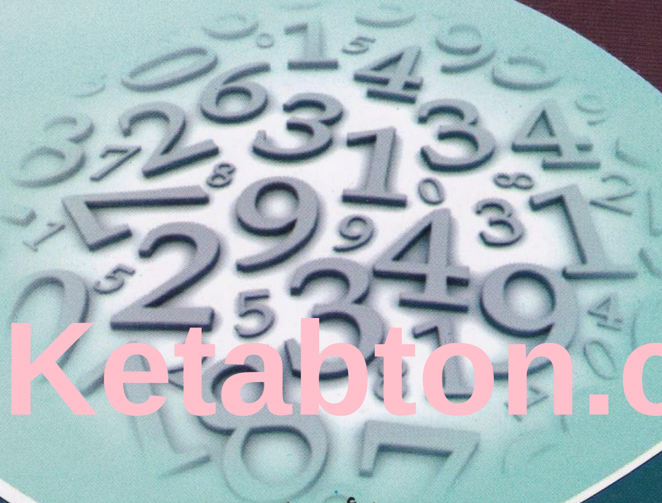
# شمیر پوهنه

## (ریاضي)

### ستر کتاب



Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

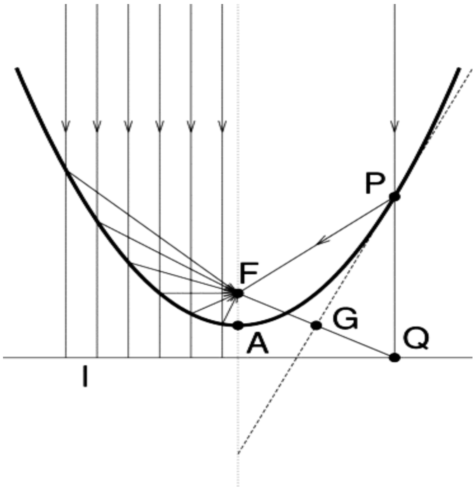
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

# شمیرپوهنه

(ریاضي)

## سترکتاب




دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرړي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

## دلوي ښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

## کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب( لومړی برخ)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپریدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

## چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادوالو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګڼانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د لیکوونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکوونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندي ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي ډپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي ډپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپیرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي ښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک


نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

| | | |
|---|---|---|
| ١ ٠ | د شمیرپوهنې سم اند یا منطق | ١ |
| ١ ٠ ١ | پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه | ١ |
| ١ ٠ ٢ | د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې | ٣ |
| ١ ٠ ٣ ٠ ١ | ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه | ٣ |
| ١ ٠ ٢ ٠ ٢ | وینا | ٥ |
| ١ ٠ ٢ ٠ ٣ | د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ | ٧ |
| ١ ٠ ٤ | وینا فورم یا ٠بڼه او کوانتورونه | ١٣ |
| ١ ٠ ٥ | اړیین او پوره کیدونکي شرطونه | ٢٨ |
| ١ ٠ ٦ | د شمیرکلیمه یا د لغاتو ............ | ٣١ |
| ١ ٠ ٧ | برابرون او نابرابرون | ٣٣ |
| ١ . ٨ | تمرینونه | ٣٨ |
| ٢ ٠ | ډیر ی پوهنه | ٣٩ |
| ٢ ٠ ١ | د ډیرئ پوهنې کلیمه | ۴٠ |
| ٢ . ٢ | د ډېریو ترمنځ اړیکې | ۴٥ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| | برخدېرئ | ۴۶ |
| | د يوې ډېرئ توان يا تواندېرئ (توانسټ) | ۴۸ |
| ۲ ۰ ۳ | په ډيرئ کې کارونې يا عمليې(۱) | ۵۰ |
| | غوڅدېرئ يا متقاطعډېرئ | ۵۲ |
| | د يوې ډېرئ يا سټ کمپليمنت | ۵۷ |
| ۲ ۰ ٤ | څيرونه | ۵۸ |
| | تمرينونه | ۶۷ |
| ۳ ۰ | د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې... | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ | د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ | پيداينتي يا طبيعي ګڼونه | ۷۰ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ الف | د پيداينت يا طبيعي ګڼونو جوړښت | ۷۱ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ب | د پيداينت ګڼونو انځورونه او شميرنه | ۷۲ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ پ | د شميرنې بنسټيز قوان ين | ۷۸ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ | ټولګڼونه | ۸۴ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ | الف د ويش تيوري | ۸۶ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب | غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...) | ۸۸ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۳ | راشنلګڼونه | ۱۰۶ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ٤ | رييلګڼونه | ۱۰۸ |
| ۳ ۰ ۲ ۰ ۱ | ماتشميرنه | ۱۱۹ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۳ . ۳ | تمرینونه | ۱۳۰ |
| ۰ ٤ | پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر | ۱۴۱ |
| ۱ ۰ ٤ | توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت | ۱۴۱ |
| ۲ ۰ ٤ | ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره | ۱۴۴ |
| ۳ ۰ ٤ | توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره | ۱۵۱ |
| ٤ ۰ ٤ | ټولګه | ۱۵۲ |
| ۰ ۵ | لوګاریتم | ۱۵۸ |
| ۱ ۰ ۵ | د لوګاریتم کلیمه | ۱۵۸ |
| ۳ ۰ ۵ | ټولګه | ۱۶۶ |
| ۰ ٦ | ګونومتري | ۱۶۹ |
| ۱ ۰ ٦ | بنسټیزه څمککچپوهنه یا هندسه | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۱ | ټکی او کرښه | ۱۶۹ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۲ | کونج | ۱۷۱ |
| ٦ ۰ ۱ ۰ ۳ | درېګوډۍ | ۱۷۴ |
| ٤ ۰ ۱ ۰ ٤ | کونکروانیڅ او ورته والی | ۱۷۸ |
| ٦۰ ۱ ۰ ۵ | ولاړکونجیز دریګوډۍ | ۱۸۴ |
| ۲ ۰ ٦ | په ولاړکونجیز دریګوډۍ کې د ... | ۱۸۸ |
| ۳ ۰ ٦ | په یوونګردۍ کې د کونج بلواک .. | ۱۹۰ |
| ٤ ۰ ٦ | د ساین او کوساین جملې | ۱۹۵ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


٦ ٠ ٥ تریګنومتریکي کڅمتوالی ٢٠٥

٦ . ٥ تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه ٢١٥

٠٧ کمپلکس ګڼونه ٢٢٢

٠٨ د ښوونې یا ثبوت متودونه ٢٣٥

٨ ٠ ١ سیده ښوونه ٢٣٥

٨ . ٢ ناسیده ښوونه ٢٣٧

٨ ٠ ٣ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه ٢٣٩

٩ لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ... ٢۴٣

٩٠١ لاینیز برابرون ٢۴۴

١٠ کومبیناترویک، د بینوم جمله ٢۶۶

١٠ ٠ ١ فاکولتیت یا فاکتوریل ٢۶۶

١٠ ٠ ٢ د بینوم ځله ونه ٢۶٧

١٠ ٠ ٣ د بینوم جمله ٢٧٠

١٠ ٠ ٤ کومبیناتوریک ٢٧۴

١٠ ٠ ٤ ٠ ١ پرموتیشن ٢٧۵

١٠ ٠ ٤ ٠ ٢ واریيشن ٢٨٠

١٠ ٠ ٤ ٠ ٣ کمبینیشن ٢٨۶

١٠ ٠ ٤ ٠ ٤ د پرموتیشن، واریيشن او .... ٢٩١

٠١١ لانیز الجبري برابرونونه ٢٩۵

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۱۱ ۰ ۱ | لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ... | ۲۹۶ |
| ۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳ | دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر... | ۳۰۷ |
| ۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ | د ګاوس الګوریتم | ۳۱۲ |
| ۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥ | له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ... | ۳۱۶ |
| ۱۱ ۰ ۲ | لاینیز برابرونونه له درې .... | ۳۱۷ |
| ۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱ | یو برابرون له درې ناپیژندونو سره | ۳۱۷ |
| ۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲ | دوه برابرونونه له درې ... | ۳۱۸ |
| ۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳ | دریمه درجه دیترمینانت او د ... | ۳۱۹ |
| ۱۱ . ۲. ۴ | د ګاوس لګوریتم | ۳۲۲ |
| ۱۱ ۰ ۳ | په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ... | ۳۲۵ |
| ۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱ | د n -م درجې دیترمینانت او د ... | ۳۲۶ |
| ۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲ | د ګاوس الګوریتم | ۳۲۸ |
| | تمرنونه | ۳۳۳ |
| ۱۲ | الجبري برابرونونه | ۳۴۰ |
| ۱۲ ۰ ۱ | نالاینیز برابرونونه | ۳۴۰ |
| ۱۲ ۰ ۲ | څلورئ ئیز یا مربع برابرونونه | ۳۴۳ |
| ۱۲ ۰۲ . ۱ | د دوه په جګ برابرونونه ، د ویېتا جمله | |
| ۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲ | څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال | ۳۵۰ |
| ۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳ | د n -م درجې ځانګړي برابرو... | ۳۵۱ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۳ ۰ ۱۲ | دریمه درجه برابرونونه | ۳۵۷ |
| ٤ ۰ ۱۲ | د ریښي برابرونونه | |
| ۱۳ | ترانسڅیندنت برابرونونه | ۳۷۵ |
| ۱ ۰ ۱۳ | لوګاریتم برابرونونه | ۳۷۵ |
| ۲ ۰ ۱۳ | اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونونه | ۳۸۰ |
| ۳ ۰ ۱۳ | ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه | ۳۸۵ |
| ۱٤ | له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت .. | ۳۹۶ |
| ۱ ۰ ۱٤ | نابرابرونونه | ۳۹۶ |
| ۱ ۰ ۱ ۰ ۱٤ | بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین | |
| ۱ ۰ ۱٤ الف | اینتروال | ۳۹۷ |
| ۲ ۰ ۱ ۰ ۱٤ | نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی... | ۴۰۰ |
| ۳ ۰ ۱ ۰ ۱٤ | د نابرابرونونو سیستم ... | ۴۰۹ |
| ٤ ۰ ۱ ۰ ۱٤ | نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره | ۴۱۱ |
| ۲ ۰ ۱٤ | برابرونونه او نابرابرونونه .... | ۴۱۴ |
| ۱ ۰ ۲ ۰ ۱٤ | له مطلقه ارزښت سره شمیرنه | ۴۱۴ |
| ۲ ۰ ۲ ۰ ۱٤ | برابرونونه له مطلقه ارزښت سره | ۴۱۵ |
| ۳ ۰ ۲ ۰ ۱٤ | نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره | ۴۲۰ |
| ۱۵ | بلواک یا فنکشنونه یا طابع | ۴۳۰ |
| ۱ ۰ ۱۵ | د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه | ۴۳۰ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

## د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶
۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷
٥ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
٥ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| ۱۸ | پرلپسې او پرلپسې لړۍ | ۵۳۳ |
| ۱۸ ۰ ۱ | پیل | ۵۳۳ |
| ۱۸ ۰ ۲ | د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه | ۵۳۴ |
| ۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ | مونوتوني پرلپسې | ۵۴۲ |
| ۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ | اریتمیتیکي پرلپسې | ۵۴۵ |
| ۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ | هندسي پرلپسې | ۵۴۷ |
| ۱۸ ۰ ۲الف | لړۍ | ۵۵۰ |
| ۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ | هندسي لړی | ۵۵۵ |
| ۱۸ ۰ ۲ الف ۲ | اریتمیتیکي لړۍ | ۵۵۷ |
| ۱۸ ۰ ٤ | د پرلپسې او لړیو د پولې ... | ۵۵۸ |
| ۱۹ | د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه | ۵۷۸ |
| ۱۹ ۰ ۱ | بنسټیزې کلیمې | |
| | د پولو یا حدونو خویونه | ۵۸۶ |
| | د راشنل، کسري یا نسبتي | ۵۹۲ |
| | د مثلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې | ۵۹۶ |
| | ناپرېکیدنې | ۶۰۴ |
| ۱۹ ۰ ۲ | په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې | |
| ۱۹ ۰ ۳ | د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه | ۶۱۰ |
| ۱۹ ۰ ٤ | د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه | |

(c) ketabton.com: The Digital Library


د ښېرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنښیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش ( تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د $x_o$ په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲۰ ۰ ۲ د فرنښیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډیزو یا مثلثاتي ..... ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیښیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه ۶۸۸
د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱
د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱
د رول قضيه ۷۱۰
د وايرشتراس قضيه ۷۱۱
۲۰ .۰٤ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲
يوعبرېزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پيتال .... ۷۵۰
۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرينونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷
پيلراوړنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library


۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۹

د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال ۷۹۰

بنسټیزه یا لومړنی تابع ۷۹۴

سطحه او لومړنی تابع ۷۹۶

ناټاکلی انتیګرال ۷۹۹

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه ۸۱۲

تکمیلیدونکي بنسټونه ۸۱۴

د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ... ۸۱۵

د انتیګرالونې قاعدې ۸۱۷

د اکسپوننشل توابعو انتیګرال ۸۱۹

د لوګاریتمي توابعو انتیګرال ۸۱۹

بدلون قانون ۸۲۱

توابع، چې بې د بدلون له لارې... ۸۲۷

ټوټه انتیګرالونه ۸۳۲

د ټوټه انتیګرالونې لار ۸۳۴

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال ۸۳۸

ناپای(مبهم) انتیګرال ۸۴۱

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې ۸۵۲

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

## سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیبل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته څما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مړښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په ورانی کی مو د نړی سرکښي څانته ګټلی.
موږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوي پیښوي. له کومه څاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دي هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعآ افراد ملامت نه دي، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودي دنده د حکومتونو ده، چی څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل څانونه د دي کار جوګه نه دي ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددي کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دي څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځي، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library



نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کې ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمې په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومې او یا کومې چې ماته معلومې دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکې ښکاریدلې .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتې څانګې لري. دا چې ځما په فکر دا متأسفانه نه یواځې زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبې په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړۍ او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو ( د ستونځو حل باندې ) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کې هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

## شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کې نغښتې یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کې د پوهیدلو بنسټیزه ریښنه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعي ( پیدایښتي ) یعنې که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنې یې وده او په پوهیدنه ناشونې ده. شمیرپوهنه له بلې خوا یواځې خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کې ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څموږ د هیواد ستنځي نورې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
– د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
– دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یي هم نه لرم چي پیسی وګټم.

– وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

– ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو رینښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
–په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبږوالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو ( ستونځو حل ) په خاطر، چی موږ افغانان بی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یي ځما لپاره نه وو.

## دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندۍ شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندۍ پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرینښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرینښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه وربانديې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربنودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځپ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کې نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کې له بلې ژبې تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات رانتوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم ژیندۍ شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د ژیندۍ څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګڼو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولی، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلی وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. دربهګوډي ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمره لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوټر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکي او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطۍ به شوي وي، ، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library



حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، خما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

## دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیداینښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
څنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

## څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند ( لنډ سمند ) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی.
خما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



اومه اتمه او نهمه برخه څموږ په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییته هم خورا ضرور ده

**شپږم . مننه**

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دي د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړي.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library



الماڼ د پنځم ټولګي ځخه هندسه په کې راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی تړلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چې همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چې دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چې د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چې دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چې موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل ځوک نه شته، دا چې ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چې هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library



## افغاني ، يوناني او الماني الف بی

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ا | ب | پ | ت | ټ | ث | ج | چ |
| څ | ځ | ځ | ح | خ | د | ډ | ذ |
| ر | ړ | ز | ژ | ښ | ص | ض | ط |
| ظ | ع | غ | ف | ك | ګ | ق | ل |
| م | ن | و | ه | ي | ی | ې | ئ ۍ |

### يوناني الف بی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Α α | *Α α* | Alpha |
| Β β | *Β β* | Beta |
| Γ γ | *Γ γ* | Gamma |
| Δ δ | *Δ δ* | Delta |
| Ε ε | *Ε ε* | Epsilon |
| Ζ ζ | *Ζ ζ* | Zeta |
| Η η | *Η η* | Eta |
| Θ ϑ | *Θ ϑ* | Theta |
| Ι ι | *Ι ι* | Iota |
| Κ κ | *Κ ϰ* | Kappa |
| Λ λ | *Λ λ* | Lambda |
| Μ μ | *Μ μ* | My |
| Ν ν | *Ν ν* | Ny |
| Ξ ξ | *Ξ ξ* | Xi |
| Ο ο | *Ο ο* | Omikron |
| Π π | *Π π* | Pi |
| Ρ ρ | *Ρ ϱ* | Rho |
| Σ σ | *Σ σ* | Sigma |
| Τ τ | *Τ τ* | Tau |
| Υ υ | *Υ υ* | Ypsilon |
| Φ φ | *Φ φ* | Phi |
| Χ χ | *Χ χ* | Chi |
| Ψ ψ | *Ψ ψ* | Psi |
| Ω ω | *Ω ω* | Omega |

اومیګا د پښتو دینه ↑ ↑ ک په الماني ده دینه

### الماني الف بي

| | | |
|---|---|---|
| A a | 𝒜 𝒶 | 𝔄 𝔞 |
| B b | ℬ 𝒷 | 𝔅 𝔟 |
| C c | 𝒞 𝒸 | ℭ 𝔠 |
| D d | 𝒟 𝒹 | 𝔇 𝔡 |
| E e | ℰ ℯ | 𝔈 𝔢 |
| F f | ℱ 𝒻 | 𝔉 𝔣 |
| G g | 𝒢 ℊ | 𝔊 𝔤 |
| H h | ℋ 𝒽 | ℌ 𝔥 |
| I i | ℐ 𝒾 | ℑ 𝔦 |
| J j | 𝒥 𝒿 | 𝔍 𝔧 |
| K k | 𝒦 𝓀 | 𝔎 𝔨 |
| L l | ℒ 𝓁 | 𝔏 𝔩 |
| M m | ℳ 𝓂 | 𝔐 𝔪 |
| N n | 𝒩 𝓃 | 𝔑 𝔫 |
| O o | 𝒪 ℴ | 𝔒 𝔬 |
| P p | 𝒫 𝓅 | 𝔓 𝔭 |
| Q q | 𝒬 𝓆 | 𝔔 𝔮 |
| R r | ℛ 𝓇 | ℜ 𝔯 |
| S s | 𝒮 𝓈 | 𝔖 𝔰 |
| T t | 𝒯 𝓉 | 𝔗 𝔱 |
| U u | 𝒰 𝓊 | 𝔘 𝔲 |
| V v | 𝒱 𝓋 | 𝔙 𝔳 |
| W w | 𝒲 𝓌 | 𝔚 𝔴 |
| X x | 𝒳 𝓍 | 𝔛 𝔵 |
| Y y | 𝒴 𝓎 | 𝔜 𝔶 |
| Z z | 𝒵 𝓏 | ℨ 𝔷 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



## شمیرپوهنیزې نخښې

| | |
|---|---|
| مساوي .................. | $=$ |
| نامساوي ( نوروکتابونو کی ) | $\neq$ ( $=$ ) |
| کوچنی له .................. | $<$ |
| لوي له.......... | $>$ |
| کوچنی یا مساوي له .......... | $\leq$ |
| لوي یا مساوي له .......... | $\geq$ |
| ډیر کوچني ............... | $\ll$ |
| ډیر لوي ................. | $\gg$ |
| ورته یا متناسب........... | $\sim$ |
| کونګروانیټ ........... | $\cong$ |
| همداسې یا ښایي یا په ګوره کوي | |
| کټمټ................... | $\equiv$ |
| غبرګ .................. | $\parallel$ |
| ناغبرګ................ | $\nparallel$ |
| ولاړ په ................ | $\perp$ |
| دریګوټی ............... | $\triangle$ |
| ګردی ................ | $\bigcirc$ |
| نیمی یا قطر............ | $\oslash$ |
| کونج ................ | $\angle$ |
| د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج | $\angle$ (g,h) |
| کرښه، له A و B ته .......... | $\overline{AB}$ |
| له A و B ته لوریزه کرښه..... | $\overrightarrow{AB}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



لینده..................... AB

مطلقه ارزښت د ............ |a|

ایماجینار یوون (واحد )....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ $\pi$ = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای..................... œ

د x فنکشن یا په واك چې بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یې ( f د x یا د f, x لنډ : fx )

د x ځیرونه په f(x) : لیکو: f(x) ← x   f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله.............. lim

| | | |
|---|---|---|
| | ساین ............... | sin |
| تریګونومتریکي | کوساین ............ | cos |
| بلواك | تانجنت ............ | tan |
| | کوتنجنت........... | cot |
| | ارکوس ساین......... | arc sin |
| ځیکلومتریکي | ارکوس کوساین ...... | arc cos |
| بلواك | ارکوس تانجنت ....... | arc tan |
| | ارکوس کوتانجنت..... | arc cot |

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

---

کمپلکس ګڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلګڼونه .............. $\mathbb{R}$

ټولګڼونه .............. $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه ........... $\mathbb{N}$

تعریفډیری ........... D

ارزښتډیری........... W

حلډیری ........... L

د ډیري A پوتنځډیری P(A)

ډیري.............. M,N,A,B

تشډیری ......... $\emptyset$

برخه ډیری...........

پورته یا لویډیری( چې بل ډیری خوندي لري )

ټولنډیری............ $\cup$

غوځډیری .......... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والی ...... A~B

د ډیریو ځل.......... A × B

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیری : A بي له B ده A\ B

دلته: a د b پروېشونی ده یاa b ویشي a | b

د a اوb غټ (خورا) ګډ په ویشونی(لنډ : غ ګ و ) ggt(a,b)

د a اوb کوچني ګډ زیاتځله(لنډ : ك ګ ځ ) kgv(a,b)

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| دلته : a د M توکی دی ........ | $a \in M$ |
| او a د M توکی نه دی ............ | $a \notin M$ |
| ټولنخښه ( د ټولو x لپاره باور لري ) | $\forall$ |
| د موجودیت نخښه: یو x موجود دی | $\exists$ |
| کونیونکشن A او B لیکو | $A \wedge B$ |
| دیسینکشن A یا B لیکو<br>( کله کله الترناتیو ) | $A \vee B$ |
| ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي | $A \Rightarrow B$ |
| نیګیشن یا نه والی | $\neg$ |
| د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت<br>له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي. | $A \Leftrightarrow B$ |
| ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$ | |
| دیترمینانت | $\|A\|$ |
| د a څخه n–امه ریښه | $\sqrt[n]{a}$ |
| د x اکسپوننشلبلواك | |
| د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ | $n!$ |
| بینومځلوونی<br>لوستل: n په p باندې | $\binom{n}{p}$ |
| له a تر b واز اینتروال<br>$= \{ x \mid a < x < b \}$ | $]a,b[$ |
| له a تر b بند اینتروال<br>$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$ | $[a,b]$ |
| کیڼ واز اینتروال<br>$= \{ x \mid a < x \leq b \}$ | $]a,b]$ |
| ښی واز اینتروال<br>$= \{ x \mid a \leq x < b \}$ | $[a,b[$ |

د زیاتون نخښه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتون‌نخښه داسې وي

لوستل: له $i = 1$ تر $n$ پورې

څلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسې لیکل شوي وي

لوستل: له $i = 1$ تر $n$ پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic ))

سم اند (سماند) یا منطق ( logic یونانی کلمه ده، چې اند( فکر) یا وی( لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس( ۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دی او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خټه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دی نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې( متن ) لرودی شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

## ۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند ( فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشونی ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پوهنی( علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور( په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي ) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک اینوولو ( ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي۰

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده۰

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit ) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي۰

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی اینوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي۰

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو ( Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت ( Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره ( متصور؟ ) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغۀ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښۀ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

# ۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

## ۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښو( سومبولونو) انځوریږي.

### ۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې ( علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، $\pi$ ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ ( په ډیرۍ پوهنه کې روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ ایندکسونو) یا پیژندنخښه index ( ز۰ پیژندنخښې Indices ) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$ , $>$، $=$ , $\leq$, $\geq$ ,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

- تخنیکې نخښې : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی( اووښتونې), ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی۰

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.( 2a + 1 ) – 144 + a یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 11x =6 – 3a ).( 12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې ( همغه )، اووښتونې( متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفستې هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنستست یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه ستې یا - ډیرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنستډیرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چیرې اووښتونې یا واریابلې د پیژندډیرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو( اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې يا متحولې نه لري په Tسره په نخښنه کوو او

ليکو: T=126 + 3/4 يا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې يا متحولې x لري يانې T(x) = 10 + 2x ۰ د
اووښتونو بنسټډيرۍ يا –ډېرۍ دې يا د طبيعي اعدادو ډيرۍ N°وي

تعريفډيرۍ د بنسټډيرۍ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې يا واريابلی x پۀ ځاي

يو پيداېښتې ګڼ يا طبيعي عدد 2 کيږدو، نو د ترم ارزښت دی : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x يا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره يې په نخښنه کوو۰ د اووښتونو يا
متحولو بنسټډيرۍ دې د پيداېښتې يا طبيعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعريفډيرۍ
N° ده۰ د y لپاره N ( پيداېښتی ګڼونډيرۍN° تعريفډيرۍ لپاره ترم نه دی تعريف
ياپيژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دی تعريف يا پيژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x يا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشميرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

يادونه: د ګڼونو لپاره دې دريمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډيرۍ ورکړ
شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په ګریوان دئ، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی( واقعیتونه) بیرته هنداره ( منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا ( غلطه ) ده. موږ. نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند( تعریف ) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دئ)، د هغۀ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ ( دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دئ له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردئ، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سرې یو ژبنی یوون، یا یووالی ( واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی ( د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې ( افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دئ، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دی۰ نور خویونه په راتلونکی کې نه څیرل کیږي۰

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور۰

## ۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا ریښتیا ده او یا ناریښتیا. ( د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د وینا ارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځانښیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي۰

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا دی

تکرار : هره جمله، چی « ریښتیا ارزښت» ( ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

شميرپوهنيز سم اند( منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلګې:

غونډاله ( جمله)

الف : » د کابل سين د کونړ له سين سره ګډيږي« رېښتيا وينا ده٠

ب : 3 + 4 = 7　　رېښتيا وينا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناريښتيا- يا ناتيک وينا ده٠( د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد ياګڼونه کتلکيدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو يې ؟ « نه شي کيدی يو ريښتيا ارزښت باندې تنظيم شي٠ له دې امله وينا نه ده٠

نورې بيلګي :

ويناوې دي:

(دپيتاګوراس (فيثاغورس) جمله٠

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعګانو (څلوريو) زياتون(جمعه) د هيپوتينوزې(اوږده اړخ قايمې زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلوری يا مربع سره برابر دی.

نورې بيلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې کې که يو کاربن له دوه اکسيجنه سره يوځاي يا زيات شي، نو کاربن دوه اکسيډ $CO_2$ وښايي

د دي پرښې يا مخامخ يا پر خلاف يا برعکس : ويناوې نه دي:

د کابل ښار; NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په ديرش کلن جنګ کې

لاندې ويناوې

کيميا يوه طبيعي يا پيدايښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دريو بی له پاتې ( باقي) نه ويشل کيږي

د وينا «رښتيا ارزښت » رښتيا لري

لاندې ويناوې

برلين يو کوچنی ښار دی

5 < 3 پنځه له دريو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد ياګنونه ناجوړه ( طاق) دي

کابل د کونړ پر سين پروت دی

هره يوه له دې ويناو « رښتيا ارزښت » نا رښتيا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد يو جوړه وليکه، نو طاق ته ناجوړه وايو٠

په لاندې کې به وڅيرو، چې ويناوې شته، چې نورې ويناوې د خپلې برخې په څير په ځان کې خوندې( لنډ : خوندي) لري٠ داسې ويناوو ته يوځاېشوې يا يوځای ايښول شوې يا ځنځيري ويناوې وايو او که غواړی ! مرکبې ويناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره بیلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چې پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی۰

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي۰

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې( ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چې دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چې نور کارته وهڅوي«۰

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي۰

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی۰ یا هغه پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چې هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی۰

۳ - دا چې سپینغر پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی۰

٤ – سره له دې، چې هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی۰

ګورو، چې په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چې په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي۰ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دوي يو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ۰ په لاندې کې به ممکنه« ويناتړنه» ( يا نورهم ښه: ويناځنځیرونه) تر ځيړنې لاندې ونیول شي.

پيژند ۱ ۰ ۲ :

يوه «وېناتړنه» يا يو «ويناتړاو» ( نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ وېينې(افادې ) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډېرو ویناو ځخه نوې وېناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند يا منطق سټپرینځيپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ويناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ريښتيا ارزښت يې يواځې او يواځې د «برخوېناو» ريښتيا ارزښت په واک کې وي۰

بيلګې

الف: سپين ډېر خواريکښ دئ، هغه په دې پوهيږي، چې نور کار ته وهڅوي۰

ب : سپين يا راځي او يا لوبه نه کيږي۰

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول يا ناسمي وليد۰

## ۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ويناتړنه يا ويناپلواک ( - فنکشن يا – تابع)

د ويناتړنو (عمليو)په هکله مو پورته بيلګو کې وليدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او يا « سره له دې» ونيسي تل يوه يوځاي شوې وينا منځ ته راځي. دا وينا هلته او فقط هلته ريښتيا ده، چې دواړه «برخوېناوې» ريښتيا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ريښتيا فنکشن يا رښتيا تابع» وپيژنو. موږ پريکړه کوو، چې د په زړه پورې ويناوو ( ويناواريابلو يا وينا اووښتونو(وينا متحولو)) لپاره سومبولونه ...p,q,r, او يا ا ، ب پ، وکارول شي يا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پيل کړو، يانې د يوه يو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---------------------------------------------------------------------------

ځاينيونکی(يوځائيز يا يوګوني) بلواک يا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

يادونه: د بلواک يا تابع کلمه وروسته څېړل کيږي، دلته د بلواک يا فنکشن پرځاي ويناترنه يا عمليه بسيا کوي. دا ځنی ويونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي يې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وينا تړاو يا ويناترنی(عمليي) «نه والی»: ديوی ويناP نه والی هغه وينا ده، چې هلته او يواځی هلته د رېښتيا ارزښت نارېښتيا لري، چیP رېښتيا ارزښت رېښتيا ولري٠

موږ د وينا P نه والی نفی په Pنه سره ښايو ، شميرپوهنيزه نخښونه يې په لاندې توګه ده ¬p په يوه جدول کې رېښتيا فنکشن يا رېښتيابلواک کې داسی څرګند وو( دا چې زه کله کله هغه شميرپوهنيز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم ليکلی، نو دا به همغسې p نه وليکم.

| نه P يا ¬p | P |
|---|---|
| F | w |
| w | f |

د يوې وينا P تکرار نه والي يا بيا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې يې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

| ¬¬p | ¬p | p |
|---|---|---|
| w | f | w |
| f | w | f |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دوه واره نه والی د همغې لومړنۍ وینا رښتیاارزښت لري

په پیداېښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 < 3 „ وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده٠

ترنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction ( لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تړاو):

## وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړۍ کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځاي ٠ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که چیرې په ځاي يې نور د پيدايښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بيا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي٠

دا چی اووښتونې یا متحولې د بنسټيزی یا بنسټ ستڼ څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتونی(متحولې) په نامه يادېږي٠

پيژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټيزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتونې تړلو څخه د کوانتيفيکاتورونو( کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړيدی شي.

يادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی٠ له ګرامر سره په توپير، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتیکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه یو څرګند( دوه ځايلرونکی یا دوه ځاييزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاينیونکې ( نوره هم ښه : دوه ييز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعريفوي یا پيژنی٠

د « او» تړنه او نخښنه يې $\wedge$

پيژند ۱ ٠ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ويناوې p او q یانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته يو ريښتيا ارزښت ريښتيا لري، چې p اوq دواړه ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري٠ که له دې څخه یوه وینا هم نارښتیا وي، نو بيا د « او » تړنه نارښتيا ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ترنې نخښنه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p/\q او ويل کيږي p او p

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f ناربښتيا په معنا دي

| p/\q | q | p |
|---|---|---|
| w | w | w |
| f | f | w |
| f | w | f |
| f | f | f |

د « او » ترنې ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 7 > 3 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: موږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګنونه جوړيږي۰ موږ به يې زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 ,, 7 > ,, (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی ( نارښتيا)، نو A/\B وينا : چی ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « ( نارښتيا) ده۰ دا ويناترنه ويناارزښت نارښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: 7 > 3 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ومو لیدل، چې د « او » تړنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده ( عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځای» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » تړنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځای پیدا کړي او دا چاته ونه ښایې»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځای پیدا کړ« او » دا پټیدځای یې پټ واسته۰

۱ ) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پرېښود ۰

۲ ) سره له دې، چې برلین کوچنیښار دیهلته د منی د المپیک لوبي کیږي

۳ ) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونیدی

په ټولیزه توګه د « او » تړنه هلته ربښتیا ارزښت ربښتیا لري، چې د جملی ټولی برخې ربښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا تړنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په تړنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» تړنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: تاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « تړنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله تړنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چې ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»تړنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا ∨ د یا تړننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p او q ترمنځ ځایول کیږي p∨q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول ځرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------

| p | Q | p∨q |
|---|---|---|
| w | W | w |
| w | f | W |
| f | w | w |
| f | f | f |

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » تړنه p∨q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » تړنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي٠ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p∨q هم نا رښتيا دی٠ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي٠ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مگر په پښتو کې « يا٠٠٠ او يا ٠٠٠» ليکل کيږي٠

بيلګه ( د « يا » تړنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» تړنه د A وينا: ,, 7 > 3,, اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دی» يوه رښتيا وينا A∨B ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»٠

د دوه ويناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 7 > 3 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 7 =3 ,, ( نارښتيا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 > 3 يا 7 = 3 دا وينا تړنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د دوه نارښتيا ويناو د « يا »( " Or" ) تړنه:

د A وينا : "7 > 3 " او د B وينا: ۳ يو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ يوه نارښتيا وينا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دئ»

الترناتيوAltenative يا انتيوالنخ Antivalenz ويناوې : دا د » يا « ويناتړنه بايد د « يا ... او يا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتيا ده، که چيرې دواړه ويناوى رښتيا وي۰

بيلګه : ( دوه الترناتيو ويناو ته ، چې رښتيا وي)

د وينا 7 > 3 او« ۳ يو لومړی ګڼ دئ» د الترناتيو په نامه داسې دئ « ۳ يا له ۷ کوچنئ دئ او يا يو لومړی ګڼ دئ» نارښتيا دئ۰

بيلګی : ( نه والي، کنجنکشن، ديسجنکشن ته )

يادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتيا او(Falsch)f د نارښتيا لپاره کارول شوي.:

ويناتړاو

| | | |
|---|---|---|
| A | $\pi$ پي ټولګڼ دئ | f |
| B | $\pi$ ايراشنل ګڼ دی | W |
| C | صفر له پي$\pi$ کوچنی دئ | W |
| D | $\pi$ پي له دری کوچنی دئ | f |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| A | $\pi$ ټولګڼ نه دئ | W |
| C | $\pi$ کوچنی برابر له صفر | F |
| A∨C | $\pi$ ټولګڼ او له صفر لوي دئ | f |
| B∧C | $\pi$ ایراشنل او له صفر لوي دئ | W |
| A∨C | $\pi$پي ټولګڼ یا له صفر لوي دئ | W |
| A∨D | $\pi$ ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دئ | f |

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغهٔ فرمول دئ

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم٠ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دئ، یانې د » او یا «
امکان شته٠ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي٠ یانې
دوه نرخونه باید ورنه کړای شي٠

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې
يې په پام کې راولی٠ په شالت یا سرکټ الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترړنې«
ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

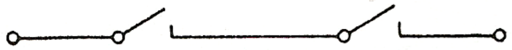


Bild 7.1

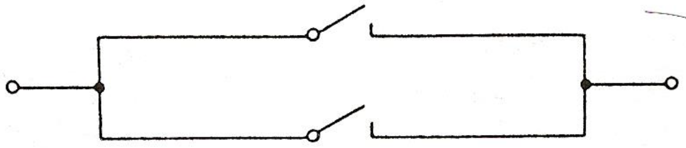


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## کمپلکس ربښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدی شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی ( ربښتیا - بلواک یا ربښتیا فنکشن » نهp∨ p دی٠ د دې لپاره هم د ربښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د ربښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه ( دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp∨p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د یوې وینا نه والی

| p | نهP | نهp∨p |
|---|---|---|
| w | f | W |
| f | w | w |

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکې نه ده یوه وینا نهp∨p تل ربښتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې ربښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) ربښتیا دی( دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر ربښتیاارزښت ورکړ شي یانې ربښتیا یا ناربښتیا تل د ربښتیا ارزښت ربښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو ربښتیاارزښت بلواک کټمټ ناربښتیا دی ( دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا ناربښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction ( د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربنتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp\/q ربنتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q$$
$$w...w......w.........f.............f.....f.........f$$
$$w...f.......w.........f.............f......w.........f$$
$$f...w........w.........f............w.......f.........f$$
$$f...f........f.........w............w........w.........w$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه ربنتیا بلواک یا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربنتیا - ( او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه ) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

## ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library



که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي اپلیکیشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse ( لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion ( لاتین: پاي لاس ته راوړنه ) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

| p=> q | q | P |
|---|---|---|
| w | w | w |
| f | f | w |
| w | w | f |
| w | f | f |

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A او B ټیک هلته یو نارښتیا یوځای شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړبرخه ویناړښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

راګرځېدلی شي. په ښکاره ډول د بېلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړۍ برخه رښتیاوي او دویمه نارښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بېلګې په توګه د جدول لومړۍ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نا رښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې توله وینا رښتیا ده، که لومړۍ برخه وینا نارښتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بېلګې په توګه جمله نارښتیا ونه لیدل شي( که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg(p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کېدونکی شرط دی( په بل ډول یې: qد p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی ) Äquivalent

که دوه ویناوې qاو p خپله ترنه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي٠ د ایکویوالنت سومبول دی ≕ د دواړو ویناو pاو q ترمنځ دا سومبول پروت دی p ≕q په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ٠ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارښتیا وي٠

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| p | q | P⇔q |
|---|---|---|
| w | w | W |
| w | f | F |
| f | w | F |
| f | f | W |

سیده او مخامخ یا په ځښ دي په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ځښ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د ویناېلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکي

د دوه ویناو ترڼه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو ربښتیاارزښت د ترڼویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې ځرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

| p | q | p ⇔ q | p=>q | q ⇒ p | (p ⇒ q) (q ⇒ p) |
|---|---|---|---|---|---|
| W | w | w | w | w | ...........W |
| *w* | *f* | f | f | *w* | .........*f* |
| F | *w* | *f* | *w* | *f* | .........F |
| *f* | *f* | w | w | *w* | .........*w* |

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\ (q \Rightarrow p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې څخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

(3)    [p/\(q\/r)]  □  [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4)    [p\/(q/\r)]  □  [(p\/q) /\ (p\/r)]

## ١ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په  لاندې ډول ساده ټوليز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - -  يا افاده کړای شو: دلته د ويناو پر ځاي د وينافورم څخه خبري دي، يا غږيږو٠ دا داسی ژبنی ويينې يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی   :  xپر دوه ويشونی دئ »

دويم : » z يو هوار څلورګوډی( څلورضلعي) » دی٠

دريم : «u له v  څخه لوي » دئ او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي۰ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی۰ دریم یوه اړیکه(ریلیشن( ده، چې هلته د انفرادیو د اینسولو ترتیب هم یو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل۰( له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي۰

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بنې څخه وینا جوړوي۰ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي۰ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بنی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو۰یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو۰ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیداینښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه∀

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه ∃

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې ( ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي۰

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دی ( یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه )

دا سومبول ∃ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتونې ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی ( د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

( لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له( په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیری یا ریل ا عدادو سټ R توکی دی او ∈ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$x^2 + 4x = 0$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

( په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله ( د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي۰

بیلګه: وینابڼه « x په 2 ویشونی دئ » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرۍ یا سټ (ویناااووښتونډیرۍ یا واریابلډیرۍ) ترنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرۍ(اووښتونډیرۍ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي۰

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

( د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دئ )

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

( د ټولو ریيلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$ )

جمله : ( د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره )

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبول$A \Rightarrow B$ («کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته۰

الف ) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب ) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف ) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي۰

بیا : وینا باور لري۰

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

$A \Rightarrow B$

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي۰
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ۰ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي۰ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی۰

۲ - وینا A : "$n > 7$"

وینا B :وي دې: $n > 6$

$A \Rightarrow B$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو ریيلګڼ n له ٦ څخه لوي دی٠ که اړیکې، چې n له ٦ لو دی، باور ولري

داسې ریيلګڼونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له٧ څخه لوي نه دي٠ د بیلګي په توګه ٥ ،٦ یا شپږ.نیم

د ب) فرمولبندې وایي، چې وینا ب باورلرل غوښتونکی یا اړیین یا ضرور دی، د دې لپاره، چی وینا A باور ولري٠

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري ٠

بیلګی د اړیین( ضروري ) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې یوګڼ n پر 6 وویشل شي، اړین(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ویشونی وي٠ یو ګڼ، چې پر3 نه وي ویشونی، نو پر ٦هم ویشونی نه دی٠

۲ - ویناA : » څلور ګوڼی یوه څلوری یا مربع ده«

وینا B : » څلور ګوڼی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورګوډی یوه مربع(څلوری ) ده دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلوری نه ده که یوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړین نه ده، چې څلوری یا مربع دې وي٠

د برابروالي یا برابرارزښتي ( ایکویوالنت) سومبول«

$$A <=> B$$

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وایي، چې A دB لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی٠ « دا وایي، چېA ټیک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګی : د  پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – وینا A : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر ۳ او ۲ ویشونکي وي۰

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دئ ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه( ضلعې ) ولري۰

۱ ۰ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم( ترې پوهیدنه)

پیژند ( تعریف ) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي۰ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده۰

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پرېښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



## جمله څه شی دی ؟

ټولي ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندني لپاره ښووني يا ثبوت ته اړتيا لري ۰

## اکسيوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتينې وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې( فرضيي) او ثابتول( غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري۰

که دا وينا داسی وي، نو پس داسی به هم وي۰ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي۰

اکسيوم : ۱ طبيعي عدد دئ ( پيانو Peano)

: ټکی هغه دئ، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پيښنه د پيښي امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجيز وي، نو( پس) د پيتا ګوراس (pythagoras ) درسي جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه( طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده ( که يو پريم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت يې ( هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا تل ناجوړه ياطاق دئ)په څټوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي۰
تل داسی نه ده، چې د جملی د ربښتينوالی څخه دې د جملی په څټوالی يا تضاد هم ربښتيا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ٢٪ هم ( رښتیا)

جمله: که ٢ ٪ پس ٦٪ هم ( نارښتیا)

۰۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دنننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته( هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځټ ) ولاړکونجیز دی، کله چې دنننې کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره ځخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي ځخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زږښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کینې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړني سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی٠

که ترمونه $T^\wedge$ او$T^\circ$ د برابروننخښنی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: $T^\circ = T^\wedge$ ٠

که چیرې ترمونه په دې نخښو $\leq , \geq , < , >$ او(نابرابروننخښه =| ) یو له بل سره وتړل شي یو نابراوون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي٠

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي٠ که ناټاکلي، چې اوښتوني یې هم بولو( د بیلګې په توګه z , x , y ) پر ځاي د بنسټېدیری ګڼونه ولیکل شي٠ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفېدیری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي٠

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې ویناښه پیژند - یا تعریفېدیری پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبېدیری یا حلېدیری L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو ( پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې :

الف )   $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$   نو   $L=\{0,8\}$

ب ) $3x^2 = 48$   د   $x = 4$   لپاره  او  $-4 = x$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$  ښخه لاس ته راځی او په ښت $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون  الف) $2x > 1 => L= \{x | x> -1/2 \}$

ب ) $x < 3 => L = \{ x | x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی :  الف ) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب ) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیریکې سره برابر وي( یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځای ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | نابرابرون | براون |
|---|---|---|
| ۱ ) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي | T° < T^ T^ > T°<br>2x < 6 6 > 2x | T°=T^ T^ = T°<br>3x=5y 5y = 3x |
| ۲ ) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیرئ خوندې وساتل شي یا ځاي کړي | T^ < T° =><br>T^ ± T° < T° ± T^ | T^ = T°=><br>T^ ±T° = T°± T^ |
| یا تغیر ونه خوري۰<br>مخامخ یا کیڼ لوربیلګه<br>کې تفریقډیرئ تغیر خوړلی | 3y < 4x ⬄<br>⬄ 4y±2x < 4x±2x | 2z = 8 =><br>2z ± 3 = 8 ±3 |

پر ځنډ بیلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزیات شوي

ترم 3-zنه دئ تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې 3 - z یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دئ

۳ ) د وینافورم دواړه ⬄ T^=T° T^.T > T°.T ⬄ T^ <T°

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

اړخونه کیدی شي چې $T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$ $T^\wedge.T = T^\circ.T$

له همغه مثبت ترم سره $T^\wedge:T > T^\circ:T$ $\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$

ځل او یا په همغه ترم $T > 0$ که $T > 0$ که وي

وویشل شي $3y - 12 < 30z - 90$ $4x + 2 = 10x - 6$

$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$ $\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$

$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$ $\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$

٤) د یوه برابرون $T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$ $T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$

دواړه خواوې کیدی شي، $T^\wedge < T^\circ$ $T^\wedge.T = T^\circ.T$

چې له یوه منفی ترم سره $\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$ $\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$

ځل شي یا دواړه خواوې په $T < 0$ $T < 0$

همغه ترم وویشل شي۰ $-2y < -4$ $3x = 12$

که په دې فورم کې $\Leftrightarrow y > 2$ $\Leftrightarrow -9x = -36$

نابرابرونونه وي نو د $\Leftrightarrow 10y > 20$ $\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه T یو او T دوه په لاندۀ توګه د اینډکس سره په نخښه کوي: $T_1, T_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - ( A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیداینتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بي له ډیرپیوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بي مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیداینتي یا طبیعي ګڼونه یا ـ اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړې، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرئ پیژندل کیږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، یا په یوه ټولګی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوړي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیرۍ ډیرۍ اچولي یا د هسکې مینې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډیرۍ.

د ډېرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیرۍ له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پردیو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته یوائې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډیرۍ څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چی د ډیري پوهنې ( سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي.

ډیرئ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانګې په ډیرۍ پوهنه ودانې دي. نن شمیرپوهنه بې له ډیرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي.

پیژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیرۍ یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولګه ( یوځایوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرۍ یا بنسټ سټ څخه ، چې د پیژندلشویو اصولو یا کرکترییین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور( George Cantor 1845 – 1918 ) پیژند:
زموږ د خیال یا لید څرګند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولګې ( یوځایټولولو یا مجموعې ) ته ډیرۍ وایي او هر شي ته، چې ډیرۍ یې جوړه کړې یا ډیرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډیرۍ – یا سټ توکی وایی.
( Set and elements of set ډیرۍ او د ډیرۍ توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولګې یوه یوون یا یووالی ( واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library



شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو٠

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځای ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي٠ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي٠

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځای کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه A,B,.. او یا M,N, X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,... او m,n,x,v,...

د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

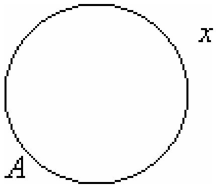
په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي٠ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم٠دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

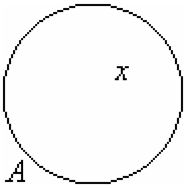
(c) ketabton.com: The Digital Library






$a \in A$

( a د A توکی نه دی)




$a \notin A$

( a د A توکی دی )

ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یې لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي۰ هغه بنستیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ۰۰۰ وایو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي۰ زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی۰ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورئ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېری یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه ۲ ۰ ۱

الف ) $M_1$ ( لوستل M ايندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ايندکش پيژند نخښې ته وايي) دې د لومړيو ګڼونو ډير ۍ ( اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب ) $M_2$ دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبيونو(حلونو) ډيرۍ وي

(x+1)(x-2) = 0

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بيلګه ۲ ۰ ۲ :

الف ) د مساوات (x+1)(x-2) = 0 حل ډيرۍ $M_2$ ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب ) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډيرۍ $M_3$ ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ....\}$

ډيرۍ لکه، چې ومو ويل د توکو د خويونو له لارې هم څرګنديدۍ شي یا ورکول کيدۍ شي۰

M = { x | x د خوويونو ۰۰۰ سره }

(لوستل: M د ټولو x ډيرۍ ده له خويونو ۰۰۰۰۰ سره )

بيلګه ۲ ۰ ۳

الف ) { د ټولوx سټ ، چې هلته x يو لومړنی عدد یا ګڼ دۍ| M = { x

b ) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تشدیرۍ: ډیرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشدیرۍ یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: $\theta$ یا $\{\}=\varnothing$

دا دې د یوې ډیرۍ یا سټ سره، چې یواځې له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\}\neq \{\} = \varnothing$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x\in Z, x^2+x-\frac{3}{4}=0\}=\theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 \ , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډیرۍ ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ۵ : د ز۰ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول مندیزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میرو ، غواوو او وزو ډیرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۇ ګنونو ډیرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وایو، چې ډیرۍ یا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4 \ldots\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرۍ( سټ) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښنه ده یا په لاندې ډول په نخښنه کیږي: $\infty$

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو.

## ۲ . ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیوني یا خوندي لرنې ( مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي.

پیژند ۲ . ۲ دوه ډیري یا سټونه $M_1$ او $M_2$ یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیرۍ یا سټ $M_1$ هر توکی د ډیرۍ یا سټ $M_2$ توکی هم وي او پر ځټ یا برعکس هر د $M_2$ توکی د $M_1$ توکی هم وي.

