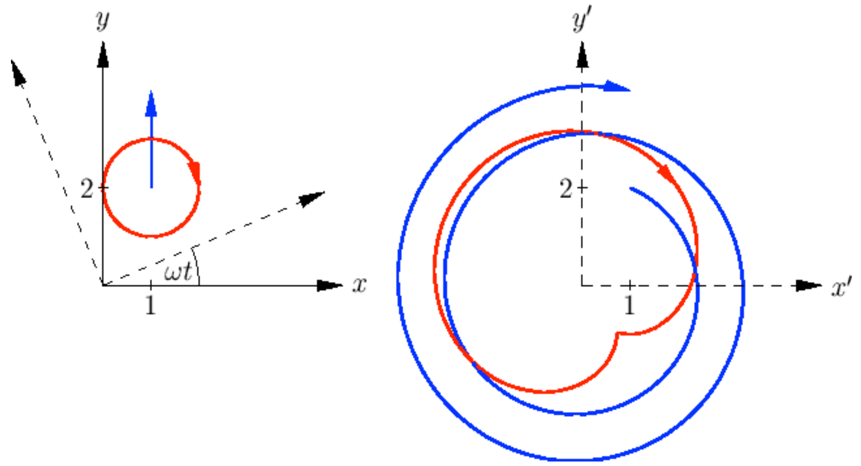
وکتورشمیرنه



Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) او هوا(فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات ۲

د غونداري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنیمیو غوڅټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرنې قوانین ۱۹

له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ... ۱۹

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله ۲۲

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب ۳۰

د لورنڅ زور Lorentzkraft ۳۴

د ایپسیلون – تنزور ۳۷

شپات ضرب ۳۸

د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه ۳۹

د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه ۴۱

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ۴۲

ټکي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټکي – بڼه ۴۵

لحضوي – یا سترګورپ بڼه ۴۶

د ټکي –کربښي واټن ۴۸

د دوه کربښو واټن ۵۱

د الوتني لارې ۵۳

د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه ۵۵

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

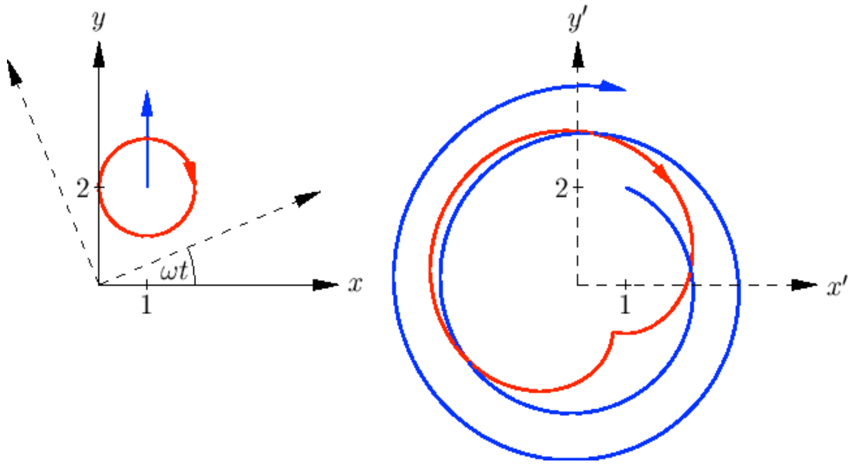
د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي ورانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناویګیشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال ځخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخونې کواودینات ۲

د غونداري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنیمیو غوڅټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرنې قوانین ۱۹

له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ... **۱۹**

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله ۲۲

اورتوگونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب ۳۰

د لورنڅ زور Lorentzkraft ۳۴

د ایپسیلون – تنزور ۳۷

شپاټ ضرب ۳۸

د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه ۳۹

د غبرگسطحیز یا ذوذنقي خویونه ۴۱

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ۴۲

ټکي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټکي – بڼه ۴۵

لحضوي – یا سترگورپ بڼه ۴۶

د ټکي –کربښي واټن ۴۸

د دوه کربښو واټن ۵۱

د الوتنې لارې ۵۳

د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه ۵۵

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

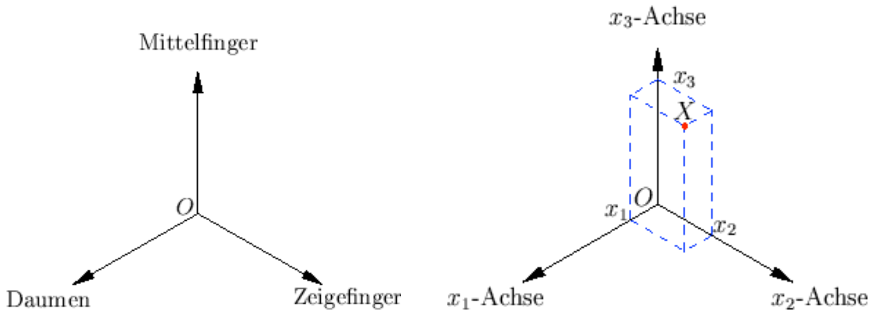
د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناویګیشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې کارتیزي - یا پروت ولاړسیستم

یو فضایې کواوردیناتسیستم له درې په سرچینیز ټکي O کې یو په بل ولاړو ګڼونکرښو(محورونو) څخه جوړ دی، چې لوریزوالی یې د ښیرې له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.



یو ټکی X د کواوردیناتو x_i سره په نخښه شوی په محورونو د پرېوستون ارزښت سره سم کره کیدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ایندکس یا پیژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

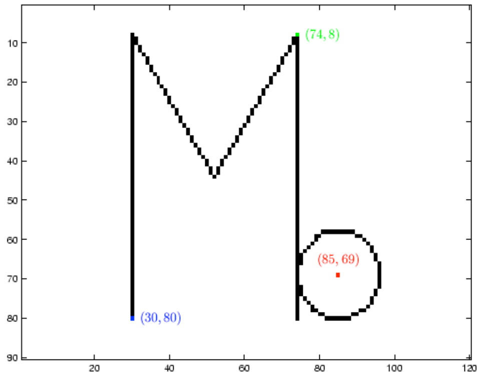
کواوردینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګڼونمخور د x ,-y- او z - محور په

نخښه کیږي.

په ورته توګه د هوارې کارتیزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات Pixelkoordinaten

په یوه ګرافیکي کړکۍ کې شیان د پیکسل- چوخونوکواودینات (Pixel خورا کوچني ځیره شوي ټکي) له لارې ورکول کیږي.. دا انځور شوی ولاړګوډیز یوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردینات پروت دی د ځیرې ګوډ په ګوته کوي .

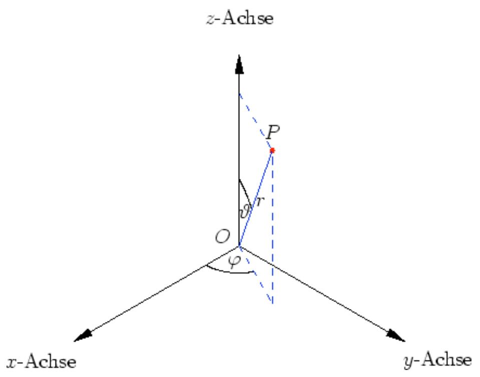


د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچیني سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پربوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځوربدلی شي. کونج φ ټیک تر د 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتځلي پورې ټاکلکيدی شي. د ستاندارد په څير په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کيدی شي يا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځايونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نيونې سره سم د ارکوستانجنت يوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

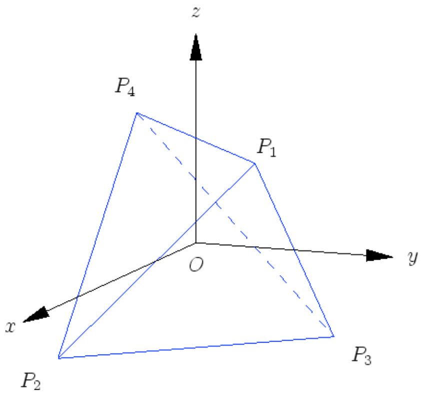
ليکونکي:اپ، هوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1),\quad P_2 = (1,-1,-1),\quad P_3 = (-1,1,-1),\quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيتراايدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د درونډ ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r,ϑ,φ) کې کوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

$$P_1' = (\sqrt{3},\psi,\pi/4),\qquad P_2' = (\sqrt{3},\pi-\psi,-\pi/4),$$
$$P_3' = (\sqrt{3},\pi-\psi,3\pi/4),\qquad P_4' = (\sqrt{3},\psi,-3\pi/4)\,,$$

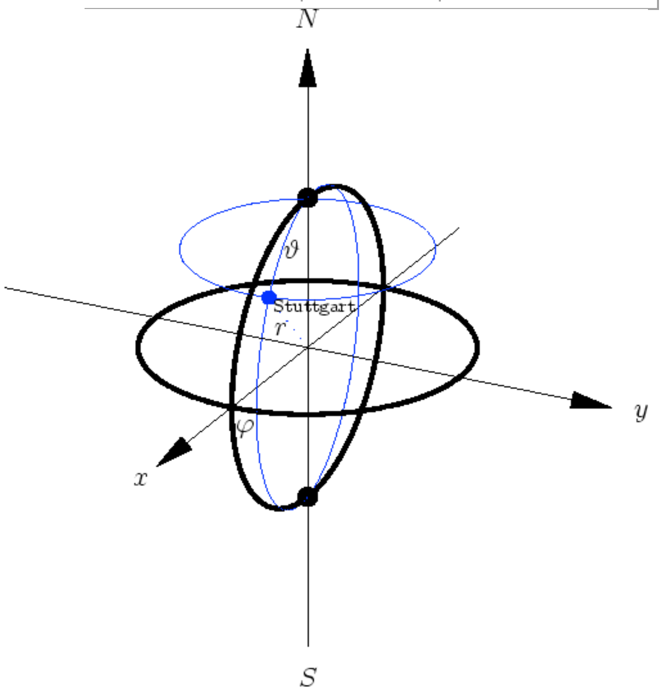
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجي (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکي) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يواځې بل ډول کونجورشو ګاڼي (کونجساحې) کارول کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ختيز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots \pi$
لويديز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots -\pi$
شمالي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$
جنوبي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$



