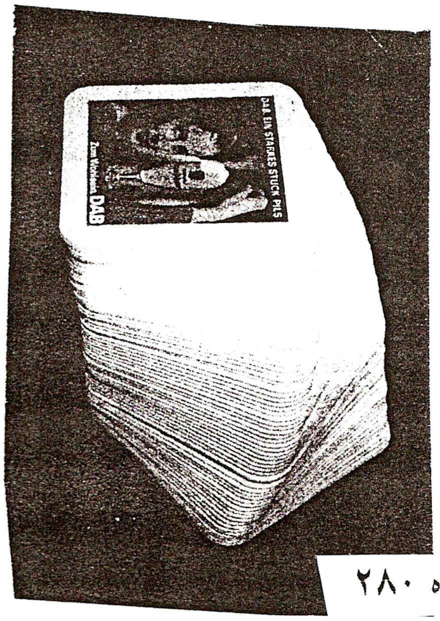


ښیره ۲۷۹

بیلګي :

ددې ښیره شوي بدن ډکی له یوه پڅ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

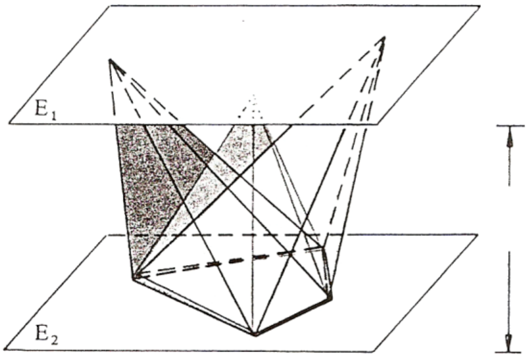
د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس اینبولو ټوټې(داسې ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په ځیر وي او ګیلاسونه پرې اینبوول کیږي) چې یو په بل اینبول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی



ښیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی



جمله :

دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهواري ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهواري دی کونګروا ینځ وي!

ځیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهواري لري: $V = (1/2)G.h$ د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي. د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د r = h سره. داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیټوټی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر ځیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

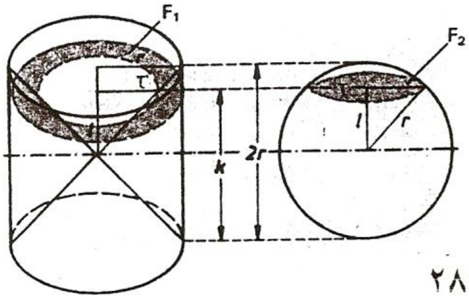
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګردیګوته یا ګردیکړی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردۍ وړانګه وي. r د غونډیغوڅیګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځته‌کې ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



خیره ۲۸۲

د وړانګي جملې څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: (د شګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \quad => \quad r' = 1$$

$$=> \quad F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانې ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2 \pi r^3$ دی، څکه چې $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3) \pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډې ډکی :

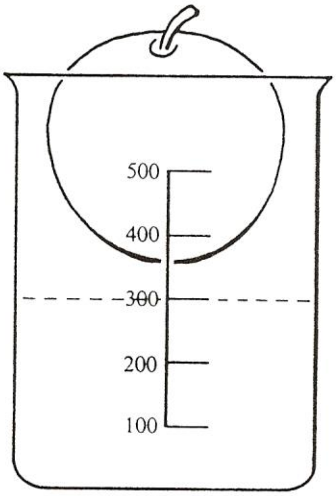
$$V_K = V_Z - V_D = 2 \pi r^3 - (2/3) \pi r^3$$

$$V_K = (6/3) \pi r^3 - (2/3) \pi r^3 = (4/3) \pi r^3$$

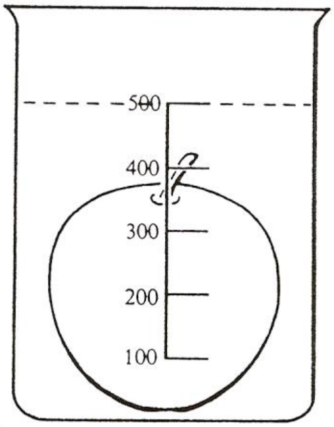
د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنې له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي.
لکه په لاندې ښیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ښیره ۲۸۳



ښیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی ښومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د $s = a$ سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځاننیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی او V او O پاسهوارې $V = O.r / 3$ لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چې پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چې وړانگه r ولري، په
ډول چې د پولوئید هر اړخهواره د داسي یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چې له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانگ سره غبرگ د قدرت نخښنه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومره
وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي($\sim 19,3\ g/cm^3$; $\rho \sim 10\ cm$
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډۍ، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانگی لري، د اه
غونډۍ جگوالی یا جگی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډۍ ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې کردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوڼکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښبی غونډۍ د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($\sim 2,6g/cm3$

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.

الف) دا دننه سمڅ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ گرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډۍ د خورا لوي ډکی سره خوندي ک
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راگیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅي ځیره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ – د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی ($r = 1735\ km$)

ب) مارس ($r = 3430\ km$)

پ) وینوس ($r = 6305\ km$)

ت) جوپیتر (ر $r = 71800\ km$)

۱۲ – د کورکغونډي($\rho = 0,25\ g/cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډیډوله د پارې زږی($\rho = 11,4\ g/cm^3$) لري. دا د پاربزږی څومره لوي دی، که غونډی تر نیمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د یوه لوي سرې سرې ۴۰۰ میلیونه غونډیډوله د سرو‌پوښکی لري، هر یوه د نیمي $0,3\ mm$ سره. د ټولو پوښکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – یو غونډی ، چی وړانګه یی $r = 10\ cm$ ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوځیږي. د دواړو برخو غوځهوارې او ډکي وشمیری.