برابرې ډیرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې $M_1$ د $M_2$ سره برابر دئ

## برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ $M_1$ د سټ یا ډېرۍ $M_2$ برخډیرۍ ( لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ ) بلل کیږي یا $M_1$ په $M_2$ کې ځای ده یا نوره هم ښه $M_1$ په $M_2$ کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ $M_1$ هر توکی دسټ یا ډېرۍ $M_2$ توکی هم وي۰

کیدی شي، چې $M_1$ د $M_2$ سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ $M_1$ د $M_2$ اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



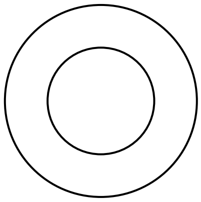
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د $M_2$ یو توکی د $M_1$ توکی نه وي۰

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو $M_1$ په $M_2$ کې اصلی خوندي دی

ب ) د ټولو څلوریو ( مربعو) ډیرۍ د ټولوڅلورګوډیو( څلور اضلاعو) اصلي برخډیرۍ ده۰

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که $M_1$ او $M_2$ د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ ( دایره ) $M_1$ په بله لویه $M_2$ ګردۍ کې خوندي ده۰

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده۰ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده۰

یا دا پیژند :

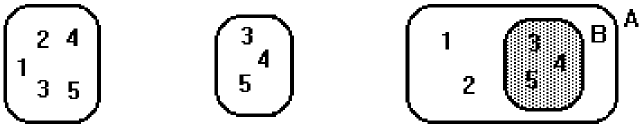
A⊆B که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بیلګه:

A⊆A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library






پیژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډیری، چې هیڅ توکی ونه لري تشډیری بلل کیږي او داسې یې لیکو: $M=\theta=\{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیری او تشډیری سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:

$\{\} = \theta \neq \{0\}$

## د یوې ډېری توان یا تواندېری ( توانسټ)

پیژند ۲ ۰ ٦ :

د یوې ډیری M د ټولو برخډیریو ډیری پوتنځډیری یا په تواندیری(-سټ) بلل کیږي او داسې یې لیکو: $P(M)$ په تواندیری توکي لري، چی هر یو یی بیا خپله ډیری ده۰

بیلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډیری دا لاندې په تواندیری لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډیری چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټیک n جګ 2n توکی لري یانی : $n^{2n}$

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی ( حل-) کیدی شي( لومړی برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یې۰

پیژند ۲ ۰ ۷ : د ډیری M زور $|M|$ لاندې د ډیری د توکو تعداد یاګڼون پوهیږو۰ که دوه ډیری M او N همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیری وایو او داسې یې لیکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د برابرونونو یا مساواتو او خونديږ ساټنو خويونه

الف ) رفلکسيو- يا د انعکاس( هنداروني‌زيږ) اړيکيreflexivity

هغه اړيکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ رينتونې ويناوې ورکړ شوي وي رفليکسيويا انعکاسي اړيکي بلل کيږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړيکي رفلکسيو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هيڅ ډيرۍ د خپل ځان اصلي برخډيرۍ يا برخسټ نه شي کيدی٠

ب) سيومتريکې اړيکې Symetric relation

هغه اړيکې سيومتريک بلل کيږي، چې د شيانو ترمنځ چې کارول کيږي يا استعماليږي يو له بل سره بدليدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سيومتريکې اړيکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړيکی $M_2 \subset M_1$ نارښتيا يا ناټيک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ ) ترانزيتيويتي Transitivity يا وړون اړيکې

ترانزيتيويتي هغه اړيکې دي، چې له يوه نه وبل ته يې د وړلو امکان شته يا موجود وي٠

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته داسې لولو: که $M_1$ د $M_2$ برخډیرۍ او $M_2$ د $M_3$ برخډیرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې $M_1$ د $M_3$ برخډیرۍ ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتیو اړیکې یا خویونه دي

## ۲ ۰ ۲ په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې

ټولنډیرۍ (د اتحاد سټ )

پیژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډیریو $M_1$ او $M_2$ ټولنډیرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته وایو ده:

$$M = M_1 \cup M_2$$

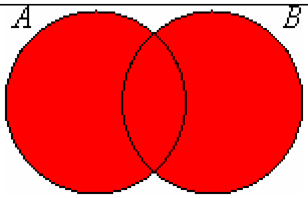
دلته داسی پوهیږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډیرۍ یا سټ ده، چې لږ تر لږه د $M_1$ او $M_2$ توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د $M_1$ یا $M_2$ توکی هم دی ( پرتله ۱ ــمه برخه د یا سره پرتله) یاني دا د ټولنډیرۍ توکی د $M_1$ یا $M_2$ او یا د دواړو توکي دي۰

یا لاندې دیاګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
|   | A ? B<br>$A \cup B$ ( B تولنه A)<br>x د $A$ سره $B$ اړيکې لري ) |

بيلګې

الف ) $M_1$ دې د ځوانانو ډيرۍ وي، چې بکلوريا لري او $M_2$ دې د هغو ځوانانو ډيرۍ وي، چې مسلكي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرئ ده، چې بکلوريا او مسلكي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري۰

ب )

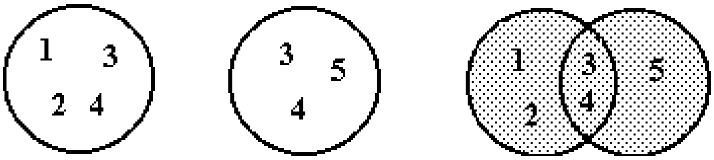
$$M_1 = \{k,a,r\}, M_2 = \{u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k,a,r,u,s,e,l\}$$

يا په لاندې توګه پيژند او بيلګه: A او B دې دوه ډيرۍ وي د دې ډيريو ټولنه داسې ليكو

B} ∈x∨A ∈B = {x | xUA

UA={1,2,3,4}     B={3,4,5}     A

B={1,2,3,4,5}




ټل په ټکو ټکي شوې ټکيدیرۍ ټولنديرۍ په ګوته کوي۰

پ – خيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيديرۍ په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف ) ټکپيردی دي۰ ب) ګډ ټکی لري۰

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره ځيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي۰

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ۰۰۰ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړپيرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو( پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی( لنډ: لړۍ ) رول نه لري۰

اسوشياتيو قانون باور لري۰

$$(M_1 \cup M_2) \cup M = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيری (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو( دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيری M د ډيری $M_1$ او ډيری $M_2$ غوڅډيری يا د تقاطع سټ ده( لوستل: $M_1$

غوڅ(پرې)په $M_2$ ( لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که د ډیرۍ M ټول توکي د ډیرۍ $M_1$ او ډیرۍ $M_2$ توکی وي.

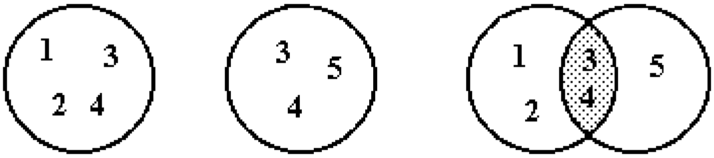
د غوڅډیرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیرۍ $M_1$ او ډیرۍ $M_2$ توکي دي ( د ۱ –مې برۍ د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3,4\}$




یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړۍ : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په $M_1$ یې په نخښه کوو. یوه بله ډله ، چې په $M_2$ یې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي. د دې دواړو ډلو غوڅډیرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

د پکتیا زده کوونکي دي.

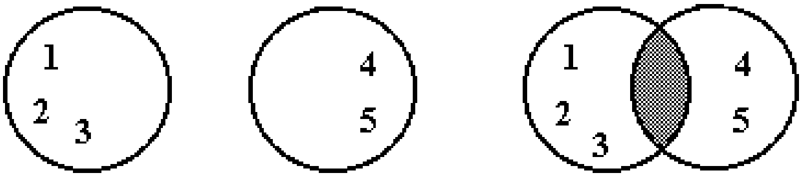
(c) ketabton.com: The Digital Library



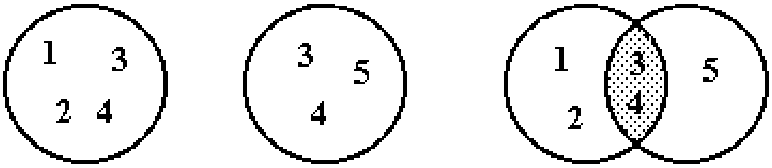
دويم:

$$M_1=\{k,a,r\}, M_2=\{u,r,s,e,l\},$$
$$M=M_1\cap M=\{r,l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښايي، چې الف) ګټون پردي دي




ب) یو بل سره ګډ ټکی لري




پ ) اړیکی

$$M_1\subset M_2$$

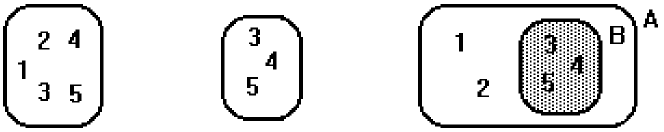
پوره کوي

بیلګه:

A⊆ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library






هغه ټکو باندې ټکي شوې ډيرۍ اصلي برخډيرۍ ده

دوه ډيرۍ، چې غوخډيرۍ يې تشډيرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردۍ بلل کيږي

د غوخډيرئ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډيرۍ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوځياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډيرۍکارونو يا ډيرئ عمليو يانی ټولنډيرۍ او غوخډيرۍ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

( د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يواځې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند :

کمونډيرئ يا تفريق سټ $M_2$ د ډيرئ $M_1$ او ډيرئ M کموالی يا فرق دئ او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د $M_1$ ډيرئ کمه شوې

يا کله چې د $M_2$ توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرئ $M_1$ توکي نه وي۰

ليکندود ياليکنډول :

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپيرډيرئ ياکمونډيرئ يا تفريقډيرئ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دئ او x د B توکی نه دئ

بيلګې :

لومړئ : په يوه ټولګي کې $M_1$ د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرئ ده او $M_2$ دټولو زده کړو ډيرئ ( د نارينه وو او ښځينه وو ) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

$M_1 / M_2$

د هغو زده کړو ډيرئ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ۵ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرئ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي۰

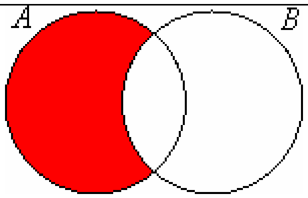
که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
|  | $A\backslash B$<br>( B بې له A )<br>( x له A سره B اړیکې‌لري ) |

دویم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګې را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

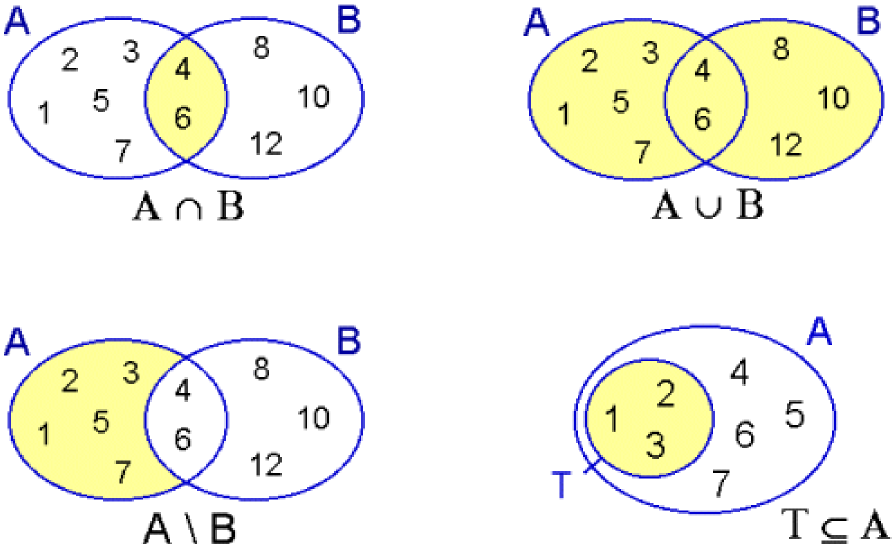
$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

## د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډېرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

مورږ بنسټډیری په U او د ټولو هغو توکو ډیری، چې U کې پراته دي یاني د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یاني د M توکي نه دي پوره ډیری یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

په لاندې څیره کې بیا د ډېرۍ غوځې، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰




پیژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ ( یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت ) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ تیک هغه توکي لري( د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي٠

دوه ځله کمپلیمنتډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي٠ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یانې دا کلی پوره کوي٠

## ۲ . ٤ څیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو٠

په دې برخه کې لومړی د ډیرۍ ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو٠

پیژند ۲ ٠ ۹ : د دواړو ډیریو M یو او2 M ډیریضرب( اتیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره ځلیږي یا ضربیږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیرۍ ده٠

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې ځل په ډیریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رییلګڼونو ډیرۍ وي٠ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیرۍ٠ RxR د ټولو رییلګڼونو جوړو ډیرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیرۍ ده٠

پیژند ۲ ٠ ۱۰ :

د څیرونې F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیرۍ $M_2 \times M_2$ برخډیرۍ پوهیږو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



پس د جوړه تنظيم شوو توکو ډيرۍ، چې $x \in M_1$ له يوه يا ډيرو توکو $y \in M_2$ سره تنظيم

يا بهتره په باندې ځيره شي٠

داسی هم ويلی شو: د1 M توکي د2 M په يوه يا ډيرو توکو تنظيميږي يا ځېره کيږي٠

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوريجنل يا اصلي توکی او y ځيره توکی بلل کيږي٠

د ټولو اصلي توکو ډيرۍ پيژندورشو يا تعريفورشو يا پيژنددېرۍ يا تعريفډيرۍ بلل کيږي او د ټولو ځېره توکو ډيرۍ د ځېروني ډېرۍ، ارزښتورشو يا ارزښتډيرۍ بلل کيږي٠

بيلګی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه دM يو توکو ځېرونه ونه يا ځېره کوونه د M دوه په توکو

ځېره توکی اصلي توکه يا ځيره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

b -----------------------→ 4

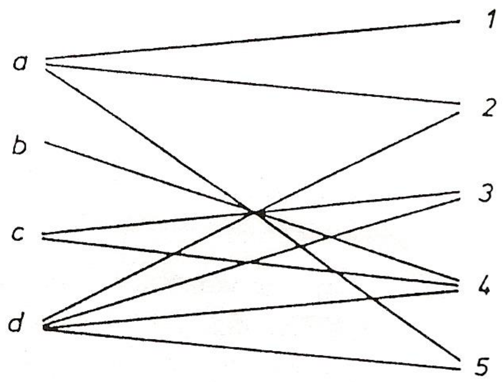
c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

يا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library






څېرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

( د M یو او M دوه ډېریو د ټولو توکو جوړو ډېرۍ)

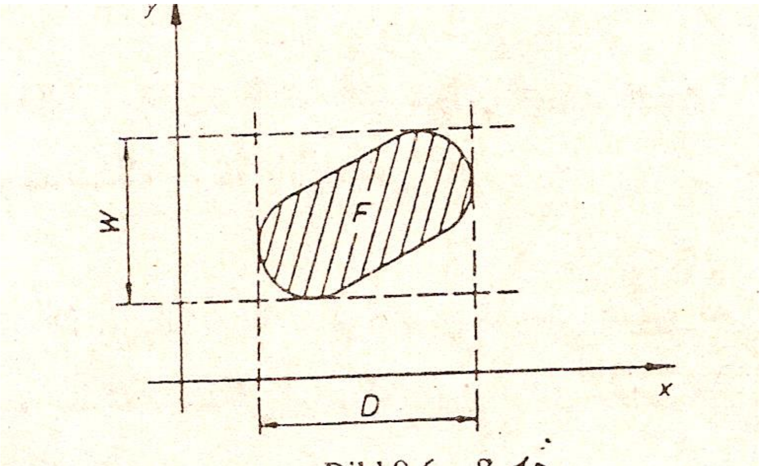



Bild 9.6 ځیره

دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې څېره کیږي۰ داسې پیژند شوې یا تعریف شوې څېره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دلته هم N د پیداینښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرئ٠ پیژندډیرئ یا تعریف- د ټولو پیداینښتي ګڼونوډیرئ ده او ارزښتډیرئ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرئ ده٠

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرئ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرئ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېرونه ده٠ د ښوونکو ډیرئ د ځانګړو ټولګیو په ډیرئ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه( دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړئ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفډیرئ D سره برابر دئ او M2 ، چې له څیره ډیرئ , W سره برابر دئ ، توکي مو مخ ته پراته دي٠

له یوې څیرونې Fغږیږو د1 M په M2 باندې٠ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غږیږو له M1 په M2 کې ( دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیږو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راواړل شي٠

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د یوې څیره ونې غږیږو له M1 په M2 باندې٠ دلته څلورمه بیلګه د بیلګي په توګه راوړو٠ د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

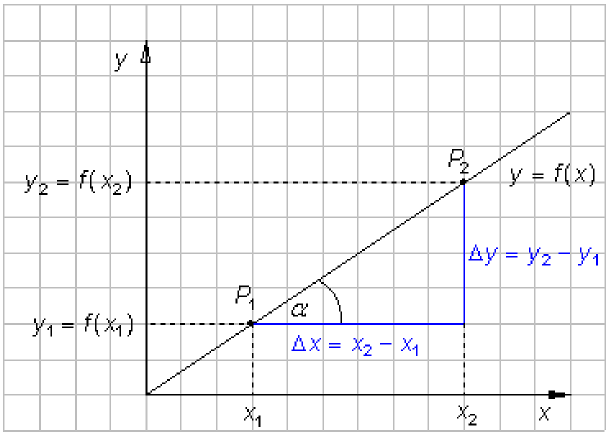


یادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید څیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دځ۰ زځ مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلې ده۰

بیلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره یا سطحه کې څرګند شوي کړی د ډیریځل RxR په څیر د برابرونونو له لارې رانیسو( R د ریلګنونو ډیری د ګڼکرښې ټکي دي( ګڼونه دې وکتل شي))۰

الف ) $y = 2x$ یوه څیره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$




یادونه : په پورته څیره کې برابرون $y = ax+b$ دی.