په خيره کې اېکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوږ کبنل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجې شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجې جنوبي سور) هم په نخښنه شوي دي. شنه اوږدي – او سورګردی د ستوټګارت(۹۰ درحې ختيزې اوږدوالی ، ۴۹ درجې جنوبي سور) تېرېږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختيز نيم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لويديز نيمغونډاری په نخښنه کوي

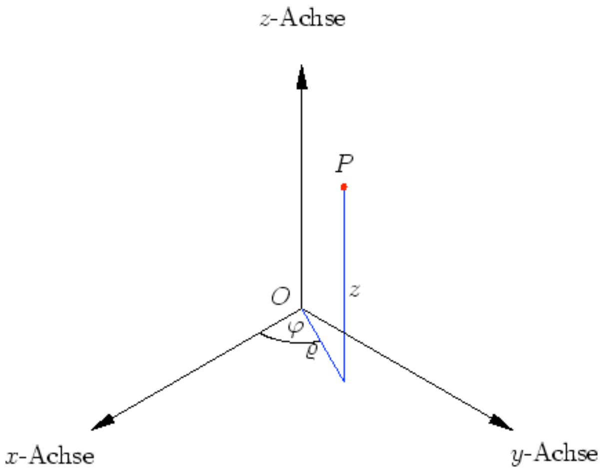
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -محور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ ټیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسې

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چي د x او y د مخنخښي پوري اړونده د ارکوستانجنت يوه څانګه ټاکل کيږي.

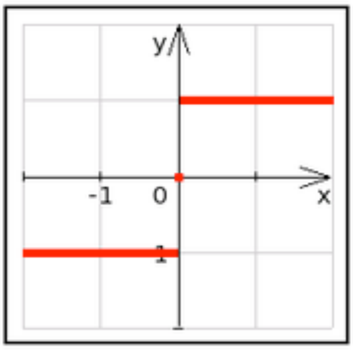
د اصليځانګي ــکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندې کي Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کيږي

$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \mathrm{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$	د $x > 0,$ لپاره د $x = 0$ لپاره د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره

سيګنوم (لاتين : Signum نخښه) فنکشن په رييل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخښو ګراف



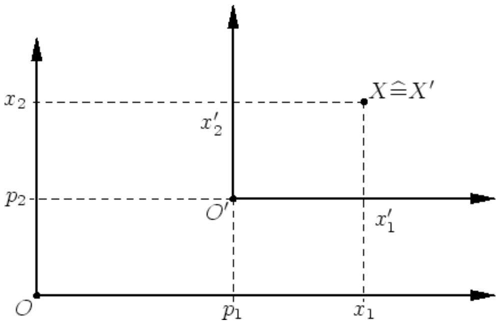
د رييل ګنونو څيره ونه ده په ډېرى {-1,0,1} کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) .$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د یوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره څغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

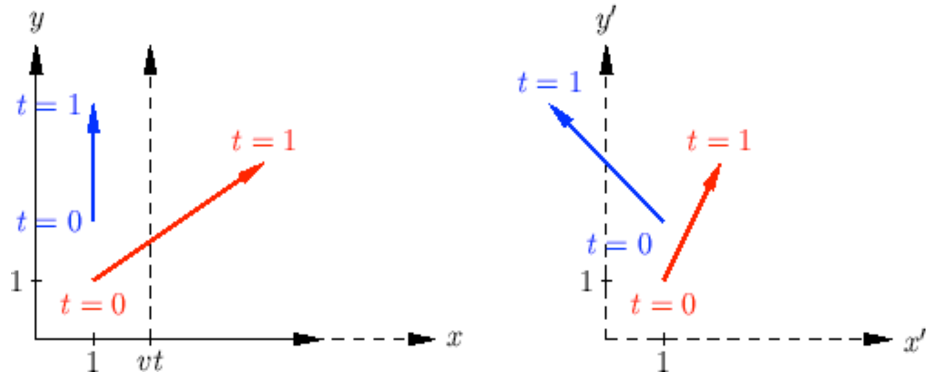
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y .$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګي په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چي د یوه وخت په یوون(واحد) کي د $v = 2$
لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)\,.$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5};$$

له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

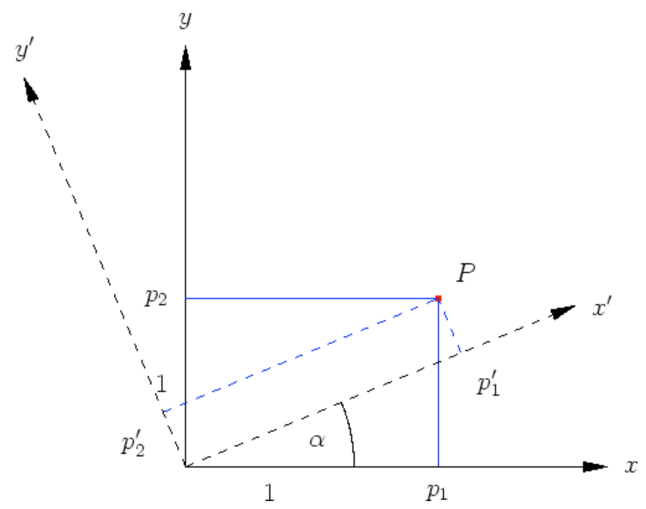
لیکونکي: اپپ، هولیګ

څرخون Rotation

د xy -هوارې یا سطحي څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$
کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندې سره سم

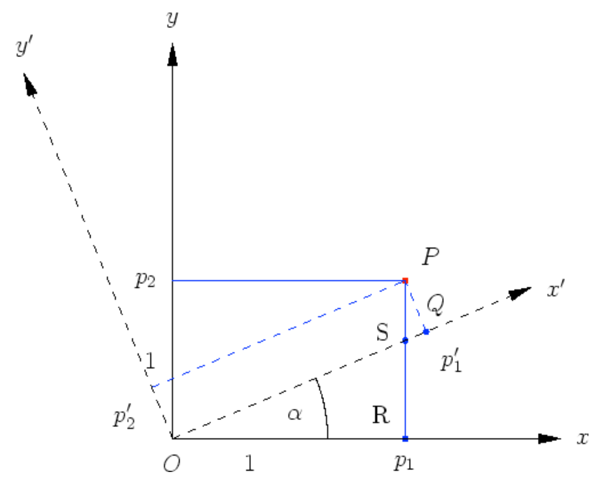
$$p'_1 = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p'_2 = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p'_3 = p_3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هولیګ



لومړی پیژنو، چې

$$\sphericalangle(S, P, Q) = \alpha\,,$$

داپه دي معنا چي ولاړکونجیز درېګودی(مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي درېګوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha \, .$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha \, |\overline{PS}| = \cos\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha \, p_2 - \sin\alpha \, p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1 / \cos\alpha + \sin\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} p_1 + \sin\alpha \, p_2$$

ليکونکی: اپپ، هولير

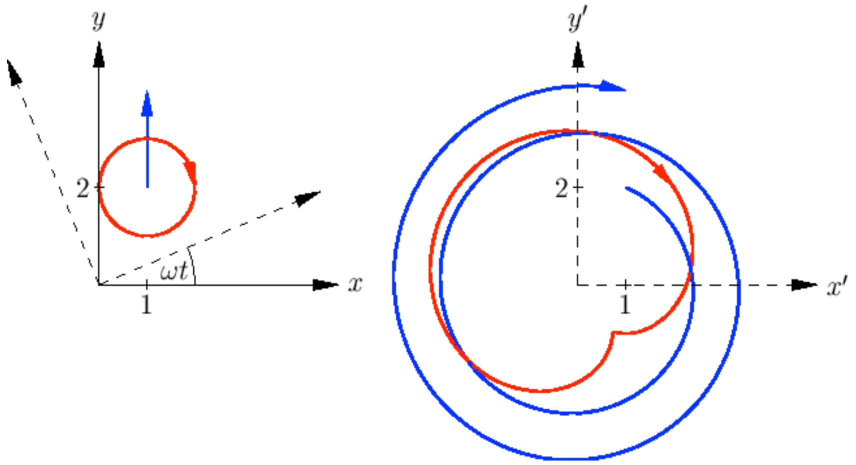
څرخنده يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ د د سيده کرښيز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$G: \quad (x,y) = (1,\, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x,y) = (1 + \cos(t),\, 2 - \sin(t))\,.$$

ښي لور ته دواړه منحني یا کرې دیوهکونج   سره څرخیدوني نسبي سیستم   انځوروي،
دا په دې معنا چې داسې لکه په یوه کاروسل (هغه څرخیدوني شیان دي، چې کسان په
کې ګرځي) کې یوه کتونکي ته برېښي.



د کواودیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

یوه شپیرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضریب د ځګیدونکې t سره
لوېږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه   وخت انتروال $0 \le t \le 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودینات ځخه د $\omega = 1$ سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

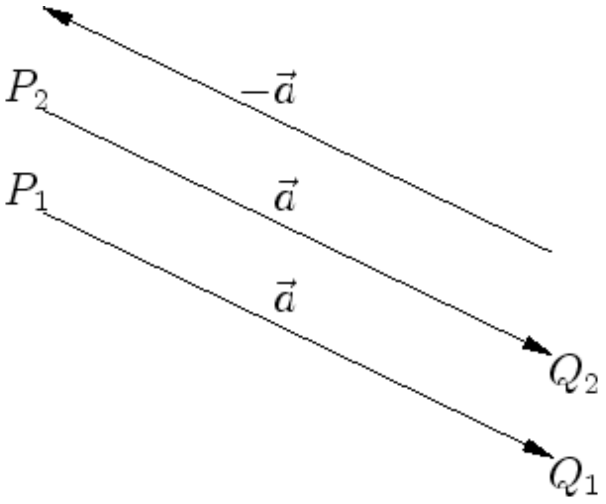
په ځرخون سیستم کې د خوزښتمنحني بڼه نه پسي ترلې پېژندل کیږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په ځرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکې چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. یا ښایي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د ځیرې څخه چې کتل کیږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانکې انځورونه نسبت و سرچیني ته ځای وکتور بلل کیږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

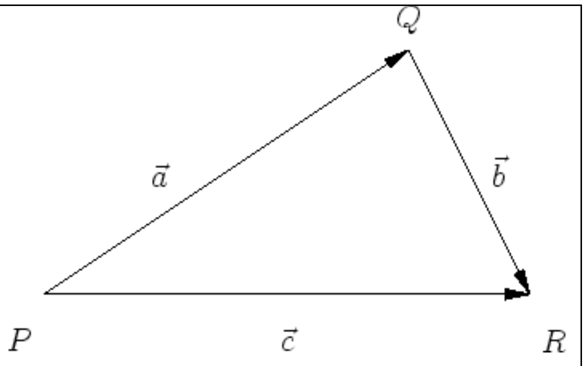
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کيدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په ځېر و
شميرل شي. بالاخره د

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زياتون):

د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو يو و بل ته يا يو بل پسې راکښنه ده $$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$$	

د کواوردیناتونو يا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

د

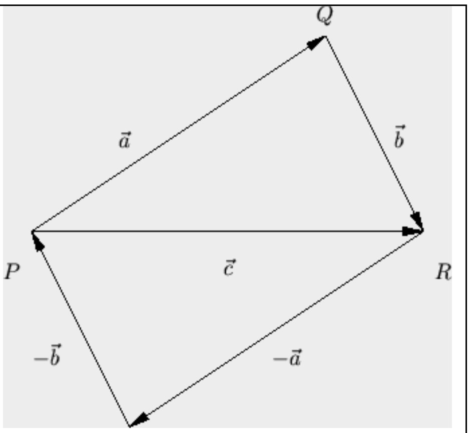
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په ځت(برعکس) راکښنه $\vec{a}-$ په نخښه کيږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

(ليکونکي: هوليګ، موخ)

د ټکو $P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$ لپاره وکتورونه $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ او $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$ شميرلکيږي	

لکه په ځيره کې چې کښل شوي د کواورد يناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$=$ $-\vec{c}$

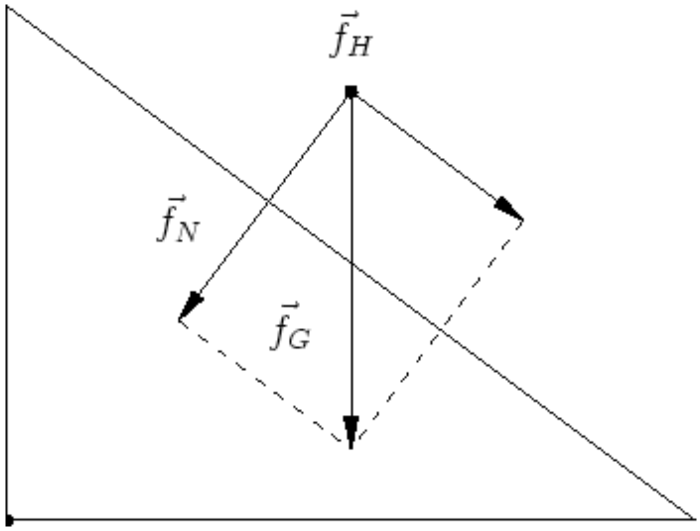
(ليکونکي: هوليک، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي(د زور ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \, .$$

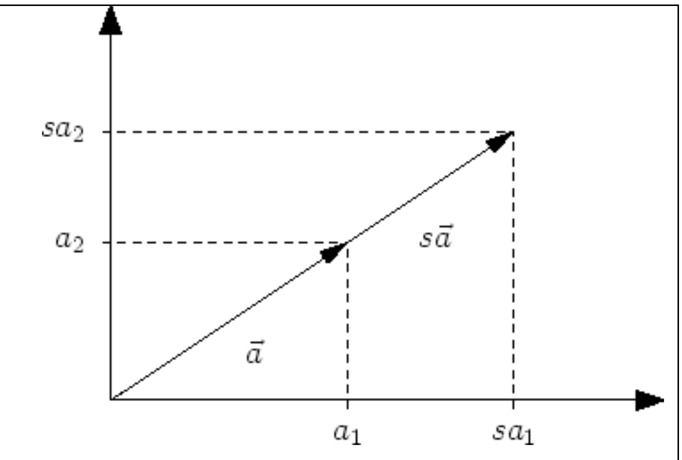
مايلې سطحې سره عمود عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيړه بيزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



(ليکونکي: هوليک، موخ)

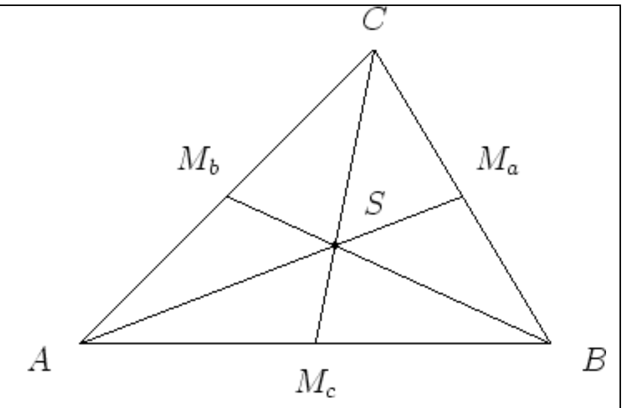
سکالار ضرب :

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور $s\vec{a}$ یو s - واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې $s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$ په ځانګې توګه $0\vec{a} = \vec{0}$ دی.	

(لیکونکي هولیک، موخ)

د اړخنیمیو غوځېکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

د یوه درېګودي(مثلث) اړخنیمی یو بل په دروندتکي(مرکزالثقل) S کې سره غوځوي. $\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.	

د دې د بنوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمی په تکو لیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right), \quad t \in [0,1]\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{AM_a}$ لپاره دی، نو دروند ټکی په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(مطلق) ارزښت

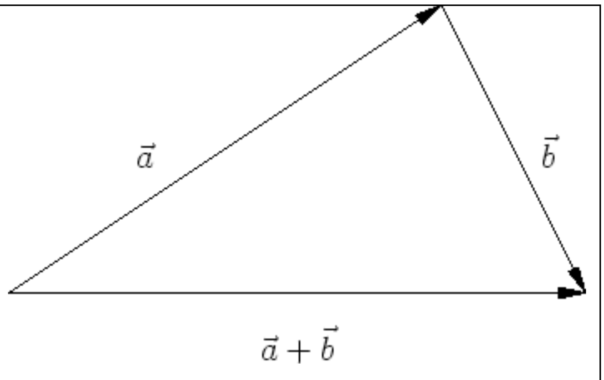
د $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.$$

په ځانګې توګه $|s\vec{a}|=|s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کیږي.

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات :

د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	معناچې $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- Kommutativgesetzکموتاتيو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Assoziativgesetz:اسوڅياتيو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Distributivgesetz:دېستريبوتيوقانون

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

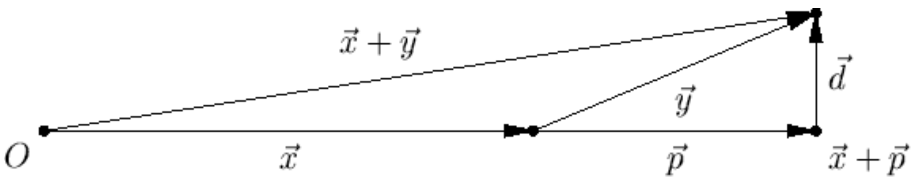
(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښایي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکي چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښایي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتي. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښایو، نو ټولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته او دریفت څخه

د شمال لور ته

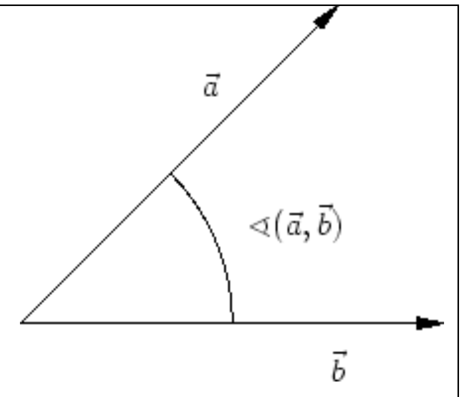
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليګ، اېپ)

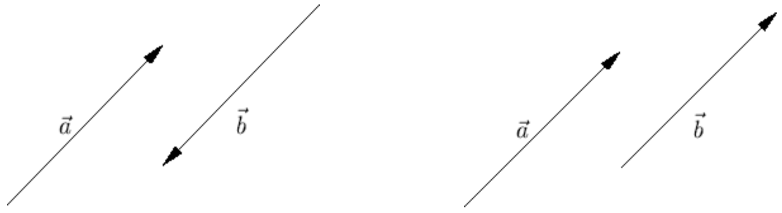
کونج يا زاويه :

د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښنه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.	

دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ دربېدلی.

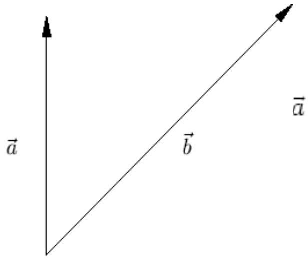
(ليکونکي هوليګ، موخ)

لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.

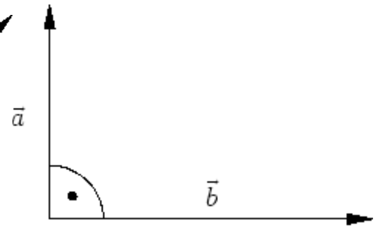


$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$ $\qquad$ $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$

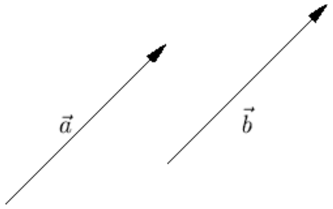
(c) ketabton.com: The Digital Library



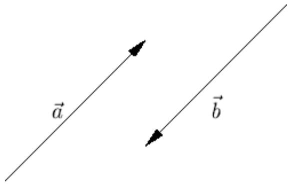
$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$



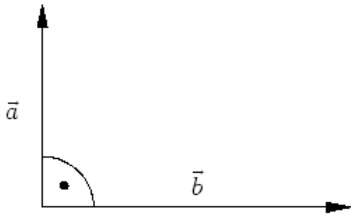
$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$



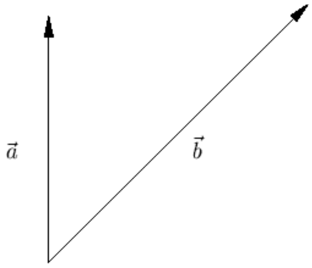
$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$



$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$

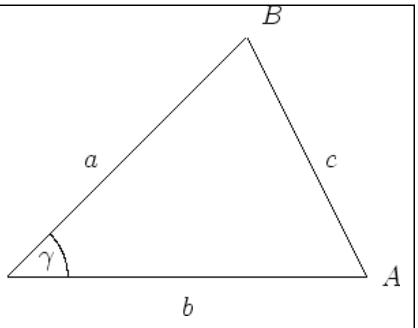


$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$



$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

د کوساین جمله :

په یوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$	

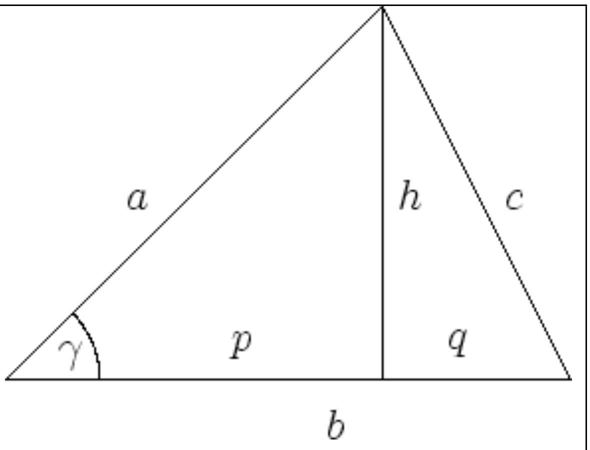
(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیک، موخ)

د ښوونې لپاره یې د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

 	باور لري $c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$ همداسې $q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$ له دې سره لاس ته راځي $c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$ څه چې د ښوولو وو. (لیکونکي هولیک، موخ)

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار ضرب د کواوردينات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

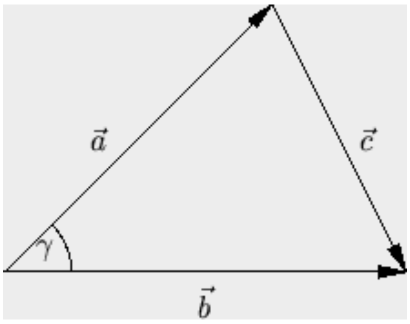
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه د کوساين جملې له لارې لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma \,.$$

که داړه مربع وې کیڼ لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \,.$$

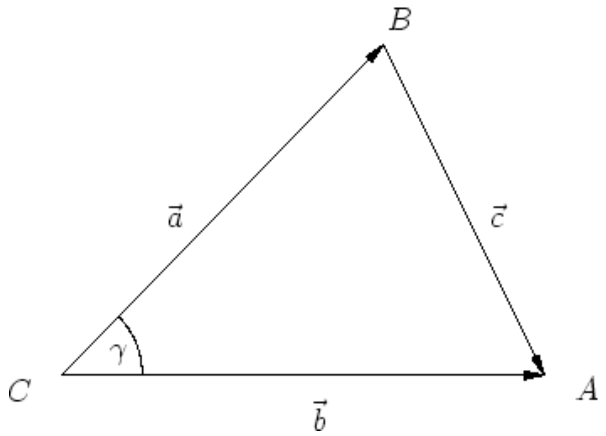
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې یو بل سره پورته کوي یا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره یو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث لاندې ګوډونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترلې له کواوردیناتونو څخه د لیدنې دي. د دې راوړل شوې بېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

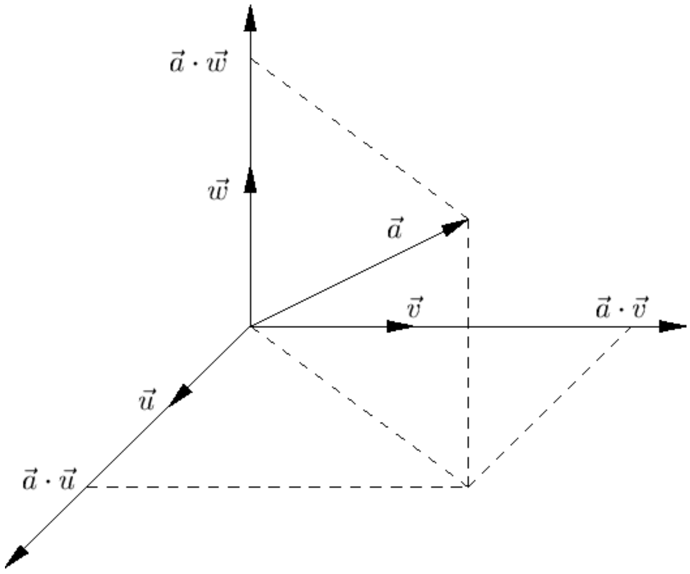
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. څخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرېوستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي یعنې یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتیزي کواوردینات سیتم د کانونیکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیک، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي تړلی ليدل کيږي

د ضريبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړيږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=1,\quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}=0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښيزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصديقيږي. د ضريبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سرې د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کيږي.

دا هم په ساده توګه ليدل کيږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2},\quad \vec{a}-\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2},\quad \vec{a}-\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر يو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود يا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=0\,.$$

(ليکونکي هوليګ، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \sqrt{3}$ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$	$=$ $=$ $=$	$\vec{a} \cdot \vec{u}$ $\vec{a} \cdot \vec{v}$ $\vec{a} \cdot \vec{w}$

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صليبې يا چليپا ضرب:

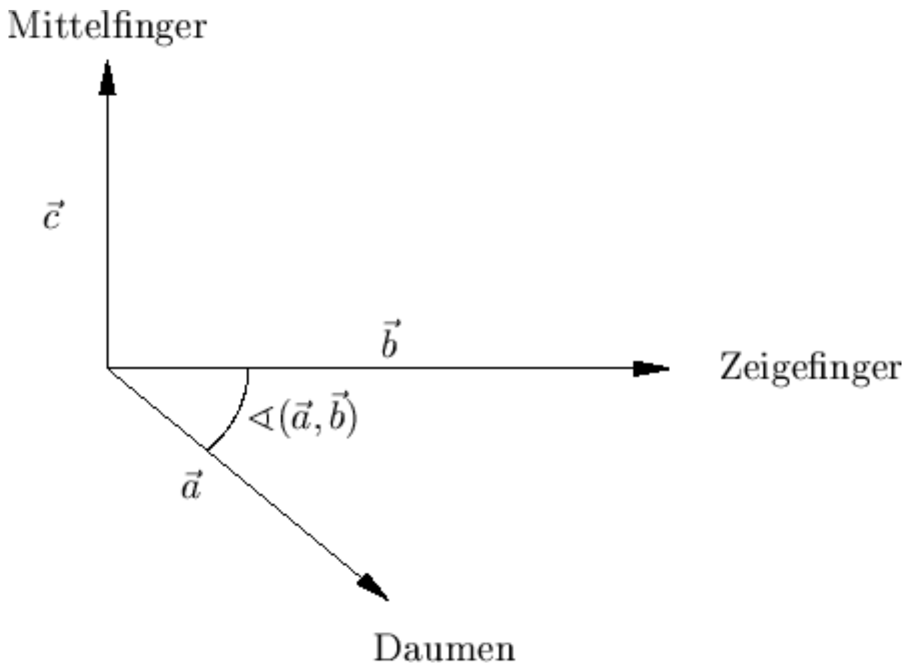
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوګونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوريز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د ښيرې د الماني پښتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کي الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