۱۵ – د پاتی یاد نایادو برخو M,V,h او r د لاندې غونډیبرخو لویوالی وشمیری

a) $r = 6\ cm$; $h = 5\ cm$ b) $M = 50\ cm^2$; $h = 3\ cm$

c) $h = r = 7\ cm$ d) $M = 700 cm^2$; $r = 10\ cm$

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه لیدل کیدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

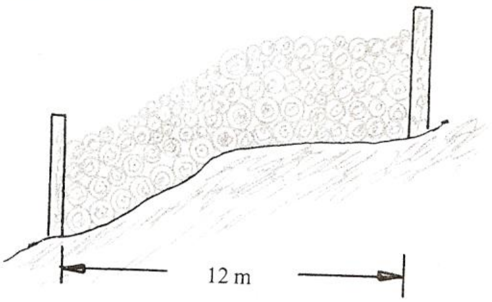
۱۷ – د یوه غونډي نیمی په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي٠ په ټوټهټکو کی په نیمی ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم څاننیونه یا تناسب کی

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غبرږو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول a.b.c $V = (4/3)$ له مخی شمیرل کیږي. ځکه په رینبتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه يي $a = c = 6378$ km (د اکواتور وړانګه) او $b = 6357$ km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتورورانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



خیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

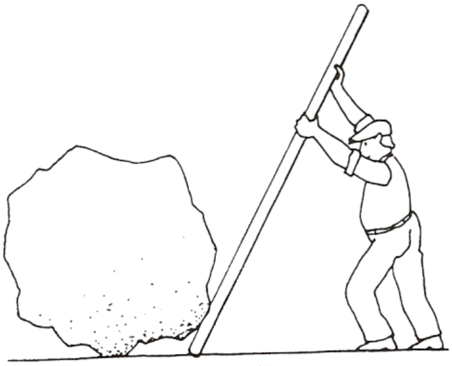
(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشميرنه

نځورونه

پيلبيلګه

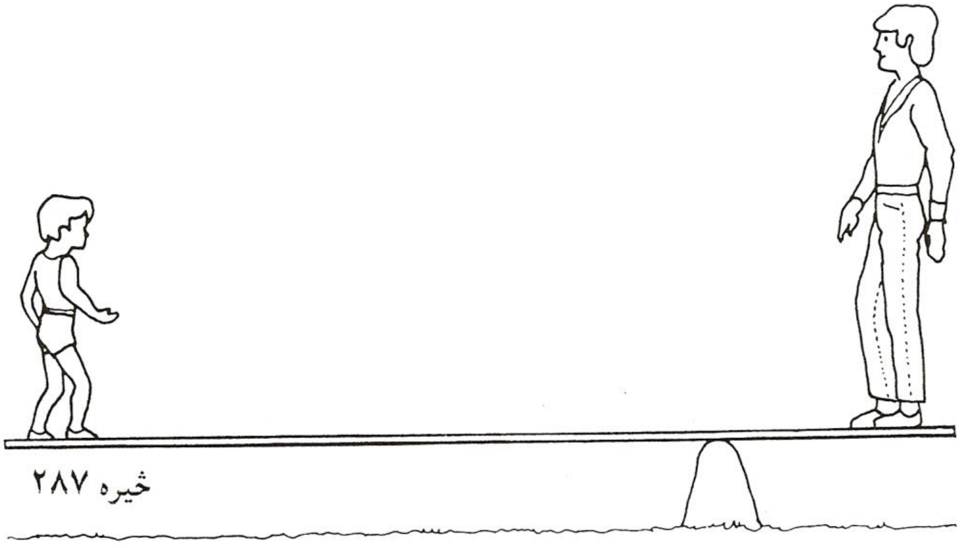
يوه درنديږ تيګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعاً کيدی شي چي وړل
يی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لانديږ طريقه يی ساده ده: د
تيګی لانديږ سړی يوه تخته يا اړم ننبلوي او يا ورلانديږ کوي، د بل سر نه يی
لانديږ لور ته زور کوي يا لانديږ لور ته زور په واردوي. تيګه يو څرخونحرکت
بانديږ راځي.
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .
که تيکه په پوره اندازه اوږده (او ستابيل) وي، کيدی چي يو ډير نازورور
سړی هم کړی شي، چي خورا درانده بارونه پورته کړي.



خيره ۲۸۶

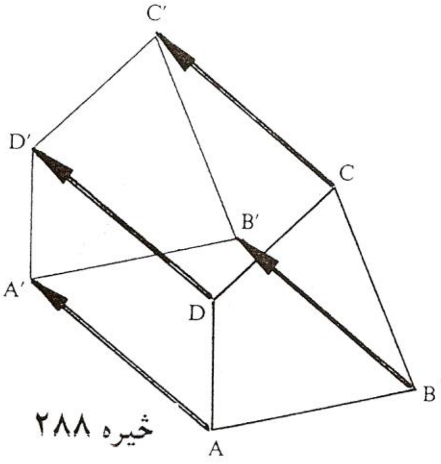
يا دا حالت د پورته پيلبيلګي سره ټيك
وښانه څرګند شوی ؟ هيڅ نه پيښيږي،
که څوك په اړم ښکته يا پورته زور ونه
کړي بلکه يا راکښ يا ورپوريږ وهي.
مونږ بايد دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو
و د زوارزښت سره دزورتاثير لور هم په
شپله لوبه کی ورداخل کړو.ددې هدف لپاره
وکتور سره شميرنه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. تل د یوه غشي په ځیر انځوریږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځای لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښایي.



