

د فرمولونو ټولګه

لیکونکی:

ډاکټر ماخان (میری) شینواری

Ketabton.com

2016

د فرمولونو ټولګه

راتولوونکی : ډاکټر ماخان میړی شینواری

سریزه: بی له سریزی

وینا سم اندیا - منطق Aussagenlogik

سم اندیزی ترنی

ویندول	لیکندول	نخبه ونه
A نه	$\neg A$	نه والی
A او B	$A \wedge B$	د او ترنه
A یا B	$A \vee B$	د یا ترنه
A یا B	$A \neq B$	ناورته والی (انتیوالتخ)
A له لاس ته راځي B	$A \Rightarrow B$	تری لاس ته راتلنه
و ته ورته ده	$A \Leftrightarrow B$	ورته والی

لاری یا قوانین

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Morgansche Regeln د مورگان لاری - قانون

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Distributivgesetze دېستریبوتیو قانون

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \quad A \wedge \neg A = f$$

weitere Regeln نور قوانین

$$A \vee w = w \quad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \quad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren د شتون - یا موجودیت کوانتور: $\exists$ (لر تر لږه یو... شته)

ټولکوانتور: $\forall$ (د ټولو ... لپاره)

دېرئ Mengen

د دېرئو کارونې يا - عملیې Mengenoperationen

تولنه: $A \cup B$

غوڅی يا تقاطع: $A \cap B$

$A \setminus B$

کمښت يا تفریق:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

سیومتريک کمښت:

قوانین

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

د مورگان قانون Morgansche Regeln

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دېسټرېبوتیو قانون Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اړیکې

Relation

$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$$

$$(a, a) \in R$$

reflexiv: هنداريزی

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

symmetrisch: سیومتريک:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

antisymmetrisch: انتي سیومتريک:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

transitiv: ترانزیتيو يا پسې تلوني

:

توتال يا تول

$$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

total:

ورته يا اكويوالنت اړيکي : هنداريزي،سيومتريک اوترانزيتيو

نيم نظم : هنداريزي، او ترانزيتيو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

کومبيناټوريک Kombinatorik

د بينوم ضربيونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانين

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0$$

کمبينيشنونه

mit Reihenfolge

د پرلپسي لړۍ سره

ohne Reihenfolge

بي له پرلپسي لړۍ

	د تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
	بې له تکراره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

کمپلکس یا ګډوله اعدا یا – ګڼونه **komplexe Zahlen**

(مطلق) ارزښت Betrag

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ارګومنټ (د x ارزښتونه) Argument

$$\sin \varphi = y/r \quad \cos \varphi = x/r$$

او

قطبي بڼه Polarform:

$$x + iy = z = r e^{i\varphi}$$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
y	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$	اوپلر-موپورې
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{ z_2 ^2} z_1 \overline{z_2} = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$	وېش
$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n} e^{2\pi i k/n}$	رېښه
$ z - a = z - b $	منځنۍ ولاړه یا – عمود
$ z - a = s z - b \Leftrightarrow z - w = r$	ګردۍ – یا دایر همساوات
$w = \frac{1}{1-s^2} a - \frac{s^2}{1-s^2} b, \quad r = \frac{s}{ 1-s^2 } b-a $	

وکتورونه Vektoren

Betrag
(مطلق) ارزښت

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung
درېگودي نامساوات

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Skalarprodukt
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Vektorprodukt
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

Grassmann-Identität
د ګراسمن کټمټوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

Lagrange-Identität
د لاګرانژ کټمټوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Spatprodukt
شپات ضرب

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

ځیوکلنیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

zyklische Vertauschung:

Vektor in وکتورونه په
 $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
ONB
کي

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u}) \vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w}) \vec{w}$$

Polarkoordinaten
قطبیکو اور دیناتونہ

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Zylinderkoordinaten
تونہ یی یا استوانہ یی
کو اور دیناتونہ

$$x = \varrho \cos \varphi \quad \varrho \geq 0$$
$$y = \varrho \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$z = z \quad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten
غونڈوسکی یا غونڈاری
کو اور دیناتونہ

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta \quad r \geq 0$$
$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$z = r \cos \vartheta \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

(Autor: M. Reble)

Geraden und Ebenen (کریبی او سطحی (هوارې)

Gerade کریبہ

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$$

Parameterform: د پارامتر بنبہ

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = 0$$

Momentenform: مومتن یا لحضوبنبہ

Ebene سطحہ

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Parameterform: پارامتر بنبہ

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = h$$

Hesse-Normalform: د ہسپنورمال بنبہ

Abstand Punkt-
Gerade
واتن نکۓ- کریبہ

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand
windschiefer
واتن بادی مایل

$$d = \frac{|[(\vec{q} - \vec{p}), \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Geraden
کریته

Abstand Punkt-
Ebene
واتن تکی- سطحه

$$d = |\vec{p} \cdot \vec{n} - h| / |\vec{n}|$$

لیکونکی : میبیل

هگی (ایلیپس)، پارابول، های پارابل Ellipse , Parabel, Hyperbel

ایلیپسی یا هگی: دوه سوزون تکو (نقطه محراق) ته واتن

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت *konstant*

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2(\varphi)}$$

پارابول Parabel

یوه سوزون تکی $F = (0, f)$ او ورون کریږي $g : y = -f$ ته برابر واتن

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هایپارابول : دوه سوزون تکو ته کمښت یا تفریق

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

ليكونكى:م. ربل

(Autor: M. Reble)

Funktionen

توابع يا خيرونه

Exponentialfunktion

اكسپوننشل تابع

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen

لوگاريتمونه

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische

Funktionen

تريگونوميترىكي توابع

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
----------	---	-----------------------	---	------------	---

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Hyperbelfunktionen هایپارابول توابع

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

Folgen und Reihen پرلپسی اولری

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولی ته تلنه Konvergenz:

a_n د a پوله بلل کیږي:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

د پولی ته تلنی نظم P Konvergenz-Ordnung:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c |a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium

کوشي-قضيه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغريزوالي قضيه Monotonie-Kriterium: ر اېنډې همغريزې پرلپسې پولې ته تلونکې دي.