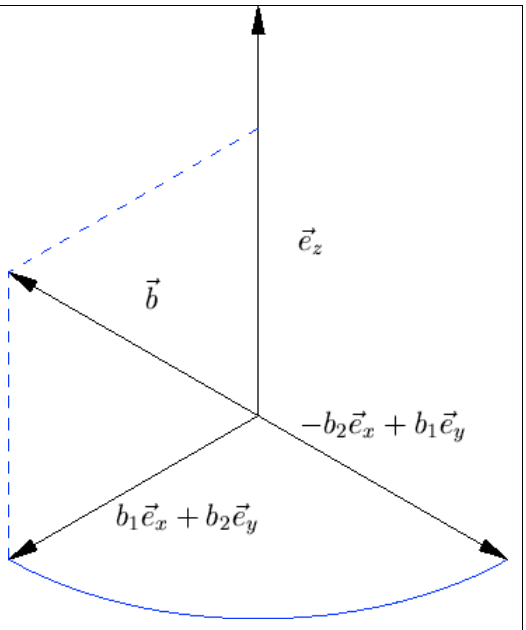
په ځانګړي توګه باور لري $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ د $\vec{a} \| \vec{b}$ لپاره او $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل یي وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)



د دي لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کي نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کي ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زعموړ دي. د کواوردینات انځورني لپاره کیدی شي ادا ترلي پسي وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره څرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښایو، چې .

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځيرې چې ليدل کيږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy-سطحه پرېوستل شي او بيا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پرېوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې څخه په دويمه کمپوننت کې د سيده پسې شمېرنې کرښيزوالی

لاس ته راځي، ځکه چې بې د ټوليز محدوديت څخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حيث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسيا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونيکي بنسټ وکتورونو کمبينيشن لپاره وراته والی و ازمايل شي.

(ليکونکي : هوليګ، اپپ)

د تعريف يا پيژند د ځرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شميرل کيږي.

يو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چې همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: کلاوس، هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

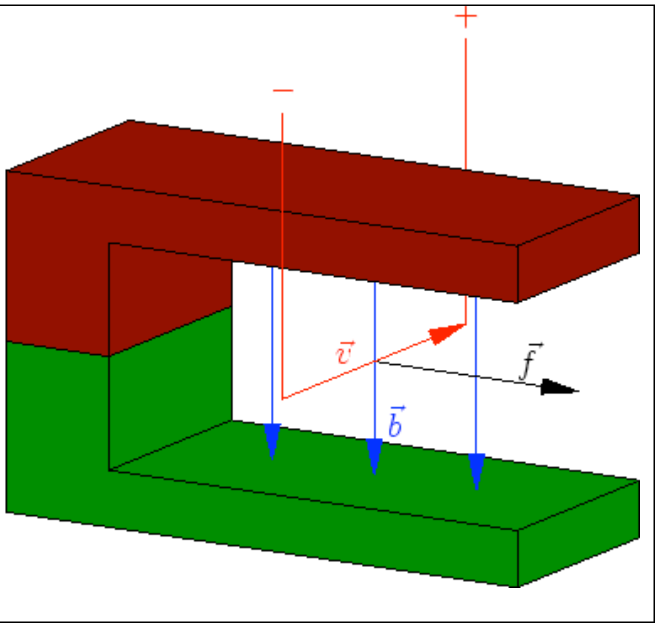
د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z\,, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوريزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د لورنځ زور Lorentzkraft



په يوه الکترون $-e$ ، چې د $\vec{v}$ چټکتيا سره په يوه مقناطيسي ورشو $\vec{b}$ کې خوزي يا حرکت کوي، د لورنځ زور اغيز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځيره شوي ازمايښت نظم د برېښنا جريان تيروني د $\vec{f}$ په لور لوريزه اغيزه لري..

(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اسوڅياتيو قانون Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

- کرښيزوالی Linearität

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) \times (\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \alpha_1\beta_1(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1\beta_2(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2\beta_1(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2\beta_2(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

- غبرګاړخيز يا موازی الاظلاع ډ سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کتمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کتمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(ليکونکي: اپپ،هوليګ،کيمرلي)

انتيسيومتري او کرښيزوالی د وکتورضرب د کواوردينات انځوروني څخه تړلی ليدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمټوالي د ښووني لپاره کیدی شي بې له ټولیزو بندیزونو $\vec{a}=\vec{e}_x$ ونیول شي او باید په $\vec{b}$ کې د کرښیزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b}=\vec{e}_y$ او $\vec{a}=\vec{e}_x$ وڅیړل شي، د $\vec{a}=\vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کیڼ اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره یوغږیز کیږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a}=\vec{e}_x$, $\vec{b}=\vec{e}_y$) کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} = c_1d_2 - c_2d_1,$$

هم ټیک دی.

په ورته توګه د $\vec{b}=\vec{e}_z$ لپاره هم دلیل راوړل کیږي.........

کرښیزوالی کیدی شي د غبرګیزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې یي بیلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاګرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیايي. د بېلګي په توګه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د ایپسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\},$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{matrix} \varepsilon_{1,2,3} & = & \varepsilon_{2,3,1} & = & \varepsilon_{3,1,2} & = & 1\,, \\ \varepsilon_{1,3,2} & = & \varepsilon_{2,1,3} & = & \varepsilon_{3,2,1} & = & -1\,. \end{matrix}$$

نو دا د ځيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اينواريانت (تغير نه خوړونکی) دی او د پيژندنخښو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د –تنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

شپات ضرب

شپات ضرب

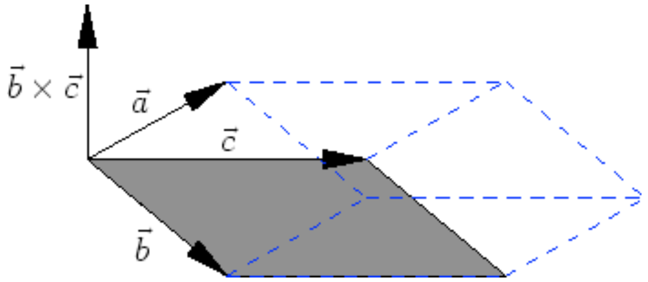
$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښي پورې د له درې وکتورونو $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ څخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبرګ شي يا برابر شي.

(غبرګ سطحيز)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $\varepsilon-$ تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخواییز یا شپات ضرب په لاندې بڼه هم ولیکل شي:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د $\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ سره

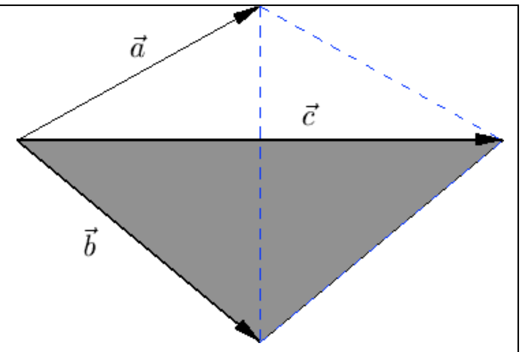
$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{d}))\right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات یا غبرګ سطحیز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کربنیز شوي غبرګ اړخیز د سطحې خوندیونه ده، د ډکې یا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}\right)\right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| \,.$$

د یوه څلور سطحیز (حجم) شمیرنه Volumen eines Tetraeders

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د یوه درې وکتورونو $\vec a$, $\vec b$ او $\vec c$ څخه غزېدلی تیتراید ډکی یا حجم V دی $V = \frac{1}{6}\|[\vec a, \vec b, \vec c]\|\,.$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د یوه تیتراایدر(څلور سطحیز) ډکی V داسي شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په بام کې ونیول شي، چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز G_{Spat} سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلي ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\text{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}|[\vec a, \vec b, \vec c]|$$

راځي، د غبرګطحیز V_{Spat} په مرسته .

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د څلور سطحیز V ډکی ، چې له وکتورونو

$$\vec a = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec b = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec c = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

د غبرګسطحيز يا ذوذنقي خويونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحيز ضرب په هر Argument کې کرښيز دی او سربيره پردي دا لاندې نور خويونه لري

- ځيوکليکي – يا تل بيرته راګرځيدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کرښيز بلواکوالی يا تابعيت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه يوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لوريزونه Orientierung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$ $\vec{v}$, او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګهواریز(سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad = \alpha\, \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha \quad = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو رېښتونی غبرګسطحیز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي.

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښیز کمبینشن په څیر انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] = 4, \quad [\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}] = -4, \quad [\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}] = 8$$

او له دې سره

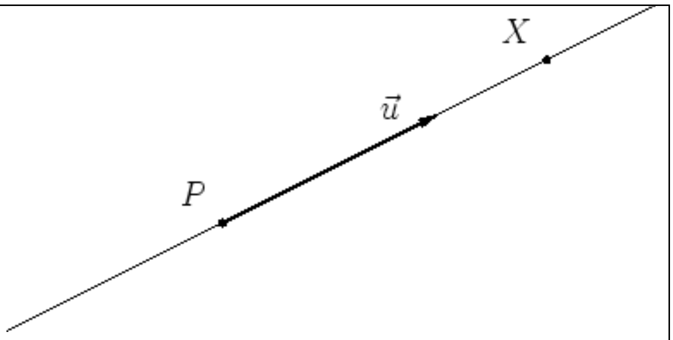
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{x} \qquad = \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w}$$

$$= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.$$

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

ټکي – لور – بڼه:

	په یوه کرښه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي.