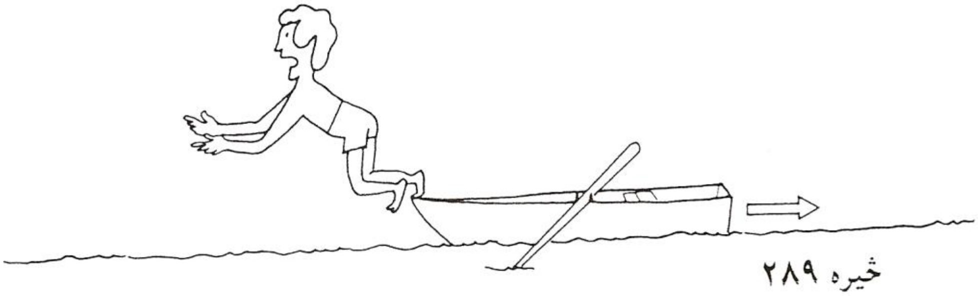
ځیره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحې

ګڼونه د مخنخښی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزيك کی کښنول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په ځیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و ځیره ✓ کښنول په وکتور سره په ښنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنايي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



څیره ۲۸۹

داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کیږي.

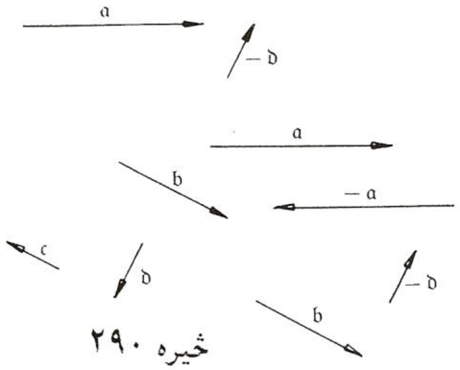
بل ډول لیګدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروااینخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي ځخه هم غبږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره وکتورو نه د ایکویوالنځېولګی

په ثیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.



ثیره ۲۹۰

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت $|\mathbf{a}| = a$ دی. a تل یو نامنفي ګڼ دی.

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

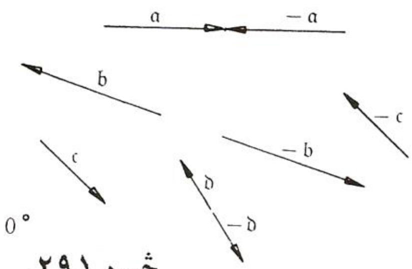
وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په ځېړ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی:

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

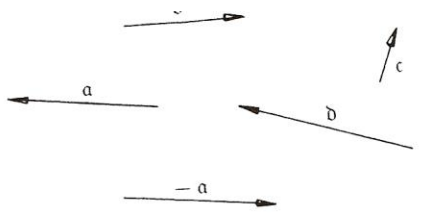


ثیره ۲۹۱

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$| \mathbf{a} | = |\mathbf{-a}| = 2,5 \; ; \; | \mathbf{b} | = 2 \; ; \; | \mathbf{c} | = 1 \; ; \; | \mathbf{v} | = 3$

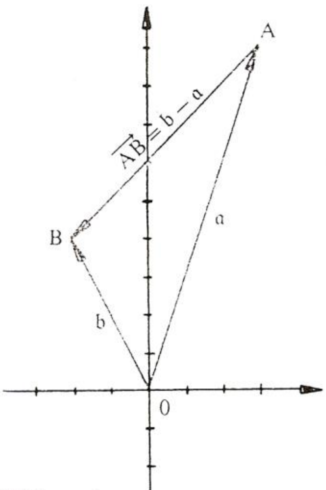
بیلګي:

وي دې A(3| 9) او B(-2 | 4) پیل– او پایټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



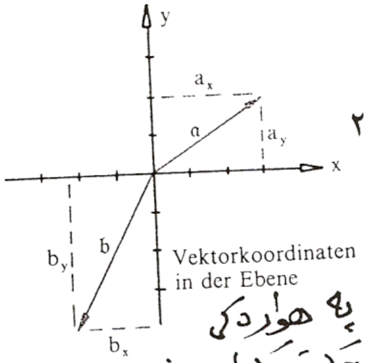
خیره ۲۹۳

جمله: د وکتور ارزښت د پیتاګوراس له جملې څخه لاس ته راځي او دا د یوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $| \mathbf{a} | = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



شیره ۲۹۴

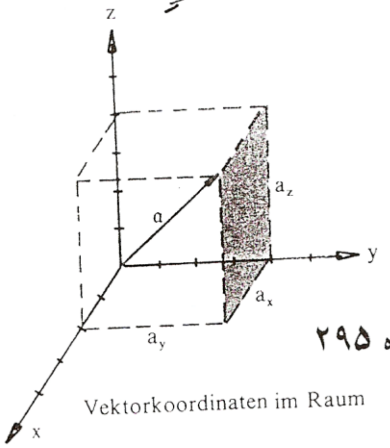
په هوارد کی وکتورکواوردینات

بیلګي :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



شیره ۲۹۵

په هواکی وکتورکواوردینات

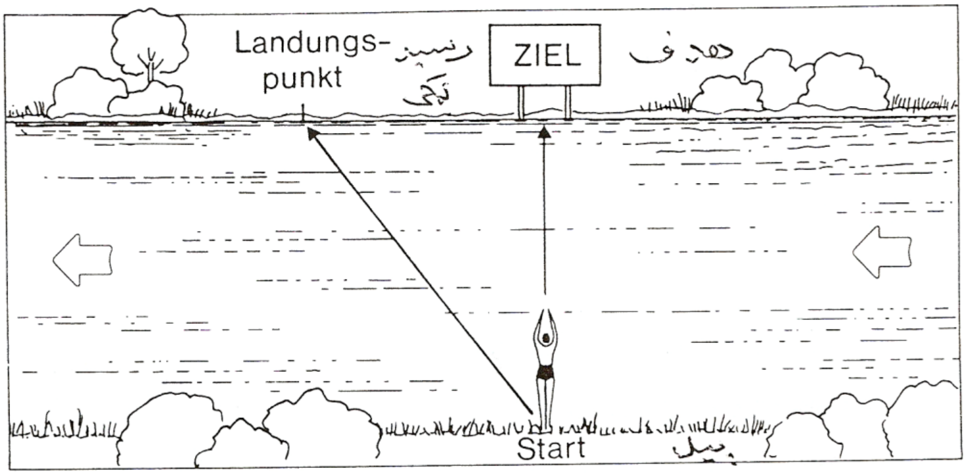
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره ووړ کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کوم ګکي چې د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، څموږ په څیره کی «



څیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کینبول شي یعنی د غشی په سر کینبول شي او داسی وریسی. دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د څنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسې کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتونز همداسې کوم څخه لاس ته راځي.