د پرتلي قضيه Vergleichs-Kriterium:

$$c_n \rightarrow a \Rightarrow b_n \rightarrow a \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \rightarrow a$$

او

ځانگړي پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte $(n \rightarrow \infty)$	$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^a$ $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad (a > 0)$ $\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$ $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$ $a^n n^k \rightarrow 0 \quad (a < 1)$	$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0 \quad (a > 1)$
--	--	---

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

د لپاره اړينه قضيه

په لړيوکې پولې ته تلنه
 $\sum b_n \quad |a_n| < b_n$
 د مايورانت قضيه او پولې ته ځي

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

د وېش قضيه

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$

د ريښې قضيه

$$a_n, b_n > 0, \quad a_n/b_n \rightarrow c > 0$$

د پرتله کونې قضيه

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه يا برابرپولي ته د تلني حالت لري

$$f(x) \quad a_n = f(n) \quad \text{د انتيگرال قضيه} \quad \text{او} \quad \text{همغريز لوېدونكي دي}$$

$$\sum_n a_n \Rightarrow \int_c^\infty f(x) dx \quad \text{له دې لاس ته راځي} \quad \text{او} \quad \text{همغه ډېولي ته تلني حالت لري.}$$

$$|a_n| \quad a_n \quad \text{د لايبنيخ Leibniz قضيه:} \quad \text{اترنيري كيږي او} \quad \text{همغريزه صفر پرلپسي ده.}$$

ځانگړې لړۍ

Spezielle Reihen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=0}^n x^k &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} &= e^x \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sin x \end{aligned} \right| \begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k &= \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} &= -\ln(1-x) \quad (|x| < 1) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} &= \cos x \end{aligned}$$

Harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leq 1$

هارموني لري د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي يا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

Differentiationدفرنشيشن

Linearität
کرنيزوالی

$$(r f(x) + s g(x))' = r f'(x) + s g'(x)$$

Produktregel
د ضرب قانون

$$(f g)' = f' g + f g'$$

Quotientenregel

د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettenregel

خُنخړي قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Umkehrfunktion

معكوس تابع (په خټ-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

$$f'(x) = f(x) (\ln f(x))', \quad f(x) > 0$$

Ableitung

لوگاریتمی مشتق

Leibniz-Regel

د لایبنيچ قانون

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$a^x (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x $	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x (x < 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x (x < 1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x (x > 1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x (x < 1)$	$1/(1-x^2)$		

Mittelwertsatz

منځارزېست جمله

$$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

تولیزه منځ ارزښت قضیه

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital

دل، پیتال قاعده

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{bei } \frac{0}{0} \text{ und } \frac{\infty}{\infty})$$

Satz von Taylor

د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوټن تفلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-
Regel
د لا یبنيڅ قانون

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + b'(t) f(b(t), t) - a'(t) f(a(t), t)$$

Extremum

افراطیت

$$f'(x) = 0$$

Notwendig : اړین

د مینیموم (مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا بر علاوه

$$f''(x) > 0 (< 0)$$

Wendepunkt

اوړونټکی

$$f''(x) = 0$$

: ; Notwendig
 $f'''(x) \neq 0$
پوره کېدونکي: ورزیات

(Autor: M. Reble)

Integration اینتېگرېشن

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

partielle
Integration
توټه اینتېگرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Substitution
بدلون یا تعویض

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy, \quad y = g(x), dy = g'(x) dx$$

wichtige
Substitutionen
غوره بدلونونه

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Subst.: } x = a \sin t$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\text{Subst.: } x = a \sinh t$$

$$R(\sin x, \cos x) \quad \text{Subst.: } t = \tan \frac{x}{2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

لومړنۍ توابع

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln x $
e^x	e^x	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

ٻڪي يا حجم

ڄرخيدوني بدن يا جسم: ڄرخون د x په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

ڄرخون د y په محور (د f همغريز چگيدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x)) dx$$

د ڄرخيدوني بدن پوښ يا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

د ليندي اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

د ترايڇ قانون

$$\int_a^b f(x) dx = h (f(a)/2 + f(a+h) + \dots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in (a, b)$$

(Autor: M. Reble)

بنسټيز جوړښتونه Grundlegende Strukturen

گروپونه

Assoziativgesetz قانون اسوخیاتیو

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

Neutrales Element بی اغیزه توکی $a \diamond e = e \diamond a = a$:

Inverses Element معکوستوکی

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل گروپ

Kommutativ کموئاتیو قانون $a \diamond b = b \diamond a$

بدن یا تن

$$(K, +)$$

د ابل گروپ دب ist abelsche Gruppe

$$(K \setminus \{0\}, \cdot)$$

د ابل گروپ دی ist abelsche Gruppe

Distributivgesetz دیستریبوتیو قانون

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Vektorraum وکتورفضا

$$(V, +)$$

په K د ابل گروپ

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

$$v \neq 0 \quad \langle v, v \rangle > 0$$

د لپاره

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

اورتوگونال بستیونه orthogonal Basis :

$$x = \sum_{k=1}^n c_k u_k, \quad c_k = \frac{\langle x, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورخ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|, \quad |u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0, \quad v \neq 0$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کربنیز تابع