په ورته توګه باور لري

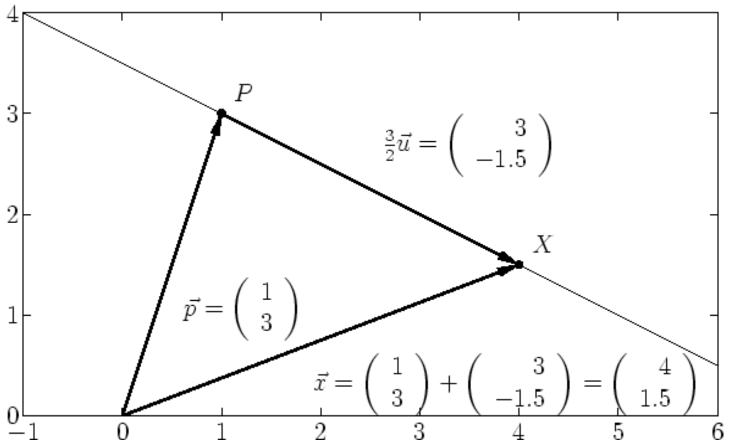
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1,2,3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

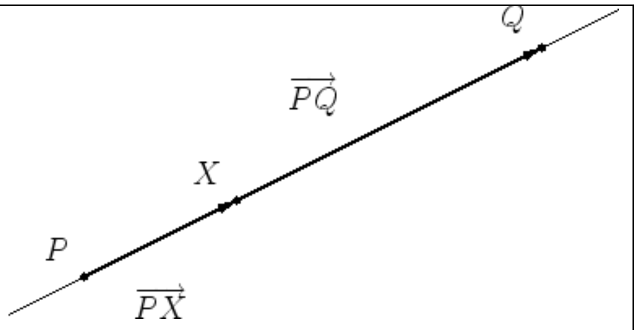
څېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

	په يوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تيرېږي کيدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د پارامتر ارزښت $t \in [0,1]$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.

په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردينات لپاره باور لري

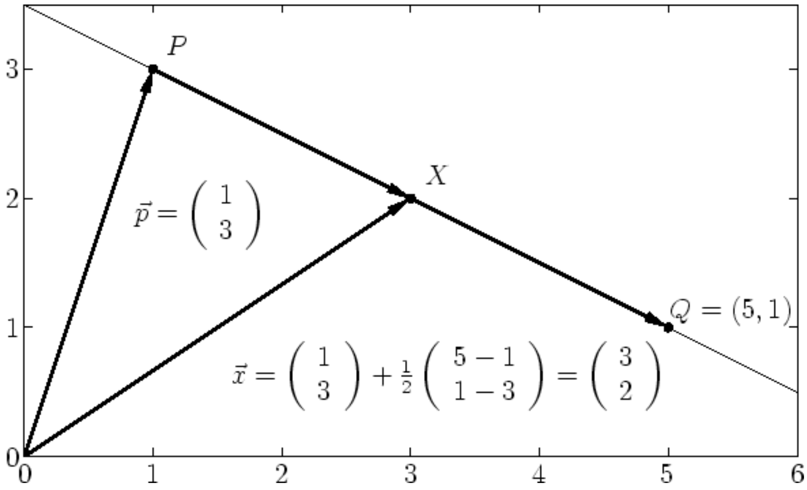
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t : (1-t)$ نسبت ويشي.

په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

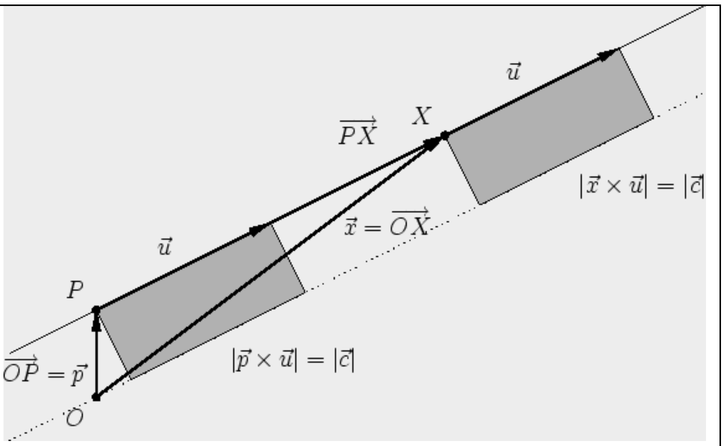
لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د

$$\overrightarrow{PX}\times\vec{u}=\vec{0}$$

په بڼه ولیکل شي.



په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x}\times\vec{u}=\vec{c},\quad \vec{c}=\vec{p}\times\vec{u}\,.$$

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

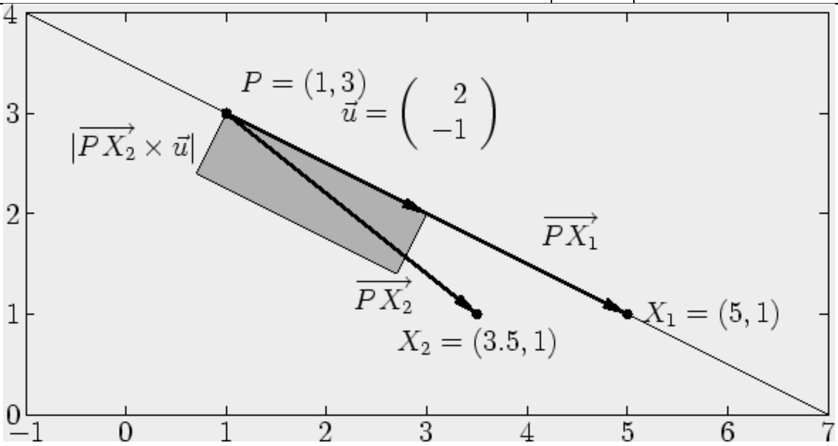
د یوې کرښې لحظوی –بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX_1}\times\vec{u} &= \left(\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\4\cdot(-1)-2\cdot(-2)\end{pmatrix}=\vec{0}\,.\end{aligned}$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	$=$	



د ټکي ــکربنې واټن:

په یوه کربنه د یوه ټکي Q پروجکشن(پرېوستون) X چې له P تیرېږي د لور
سره لاندې پوره کوي

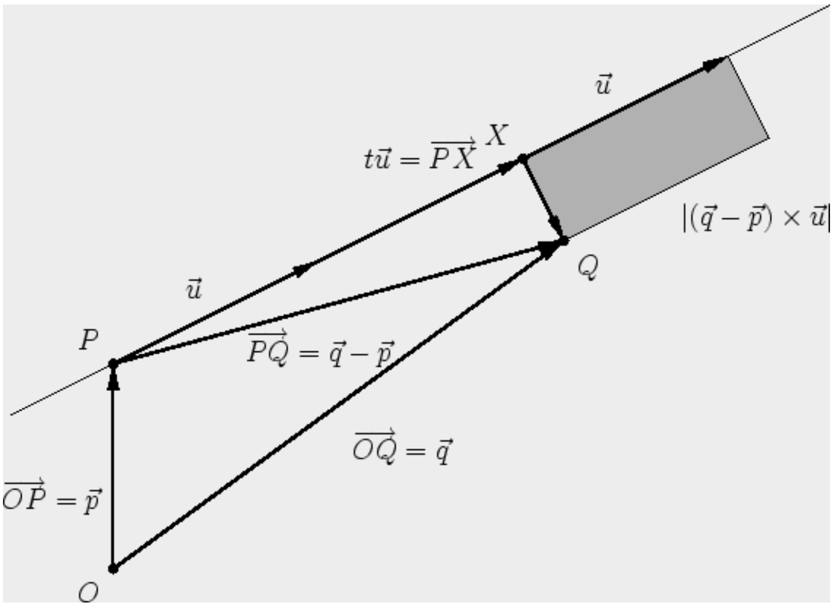
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

په کرښه د ټکي Q پرېوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right)\cdot\vec{u} = (\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \quad \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \, |\vec{u}| \, \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} .$$

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

که ټکی $Q = (3,3,3)$ په کرښه پرېیستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حیث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \, \vec{u} \quad =$$

$$= \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غږيز دی.