په هوار کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په فضا کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

بیلګه

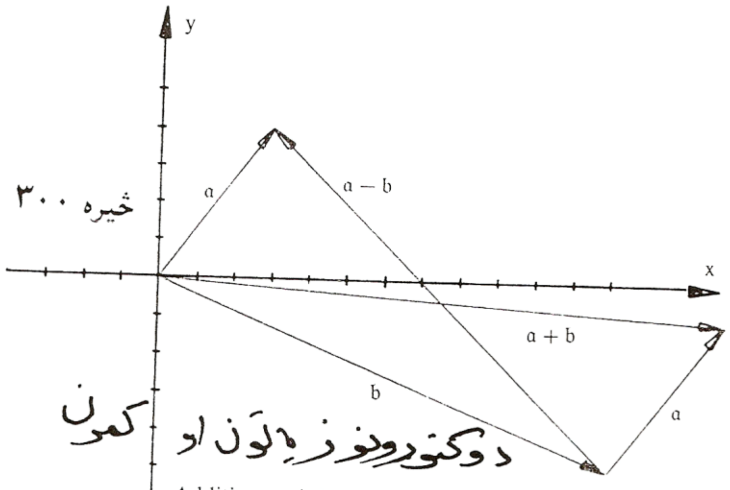
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\textbf{2.}\ a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\ 3\\-\ 5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چې له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

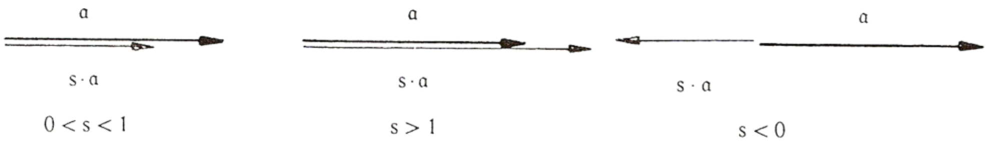
تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a** . s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چې همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

$s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$ په هواره، $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$ په هواکې

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه ریيلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلتګی د کربنمنځ یا غزونمنځ دی.
دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډیږي.
د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه څټ کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



خیره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو **s.a** صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګي:

1. $\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-9\\-12\\-15\end{vmatrix}\approx 21{,}21$

$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=|-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=3\cdot\sqrt{50}\approx 21{,}21$

2. $(4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$

$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$

3. $3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$

$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right]=3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$

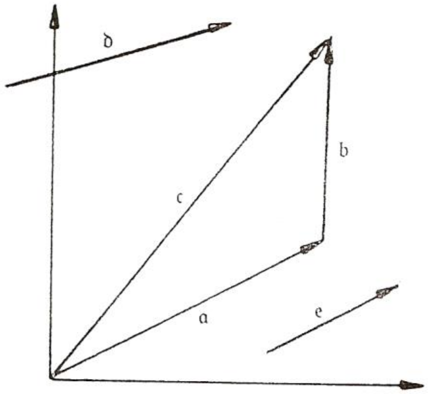
که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینی بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

> **تعریف:** دوه وکتورونه **a** او **b** لاینی بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) ریيلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چی **s.a = b** باور ولري.
> دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم ریيل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائني بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زيات تر زياته ۲ او په هوا کی زيات تر زيات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواك کیدی شي.



ځيره ۳۰۲

لايني بلواك وکتورونه	لايني خپلواك وکتورونه د بيلګی پو توګه
{a , e}	{a , b}
{ a , b . c }	{ b , c }
{ a , c . d }	{ e , d }

بيلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لايني بلواك دي ، ځکه چی

$$s. \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په خټ يا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواك دی، ځکه چی :

$$s. \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چی دلته سره ګډ يا مساوي s نه شي پيداکيدی.

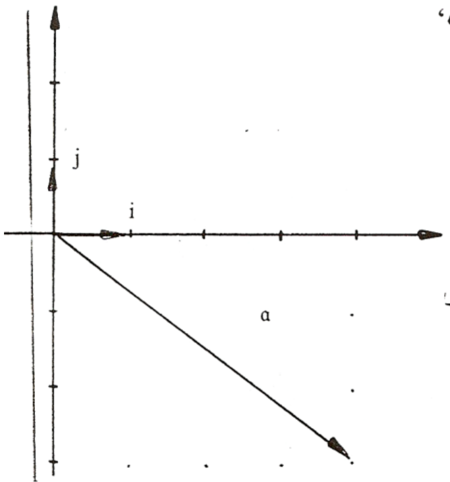
(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لاینې خپلواکوالي او لاینې بلواکوالی په هواره او هوا کې د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدي شي:
لکه څنګه چې ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چې خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چې وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چې ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کې، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کې او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



ځیره ۳۰۳

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$$

هر وکتور کیدی چې په هواره کی له i او j او په هوا کې د i , j او k وکتورونو په نامه لاینې کمبیناشن په ځیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.