Additivität : جمعوالی :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

هوموجینیته Homogenität :

بیلد او کیرن Bild und Kern (پښتويي: څیره یا عکس اوزری)

Bild

$$(L) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ له } L(v) = w \text{ بیلد یا عکس سره}\}$$

سره

کرن یا زری

$$\ker(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}$$

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \text{Bild}(L)$$

(Autor: M. Reble)

Matrizen ماتریکسونه

د ماتریکونو ضرب Matrix-Multiplikation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

کموټاتور Kommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

رانگ Rang: د کرښیز خپلواکو(تابعو) لیک یا متو تعداد یا گڼون

$$\text{Rang } A = \text{Rang } A^t$$

$$\text{Rang}(BAC) = \text{Rang}(A) \quad B, C \text{ invertierbar (معکوسور)},$$

شپور Spur: د دیاگونالیا دو هکونجټرو توکو زیاتون یا جمعه:

$$A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Spur

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$$

Spur

Spur

: hermitesch (symmetrisch) هر میتیک (سیمیک)

$$A^* = A \quad (A^t = A)$$

فقط حقیقیایگن رزبستونه، ONB (Orthonormalbasis) د ایگن وکتورونو څخه شتون لري

یونیتار (اورتوگونال)

$$A^* = A^{-1} \quad (A^t = A^{-1})$$

$$|\det A| = 1$$

متي ONB جوړوي

نورمال

normal

$$AA^* = A^*A$$

unitär diagonalisierbar یونیٹار دوہکونٹری (وتر) کیدونکی $\Leftrightarrow$

Drehmatrix
خړخونمتاریکس

$$\det A = 1 \text{ او } A \text{ ټوگونال}$$

خړخونمحور و ایکن ارزښت 1 ته ایگنوکتور دی

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1)$$

Drehwinkel: خړخونکونج

Spiegelung هندارونه

$$E : d^t x = 0 : \quad M = E - 2 \frac{d d^t}{d^t d}$$

Ebene سطحه

$$G : x = \lambda v : \quad M = 2 \frac{v v^t}{v^t v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren
ایگنوکتور ایکن ارزښت

$$Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \text{Spur } A, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

A^t ایکن ارزښت λ لري

$$A^{-1} \quad \text{ایگنوکتور } v \text{ او ایکن ارزښت } 1/\lambda \text{ لري}$$

A^n ایگنوکتور v او ایکن ارزښت λ^n لري

$$Q^{-1}v \quad \text{ایگنوکتور} \quad Q^{-1}AQ \quad \text{او ایکن ارزښت } \lambda \text{ لري}$$

دوه کوچتري کونه یا وتري کونه:

د ایگنارزښتونو لپاره : البر = هندسي . دېرواروالی

$$B^{-1}AB = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

د ایگنوکتورونو بنسټ

جوردان- بڼه:

بلوكونتري-يا دوهمكونجتری ماتریکس Blockdiagonalmatrix

$$J = B^{-1}AB = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

بلوكونه په دیاگونال ایگن ارزښت λ لري،

1 په پورته څنګیز دیاگونال کې

د ماتریکس توانونه Matrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \rightarrow 0$$

زینګولار ارزښت تجزیه کونه

$$U^*AV = \text{diag}(s_1, s_2, \dots), \quad U, V \text{ unitär}$$

زینګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k > 0 \quad k = \text{Rang } A$$

s_i د A^*A د ایگن ارزښت ریښې دي

د V متي د A^*A ایگن وکتورونه دي

د U متي د AA^* ایگن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

دیترمینانتونه او کرښیز مساوات سیستم

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

دیترمینانتونه

$$\det A^t = \det A, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}, \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو (لیکو) بدلېدنه مخ نڅښه بدلوي.

د یو متي دېرواره یوې بلي ته زیاتول دیترمینانت ته تغیر نه ورکوي

ودیزینه:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

لیکې پسي) k (و دسزینه د

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متي پسي) l و دیزینه د

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \text{صفر ایگن ارزښت دی}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \text{یواځنی حل نه لري}$$

$$A \Leftrightarrow \text{پوره رانگ نه لري}$$

$$A \Leftrightarrow \text{اینوارینت نه دی}$$

کرنیز مساوات سیستمونه: یا ټیک یو، هېڅ یا ناپای ډېر حلونه لري.

د گاوس ترانسفر میثونه: د کرنیز مساوات سیستم حلډېر د دوه مساواتو په بدلون تغیر نه خوري.

$$r \neq 0$$

د یوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زیاتون

د کر امرقاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, \dots, a_n)}$$

برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \rightarrow \min \Leftrightarrow A^t Ax = A^t b$$

(Autor: M. Reble)

کوادرېکونه Quadriken

شډله (په برخ) وېشنه

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0, \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right)$$