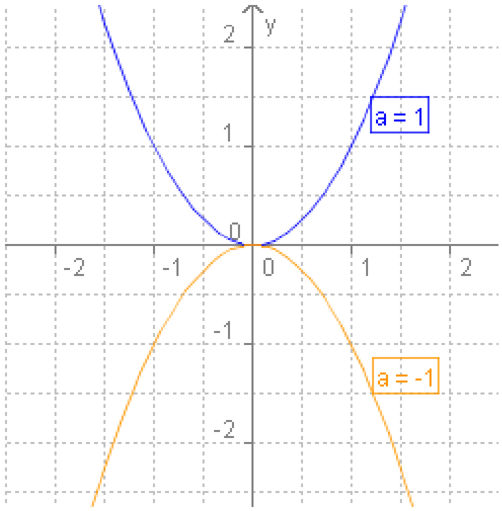
ب ) $y = x^2$

یوه څیره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ W = [0, \infty]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





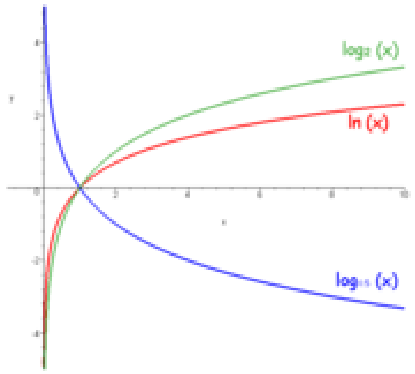

يادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1
اينول شوي دي٠

پ ) y = log x

يوه خيره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري٠

$$D = (0, \infty) \wedge W = R$$



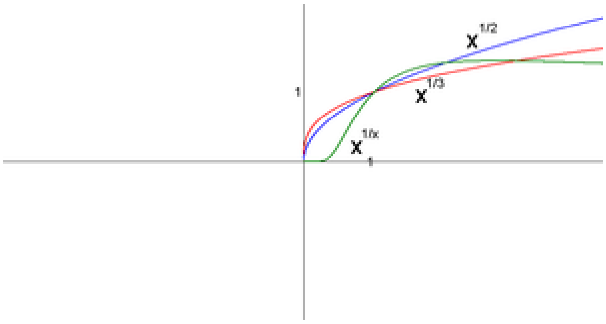
(c) ketabton.com: The Digital Library



ت ) $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، څکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$




یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې څیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

تنظیمډیری یا جوړه ډیری کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

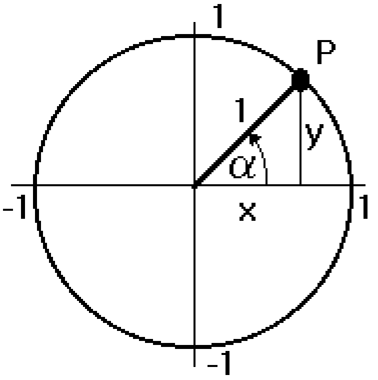
یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library






بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر څښ لاندې برابرون ( یوونګردی یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰ ) انځور شوې څیره ونه له R په R کې [-1,1]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې( لنډ:لړی ) بدله شي، نو یوې پرڅښ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅښ څیرونه $F^{-1}$ د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y) \in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنی بلل کیږي، که یواځنیF او $F^{-1}$ یوازنی څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه ( لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکي کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د يوه کتاب په څير هم وړاندې شي۰

۲ . ۵ تمرينونه

۱ – د لاندې ډېرئ يا سټ توکي د شميرنې له لارې انځور کړئ

الف $\{x$ لومړی عدد او$20 > x \mid x\}$ ( لوستل: د ټولو عددونو x ډېرئ يا سټ، چې xلومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او $0 < x|\ x\}$ دا په نوکانوکې ټول له کيڼ ښي لور ته لولو

ت ) $\{x \mid x$ رييلګن او $x^2+1=0\}$ دا په نخښه له ښي نه کیڼي لور ته ولولی

۲ – د توکو $x, y, z$ اړلرونوالی و ډيري M ته وخيږئ !

الف ) M د لمړنيو ګڼونو ډيرئ

$$x = 4\ ,\ y = 5\ ,\ z = 6$$

ب ) M د لاندې مساواتو حلډيرئ ( اوبيلډيرئ )

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0\ ,\ y = 2\ ,\ z = 3$$

پ ) M د ريشنلګڼونو ډيرئ چې په اينتروال [ 3 ,3- ] کې پراته دي

$$x = -2, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 1/3$$

ت ) M د رييلګڼونو ډيرئ چې په اينتروال [ 3 ,3- ] کي پراته دي

$$x = -4, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 3$$

۳ – د لاندې ډيريو ترمنځ کومی اسريکی پرتی دي

الف ) $M_1$د ټول جفت ګڼونو ډيرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



او $M_2$ د ټولو ټولګنونو ډیرۍ

ب ) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$ , حلونو ( اوبیو ) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ ) $M_1$ د ټولو ګنو ډیرۍ چي پر ۶ ویشل کیږي.

او $M_2$د ټولو ګنونو ډیرۍ چي په ۳ ویشل کیږي !

او $M_3$د ټولو ګنو ډیرۍ چي په ۱۲ ویشل کیږي !

۴ – د ډیرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړی !

۵ – د لاندي ډیریو څخه ټولنډیرۍ ، غوڅډیري او دواړه ټوټډیري جوړ کړی !

الف ) $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$ ، $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$ ,

ب ) $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,\ldots \}$ ، $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$,

پ ) $M_2 = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$ , $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی !

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدي ډیرۍ ټولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی !

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$ , $M_4 = \{ 6, 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3 ] \setminus M_4$ !

۹ – جوړ کړی

الف ) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ ) $M \setminus \emptyset$

ب ) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت ) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

له دې پورته څخه $M_1$ او $M_2$ وټاکی !

۱۱ – وي دي

الف ) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ب) $M_1 \subset M_2$ ,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$ !

۱۲ – وي دی $M_1$ , $M_2$ (د نیمواز) اینتروال ټکي ډیري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکی

الف ) $M_1 \cup M_2$ ب ) $M_1 \cap M_2$ پ ) $M_1 \setminus M_2$

ت ) $M_2 \setminus M_1$ ټ ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دي $M_2 = \{\{a, b\}$ , $M_1 = \{1, 2, 3\}$

الف ) د $M_1 \times M_2$ څل جوړ کړی

ددې لاندې ب ) تر ت ) برخی تمرين لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب ) دا لاندې کوم ډول څيرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبیو ) کی $F_1$ تر $F_5$ ورکړی .

پ ) په ځښ څيرونه ورکړی

ت ) د څيرونو $F_1$ څخه تر $F_5$ پورې، کوم یواځنی او کوم حتی يويواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۳ . دحقیقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

( ترنی، کارونی یا عملیي)

### ۳ . ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

#### ۳ . ۱ . ۱ طبیعی اعداد یا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده۰ له دې امله یې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چی له ډیری (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیری پوهنه هم څیړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډیری تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال( طبیعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی( کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د ریښتینو شیانو څرګند څومره والي ( کمیت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳۰۱۰۱۰۱ الف د طبیعي عددونو(پیداینښتي ګنونو) جوړښت

پیژند (تعریف)۳۰۱:

الف ) ټول طبیعی اعداد د ډیری په څیر یوه ټولګه جوړوي او د طبیعی اعدادو ډیری یا سټ په نامه یادیږي یا یې طبیعی اعداد بولو او په N او همداسې $N^{\circ}$ سره یې په نخښه کوو۰

ډیر پای طبیعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد هم شته دی ( یعنی په هرڅومره لوي طبیعی عدد پسی راتلونکی طبیعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کیږي)۰

## ب) دطبیعي ګڼونو(اعدادو) اکسیوماتیکيAxiomatic جوړښت

اکسیوم جمله ده، چی اوبیونه ( حل ) نه غواړي او همداسی منل کیږي۰ دا چی جمله ، اکسیوم څه دي په لومړی برخه یانې سم اند ( منطق ) کې دې وکتل شي۰

طبیعی عدد کلمه د جیوسیپې پیانو( Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توګه تعریف کیږي:

۱ – د صفر ګڼ یو پیداینښتي ګڼ دئ

۲ - د هرطبیعي عدد یا ګڼ m لپاره یو یواځنی ټاکلی طبیعي عدد n شته، چې سملاسي(تړلی) د m پسی ګڼ دئ، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته $m^{\wedge}$ د m پسې سملاسې یا تړلی ګڼ یا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبیعي عدد زیات له زیاته په یوه طبیعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دئ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



٤ – هيڅ طبيعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پيداينښي عدد يې صفر وي٠

۵ – که طبيعي عددو ډيرئ M صفر د توکي په څير ولري او که له هر طبيعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد يا ګڼ `m هم د M توکی وي، نوM ټول

طبيعي عددونه خوندي لري يا په بل ډول » ټول طبيعي اعداد په کې ځاي دي٠

يادونه: ځنې ادبياتو کې، د پيانو سيستم کې، د صفر په ځای ۱ ليکل شوی. په دې حالت کې بيا صفر ته د طبيعي عدد يا ګڼ په څير نه کتل کيږي. که بيا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبيعي ا عدادو ډيرئ يا –سټ يې د صفر سره بولو.

## ۱ . ۱ ب : د طبيعی اعدادو يا ګڼونو انځورونه او سيستمونه:

طبيعي اعداد په نخښو ( دې ته په الماني کې Zifferوايي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څيرو، دی) انځوريږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونيسي، نو د لويو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنيو سره يوځای کيښول شوې دي. دا چې څرنګه يوه د عدد يا ګڼ نخښه له بل توپيريږي، په لاندې ډول يې د زياتون يا جمعي سيستم او ځای سيستم کې ښايو.

په زياتون سيستم کې هر بنسټيز ،،ځای،، يو ،، ځای ارزښت،، لري. د څيفرونو زياتون د يو په بل کې د ورزياتشوي بنسټيز څيفر پخپله هغه عدد يا ګڼ ورکوي. بيلګه يې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټيزو څيفرونو جوړ شوی( ترې لاندې لسيز د اعدادو سيستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څيفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پيل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رومي عددونه: | M | D | C | L | X | V | I |
| عربي عددونه: | 1000 | 500 | 100 | 50 | 10 | 5 | 1 |

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنګ ليکو چې کم ځای ونيسي لکه د بيلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کی، که بنسټيز کوچني ګڼنخښنی لکه C , V , I د لوي ګڼنخښنی و کيڼ لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چی دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی.
د بيلګي په توګه: XC = C - X .

بيلګی: الف: MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځايسيستم: په ځاي سيستم کی هره بنسټيزه نخښه يو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئيز ځاي سيستم ( پوزيشن سيستم ( Positionssystem ) ): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئيزځای سيستم کی په دې ډول ده چی د يوه ورکړشوي ستنی په بنسټ( g ∈N ) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوريدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + .... + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټيزې ګڼنخښنی $a_i$، g د $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چی $a_k|=0$ وي په کار راځی يا اړتيا ورته شته.

ليکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} .....a_1 a_0$$

که د بدليدلو ( د بل څه سره ) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چی په

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندي ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګټل په لسیز سیستم ( ګنځای ارزښت ) باندې کیږي، چې تل داسی نه وه، لکه په افغانستان کي چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

---

په لسیز سیستم کی ګنځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چې کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چی تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چی نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعی – ) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چی دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښبه I, X, C کړای شي چی زیات ترزیاته ۳ ځله( ۳ واری ) په یو ګڼ کی پرله پسی یا څنګ تر څنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښبه V, L, M خورا زیاته یو ځل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنستیز نخښبه I, X او یا ..........__-- ددې نخښبو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښبو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي )

(c) ketabton.com: The Digital Library



۴ – په هرګڼ انځورونه (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC

۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښبی په کار واچول شي.

**عربي ګڼونه** : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر ( ۰ ) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چې

ځیفر ورته وای (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښبی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

> **تعریف ۱ . ۱ ب** : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چې زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي ( مساوي وي ) نو هغه ګڼ ستر دی چې له کینی لورې یې نخښبه لویه وي.

**لسیز – یا لسګونی سیستم**: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونی یې څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښبی، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښبه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی ( ترتیب یانظم ) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې ډول د پسې جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخبنو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، خموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge) ۹ —امه برخه دې وکتل شي) ) غږو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. تولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, .....\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... . n . دا ریښتونی

( ریښتینوالی یا واقعیت ) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ ( ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی) ) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخښبنډیري لسیز سیستم په کار اچوو ( استعمالوو )

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښبنو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \cdots a_2\, a_1 a_0 = a_n . 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} . 10^{n-2} + ..+ a_2 . 10^2 + a_1 . 10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیک (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم ( Dualsystem ) ( دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښبي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

| لسيز سيستم | دوه ئيز سيستم |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 10 |
| 3 | 11 |
| 4 | 100 |

په ټوليزه توګه( عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \; a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.\,32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$
$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.\,2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرئ يا سټ داسی په نخښنه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرئ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرئ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1 , 2 , \ldots . \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي۰

## ۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي۰ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو۰ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد یا ګڼونه دی۰

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی۰ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي۰

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي۰

پیژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري۰ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون ( تعداد ) سره برابر وي۰ نو بیا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کینې لور یې ګڼنخښه لویه وي۰

### ۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینت ګڼونو، په ټولیزه توګه د ریيل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري( معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف : د اندول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب( Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی٠ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم $a = a$ به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity )

۳ – له $a = b$ => ( لاس ته راځي) $b = a$ ( سیومتري، اندول، ورته واني ( Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه وراینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي٠ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو٠

٤ ـ له $a = b$ او $b = c$ => ( لاس ته راځی) $a = c$ (ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي٠

۵ – له $a < b$او $b < c$ => ( لاس ته راځی) یا $a < c$ یا $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library



به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړینه ده۰

ب : د زیاتون ( جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه( عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چې ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» ( ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه ( مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون ( جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتیو- یا بدلون قانون دی: a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوځیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library



له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې $a$ او $b$ زياتېدوني $a+b$ زياتون او $c$ زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په $N^{o}$ کی يو توکی شته، چی که د هرپيداينتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی۰

## پ : د کمون ( تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيداينتي ګڼونو$a$ او $b$ لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو $x$ شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي( موخه $x$ دی)

نومه ونې: $b$ کميدونی يا مفروق ( تراوسه مې کمونی بللی) $a$ ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او $x$ کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونومو:

$$20 – 10 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کمیږي( ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« یا کمیدونی( ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه( لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

## ت : د ځل ( ضرب)Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي ګڼونوa اوb لپاره د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو ځلa.b شته دی. د a.b لپاره داسي هم لیکوab په پورته کې aاوb ځلووني ( ضریبونه) اوab=x « ځل ارزښت » یا ځل( حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع ( که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له a = ´a اوb´ = b څخه لاس ته راځي a´b´ = ab ( یواځیتوب)

۳ - لرو ab = ba کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library



٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشياتيو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ويشوني- يا ديستريبوتيو قانون Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتيتوالي يا يوغړيزوالي قانون Monotony

ټ – د ويش بنستيز قانون Division

پيژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبيعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي يانی صفر نه وي يو طبيعي عدد x شته، چې برابرون ( مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ يا b/a د b او a ويش (تقسيم) بلل کيږي، چې ماتګړ(کسر) يې هم بولو

١ – که $a / b = x$ يا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته يا موجود وي ، نو يواځنی شته دی( يواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او يواځې همدا ګڼ x دی )

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ويش ارزښت، b ويشونی يا ويشه ونی دی، ځکه چې په يوځه ويشل کيږي او a پرويشونی بلل کيږي، ځکه، چې څه پر ويشل کيږي يا مقسوم، مقسوم عليه يا قاسم ، حاصل تقسيم ۰

ګورو چې له قاسم يا مقسوم او همداسی د مقسوم عليه او حاصل تقسيم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- يا پرې ويشونی ، ويشه ونی اوويش ارزښت يا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهوړ دي، خو په خواشينی به وه وايم، چې تراوسه په شميرپوهنه کی ورسره نابلد يو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وويشو، نو هر يوه ته درې کتابچې رسيږي٠ ګورو، چې ۱۲ په يو څه ويشلکيږي، نو ويشونى يې ښه نوم دی٠ دا ۱۲ په څلور ويشل کيږي پر ۰۰۰ ويشل کيږي، نو له دې امله څلور پر ويشونى بولو، درې يې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسيم وايه، له دې امله ورته ويش ارزښت وايو او دا کارونه يا عمليه خو ويش بلل شوی٠

## ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګنونه يا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبيعي عددونوa او bکمون يا تفريق (x= b-a ) ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته د طبيعي عددونو ډيرى يا سټ کى شته، چې وي : $a \leq b$

د شميرپوهنې نخښنو باندې داسې ليکل کيږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انګريزي يې if and only if ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته( دا شننه يا وينه پورته د شميرپوهنې نخښې ته ده)٠

که هغى نخښى ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګنديږي، له ښى لور کيڼ لاس ته راځى او په څټ( برعکس) له کيڼ لور ښى لاس ته راځى٠ يا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځى او په څټ٠

ټولګنونه يا تام اعداد هم د انسانانو د اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلي ، يا منځ ته راوړل شوي٠که چيرې سپين د خړ ۱۰۰ افغانىپوروړى وي او سپين ورته اتيا افغانۍ ورکړي، نو سپين بيا هم شل افغانى پوروړى پاتيږي، دا په دى ما، چى ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چى ۲۰ – يو پيداينتي ګڼ يا طبيعي عدد نه دی٠يا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library



په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی۰ اوس يوه د اعدادو بلې ډيری پېژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي( منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي( په ډيری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډيری ده او داسې يې ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{ .... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ..... \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيداينتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيداينتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې ( کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايې د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيری

}        Z = { .... -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ....