بیلګې:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د ریيلګڼونو سره ځلونی له لارې لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول – $a + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي رابندیدنه

دوم – $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a + b = b + a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم – $1.a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم – $(m+n).a = m.a + na$ د ټولو ریيلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم – $m.(a + b) = m.a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

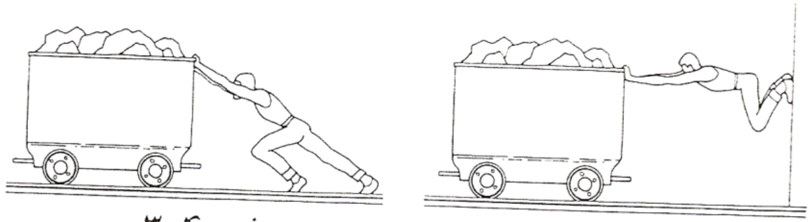
په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چې ومو لیدل؛کیدی شي چې سره زیات شي او یا د یوه ریيلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چې وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي(د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چی دا یواځې ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چې موټر سم پورته کړي؟



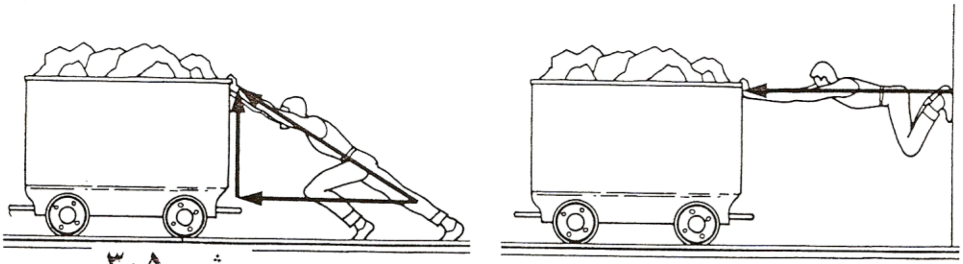
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چې د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چې واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چې واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځې پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چې د هغې له لارې زور اچول کیږي، نږدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نږدې د مټو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیره پاتې کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځی ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



څیره ۳۰۵

تعریف:
د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندې (ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

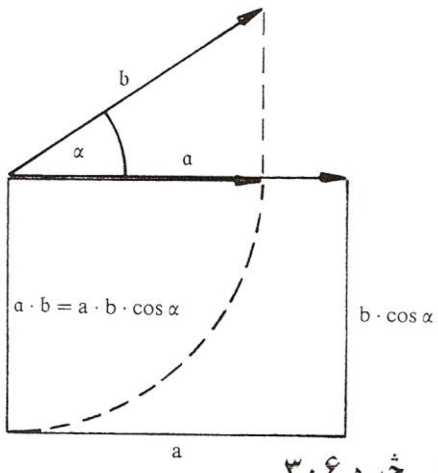
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج ∝ د **a** او **b** وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو او $b.\cos\alpha$ سره (د **b** پریوستون په **a**). داسی یوه هواره هلته موجود ده،که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا $\cos\alpha \neq 0$ ، یعني $\alpha \neq 90°$ ده.

د **b** ولاړ پریوستون په **a** کله کله په ∝ سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



خیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو $\mathbf{a} \neq 0$ او $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چې دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$\mathbf{a . b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k} = 1 \quad \text{او} \quad \mathbf{i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته تړلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

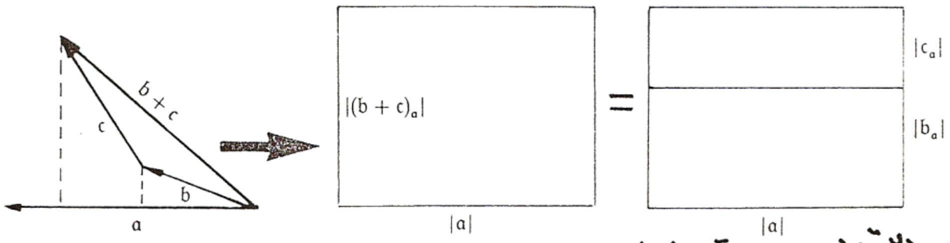
$$a.(b.c) = a.|b|.|c| \cos(b.c)$$

د a یو زیتځله دی او په څپ : $(a.b).c= |a|.|b|.\cos(a.b).c$ د c یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$a.b= b.a$
او وکتور زیاتون ته دیستریبوتیو دی.	$a.(b+c) = a.b+a.c$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستریبوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همدا سی

د a او b ترمځ کونج په لان دې ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

د---

ردوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي بيلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9 + 25)} \cdot \sqrt{(100 + 36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباړنه ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

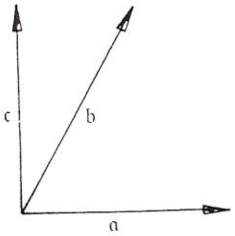
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یواځنی ګڼاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

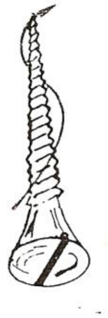
تعریف :
د وکتورځل $a \times b$ لاندې (a اټیران b) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني a,b,c په لړیپرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور c په وکتورونو a او b نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

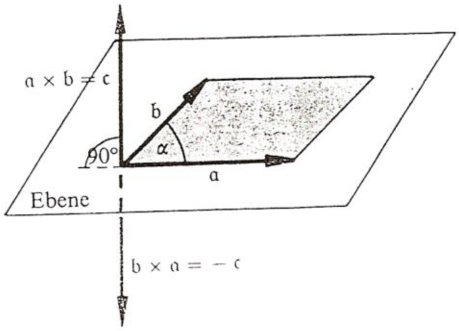
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| . \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$