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A$$

مخروطي کوادرېکونه:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 1$$

منځتیکوادرېکونه:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 2$$

پارابولیکي کوادرېکونه:

$$Am = -b$$

منځتیکي

نور مالي بني

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(ډبل) مخروط

د مخروطي کوادرېکونو

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

غوځوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

منځای هاپیرابول

منځکي کواډریکونه

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

یو پوښیز هاپرا بلوید

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

ایلیپسویید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

هاپارابولیکه توته یا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

ایلیپتیکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

غبرگسطحي

پارابولیکیکواډریکونه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

ایلیپتیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

هاپریولیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$$

پارابولیکي توته یا حیولیندر

دفرنځیشن Differentiation

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$$

گرادینت

$$f' = J f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتریکس

$$H f = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \cdots & \partial_1 \partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f & \cdots & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسی ماتریکس

$$h(x) = g(y), y = f(x) : h'(x) = g'(y) f'(x)$$

خُنزیری قانون

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تیلور و دیزینه

$$\theta \in [0, 1] \quad R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + \theta h) h^\alpha$$

لپاره

د یوه

پاتی غری

نظم 2:

$$f(x+h) = f(x) + (\text{grad } f(x))^t h + \frac{1}{2} h^t H f(x) h + O(|h|^3)$$

تانجنتي سطحه

$$(u, v) \mapsto p(u, v) \quad f(x, y, z) = c$$

همداسي

سطحه

$$n = p_u \times p_v \quad n = \text{grad } f$$

همداسي

نور مالوکتور

$$\partial_v f(x) = (\text{grad } f)^t v$$

لوریز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$$

د x پسې حل

ایمائیخت تابع

$$\det f'(x_0) \neq 0 \quad f$$

وي.

معکوس تابع لوکال معکوس کیدونکی دی، که

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$$

لپاره .

د

$$\text{grad } f(x) = 0$$

کریټیکال ټکي

ایلیټیش: د H ټول ایگنوارزبستونه همغه برابره منځښته لريلوکال افراطیت $\rightarrow$

هپارابولیک: ایگن ارزبستونه شته د مختلفو منځښتوسره

زینټکی $\rightarrow$

پارابولیش: لوترلره یو ایگنارزبست صفر دی، او نور ټول ایگن ارزبستونه برابري منځښتي لري.

لاگرانژ ضرب

$$g_i(x) = 0$$

لاندې

 x_*

د فرعي شرایطو

افراطي ارزبستونه

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

$$\begin{aligned} g_i(x) &\geq 0 \\ \Rightarrow f'(x_*) &= \lambda^t g'(x_*), \quad \lambda^t g(x_*) = 0 \\ \lambda_i &\leq 0 \quad \lambda_i \geq 0 \\ &\text{ما كسيموم} \quad \text{مينيموم} \end{aligned}$$

(Autor: M. Reble)

اينت

اينتگرالونه Integration

بدلون

$$\int_U f(g(x)) |\det g'(x)| dx = \int_{g(U)} f(y) dy$$

دسطحي مسطح يا هدار توکي

$$dA = dx dy$$

کارتيزي کواورديناتونه:

$$dA = r dr d\varphi$$

قطبي کواوردينات :
د ډکي يا حجم توکي

$$dV = dx dy dz$$

کارتيزي کواورديناتونه :

د کړي انتگرال

$$\int_C f = \int_a^b f(c(t)) |c'(t)| dt$$

د سطحی توکي

$$dS = |s_u \times s_v| du dv$$

پارامترې کونه :

$$z(x, y) : dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

تابع :

$$dS = \varrho d\varphi dz$$

د توتي پوښ:

$$dS = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

د غونډاري سطحه:

Schwerpunkt
درونډتکی

$$x_S = \frac{1}{m} \int_V x \varrho(x) dV$$

Trägheitsmoment
بارتکی

$$I = \int_V \text{dist}(x, g)^2 \varrho(x) dV$$

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_V \text{grad } f = \int_{\partial V} f n^\circ$$

Greensche
Integralformeln
د گرین امتیگرال بڼه

$$\int_{\partial V} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \text{grad } f \cdot (\text{grad } g)^t + f \Delta g$$

$$\int_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \int_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

spezielle Differentialgleichungen

ځانگړي دفرنشل مساوات

د لومړۍ درجې کرښیز دفرنشل مساوات

Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x) y + q(x)$$

د P د بن سټابع او $y(x_0) = y_0 \Rightarrow c = y_0$ سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp(P(x) - P(x_0)), \quad y_p = \int_{x_0}^x \exp(P(x) - P(s)) q(s) ds$$

د برنولي دفرنشل مساوات

Bernoulli DGL

$$y' + p(x) y = q(x) y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x) u + q(x)$$

Separable DGL

سپارابلې دم

$$y' = p(x) g(y)$$

د متحولو بیلول

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x) dx$$

هوموجین دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

$$xz(x) = y(x)$$

بدلون

$$z' = \frac{1}{x} (f(z) - z)$$

تیک دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

د تیکوالي لپاره اړیموالی

$$p_y = q_x$$

$$p(x, y) + q(x, y) y' = 0$$

$$F(x, y) = c$$

ایمپلیسیت حل

$$F_y = q \quad F_x = p$$

سره حل

او د

ثابت ضریبونه

$$u'' + pu' + qu = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2$$

د کرکترېستیکې پولینوم صفر ځایونه

دوه حقیقي

$$u_h = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t)$$

یو ډبل

$$u_h = a \exp(\lambda t) + b t \exp(\lambda t)$$

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm \varrho i$$

سره

کنجوگیري کمپلکس له

$$u_h = \exp(\mu t) (a \cos(\varrho t) + b \sin(\varrho t))$$

کیدامېفتي هارموني لړځیدنې

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c \cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$