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيداينتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين ( پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۲۰۱۰۳ الف  د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یې لپاره  خورا ګټور دی باور لري

الف )   یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ) ویشونی دی، که د اخر ځیفر یا کور ( له اخره( موخه تری ښی لور دی)   دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنسټیزو ځیفرونو ) څخه جوړ ګڼ په ۲ ( ٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي)    په دوه ویشونی ګڼ جوړه ( جفت) نومیږي او بل ډول یې ناجوړه( طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چې دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب )    یو ګڼ په ٥ ( ۲٥ ، ١۲٥ ، ٦۲٥ ، ۰۰ ) ویشونی دی، که د اخر( له ښي لور) بنسټیز ځیفر ( د اخر دوه، درې ،  څلور ، ۰۰۰ بنسټیز ځیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ ( ۲٥، ١۲٥ ، ٦۲٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چې ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ )   یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنسټیز ه ګڼونخښو(ځیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون  یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت)    یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري( نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



الترنيري پروت زياتون، چې پروت کمون هم ورته وايی له بنسټيزو څيفرونو ١ ، ٣ ، ٥ زياتون څخه د ٢ ، ٤ ، ٦ ،٠٠٠ زياتون کمون پوهيږو ، بی له دې، چې ځاي ارزښت يې په پام کی ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کوړ زياتون څخه د جوړه د زياتون کم کړو٠

بيلګه: ١٧٣٨ په ١١ ويشوني دي، ځکه، چې : ١٥= ٨+ ٧ او ٤ - = ٣ – ١ -، چې الترنيري زياتون يانی ١١ = ٤ – ١٥ يې په ١١ ويشونی دی٠

ټ ) يو ګڼ پ ه ٣٧ وېشوړ دی که ( د ګڼ له اخر څخه جرړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ٣٧ وېشونی وي.

بيلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37 |20216352448

ث ) يو ګڼ په ٧ همداسي په ١٣ ويشوړ دی، که د هغه ( د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ٧ همداسي پر ١٣ وېشونی وي.

بيلګې : 7|(604-37)⇔ 7 | 567 ځکه چې 37604 | 7

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) يو ګڼ په ١٠١ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنيري زياتون په ١٠١ وېشونی وي.

بيلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library



يادونه : كه پيداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، كه وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او كه پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي ياني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

## ۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرويشونى او خورا كوچنى ګډ زياتځله

يا بزرگترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو تويټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان( په خپل ځای کې دې وكتل شي) يا جګګڼ بې تيټ يا كم وي . ياني

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ ياني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي ياني د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دئ او خورا غټ پرووېشونی هم دئ. ياني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لنډ : ۵۲ د یورته ګټونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو ( لنډ ونه يې : غ ګ و )

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګټونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا ,,

غټ ګډ پروېشونی ,, ( لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(بزرګترین عامل ( مقسوم علیه ) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګټونو لومړني ځلهووني، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا يې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګټونو ګډ زیاتځله دی ( یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګټونو دواړو ګډ زیاتځله( څو برابره ) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګټونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ يې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله ( لنډونه يې: خ ګ ځ) یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)Least common multiple(l.c.m.)

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګران هيوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر يا بيخي پوهوړ او ساده وي.

وريسي داسي مخ ته ځو:

دا چې موږ په پيدايښت يا طبيعي ګڼونو کې له شميرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پيژند ورکوو:

پيژند( تعريف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې تولګڼونه وي۰ وايو چې « ګڼ a ګڼ bويشي» ( او يا هم a د bپرويشونې دی او يا همa د b څو برابره ( زياتځله ) دی) که يو تولګڼ u شته يا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره ليکوa|b (وايو، چې ګڼ aګڼ b ويشي ، خو اړيين يا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وويل شي۰

که a د bپرويشونی نه وي، نو د دې لپاره ليکوa|/b(دا نخښه /| دې د نه ويشونی لپاره ومنل شي)

بيا ليکو، چې : پيدايښتي ګڼونه، چې په ۲ ويشل کيږي جوړه ( جفت) ګڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه ( طاق) ګڼونه بلل کيږي۰ د صفر ګڼ د پيدايښتي ګڼونو په ډيری کې يو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې يا اوبيونې د دې ويشکلمی لپاره يو څو ساده شميرقاعدې را يوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کيږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه يا زړه پورې تولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

( ۱ ) 1 ± او a± ويش ( دا په نامه « ساده» پرويشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



(۲ ) د ۱ پروېشونی ۱ او ۱ - دي

( ۳ ) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 یوائی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

( ٤ ) له a|b او b|c <= a|c

( ٥ ) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ۰که c |= 0 وي ، نو د دې په څټ هم باوري

دي۰ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري۰د ګڼونو

لیکدود له مخې، که نړیوالجال ته پورته شو داسې لیکو، که نه دا پورته بسیا

کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

( ٦ ) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څټ ac| bd لنډه لیکنه یې(که ن ج ته پورته شوه ): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

( ۷ ) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

( ۸ ) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

( ۹ ) تیک هلته a|b کله چې وي|b| | |a|،

( ۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي - | b| < a < |b|

حل ( اوبی ) : ( ۱ ) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

( ۲ ) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو یو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چې وي 0u = a

او له کومې چې لاس ته راځي a = 0 .

( ۳ ) ساده دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



( ۴ ) که a | b او b | c , نو تېولګنونه u او v د au = b, bv = c سره موجود دی . له دې لاس ته راځي c = bv = a(uv) ، پس a | c .

( ۵ ) که a|b ، پس يو تېولګڼ u د au = b سره موجود دی، او هم د (ac)u = bc سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي ac | bc . د c |= 0 لپاره دا اخرنتخير په ثبت کيدی هم شي.

( ۶ ) د a|b , c|d او ( ۵ ) څخه لاس ته راځي چې ac|bc او bc|bd ، د ( ۴ ) له مخې ac | bd .

( ۷ ) د a | b او b | a څخه د تېولګنونو u او v موجوديت لاس ته راځي د au = b او bv = a سره. برسيره پر دې لاس ته راځي a(uv) = a , پس a=0 يا u=v=±1 . په لمړي حالت کی د a | b له امله b = 0 , پس a = b . په دوم حالت کی a =± b دی.

( ۸ ) د تېولګنونو u , v لپاره دې au = b او av = c ، نو له دې a(ux+vy)=bx+cy لاس ته راځي، پس a | (bx+cy) د تېولو تېولګنونو x او y لپاره.

( ۹ ) وي دې a|b . له a | b ، a| | a| او |b| | b څخه او د ( ۴ ) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې |a| | |b| . په ثبت: که |b| | |a| باورلری، نو د |b| | |a| ، a | |a| او |b| |b څخه په ورته ډول لاس ته راځي a | b .

( ۱۰ ) دی a | b ، پس د ( ۹ ) هم |a| | |b| . که b |= 0 وي ، پس يو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د |a|u = |b| سره، له کوم چې |a| ≤ |b| لاس ته راځي.

که b|a د تېولګنونو a,b لپاره د b |=0 سره، نو يو يواځنی معلوم ګڼ q شته ( د a او همداسي د b «کومپليمنت پرويشونی» بلل کيږي)، چې لرو a = bq .

په تېوليزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



جمله ۳ ۰ ۲ ( د ویش الگوریتم): a او b دې تولګټونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي تولګټونه q او r (چې د a پر b ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \ \wedge \ |0| \leq r < b$

هر یو تولګټ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی $\pm 1$ او پخپله د دې تولګټ زیاتیز( مثبت) او کمیز( منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو تولګټ، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګټونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګټونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګټ د پیدایښتي ګټونوتوکی دی۰

هریو تولګټ، چی لومړنی ګټ نه وي د لومړنیو ګټونو په ځلونو( ځله وونو)(ضربیونو) توټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

1 - $240 = 24 \cdot 10 = 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

-2 $2310 = 2 \cdot 1155 = 2 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

$3750 = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګټونو کی ګټ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګټونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګټ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګټونه ویشي او شاید په دې ګټونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورته درېواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګنونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګنونو غ۰ګ۰پ دیَ

پیژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګنونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی( لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونګي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرې d او *d دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



چی $d^* \mid d$ او $d \mid d^*$ ، نو د $d, d^* \geq 0$ له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسي غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :

په خوښه ټولګڼونو a او b لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو ټولګڼونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل( اوبی): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون ( په پام کی دې وي چې د ( a , b ) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چی $b \mid = 0$ ونیسو.

موږ اوس رکورسیف (rekursiv ( دا په دې مانا چی د مخه غړي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي )

ټولګڼونه$r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$ او $q_1, q_2 \ldots\ldots\ldots$ په لاندې ډول تعریفوو: وي دې $r_{-1} = a$ , $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $|r_{i-1}| = 0$ لپاره ټولګڼونه $r_i$ , $q_i$ داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی ( ۱ . ۳ ) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \mid = 0$ مګر $r_{n+1} = 0$ ، چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن ) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

...................

.............

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسی) لاس ته راځي:

$r_n | r_{n-1} , r_n | r_{n-2} , \dots r_n | b , r_n | a$

دا په دې مانا چی $r_n$ د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسی لرو

$t | r_0 , t | r_1 , t | r_2 ,\dots, t | r_{n-1} , t | r_n$

دا په دې مانا چی $|r|$ د a او b غ گ و دی.

هر د دې گڼونو $r_i$ د ( $-1 \leq i \leq n$ ) سره، په ځانگړي ډول $r_n$ او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینی کمبینیشن دی، په لاندې ډول $au + bv$ , چی u او v ټولگڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که یو د a او b یو لاینی کمبینشن ښوونه د $r_{i-1}$ او $r_{i-2}$ لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسی $r_i$ د ځای په ځای کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ایندکشن له لاری غوښتنه لاس ته راځي. ( پای )

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې گڼیزې دندې یا کارونی (عملیې) شیماتیکي اوبیونې( حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سرهx او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپلیځیتExplizit ( لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلگه:

غوښتنه $d = ( 2124 , 1764)$ ۰ د اویکلید الگوریتم کارونی له لارې لرو:

$2124 = 1 . 1764 + 360$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چې $d$ له $x$ او $y$ سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د $a$ او $b$ لپاره لاندې مهمه پیژند نخښه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاریږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بی له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په ختِه کې د ګڼونوتیوري دنده ده، چې په ګڼونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

$a$ او $b$ دې ټولګڼونه وي. د $a$ او $b$ یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د $a$ او $b$ ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د $a$ او $b$ ټولګڼونو سره انځور کړای شو۰ په ځانګړي ډول $a$ او $b$ هلته او هلته ویشپردي دي، که ټولګڼونه $x$ او $y$ شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ړ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېري پورې اړه لر او دلته یې نه ښایو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې تولګڼونه وي۰ د a او b هر ګډ پرویشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پرویشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱( جمله ګئ)( اویکلید): په خوښه تولګڼونو aاو b او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف ۲ ت : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دې تولګڼونه وي $(n \geq 1)$, او d دې یو نه منفي تولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d \mid a_i$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره

ب : له $t \mid a_i$ څخه د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره لاس ته راځي $t \mid d$.

نو d د $a_1, \ldots, a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسې لیکو $(a_1, \ldots, a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $a_n$ , .... , $a_1$ لپاره د داسی غ ګ و یواختتوب په ۳ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یي لرو :

> جمله ۳ . ۱۳ : د خوښي تولګنونو $a_n$ , ... , $a_1$ لپاره ( $n \geq 1$ ) غ ګ و موجود او $d$ د $a_n$ , ... , $a_1$ خطي (لایتي) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی
>
> $$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$
>
> د مناسبو تولګنونو $x_n$ , ... , $x_1$ لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$( a_1 , .... , a_n ) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو $a_n$ , ... , $a_1$ د ( $n \geq 1$ ) لپاره. سمی کړی شي چی د $a_1,...,a_n$ غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل ځخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن ځخه کار اخستل کیږي چې په ۸ -امه برخه کې ځیړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګڼونه 240 او 3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او 748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748 ) يا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

٣ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114 ) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرويشونی نه لري دا موږ پرويشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

## خورا کوچنی ګډ زياتځلی(کوچکترين مضرب مشترک )

موږ په لاندې کې د خورا کوچنې ګډ زياتځله ( لنډ: ک ګ ز) کليمې په څېرنه پيل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ يوه دوه ييزه يا دوه ګونی يا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټوليز پيژند ورکوو

تعريف ۲ . ت : $a_1 ,....., a_n$ دې ( $n \geq 2$ ) ټولګڼونه وي، او v دې يو داسی نه منفی ټولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i | v$ د $n$ , ... ,, $i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د $n$ , ... , $i = 1$ لپاره لاس ته راځي $v | w$ .

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زياتځله( لنډ : ك ګ ځ ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n ]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند (د دوه ګڼونو لپاره )

a او b دې تولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

( ۱ ) $v|a$ او $v|b$

( ۲ ) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله ( لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [ a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دی او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو :

دتولګڼونو ( $n \geq 3$ ) $a_1 , \ldots a_n$ لپاره لرو $[ a_1,\ldots,a_n ] = [ [ a_1 ,\ldots,a_{n-1} ], a_n]$

او هم $|a_1a_2| = [a_1 , a_2 ] ( a_1 , a_2 )$

لاس ته راوړني ( داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی ): د په خوښه تولګڼونو $a , b , c$ لپاره باور لري: له $b | c$ , $a | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژنده :

يو ټولګڼ $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشونv بل پرويشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله ): که p يولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \le i \le n$ سره.

حل ( اوبی ): حل يی د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چی ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخته تيرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \le i \le n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بنسټ.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه ( د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيداينتي ( طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پورې، په يوائڼي او يواځني ( يويواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يواځی يو ډول ليکل کيدی شي او بس٠ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير ليکل کيدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي )
د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي ) ځل په ځير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library



شوي وي. موږ اوس ټول د n پرويشونی $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرويشونو کوچنی پرويشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پرويشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرويشونی وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په څير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيوګڼونو د څل په څيرليکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د يو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$ . داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ايدکشن له نيونی لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او ( او د ترتيب بدلون ) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

> جمله : هر طبعی ګڼ n په ټيك يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي
> $n = \prod_p p^{\nu_p}$ (0 $\leq \nu_p$ ، $\nu_p = 0$ يواځي د پای ډيرو p لپاره ). ( $\nu$ نيولو شتل کيږي)
> چيرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکې لړۍ پرلپسې کې ځغلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 2^2.7$ , $n = 28$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a, bc) = 1$ ، نو هم $(a, bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a, bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد (a,c) =(a,b) = 1 سره تضاد دی.

> جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه ( تجزیه ) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} , \quad [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو $\alpha_p$ او $\beta_p$ خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b) = 2^2.3^2 = 36$
او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورېتونه ( تجزيه ) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \quad , \quad [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چېرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو $\alpha_p$ او $\beta_p$ خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بېلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ خخه سم د لاسه له دوو څخه زياتو تولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو څو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دي كه نه اويكليد لخوا خواب ورکړ شوی. لاندې يو ښكلي خواب دی چې له هغه رينښه نيسي:

جمله: ناپاي ډير لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو ( ۸ –امه برخه دې وکتل شي ) او نيسو چې پايډير لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , ........, p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونكی دی. د نيونې له مخې لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p | p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p |1$ .کوم چې ناشونی دی ( ناممكن ) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یادونه : د میلاد څخه پخوا د« اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دځې متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~

~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~

~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~

37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~

~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~

~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~

~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~

~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

## ۳ ۰ ۱ ۰ ۳ ـ راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

( لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راڅیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابروننخښه ده۰ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیری کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګڼیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ ( دلته هم $b$ پر$a$ ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګڼونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګڼونو ډیری ماتګڼونو(کسر) ډیری‌ته پراخه شي، چی د لومړي ځل لپاره افاده یا وییته $b/a$ سومبولیک مانا لري، د نوو ګڼونو په څیر نیسو او په ټولګڼونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وایو۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

$cb / ca$ هلته باور لري، چې $c \neq 0$ دټولګڼ او$a$ |$b$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډیری، چې په $Q$ سره ښایو د ټولګڼونو ماتګڼو $b/a$ چې $a \neq 0$ او$a$ او $b$ د ټولګڼونو له ډیری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون( دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونو$a$ ،$a \neq 0$ او $b$ لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

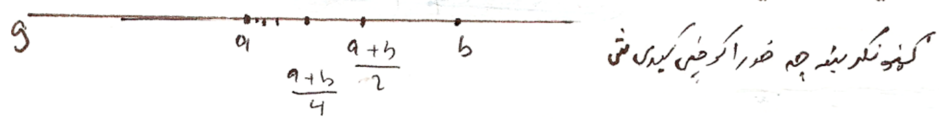


## ۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رييل ګڼونه( Real numbers (reele Zahlen

( فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريښنلګڼ په بنسټ هغه ورځني تيوريکی اړتياوي چې د شميرعمليو بی بنديزه (نامحدود ) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريښنلګڼ له لارې کيدی شي چې د کرښی اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زيات ګڼونه، چې په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کی هر ټکی د ريښنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ريښنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چې د «ايريښنلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische ) (د ګڼونو کړی نه شليږي ) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بيلګي په توګه د مربع د نيمي(قطر ) x اندازه چې د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چې په ريښنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$ , پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ریبلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» ( لیمس lim ) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راڅرخي مساوي(ورته ) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

ریبلګنډیری R چی په ریشنلګنډیري د ایریشنلګنډیري ورزیاتول دي چې له ۱ . ۱ . ۲ تر ۳ . ۱ . ۲ برخی پورې ټول بستزقوانین په کی باور لري. د ریبلګڼ له لارې دکربښی ټول ټکي په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول ریبلګنونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ریبلګڼ حل یا اوبی نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

موړ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که موړ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی ( تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی ) دي۰ داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو۰

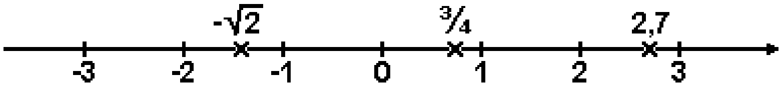
تل بیرته راګرځیدنیز ( periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو( دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) . ۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیدایینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه




۳ ۰ ۲ - رابیلشوی( له نورو - ) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني ) سره شمیرنه ( نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو ( کسرونو ) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول ( واړه کول ) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي ( مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی( مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنستیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$- ( -a) = a , \quad a – b = a + (-b),$$

$$( a+ b + c \ldots -c –d-\ldots) + (e+f +\ldots-g-h-\ldots) = a+b+\ldots-c-d-\ldots+e+f+\ldots-g-h-\ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه ( د جمع علامه ) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه ) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي۰ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي۰ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a +b+\ldots-c-d-\ldots)-(e+f+\ldots-g-h-..)= a+b+\ldots-c-d-\ldots..-e-f-\ldots\ldots+g+h+\ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه ریيلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چې لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بي اړیکو ګڼ (absolut number )

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون( واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس۰

$$|a| = a \ ; \ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , ( -a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بیلګه:

(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)

= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

**بیلګه ۱ . ۳ :**

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$ .

$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2$.

$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې $b:a$ د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري٠ پر صفر ويش ناشونی دئ

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي٠ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سرې د ګډو ځلوونو يا فاکتورونو يا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځايه کيدی شي، چې د بولينوم وېش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \text{ باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad \text{لپاره} \; ab \neq 0$$

د يوه زياتو يا چمعې وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جکلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a+b) = a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b$.

بيلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a+b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b$.

بيلګه ۳ . ۸ : $\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$ :

باقي يا پاتې $b^2$

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ باقي $a \neq b,$

بیلګه ۱ . ۱۰

$(16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}\,v) = 4u - \sqrt{2}\,v$ Rest $v^2$ باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال وړ د دوه پولینومونو ویش دی ( برخه ۱۲ دي اندول(پرتله ) شي ):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجی لوي یا مساوي وي( $n \geq m$ ).

موږ نیسوچی: $Q_m(x) \neq 0$ او $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ .

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» ( پارځیالویش( Partialdivision ) ) دا دي چی دا

د $P_n(x): Q_n(x)$ ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom 1}+\frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجي څخه کوچنی ده.

دي هدف ته په لاندي ډول رسیږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ویشي او له دي سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}: Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲ – سړی ( * ) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راخي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی ( باقي ) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – توپه ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د توپه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که ( د پای ډیرو پلونو (قدمونو ) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د توپه ویش ۱ او۲ پلونه ( قدمونه، کدمونه ) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| | $P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1) x^2 + F(x)$ |
| $(a_3 / b_1) x^2 Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$ | $(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 \quad + F(x)$<br>$6x^3 - 4x^2$ |
| $P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1) x^2 Q(x) =$ | $9x^2 - 3x + 1$ |
| $F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$ | $(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$ |

بیلګه ۱۲ . ۱۲ : د تیرته ویش بیلګه ۱ . ۱۱د F ( x ) غلطي ته دوام ورکوو، ترڅو چې د لیکنې شکل لنډ شي:

$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) = (9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 3x + G(x)$

$3x . Q_1(x) \qquad = \quad (9x^2 - 6x)$

پاتي $\quad = \quad 3x+1$ یاباقي

$G(x) = (3x+1) : (3x-2)$

له دې لاندې نتیجه لاس ته راځي :

$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + G(x)$

$G(x) \quad = (3x+1) : (ex-2) = \quad 11 + H(x)$

$Q_1(x) = 3x-2$

یاباقي $= \quad 3$ $\quad =$ پاتی

$H(x) = \quad 3 : (3x-2)$

پس باور لري

$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تول توته ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته یووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) $3$

دلته ( i ) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$

(2) $\underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $\underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $\underline{3x^2 + x - 1}$

(9) $2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشميرنه ( کسرشميرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د تولګڼونو m,n څخه د ريشنلګڼونو انځورونو لپاره تعريف شوې۰ کيدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رييل ګڼونه دي، وغزول شي۰

بايد په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بيلګي په توګه:

ويش(a/(b-c تيک هلته مفهوم لري، چې $b \neq c$ وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښايي

لکه a : b او يا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم بايد b |=0 وي.

په اخر کې بايد په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کيدی شي او هم دواړه۰ دا بايد دلته هم په پام کې وي، چې هيڅ يو ماتلاندې ګڼ بايد صفر نه وي يانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور يو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کيدی دا موږ د ماتو مات ( کسرالکسر) بولو۰

بيلګې:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 \quad ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b|=0, c|= 0$$

$$(a/b): (c/d) = (a/b) / ( c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0$$

يا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c},b\neq 0,c\neq 0,...,\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0$$

په څو واره ماتګښ کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګښ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c},b\neq 0,c\neq 0$$

د ماتګښ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګښ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c};a\neq 0,y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یوازې فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګښ

(c) ketabton.com: The Digital Library



(a+c):b+c) چې b≠- c وي نه شي لنډیدی دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 \/ -c |= a, a = b

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګښونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه :
$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$$

که چیرې پرښت یا برعکس ماتګښونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو ښخه دی۰ د بیلګې په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګښونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه:
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

ا ۰ م ۰ ل ۰ 97200= 2.3.5.6.15.36 =

کیدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنیو ګڼونو څل په څیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

-----------------------------------------------

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ یا لوړ جګګڼ یا لوړ طاقت لومړي څلووني رانیول کیږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په تولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یی ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بیلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې یواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره یانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

a = a

b = b

ab = a b

$a^2 . b = a^2 \quad b$

$ab^2 = a \quad b^2$

-------------------

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وييني يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

$a^2$ - 1 = (a-1)(a+1)

$a^2$-4 = (a-2) (a+2)

---------------------------------------------------------------

$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې مات ماتباندې صفر دي‌په دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1,\forall\,|a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی۰ دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل۰ د ګڼؤنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N\subset Z\subset Q\subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دئ او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه۰ دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي۰

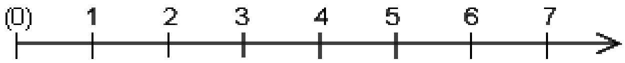
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه راالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي۰

ګڼونډیرئ ( لنډه ټولګه)

پیدایینتي – یا طبیعي ګڼونډیرئ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایینتي ګڼونو انځورونه



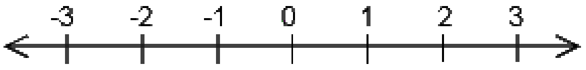
(c) ketabton.com: The Digital Library



د ټولګڼونو ډیرى

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

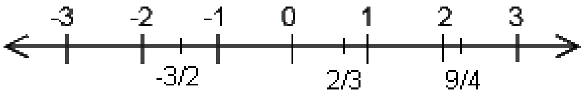
د ټولګڼونو ډیرۍ انځورونه په یوه کرښه




د راشنلګڼونو ډیرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} | p, q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي




هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیکی ګڼ په څیر لیکل کیدۍ شي

د ماتو سره شمیرنه

د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بیا يې هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل ۰ لکه چې یو راشنلګڼ نه دۍ

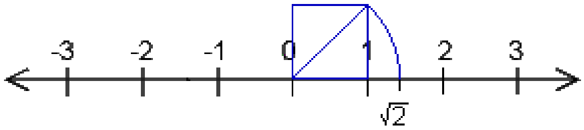
راشنل او ایراشنلګڼونه رییل ګڼونه جوړوي

## د رییل ګڼونوډیرۍ یا حقیقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د رييلګڼونو ډيرئ د ګڼونکربڼی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکربڼه کې روښانه ده




په رييلګڼونوکې بی له بنديزونو شميرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې بايد صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شميرډولونه لومړئ پوړئ

:Additionزياتون يا جمعه

زياتوونی +زياتونی = زياتون

د زياتون کموتاتيو قانون $a + b = b + a$

د زياتون اسوځياتيو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زياتون ته د يوه بی اغيزه يا ناپيلی توکی شتون $a + 0 = a$

مخامخ – يا په څټ ګن يا برعکس عدد $a + (-a) = 0$

:Subtraktionکمون

د زياتون په څټ کارونه يا عمليه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړۍ

ضرب یا ځل: فاکتور ( ځله وونی ضریب ) ۰ فاکتور( ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوشیاتیو قانون$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون( بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت$a\cdot(1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش ( لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده) $a : b = c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۳ . ۳ تمرينونه

۱ – د اعدادو يا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ يا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شميرلو څلور قاعدې يا لارې باور لري؟

يادونه: دلته دې ترې کمونى يا مفروق منه او وېشونش يا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونى يا مفروق او پروېشونى يا مقسوم عليه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او يو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو يا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتيجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ يادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ييز سيستم کې لاندې ګڼونه يا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ . ۵ – لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوټۍ ونې له لارې په نږدې ۵ ځایونږ تیک پیدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او ځلیزو ( د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a\,[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروئ یا استعمال کړئ او د شونتیا سره سم یې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وييني يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وييني يا افادې په ضريبونو توټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,...) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې a,b,... یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشمیرنه یا کسرشمیرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج یعنې د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنیو ضریبونو یا څلوونو له لارې لنډ کړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پیدا کړئ

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نومیزو یا برابرمخرج کسرونو شمیرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنوميزو كسرونو جمعه او تفريق، په مخرج يا ماتلاندې كې ضريبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نوميزو ماتونو(كسرونو) جمعه او تفريق( زياتون او كمون)، جمعه مخرج يا ماتلاندې كې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره يو په بل پسې وركړشوي ارزښت ځاى په ځاى كړئاو دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(كسرونه) سره يوځاى كړئ! بيا په ټوليزه توګه د وركړ شوو كسرونو لاس ته راوړنې وركړئ او هغه ارزښتونه لرې كړي، چې د a د اخستلو يا نيولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$ | د a=1,2,3 سره |
| b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$ | د a=3,4,5 سره |
| c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$ | د a=2,3,4 سره |
| d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$ | د a=2,3,4 سره |

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0{,}25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو يا كسرونو ضربونه( يا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو يا افادو برعکس يا په څټ ارزښتونه پيدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا كسرونه، كه ممكن وي، ساده كړئ ( كه غواړئ د مخكني شكل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ (a(b-c) . 1-=aځای په ځای کړئ او داسې لاس
ترې راغلي کسر يا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج ( ماتباندې
او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر يا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده يې
کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج يا ماتلاندې کې (-1) له
نوکانو راباسئ او دا وبينه يا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ٤ ۰ توان ( پوتنځ) او ريښه ( جذر) ( Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترځيرنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ ( تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو ) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر څټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند ( ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد ( ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت ( په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

## ٤ ۰ ١ توان ( پوتنځPotenz ) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پيژند ٤٠١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې مورږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,…

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) اوb د پوتنخ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

$$a = a , a^2 = a . a , \quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \mid= 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ ( اود څه بنديزونو په څلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;.........................................(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;.................(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};.........................................(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;.............(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};.........................................(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا پورته د توان اړيکې د ټولګڼيز مثبت جګړ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چی ټولګڼونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1,2,3,....,..a \neq 0,..................(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د ټولګڼيز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بنديزونو يوائې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو يانې د $a |= 0$ او $0 =|b$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دی.

د توان قوانين کيدئ شي په بڼه بدلونکو افادو يا وييڼو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y]^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوتنځ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنځ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدی او یو له بل کمیدی شي۰

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپیر وشي۰ پوتنځ له مثبت - یا زیاتونمخنخښې سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري۰

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ...., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ۰ ۲ – ریښه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ٤ ۰ ۲

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ریښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ....................(4,8)$$
$$a \ge 0, b \ge 0..............................(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي( موږ دا

ريښه نيوونې يا ريښه ويستونى بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) اوb د

ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي٠

بايد پردې ټينګار وشي، چې ريښه يوازې د نامنفى راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) $a \ge 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانى

$$b = \sqrt[n]{a} \ge 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,...$ لپاره د $a<0$ سره ريښه b په ريبلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دی٠

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په ختِه په ريښتوني دوه رييل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګې په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یانې n = 2 او a = 4 اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پرېکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . n= 1 , 3 , 5 او a≥ 0 لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې b≥ 0

٤ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځنې یو منفی اوبی یا حل لري٠ یانې b < 0 د بیلګي په توګه دا $b^3 = -8$ یواځې

اوبی b = -2 لري.