خیره ۳۰۸ : یو ښي سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لارې وښوول شي:
که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وځرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي

خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کیدي شي

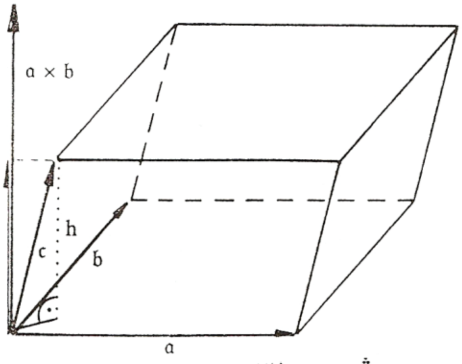
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z)\, i + (a_z b_x - b_z a_x)\, j + (a_x b_y - b_x a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنسټهواره د جګې سره ځل کړای شي. دا جګې د c ولاړ پریوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



څیره ۳۱۰

تعریف :

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزیدلی
شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped)
ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه
a ,b , c
په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ
کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان څرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .

په ادبیاتو کی دا د ځل اتیران نخښه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ـیکل کیږي، یعنی لیکو: $(a \times b) \cdot c = a.b.c$ ، غبرګهواریزځل شمیرنه د
ـیترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتیرانځل لکه د مخه مو چی وویل د بنستېوکتورونو د لاینې کومبینیشن په ځیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی ځومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ او $$c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ aufgespannt wird? له دې چی غزیږي

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 - 0 \cdot (-1) \cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

رسم کړی .

a) a + 3b , b) 0.5a - 3b , c) 2(a + b)

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی B(2|-1|4) .A(1|2|3) , O(0|0|0) او C(-5|7|9) ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوی دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لاینې خپلواك وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لاینې کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لاینې کمبینیشن په څیر د رییلو ګنونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنې کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$. وشمیری:

a) a.b b) -a.b c) a.a d) b.b

e) a.(b.a) f) a.(b.a).a

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکی :

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷ – د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغی په څټ وشمیری:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مختـه لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایی.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیری، چی له

وکتورونو $3 = b$, $1 = a$ او $-2 = c$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) \cdot c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایي، چی اتپرانځل اسوشیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $0 = b$, $2 = a$ او $4 \cdot k = c$ له لارې یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چی ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي.

سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللارې اړوي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

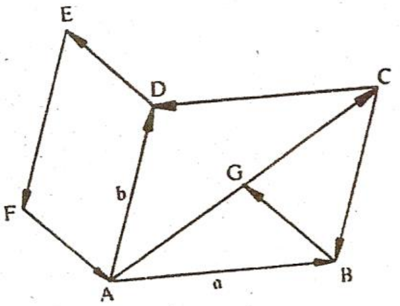
۱۳ – د وکتورونو a اوb لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

$$a)\ |a+b| < |a|+|b|\ ,\qquad b)\ |a+b| = |a|+|b|$$

۱۴ – لاند یوکتورونه ورکړشوي دي:

$$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یاb د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینی کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$$a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}.$

$$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\ \text{und}\ d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

او

د نیمی اوردوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیبنتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیبنتی تګلور دی، باد د $w=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لګیږي.

الف) د بادزور F⊥ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

ب) د F برخزور له F_|_ څخه څومره لوي دی، ك ومه چی کینښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مائلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یی یو مساوي پښیز دریکوڼی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونتوتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتورv کواوردینات و اورتوګونالبنستونو$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ او$\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکو A, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) $A = (0 | 6 | 0)$, $B = (8|4|0)$, $C = (6|16|0)$

b) $E = 1,5|2,5|3,5)$, $F = (0.5|0|2,5)$, $G = (1 | 0,5| 4,5$

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

$A = (1|0|2)$, $B = (3|3|7) =$, $C = (4|2|12)$, $D =(2| - 1| 7)$

سره کوم ډکی لري، چی څوکه یی $S =(2 |4 |15)$ وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی آیا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شمیرنه

ځانښیونیز یا متناسب او په څټ یاچپه ځانښیونیز یامتناسب بلواك (فنکشنونه)، دربقضیه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتیا پیښیږي چي ورکړ شوې لویی (یا ډیروالي) یو د بل سره انډول (مقایسه) کړای شي. د بیلګي په توګه د څپلیو لویوالی د ځمکی ارزښت، د میاشتني معاش یو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونو a او b د انډول لپاره په زیات وخت کي کمون a - b کفایت کوي. دلته نو بیا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپیر څخه غږیږو. په ډیرو وختونو کی دا بسیا (کفایت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپیر څخه لاس ته راوړو.

پیلبیلګه:
دوه پټې یو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ یو له بل $200\ m^2$ توپیر لري. دا د پټیو لویووالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووایو که د دواړو ځمکو ویش د یوه میراث ویش وي؟
هر ځل به دا یو $200\ m^2$ ډیره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. ګورو چي په دوم ویش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي میراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ویش $1800m^2/2000m^2$ ته زیات دی.
دا په دې مانا، چي که هرڅومره ځمکه لویه وي نو په همغه اندازه د دواړو میراثخورو ترمنځ توپیر کمیږي.

دا مختته پرته بیلګه ښایی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لویي یو بل سره په تناسب یا ځانښیونه کی راوستل کیدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفی لویي یا کمیتونه وي، نو a / b ویش یا a: b د a تناسب یا ځاننیونه وb ته بلل کیږي.

بیلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لویوالی یو بل سره 400/600 = 0,6 = 2/3 تناسب جوړوي یا یو بل سره ځانیسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي 66,6% جوړوي.

۲ – د پټیو $1800m^2$ او $2000m^2$ لویوالی یو بل سره په

1800/2000=0,9=9/10

تناسب یا ځاننیونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90% جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاین (لیکو یا پټلیو) او الماني ګاډو د لیکو یا پټلیو سور یو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

12mm/1435mm = 0,00836 ~ 1/120 .