قوي :Dämpfung

$$r^2 = \omega_0^2$$

کریٹیکل :Dämpfung

$$r^2 < \omega_0^2$$

ضعیف : Dämpfung

$$u_p = \tilde{c} \cos(\omega t + \delta)$$

$$\tilde{c} = c / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سرہ

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - i 2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$

رہزونانٹ :

د پارتیکولار حلونو لپارہ خانگری اینوونی

spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j \rightarrow y_p = \sum_{j=0}^n d_j x^j$$

$$q(x) = c \exp(\lambda x), \lambda \neq p \rightarrow y_p = \frac{c}{\lambda - p} \exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c \exp(px) \rightarrow y_p = cx \exp(px)$$

$$q(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \rightarrow y_p = c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)$$

2. Ordnung . نظم

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j \rightarrow u_p = \sum_{j=0}^n u_j t^j$$

، که وي

$$p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \rightarrow u_p = c \exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که λ د کرکترستيکي پولینوم یو ساده یعنی یو (ډبل) صفرخای وي، باید c د ct (ct^2) په خای کښینول شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t) (a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t))$$

$$\rightarrow u_p = \exp(\alpha t) (c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t))$$

که $\alpha \pm i\omega$ د کرکترستيکي پولینوم صفرخایونه وي، باید u_p د t سره ضرب شي.

ټولیز:

د u_p ضریبونو ټاکل د په خای ایښونې له لارې

ټولیز حل دی $y = y_h + y_p$ همداسې

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کې د یوګونو حالتونو ایښوولو Superposition

Überlagerung د څپو یو په بل پرتوتل (فزیک، ماتماتیک)

(Autor: Joachim Wipper)

Allgemeine Theorie ټولیزه تیوري

د بیانو جمله

$$u' = f(t, u), u(t_0) = u_0$$

ناپېرېکيدون کی: پیل ارزښت پر اېلم لږ تر لږه یو ناپېرېکيدونکی مشتقور حل لري.
 لېشېخ ناپېرېکيدونکی نسبت u ته: د پیل ارزښت پر اېلم حل پراخنی دی.

پیکارد-ایترېشن Picard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u^{\ell}(\tau)) d\tau, \quad u^0(t) = u_0$$

د پیل شرایطو په واک کې والی

$$|v(t) - w(t)| \leq |v(t_0) - w(t_0)| \exp(L(t - t_0))$$

د L سره نسبت u ته. د لېشېخ - ثابتې
 د بني اړخ خپلواکوالی

$$u(t_0) = v(t_0) \quad u' = f(t, u), \quad v' = g(t, v)$$

سره

$$|u(t) - v(t)| \leq \varepsilon(t - t_0) \exp(L(t - t_0))$$

د

$$\varepsilon = \max_{(s,w) \in D} |f(s, w) - g(s, w)|$$

سره

د نظم ریدکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

$$v \frac{dv}{du} = f(u, v) \quad u' = v(u)$$

راکوي

بدلون

ستابيليتي

$$u' = f(u)$$

u_*

: کرېتیکل ټکی

$$v = u - u_* \quad v' = f'(u_*) v$$

سره

د

کرېتیکل والی:

ستابيليتي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_*, u(0) \approx u_* \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall \lambda_i$$

نه ستابيليتي

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$$

$f'(u_*)$

λ_i

ایگن رازښت

سره د

د

Lineare Systeme کرښيز سيستمونه

وړونسکي – دېترميټانټونه Wronski-Determinante

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det \Gamma)' = \text{Spur } A(t)(\det \Gamma), \quad \Gamma$$

بنسټيزه ماتريکس

د ثابتو وړيښ

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t) b(t) \quad u_p = \Gamma c$$

راکوي اېښوونه

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1} b(s) ds \right]$$

ثابت ضربيونه

$$u'(t) = A u(t)$$

که v ايگنوکتورويو ايگن ارزښت λ ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t) v$$

حل دی

کمپلکس ايگنارزښت و ايگنوکتور

$$\lambda = \sigma + i\rho$$

$$a + ib$$

ته دی

$$\text{Re}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \cos(\rho t) - b \sin(\rho t))$$

او

$$\text{Im}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \sin(\rho t) + b \cos(\rho t))$$

حقيقي حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \quad u = Qv \quad Q^{-1}AQ = J$$

راکوي، چې سوکټيسيو کمپوننت ډوله

دا سيستم

بدلون

حل کیدی شي.

$$v'_i = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

د دوه کونجټري يا وتر J سره.

سره يوځای شوی يا سره نڅلولی سيستم

اويلر-دیرنځيالمساوات Euler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \dots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \quad t = e^s, \quad v(s) = u(t)$$

لپاره کرښيز دفرنځيال مساوات راکوي د ثابت ضربيونو سره

د

بدلون

ستابيليتي

$$u' = Au$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall \lambda_i$$

ستابيل :

$$\det A > 0 \wedge \operatorname{Spur} < 0 \quad (2 \times 2)$$

د - ماتريکس لپاره:

$$u(t)$$

بپاځيزه يا ناپيلی ستابيل: بنده او پيل ارزښت شتون لري.

$$|u(t)|$$

د کوم لپاره چې د 0 په لور پولی ته نه ځي.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = \infty \Leftarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$$

اېستابيل:

Laplace-Transformation لاپلاس- ترانسفورميشن

$U = \mathcal{L}u, \quad U(s) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-st) dt$	لاپلاس- ترانسفورميشن
$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} U(s) \exp(st) ds$	معکوس- ترانسفورميشن