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

د دوه کرښو واټن :

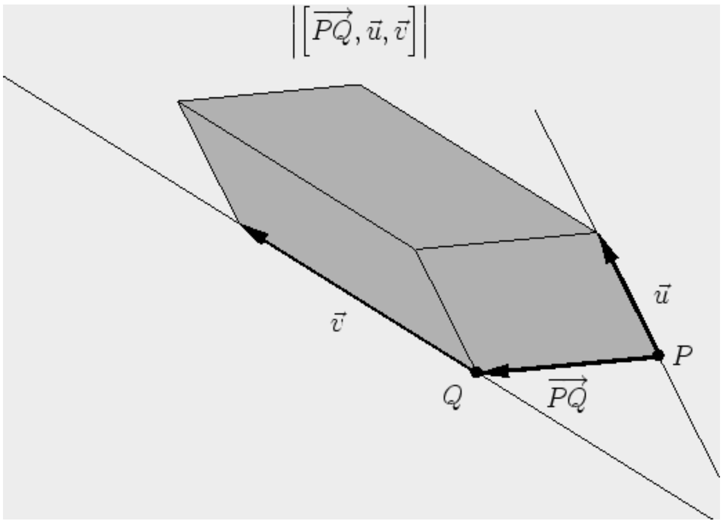
د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کرښو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$



دوه کرښې بادمايلي windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبتې(زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د يوه وکتور اوږدوالی د هخه مطلق ارزښت ضرب يوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d=|\overrightarrow{XY}|=\left|(\overrightarrow{PQ}+t\vec{v}-s\vec{u})\cdot\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د يوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

کرښې

$$g:\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad h:\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\left|\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوټو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د ځګيدني لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوټو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د ځګيدني الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د یوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3] \,.$$

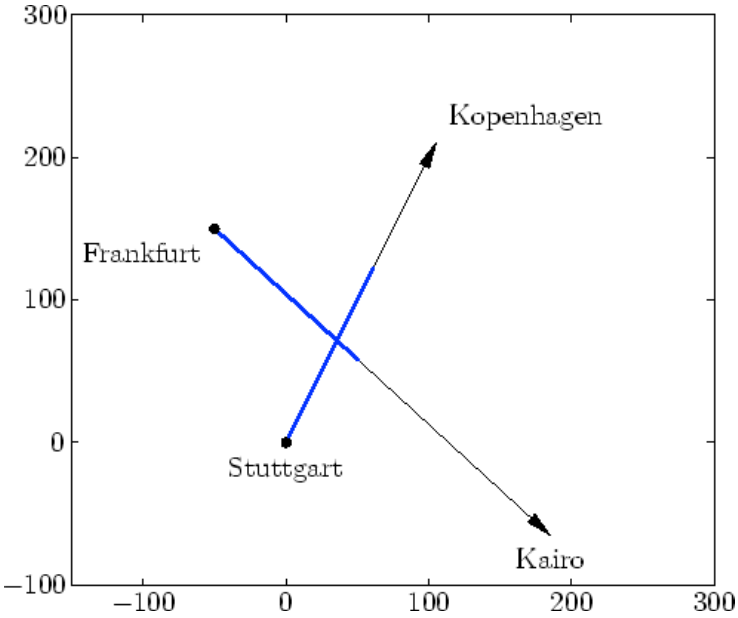
که د کواوردينات پيل شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کيلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



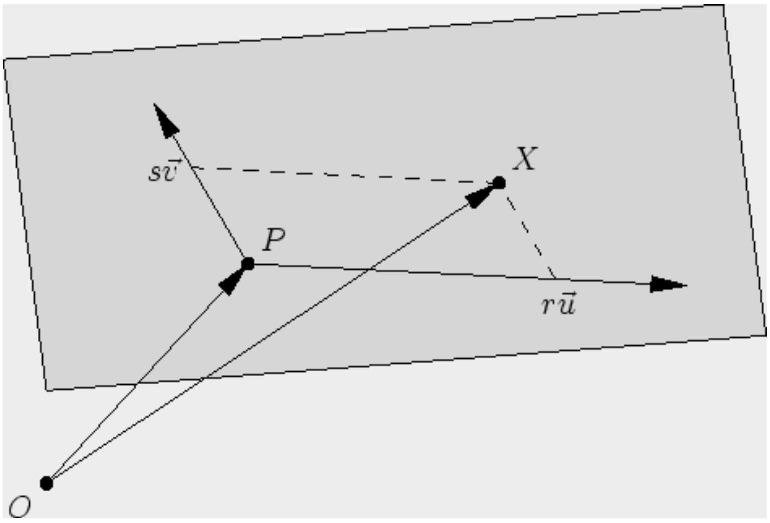
(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ دی او د مساوات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

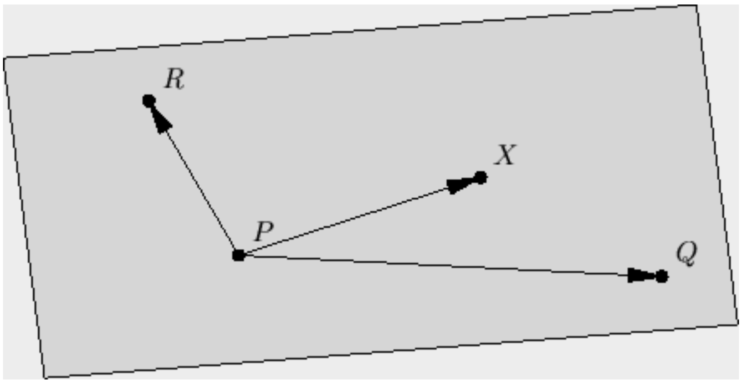
حل نه لري، كه لومړۍ او دويمې ليكې ته وګورو .

د يوې سطحې درې-ټكې-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټكي X لپاره چې په يوه سطحه پروت دی،كومه چې له ټكو P, Q, R, تيرېږي او يو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوايزو ضرب وركيږي .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$



(ليكونكي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټكو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې وركړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځكه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

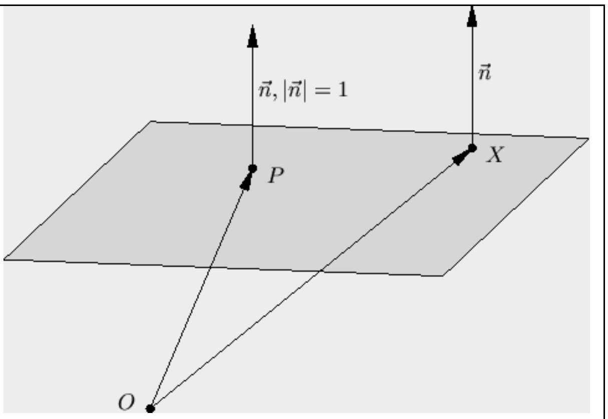
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼهHesse-Normalform einer Ebene

په يوه سطحه د يوه ټکي X ځايوکتور $\vec{x}$ په يوه سيخه په P کي اورتوګونال و يوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x}\cdot\vec{n} = d, \quad d = \vec{p}\cdot\vec{n}\,.$ په نورمال بڼه نيول کيږي چې $|\vec{n}| = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچينې ته	 (ليکونکي:هوليګ، وايس)

يوه سطحه E دې د ټکي $P = (1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دې معناچې سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سرې نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نیغ عموددی، یعنې $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسې-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو $Q, \; P$ او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} \,.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې یوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کرښیز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود یا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې $\vec{x}$ یو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمیرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسې –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمیرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d=\vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d=\vec{p}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}=-4$$

$\sigma=-1$

او له دې سره

$$\vec{n}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E:\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=4\,.$$

(لیکونکي:هولیک، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

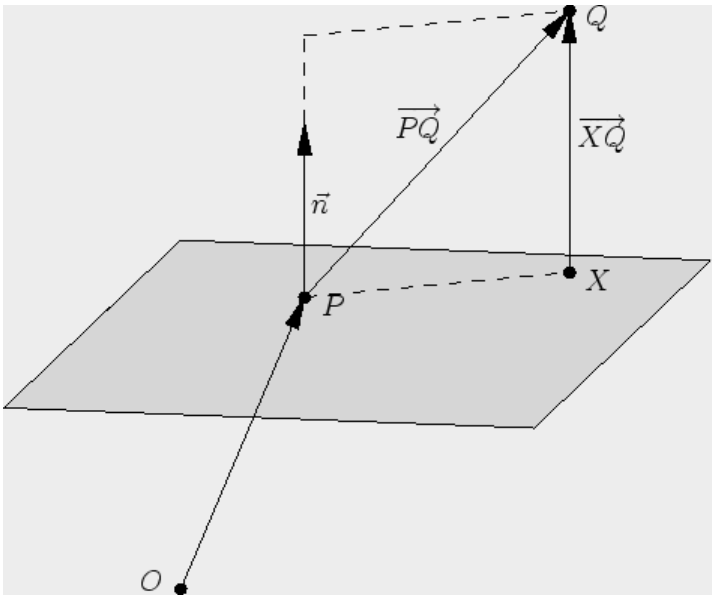
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} .$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و تکي Q ته.



(ليکونکي:هوليک، وايس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha |\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې $\overrightarrow{PQ}$ مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا په همغه خوا ښايي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښايي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، وايس

له ټکي $P = (1, 2, 3)$ تېيره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دې د $Q = (3, 2, 3)$ ټکي واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

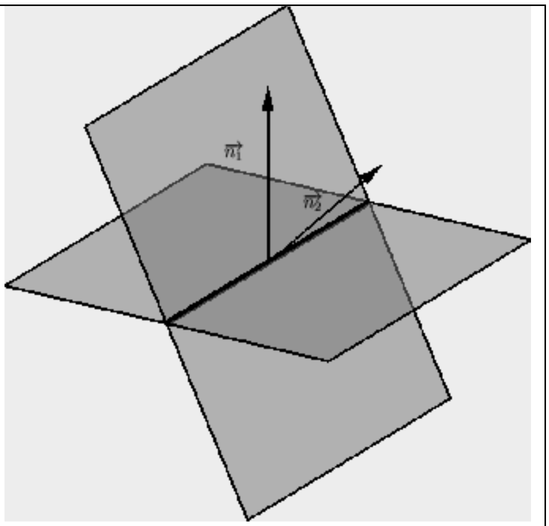
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شميرل کيږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د دوه سطحو غوڅې يا تقاطع:

	د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n_i}$ سره د دواړو کونجونو(زاويو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچنې کونج يې د $\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$ له لارې يوائځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکربنې لور ده.