۴ – که یو کړندی په 30 دقیقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلې سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .

۵ – د یوه هوموژین بدن (د مساویډوله مواد جوړ) سختوالی ρ د هغه د کتلی (g) ځاننیونه یا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي (cm3) ته

ρ = m / V [g / cm³]

د یوه لرګي بلاك سختوالی (کثافت)، چی درې کیلو ګرامه دروند او څلور زره مکعب سانتیمتره ډکی (حجم) لري، 0,75 g / cm³ دی

3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm³ = سختوالی ρ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تیپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کې ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چې له دې امله یې پیژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پیلبیلګه:

۱ – د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. څو لیتره اوبه به په یوه ورځ کې له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟

که په درې دقیقو کې ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی

طبعاً 5760 = 4 . 1440 لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی 2102400 = 360 . 5760 لیتره او یا ۲۱۰۲۴ هیکتولیتر اوبه بهیږي.

۲ – څلور کارګر یو ه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکریټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارګر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعني څلور ځله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقیب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقې ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریټ کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منځ کی پروت دی، دقیق په لمړۍ بیلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بیلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی یو له بل توپیریږي:

۱ – څومره ډیر وخت چی تیریږي په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چې کارګر زیاتیږي همغومره د کار وخت کمیږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونویا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکي لیکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.
۱– فنکشن f : وخت (دقیقه) ⟵ د اوبو ډیری(ل)
د فنکشن لیکدود (فنکشن لیکلوقانون) لري $x \to 4x$
په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 4x \quad ; \quad x \in Q^{+}_{0}$
۲ – فنکشن g : کارګر (څو دانې) ⟵ د کاروخت (ساعت h)
د فنکشن لیکدود لري $x \to 36/x$
په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 36/x \; ; \; x \in N$

تعریف:
یوه لویه x و هغې ته تنظیم شوې لوي y ته سیده متناسب سیده ځانیونه (په نخښه کې $y \sim x$) بللکیږي که د هغوي تناسب یاځا نښونه (ویش) y / x تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی $y / x = k$ وي.
بلواك(تابع) یا فنکشن $y = kx$ (ثابت – k) د تناسب یا ځانیونې ځلوونې یا فاکتور بلل کیږي.
یوه لویه هغې بلې تنظیم شوې لویې ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده ځانیونه کې ده، که د هغو ځل تل یوثابت ارزښت وساتي: یعني
$$y.x = k \quad \Leftrightarrow \quad y = k/x$$
بلواك یا فنکشن $y = k/x$ چپه یا په څټ متناسب (antiproportional)
یا په څټ ځانیونکې بلواك یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د یوې لوي دوه برابره، نیم برابر، n –برابره پورې د بلې لویې هم دوه برابره، نیم برابره یا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په ثټ متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n − برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ... $1/n$−برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په ثټ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي ثخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په ثټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په ثټ متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ − سیده تناسب یا سیده ځانتیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت(افغانی) ډیری (کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$s(km) \rightarrow t(s)$

۲ − ناسیده تناسب یا ناسیده ځانتیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼنه ناسیده متناسب ده د هرې کوتی یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځانتیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \quad <=> \quad a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \quad <=> \quad a/c = b/d \quad <=> \quad c/a = d/b \quad <=> \quad b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \quad <=> \quad a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګڼونو.

بیلګي :

١ – له $7 / 21 = 5 / 15$ څخه لاس ته راځي $7.15 = 5.21$ یا $15/5 = 21 / 7$ یا $15/21=5/7$ یا $21/15 = 7/5$.

٢ – د $8/12 = 4/6 = 2/3$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

٣ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي یې یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \quad <=> \quad m^2 = a.b \quad => \quad m = \quad a.b$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

16/12 = 12/9

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځاننیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

18/x=8/5 <=> 18 . 5 = 8x => x = (18 . 5) / 8 = 11,25

په ترتیب تنساسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري: 18 / 11,25 = 8 / 5

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربنودوي، نو بیا دريٍ ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دريقضی شمیرني یا پاي(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.
د درېقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځتې متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :
۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.
۲ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون(واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:
یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه.......... 800km - 6h 40 min

يا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لرې کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارگر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغي له امله يو کارگر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنې ډله اوس څنگه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانګيونه لرو:

هرڅومره چې کارگر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارګر – ۵ ورځې ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځې ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځې پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځې	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و درې کارګرو ته $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20 / 3$ ورځی

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځې ضرورت لري. څومره ورځې به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولرې؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځې
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځې

هرڅومره چې کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځې، هرڅومره چې درزیان زیات وي همغومره لږې ورځې

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځې
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځې

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځې

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانښیونې یا تناسبونه ساده افاده کړئ

a) 200t : 2 kg   b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min   d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګډول ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کې رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h   b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانښیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونې څومره دی ؟

a) 5 cm   b) 33 mm   c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسې په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چې ځانښیونه یا تناسب یې داسې وي لکه : 4 : 5 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسې دی ، لکه چې د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چې ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانښیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کې ځغلي او په دې پسې په ۱۲۰ متره کې وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کې ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چې د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کې څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چې له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟
۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (CO_2) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 11 : 3 ده.
څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟
۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غابنورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.
نور دواړه غابنورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟
۱۰ – ۹۰۰ تیږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور يی ۲۴ سانتي متره وي؟
۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille
ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

موږ د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنی په چوکاټ کی (څما د شمیرپوهنی کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چی څنګه بنسټیز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کیدی شي. د انډول یا مقایسي لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامې، چي په ۲۳۰ افغانۍ پلورل کیدي، په ۴۰ افغانی ګرانی شي د ګرانښت تناسب یا ځاننیونه یی و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چی مات لاندې یې «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چی د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

40 / 230 = 0,1739 پس 40 / 230 ~ 17,39 / 100

قیمتیدل د لمړني قیمت 0,1739 څله راکوي. داسي هم وایو چی قیمتیدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کی بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو 1% د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کی جمله او W په سلو کی ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسې نیسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کی ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کی ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بیلګی:

۱ – د په سلو کی ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کی ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 40 , 60 DM یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM لاس ته راځي.