$au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$	کرنشیزوالی
$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$ $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$	دفرنخیشن
$\int_0^t u(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty U(\tau) d\tau$	انتیگریشن
$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad u(t) = 0 \text{ für } t < 0$ $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$	راکبنه
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \int_0^T u(t) \exp(-st) dt$	T - پریودیکی تابع
$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} U(s/a)$	سکاله کونه
$(u \star v)(t) = \int_0^t u(\tau) v(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) V(s)$	- غیرگونه

$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$	خانگری توابع
1	$1/s$	t^n	$n!/s^{n+1}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	

پیل ارزینت پرابلم $U/\Phi - u(0) = F$ د $\Phi(s) = 1/(s+p)$ سره
۱. درجه

$u' + pu = f, p \in \mathbb{R}$ د په څټ ترانسفورمیشن وروسته د $\varphi = e^{-pt}$ سره
۲. درجه

پیل ارزینت پرابلم
۲. درجه

Anfangswertproblem 1. Ordnung $u' + pu = f, p \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s + p)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$
Anfangswertproblem 2. Ordnung $u'' + pu' + qu = f, p, q \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - (s + p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$ $\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$ λ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$

Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-ليوويل - پرابلم

د ځان سره اډيونگيري

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشل اوپراتور

ترانفروميټن په ځان سره اډيونگيري بڼې

$$au'' + bu' + cu = f \quad a(x) \neq 0$$

$$-(pu')' + qu = g \quad \text{د لاندې سره} \quad \text{صرب له سره راکوي} \quad -p/a$$

$$p(x) = \exp \left(\int \frac{b(x)}{a(x)} dx \right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x).$$

آیگنارزبنت پرابلم

$$L\psi = \lambda \varrho \psi$$

د ژئ شرطونو سره

$$\alpha_0 \psi(a) + \alpha_1 \psi'(a) = 0, \beta_0 \psi(b) + \beta_1 \psi'(b) = 0$$

ψ ایکن تابع بلل کیری، ایکن ارزینت

پخپله ادیونگیری ایکن ارزینت پر ابلمونه
ایکن ارزینونه حقیقی دی
همغیا برابر ایگا ارزینت ته ایگت وابع کرینیز بلواک دی
مختلفو ایکن ارزینتونو ته ایکن توابع^q -اورتوگونال دی
ایکن ارزینتونه په کلکخ همغریزه پرلپسی
 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

جوری

Differentiation دفرنخیشن

گرادینت

$$\text{grad } U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^t$$

$$\text{grad } \vec{F} = (\text{grad } F_x, \text{grad } F_y, \text{grad } F_z)^t$$

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

دیورگنت (پولی ته نه تلنه)

خرخون Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{rot } \vec{F} \right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

$$\text{rot } \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

په همدې توگه

لاپلاس - اوپراتور Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$$

شمیرقوانین تول اوپراتورونه کرینیز دی

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\operatorname{grad}(U V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\operatorname{grad} \vec{F})^t \vec{G} + (\operatorname{grad} \vec{G})^t \vec{F}$$

$$\operatorname{div}(U \vec{F}) = U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

$$\operatorname{rot}(U \vec{F}) = U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$$

توتہ- یا استوانہ کواوردیناتونہ (پروتولار ارزبنتونہ)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho} \partial_{\varrho}(\varrho \partial_{\varrho} \Phi) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_{\varphi}^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \partial_{\varrho}(\varrho \Psi_{\varrho}) + \frac{1}{\varrho} \partial_{\varphi} \Psi_{\varphi} + \partial_z \Psi_z$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = & \left(\frac{1}{\varrho} \partial_{\varphi} \Psi_z - \partial_z \Psi_{\varphi} \right) \vec{e}_{\varrho} + (\partial_z \Psi_{\varrho} - \partial_{\varrho} \Psi_z) \vec{e}_{\varphi} \\ & + \frac{1}{\varrho} (\partial_{\varrho}(\varrho \Psi_{\varphi}) - \partial_{\varphi} \Psi_{\varrho}) \vec{e}_z \end{aligned}$$

اکسیال سیمتریک ورشوگانط یا پتی Axialsymmetrische Felder

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Phi \text{ همداسی } \Psi \text{ د } \text{په واک کې دي}$$

$$\operatorname{grad} \Phi = \partial_{\varrho} \Phi \vec{e}_{\varrho}$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\varrho} \partial_{\varrho}(\varrho \partial_{\varrho} \Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi \vec{e}_{\varrho}) = \frac{1}{\varrho} \partial_{\varrho}(\varrho \Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi \vec{e}_{\varrho}) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\Psi \vec{e}_{\varphi}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\Psi \vec{e}_{\varphi}) = \frac{1}{\varrho} \partial_{\varrho}(\varrho \Psi) \vec{e}_z$$

د غونډوسکي يا کري کواوردیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_r \vec{e}_r + \Psi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{grad } U = \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi)$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\vartheta) \vec{e}_r \\ & + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi \Psi_r - \sin \vartheta \partial_r (r \Psi_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\ & + \frac{1}{r} (\partial_r (r \Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta \Psi_r) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

رادىال سىمىترىكى ورشوكانى Radialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

په واک کې دي Φ همداسې Ψ د فقط د

$$\text{grad } \Phi = \partial_r \Phi \vec{e}_r$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi)$$

$$\text{div}(\Psi \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi)$$

$$\text{rot}(\Psi \vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

انتېگرالونه Integration

پارامېترىک کونه

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t)$$

Kurve کړه

$$S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$$

Fläche سطحه

د کړي انتیگرال Kurvenintegral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