(ليکونکي:هوليک، وايس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1,2,0)$, $P_2 = (0,1,3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکربنې سره جوړ کونج(زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3 \,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکربنې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p_1} \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p_2} \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتیا شته او یو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S=(2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راځو:

$$g:\vec{x}=\vec{s}+t\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تترایډ(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1=(1,0,0), \quad P_2=(-1,0,0),$$

$$P_3=(0,1,\sqrt{2}), \quad P_4=(0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له P_1,P_2,P_3 همداسې له P_1,P_2,P_4 جوړې وي یا تېرېږي کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دي سره دی:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

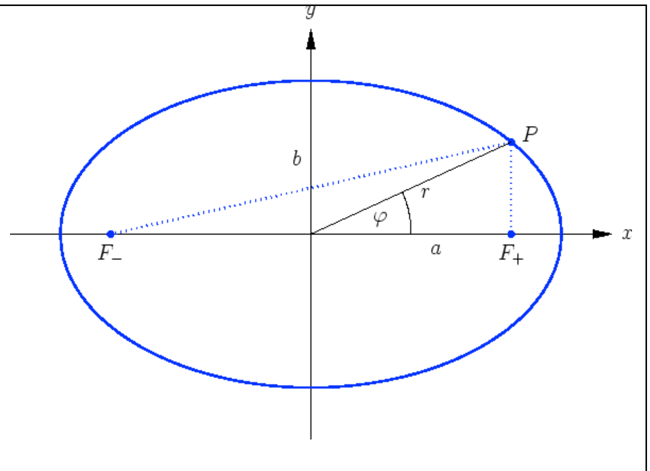
(ليكونكي:هوليک، وايس)

هګۍ (بيضوي) Ellipse

په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P = (x,y)$ د د دوه سوزونيټکو $F_\pm$ څخه واټڼ ثابت يا همغه دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

د $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورې) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

او دې کيڼ مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول يا بيا مربع کول راکوي

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

د بدلون $f^2 = a^2 - b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردينات بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پيدا کونې

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2\varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نيسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = b^2$$

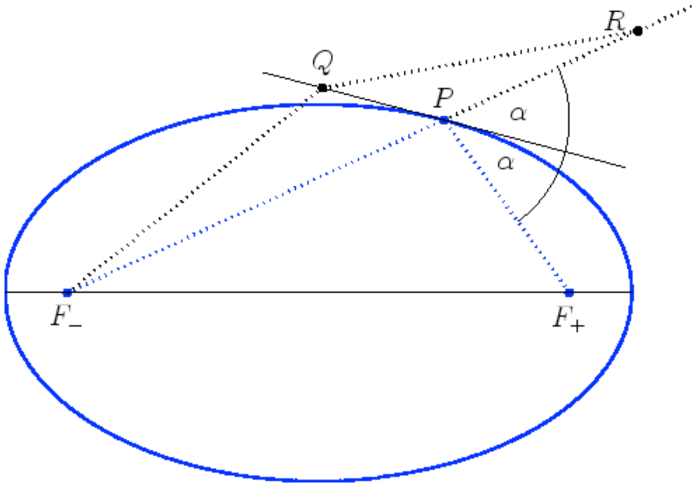
او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردينات بڼه.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګي (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښووني لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوي ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| .$$

که د تویه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوې ځیري کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| ,$$

او پسي یا تعقیب باید $R,\ P,\ F_-$ په یوه کرښه پراته وي. له دې سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

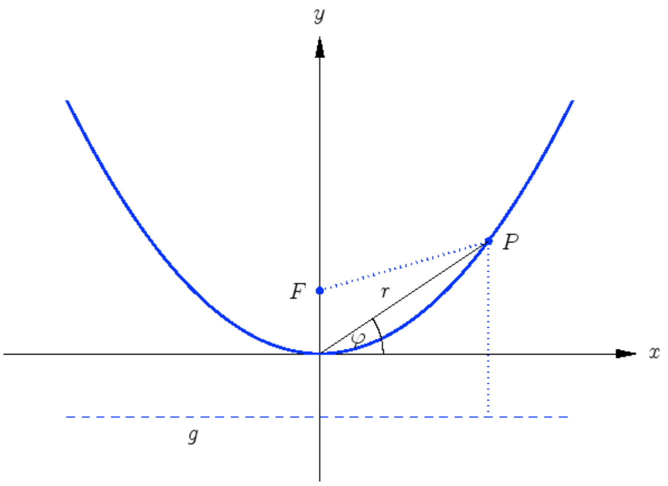
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هندارون خويونه د پختورګو تيګو توټه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونټکي F_- کې د يوې راديال (د وړانګې په لور) سرچينې څخه وړانګې کېدی شي د يوه هګی ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکی F_+ کې کوده شي يعني سره غوڅ کړي..

(ليکونکي:ايپ،هوليک)

پارابول Parabel

په يوه پارابول د ټکی $P = (x,y)$ د سوزونټکي F او يوې وړونکي کرښې g څخه برابر واټن لري.



که $F = (0,f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اپپ،هولیگ)

د انځوروني ورته والی یې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر اینووني له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بنه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

بدلون مو قطبي بڼې ته بیايي.

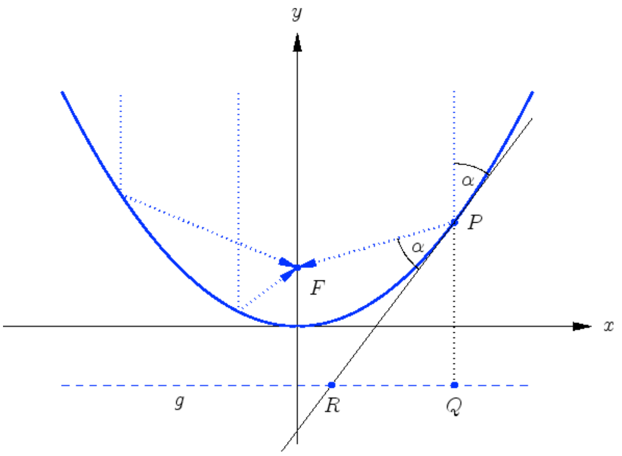
(لیکونکي:اپپ،هولیگ)

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانګې په سوزونټکي کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بنوونې لپاره په بام کې نیسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي Pt , $\begin{pmatrix}1\\x/(2f)\end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبرګ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې R د تانجنت غوځټکی دی د g سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

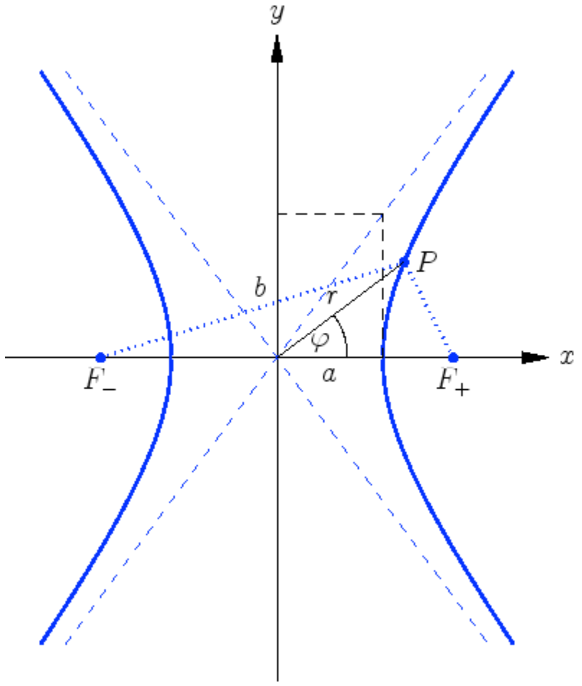
های پاربول Hyperbel

په یوه های پابول د یوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_\pm$سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپتوتې $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هایپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کیڼ مساوات ته ورته اړیکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a \sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته له نوې مربع کونې څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2} x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د كواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام كې نيسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

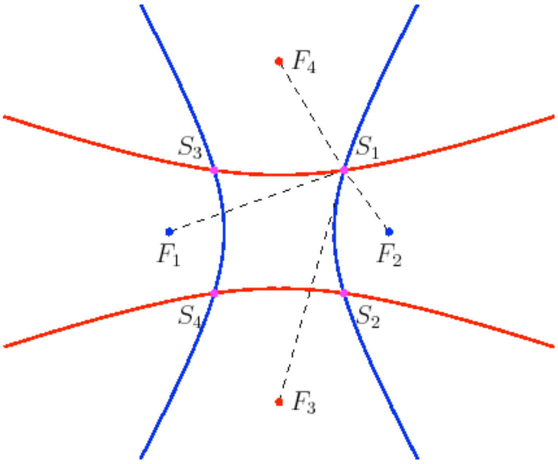
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د كواودیناتونو بڼ راكوي

(ليكونكي:اپپ،هوليګ)

ناویګیشنNavigation

د یوې كیشتۍ ځای Position معلومولو P لپاره د وخت كمښتونه $2a_{j,k}$ د سینكرون راديو سيګنالونو د مختلفو خورونكو ستېشنونو F_i څخه سره پرتله كيږي. نو په دې توګه كيدی شي P د هايپرابول د سوزونټكو F_k, F_j سره د غوڅټكي په څير لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



يوه ځرګنده بيلګه کيدی شي

$$F_1=(-2,0),\ F_2=(2,0),\quad F_3=(0,-3),\ F_4=(0,3)$$

او $a_{1,2}=a_{3,4}=1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1,\qquad y^2-\frac{x^2}{8}=1\,,$$

او د ځللر غوښتکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2=\frac{32}{23},\quad y^2=\frac{27}{23}$$

لکه د څيرې څخه چې ه م ليدل کيږی، څلور اوبيوني(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېکيشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې يو کفتان بايد وپوهيږي، چې کيښتی نږدې يا ت قريباً چيرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی يا حل دی.

(ليکونکي:اېپ،هوليګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library