له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بی مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰ ماروکونه د مالیا سره.

کید ی شي، چې سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کیښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14).\ 114DM = 330,60\ DM$$

۳ – یو جوړ کالي چې ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی ګرانیږي، دا کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چې ایا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه ارزښت ولري، که څنګه؟

طبعاً نه ، ځکه چې ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت دی ، مګر دا ارزنښت یی په دې اوسني ارزښت، چې 150 + 150.10% = 165DM په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

$$165 - 165.10\% = 165 - 16,50 = 145,50DM$$

مارکونه دی. که یوه وده پسې شتوی بنسټ ارزښت بیا ره د په سلو کی ارزښت شمیرل کیږي، کیدی شي چې دا د یوه سانګل له لارې وښي.

بیلګي:

اول) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کی داسی شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM

دوم) که د ۴۵۶۸ کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04\ DM$$

دریم) که د $2303\ m^2$ بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټېاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ– یا ستېه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چې
موږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:
۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000
د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې
کی) ، 1000‰ له دې سره یو ستېه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

موږ غواړو، چې دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرماي) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کې د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کې یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول وریسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یوائی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کې په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په دنده یا شمیرنه کې ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کې ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼهایي ، چې ۳۵۰۰ مارکونه دي.
په درنیمو کالو کې په ساده ګټونه بڼهایي، چې بانکی شمیر یې واز کړی 551,25DM = 157,50. 3,5 لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کې 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټې وخت t لکه، چې ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کې د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتې نیسی، چې د هرې میاشتې لپاره ۳۰ ورځې ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کې هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چې پیسی بیرته له بانګ اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: Z = K.p / 100 . د ورځنی ګټې فرمول: Z = K.p.t / 100.360

بیلګې

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ . ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه %75 , 4 وي.
د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځې.
د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کېښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانک څخه راواخستلې. دې ښډايي يا سرمايي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که ښډايي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : یو ښډایی ، چې لاټري یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانک څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.
دا د لاټرۍ ختنه به څومره جګه وي؟
موږ دا د ګټې فرمول د ښډايي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7\ .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنی شمیرل کیږي او ښډايي ته ورزیاتیږي.
یو پیلبډایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالی کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

$$K_1 = K_0 + K_0\,(p / 100) = K_0\,(1 + p /100)$$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.
دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولې ګټه ده، د یو کال په پیلبډایي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پنبیګټی یا ګټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته ترې راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د ($1 + p/100$) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټی فاکتوریا ګټی ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټی ګټی فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی ګټي باندې(د ګټی جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96 \text{ DM}$$ مارکونه

د ګټیګټی شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوونی $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټی لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونی بیا یو لاینې فنکشن $K_t = K_0 (1 + p.t / 100) ; t \subset Q$ په نخښه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چی په یوه دګټی ګټی اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټی ګټی اچونی چی ۵۷، ۴ ٪ دی اینښول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱–۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [50000 + 50000.4,5.237 / 36000].1,045^4$$
$$K = 61392.35 \text{ Af}$$

د لویو t , q , K_0 او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بډایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بډایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $K_0 = \dfrac{K_1}{(1 + \frac{p}{100})^t} = \dfrac{K_1}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0.q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګي:

١ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانک کی سپما کړي، د ٥٪ په ګټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به څومره لوي، چی دا لمسی په خپله ٢٥ کالیزه ٢٠٠٠٠ مارکونهلاس ته راوړي؟
باید په بانك یکی ٢٣ ، ٩٦١٢ مارکونه کیښوول شي یا سپما شي..

٢ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي
« علاقمند الف ١٥٠٠٠٠ مارکونه نغد ، ١٢٠٠٠٠ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ١٥٠٠٠٠ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.
علاقمند ب غواړي، چی ١٣٠٠٠٠ مارکونه نغد ، ١٥٠٠٠٠ مارکونه له درې کالو وروسته او ١۴٠٠٠٠ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.
کوم یو علاقمند ګټور دی، که موږ ٨٪ ګټۀ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟
دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډايي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، بايد ۶٪ کلنې ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کې پاتي شي يا کېښوول شي. بډايي به څومره لويه وي په الف) کلني ، ب) نيمکلنی، خ) مياشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرينونه:

۱ – يو جوړ کالي په ارزښت يا نيه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کاليو لومړنيی نيه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نيه لري؟

۲ – يو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بيه درلوده؟

۳ – د يوه جاکټ بيه په ۷۰ مارکونوه راکميږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بيه لروده، اوس دا څومره بيه لري يا حومره قمته ده؟

۴ – يو جوړ دريشی په ۹۸ مارکونوګرانيږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بيه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات يو د بيي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرايطو لاندې ورکول کيږي. سکونتو يو بيه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پيسو ورکولو له امله ورکول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟
ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك يی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی اینښوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینښودلي وي، که یوه بډایي

په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینښوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټهونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کي شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره   دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره   دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوټګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ځخه چې د شتوټګارت پوهنتون ن ج ځخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرِي شینواری د اروابشادې پستو او اروابشاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرِي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیرِي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library