د کار انتیگرال Arbeitsintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

د سطحی انیگرال

Flächenintegral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Flussintegral

جریان انتیگرال

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Fluss durch
Funktionsgraph

جریان له
فنکشن گراف څخه

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy, \quad z = f(x, y)$$

Fluss durch
Zylindermantel

جریان له توی
پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho dz d\varphi$$

$$\varrho = \varrho(z) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_{\varrho} \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi$$

$$2\pi a(z_{\max} - z_{\min}) f(a) \quad \vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_{\varrho} \quad \varrho = a$$

خانگری دلپاره د سره

Fluss durch
Kugeloberfläch
e

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

mit $r = a$

$$4\pi a^2 f(a) \quad \vec{F} = f(r) \vec{e}_r$$

speziell für

vektorielle

Kurvenintegrale وکتوري
گري انتیگرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| \, dt = \left(\int_C F_x, \int_C F_y, \int_C F_z \right)^t$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}'(t) \, dt = \left(\begin{array}{l} \int_C (F_y \, dz - F_z \, dy) \\ \int_C (F_z \, dx - F_x \, dz) \\ \int_C (F_x \, dy - F_y \, dx) \end{array} \right)$$

vektorielle

Flächenintegrale

وکتوري سطحي انتیگرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left(\iint_S F_x \, dS, \iint_S F_y \, dS, \iint_S F_z \, dS \right)^t$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}) \vec{n}^\circ \, dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{n}^\circ \, dS$$

د گاوس جمله

Satz von
Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} U dV = \iint_S U d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F} dV = - \iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

د گري Griesche انتیگرال فرمولونه

Griesche
Integralformel
n

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W) dV$$

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) dV$$

د ستوکس جمله

Satz von
Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$- \iint_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int_C U d\vec{r}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

Skalares Potential

$$\text{grad } U = \vec{F}$$

د U سکالر ورشو سره

د شتون له پاره اړین شرطونه

$$\text{notwendige Bedingung für Existenz: } \text{rot } \vec{F} = \vec{0},$$

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کیدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten D

C خوبه، په K له χ د پور χ لیدونکي لار

C ein beliebiger, in D von A nach B verlaufender Weg:

د انټیګرال د لارې
خپلواکوالی

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit

des Integrals

Vektorpotential

Vektorfeld $\vec{A}$ mit $\text{rot } \vec{A} = \vec{F}$ وکتور ورشو یا پټی

د شتون له پاره اړین شرطونه

$$\text{notwendige Bedingung für Existenz: } \text{div } \vec{F} = 0,$$

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کیدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

بنسټیز توابع Grundfunktionen

]

Komplexe
Funktion گډوله توابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy = re^{i\varphi}$$

Möbius-
Transformation

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

کرنهه همداسه دایره (گردی) په کرنه همداسه په گردیو تنظیمیری

$(z_i, w_i) :$

Festlegung durch drei Punkte
د درې ټکو له لارې کره کیدنه

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Komplexer
Logarithmus

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp(p(\varphi + 2\pi j)i/q), \quad j = 0, \dots, q-1$$

komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann

f

komplex differenzierbar:

Differentialgleichungen

$$f'(z) = f_x(z) = -if_y(z) \Leftrightarrow u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische

$\Delta u = 0$ auf D einfach zusammenhängend

Funktion

$$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0 \text{ und } f = u + iv \text{ komplex differenzierbar}$$

Isotropie

$$z \mapsto w(z)$$

Abbildung

und Winkeltreue

$\arg f'(z)$
dreht Richtungen um Winkel

$|f'(z)|$
streckt Längen um Faktor

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare
Abbildungen
خیره ونی یا تابعگانی

خیره ونه یا تابع Abbildung	له مخه خیره یا – تابع Urbild	Bildخیره یا تابع
$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
$w = \frac{z+1}{iz-i}$ $\Leftrightarrow z = \frac{iw+1}{iw-1}$	Einheitskreisscheibe یونگردي کتره یا تونه $ z < 1$	obere Halbebene پورتنی نیمهواره $\operatorname{Im} w > 0$
$w = e^z$ $\Leftrightarrow z = \operatorname{Ln} w$	Streifen $0 < \operatorname{Im} z < \gamma$ کربني	Sektorبرخه $0 < \arg w < \gamma$

Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f \, dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) \, dt, \quad C : t \mapsto z(t), \, t \in [a, b]$$

Stammfunktion

f
im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender
Weg von z_0 nach z_1 :

$$\int_C f' dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität: $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$

Pol n -ter Ordnung: $|z - a|^{n-1}|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow a$,
 $(z - a)^n f(z)$ beschränkt für $z \rightarrow a$

wesentliche Singularität: $(z - a)^n f(z)$ für kein n beschränkt

Cauchys Theorem

f analytisch in D bis auf endlich viele schwache Singularitäten,
 $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Cauchysche
Integralformel

f analytisch, $n(C, z)$ Umlaufzahl von C bzgl. z :

$$n(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Integralformel für

Ableitungen

f analytisch, $n(C, z) = 1$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

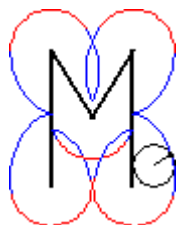
Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Residuenkalkül

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

Residuum

f
analytisch in $D \setminus \{a\},$

$$C \subset D$$

entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

einfache Polstelle: $\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$

Pol n -ter Ordnung:

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z) \right)$$

Residuensatz

C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D , a_j Singularitäten von f in D :

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische

Integranden

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt$$

geht mit der Substitution $z = e^{it}$ über in

$$\int_{|z|=1} f(z) dz, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz}$$

Rationale

Integranden

f
rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a f$$

Transzendente

Integranden

f
rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a (f(z) e^{i\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Algebraische

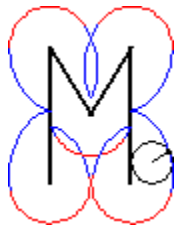
Integranden

f
rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_0^{\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}_a (f(z) z^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1$$

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#)[\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Potenzreihen

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#)[\[Seitenübersicht\]](#)

Taylor-
Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

f analytisch in $D : |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

Konvergenzradius r : Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in $D : r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten, r_1, r_2 :
Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a

$$r_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} |c_n|^{-1/n} \quad r_2 = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Differentialgleichungen

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

ist bei a regulär, wenn

q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von a sind.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n$$

Entwicklung:

$$u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0), \quad n \geq 2$$

Rekursion:

mit durch Anfangsbedingungen $u_0 = u(a)$ und $u_1 = u'(a)$ eindeutig
bestimmten Koeffizienten u_n

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung
 $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$
 hat bei a einen regulären
 $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$
 singulären Punkt, wenn und
 $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$

Charakteristische Gleichung:
 $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

Entwicklung:
 $u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-a)^n, u_0 \neq 0$

Rekursion:
 $\varphi(\lambda+n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0), n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit
 größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische
 Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n, \quad (t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$$

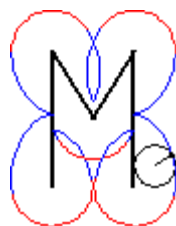
Bessel-
 Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Fourier-Analysis

Fourier-Reihen

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

Reelle Fourier-
Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1$$

Komplexe Fourier-
Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

شمير بدلون د فوريي
ضريبونو له پاره

Umrechnungsformel
n für Fourier-
Koeffizienten

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$$

$$c_0 = a_0/2, \quad c_k = (a_k - ib_k)/2, \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$$

سيموترSymmetrien

f
gerade:

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad c_k = c_{-k}$$

f

ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سكالار
ضرب Skalarprodukt
نورم, Norm

$$\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f \rangle_{2\pi}$$

Fourier-
Projektion فوريي
بريوستون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \langle f, e^{ikt} \rangle_{2\pi} e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)} f(t) dt$$

Konvergenzrate د
پولي ته تلني كچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \leq (n+1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزيول-ورته
والی Parseval-
Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Diskrete Fourier-Transformation

د فوريي
ماتريكسونه Fourier
-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0 \cdot 0} & \dots & w_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1) \cdot 0} & \dots & w_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi i/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n} W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Diskrete
Fourier-
Transformation

$$f = W_n c \Leftrightarrow f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k, \quad j = 0, \dots, n-1$$

Inverse diskrete
Fourier-
Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj} f_j, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Fourier-Transformation

Fourier-
Transformation

$$\widehat{f} = \mathcal{F}f, \quad \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

Inverse Fourier-
Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy$$

Transformationsregeln د ترانسفورميشن لاري يا قوانين

Linearität کړښتوالی

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$$

Symmetrie سيومتري

$$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\widehat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia y} \widehat{f}(y)$$

$$e^{iax} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (iy)^n \widehat{f}(y)$$

$$(-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \widehat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y-\tau)\widehat{g}(\tau)d\tau$$

Spezielle
Funktionen

f	$\widehat{f}$
1	$2\pi\delta(y)$
$\begin{matrix} x \in [-a, a], & 0 \\ \text{1 f\"ur} & \text{sonst} \end{matrix}$	$2a \operatorname{sinc}(ay)$
$\operatorname{sign}(x)$	$2/(iy)$
$e^{-a x }$	$2a/(a^2 + y^2)$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a} e^{-y^2/(4a)}$

Satz
von Plancherel

$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}$

Poisson-
Summationsformel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs
Unsch\"arfeprinzip

$$\|xf\| \|y\widehat{f}\| \geq \frac{1}{2} \|f\| \|\widehat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz

Hat f Bandbreite h , d.h. $\widehat{f}(y) = 0$ f\"ur $|y| > h$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j\pi/h) \operatorname{sinc}(hx - j\pi)$$

Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-
Transformation

$$\widehat{f} = \mathcal{F}f, \quad \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy^t x} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

Inverse Fourier-
Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{iy^t x} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Transformationsregeln

Linearität

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$$

Symmetrie

$$\widehat{\widehat{f}}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$$

Transformation

$$f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} |\det(A)|^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^t y), \quad \det(A) \neq 0$$

Verschiebung

$$f(x - v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-iv^t y) \widehat{f}(y)$$

$$\exp(iv^t x) f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y - v)$$

Differentiation

$$\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle
Funktionen

f	$\widehat{f}$
1 für $x \in [-a, a]^n$, 0 sonst	$(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1) \cdots \operatorname{sinc}(ay_n)$
$\exp(- x)$	$\frac{2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2)}{(1+ y ^2)^{(n+1)/2}}$
$\exp(- x ^2/2)$	$(2\pi)^{n/2} e^{- y ^2/2}$

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2} \|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوی او ناچاپ ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to

general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .

Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,

University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ،

همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې

ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د

اختمالوالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابر وړ (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،، د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،، د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،،

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوي.

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړۍ ټوک

۲ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج

څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شمیرنه

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي).

د اوم څخه تر دولسم ټولگي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولگي کتاب په درې، چې دا به هم زرتزره ن ج ته پورته شي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library