په هر صورت باید د جوړه...n=2,4,6 ګڼونو لپاره a≥ 0,b≥ 0 وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا رېښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو,...n = 1,3,5 لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو٠ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د رېښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو٠ له بلې خوا به رېښی د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه رېښو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

اکسپوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره 2- د 8- = b³ او نه $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2 = -\sqrt[3]{8}$ لیکو۰ په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots (4,10)$$

څلوری رېښه یا مربع رېښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - ګڼونو a لپاره تعریف شوي۰ د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه b ≥ 0 نفي کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د ( 4 , 10 ) بڼول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یانې د 2- = 2 سره۰

د (10 , 4 ) ټیک داسې لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,11)$$

$$= \{ -a \quad , a \leq 0 \qquad\qquad (4,11)$$

د رېښې یا جذر له پیژند ( 9 , 4 ) , ( 8 , 4 ) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د رېښې قوانین ولیکل شي د....n = 1,2,3 او a , b ≥ 0 لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots (4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پورته د (4,15),(414),(,413).(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهېدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پیژندل کیږي، چې د رېښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتیا چې دا د پوتنځقوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m .......(4,16)$$

د... $a \geq 0$ , $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3 \; 4 \ldots$ لپاره

د بیلګې په توګه (۱٦ ، ٤ ) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0 ...................(4,17)$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n اوm لپاره د پوتنځقوانین (2 ,4 ) تر (4,6) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې $a>0, b>0$ نیونه شوې وي۰

د رېښې شمیرلو لپاره باید اساساَ د(4,16) له مخې ریشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او رېښې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیونې تل و ازمایلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پاي کیدډول وښایو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون يوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی يا باور لري، د 0=|a| يا $a\neq 0$ لپاره a-او يا a منفي دي دا په دې مانا، چې a يا-a پيژند نه لري يا تعريف نه دی۰

د توان قوانين د توان سره شميرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بيلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بيلګو کې دا تراوسه د شمير بنسټيز قوانين ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کيدی شي۰ شميرنه يې لږ وخت نيسي، که غواړئ پخپله يې يو ځل وشميرئ۰

بيلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بيلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بيلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a|\geq|b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منخ ته راغلې رېښې له منځه یوسو ( د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه رېښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا څلوونې په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې (m < n ( m , n >0 او $m,n\in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي(N*|= 0 , a > 0)

$$Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بيلګه ٤ ۰ ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندي کې د ځلورۍ- يا مربع رينې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بيلګه ٤ ۰ ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ ۰ ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

## ۴ . ۳ توان( پوتنځ) د حقيقي – يا رييل جګ ( اکسپوننت ) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a>0$ د نارينتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\alpha = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n} ; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غړي یې ( ۴،۲ ) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $$\sqrt[10000]{2^{1412} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}$$

٤ ، ٣ تولګه : د a>0, b>0 رییل او $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ییلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

## ۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) $-3^{-4}$ b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زیاتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګې یا جګعدد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\dfrac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\dfrac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\dfrac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\dfrac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\dfrac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\dfrac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\dfrac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\dfrac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\dfrac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \dfrac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\dfrac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \dfrac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلوری رېښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) $ab$

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) $a^2-b^2$ d) $a^2+b^2$

۵ - د رېښنو جمعه او تفريق)زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د رېښنو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

6.1. a) $\sqrt{3\cdot7}\cdot\sqrt{3\cdot5}\cdot\sqrt{5\cdot7}$   c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$   d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$   c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$   d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$   c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$   d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

## ۷ – د توان او رېښې رېښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$   b) $\sqrt[3]{4200}$   c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$   d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$   c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$   d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$   c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$   d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

7.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$   c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$   d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



-------------------------------------------------------------------------------

۸ – لاندې ماتونه يا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وې څیړو ۰

## ۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد a یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه لپاره c

$$b^c = a \; ; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, .............(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵ ) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ x=4لرو ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2 = \log_x 36$ سره یو ارزښت لري، نو لروx=6 $x^2=36$

ب : د $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : د $x=\log_5 125$ سره، یوارزښت لري، $5^x = 125 = 5^3$

نو $x = 3$

ب: د $x=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف د $5=\log_3 x$ سره یو ارزښت لري، نو $3^5 = x$ $x=243$

ب : د $-5=\log_2 x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $2^{-5} = x$ $x=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2=\log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x=\log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a=b^{\log a},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$
$$\log_b 1=0,\log_b b=1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ................(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وايي او lna ته پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم وايي( e وروسته څیړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ......................(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...........................(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, .......................(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ............(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمیرن ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د بيلګې په توګه له ( ۷ ، ۵ ) همداسې

$$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y,..........................(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1 ) څخه لرو

$$c_1=\log\ \ x, c_2=\log_b y, c=\log_b(x+y),.................(5,12)$$

د لاندې سره يو ارزښت لري

$$b^{c_1}=x, b^{c_2}=y, b^c=x.y,.............................(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون( 2 ,4 ) پر بنسټ لرو :

$$b^c=x.y=b^{c_1}.b^{c_2}=b,\Rightarrow c=c_1+c_2,.....................(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاريتم د (5,7) تر(5,10)

قوانينو کيدی شي د پيچلي لوګاريتم له افادې څخه د لوګاريتم ساده بنسټيزې افادې ته بيرته راوګرځو اوپه ښټ۰

بيلګه ۵ ۰ ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log(a+b)+3\log a+2\log b-\frac{1}{3}\log c-2\log(a+c)$$

بيلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کیڼ اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دېa+b>0 ( د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې0 < c ( د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ ( د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ ( د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کیڼ اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چېLog بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0,    a-b>0

نو بیا0 <(a+b)(a-b) = a²-b² او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شيa > - b , a > b له امله هم و|a >|b ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



ته دې هم ګوته نيولې وي، چې لوګاريتم په يوه بنسټ b يوه بل لوګاريتم يوه په خوښه بل بنسټd ته د شميراوړون د شميرنې اړول كيدى شي $(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاريتم نيول و بنسټd ته لرو:

د $\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...........(5,15)$

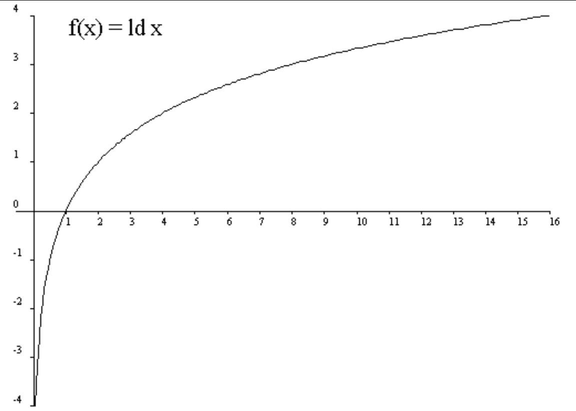
لسيز لوګاريتم اړول په پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم او په څټ لپاره ليكو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), ................................(5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ............(5,17)$$

د لوګاريتم فنكشن يا بلواک او دياګرام يې



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښي لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | binär | dezimal |
|---|---|---|
| $2^{-1}$ | 0,1 | 0,5 |
| $2^{-2}$ | 0,01 | 0,25 |
| $2^{-3}$ | 0,001 | 0,125 |
| $2^{-4}$ | 0,0001 | 0,062.5 |
| $2^{-5}$ | 0,0000.1 | 0,031.25 |
| $2^{-6}$ | 0,0000.01 | 0,015.625 |
| $2^{-7}$ | 0,0000.001 | 0,007.812.5 |
| $2^{-8}$ | 0,0000.0001 | 0,003.906.25 |
| $2^{-9}$ | 0,0000.0000.1 | 0,001.953.125 |

## ۵ . ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېر بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

## ۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library



دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم
قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n \lg (a+b) + n \lg (a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0,23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ٦ ۰ ګونومتري ( کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چې د کونجکچ چېکتیاته ( ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چې د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ۰ زه به کوښښ وکړم چې ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

### ٦ ۰ ۱ بنسټیزه هندسه

#### ٦ . ۱ . ۱ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی( خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

سره له دې هم هڅه کیږي چې ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کی پیښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کربنو غوځځاي په څیر ونیوله شي ) څیرې په غور وګوری

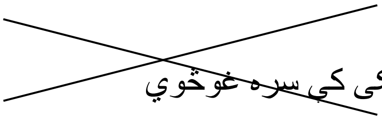
A ray وړانګه

g کرښه

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوځوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کیږي( پورته څیره وګوری)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل تیك په یوه ټکي کی سره غوځوي (پورته څیرو کې کتل کیږي)

یوه وړانګه $s_1$ له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده ) ( او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده )

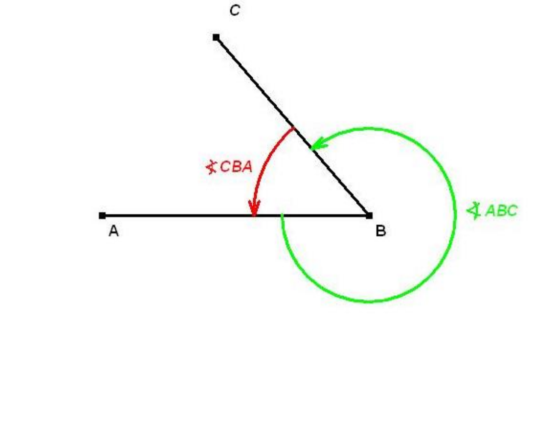
(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه $s_1$ د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي $s_2$ ( څېره ۴ . ۲الف ) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، $s_1$ او $s_2$ پېنی او په همدې ډول د S کونج $\alpha$ (الفا) ککره بلل کیږي.

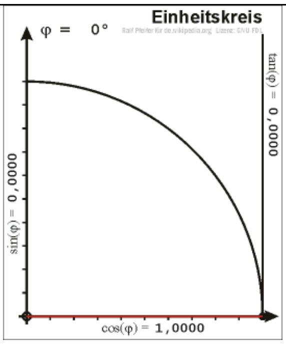



که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وي نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یې منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چې یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a^\circ \qquad (6.1)$$




په داسې حال کې چې ولاړکونج، کوم چې یو په بل ولاړې کربښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یې جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې څېره ، که نورېځېرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چې کونج x (ایکس دلته د الفا په ځای دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------

په پورته یونګردئ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردئ لینده په وړانګه( شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډېرو ګڼلو لپاره ګټور دئ. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردئ ) r = 1 ( کی انځوروړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي ( څیره په پورته کې کښل شوې )

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردئ چاپیری ) محیط( په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass ( درجکچ ( او )ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, .....(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیې نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاږی، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه ٦. ۱ :

کونج a = 47°12'36“ دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقې او ثانیې دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پس په ټولیزه توګه 720’+36“ = 756“ له دې لاس ته راځی

1’=(1/3600)° (<= )

له دې وروسته په همدې توګه 756.(1/3600)°=0,21°

له دې لاس ته راځي : a=47°12’36“=47,21°

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د( ٦ . ٣ ) پسی باور لري b=0.017453.47,21=0,826

دلته ځيرې راځي، خو د دې ځيرو په ځاي به موږ په پورته ځيرو بسيا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ ځه ځمککچ سره بلد یو ( د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي )، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي٠

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه ) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم( ځاي ارزښت سیستم ) ویشنو ( برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴ ) له

مخی لرو

a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701° د 0,701° اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

0,701° = 0,701.60' = 42,06', 0,06' = 0,06.60=3,6“

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

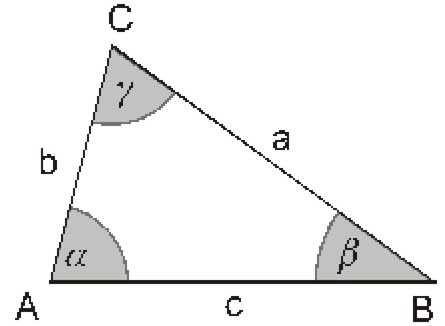
(c) ketabton.com: The Digital Library

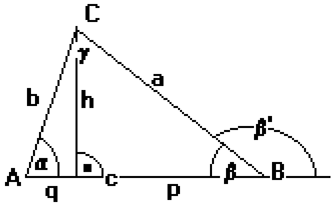


دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

## ۳.۱.۶ دریګوړی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو( نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوړونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټې او یا ۰۰۰ګوړي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنۍ یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .




په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوړی جوړیږي، چی ګوړونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی $\alpha, \beta, \gamma$ دي ( د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندي ګوړونه دي، چې موږ یې په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون 180° درجې دی یا $\pi$ دی

- یو دباندنی کونج د په نه پراته دنننې کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون 360° یا $2\pi$ دی٠

- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمې په یوه ټکي کې یو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمې یو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یې۱ :۲ ده ) په ځیره کې وګورئ ) د یوه دریګوډي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي ) هغه ګردئ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردی( منځټکی دی )٠

د یوه دریګوډی کونجنیمې یو بل په یوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردی ) ګردئ چې د دریګوډي

په دننه کې ده یا ګردئ یا دایره کې خوندي دریګوډی ( منځټکی دئ ) لاندې کې بې ځیره شته ) د یوه دریګوډي جګې یا د ارتفاع کرښې په یوه ټکی کې سره غوڅوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري٠

د جګیو غوڅټکی Orthocenter **<u>Höhenschnittpunkt</u>** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library



circumcenter **Umkreismittelpunkt** (*U*) ·د دباندنی- یا په راتاو ګردی منځټکی

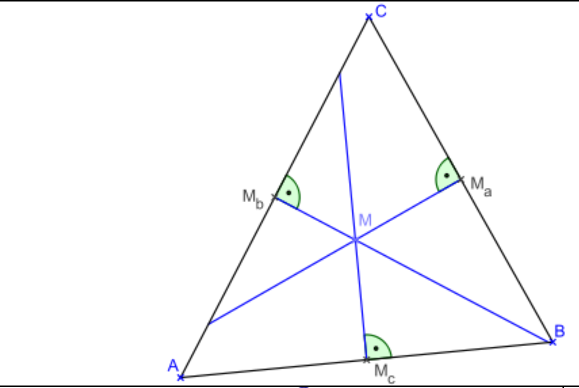
seid symetry Seitensymmetralen), ·د اړخسیومتریو غوڅټکی

inscribed circle, incircle den **Inkreismittelpunkt** (*I*) ·د دننه ګردی منځټکی

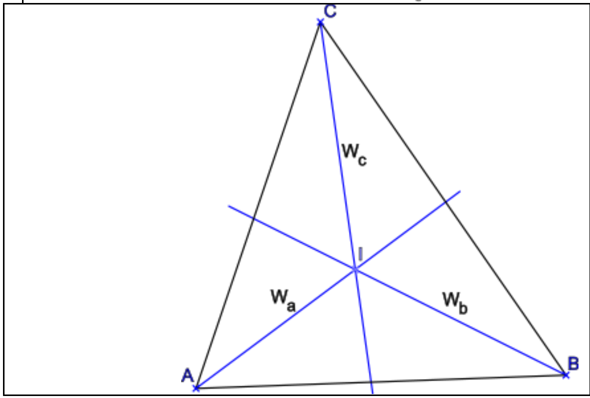
r Winkelsymmetralen · د کونجسیومتري

centroid **Schwerpunkt** (*S*) r · دروندټکی

Seitenhalbierenden) median ·اړخنیمی




مخامخ خیره کې مثلث یاد دریکوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي

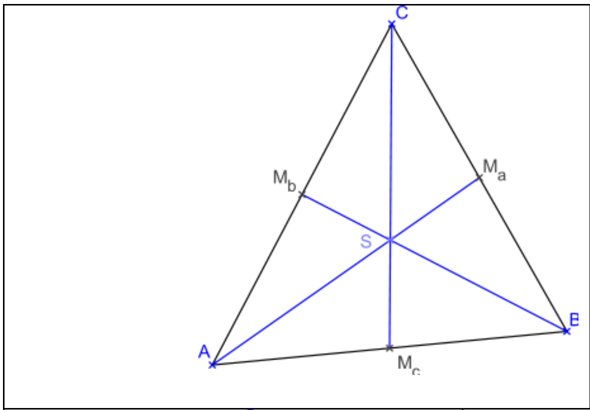



دامخامخ مثلث هغه کرښې ښایي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو ( په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي )

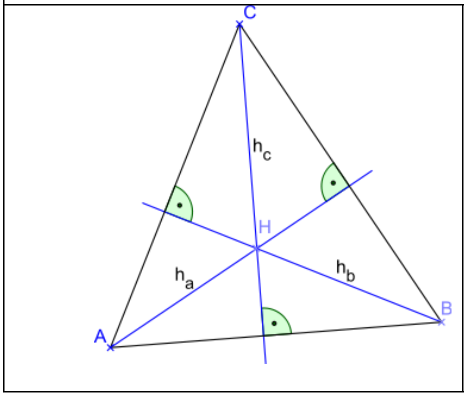
(c) ketabton.com: The Digital Library



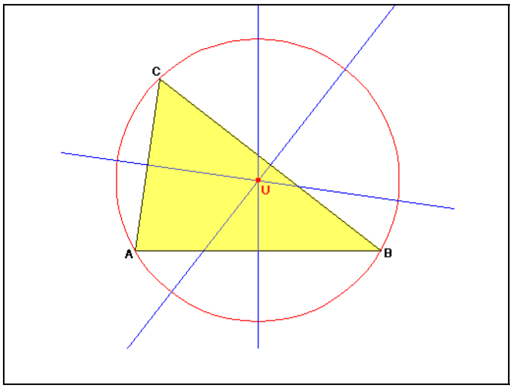
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ يې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

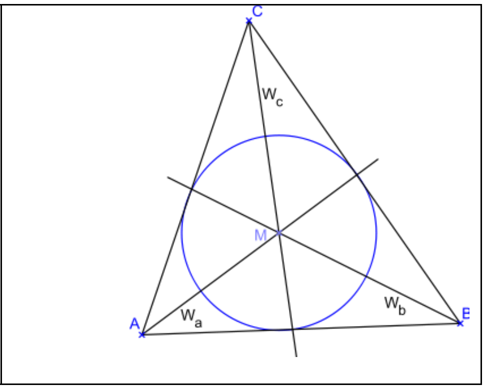



لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠




په پورته څیره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خوندې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



(c) ketabton.com: The Digital Library

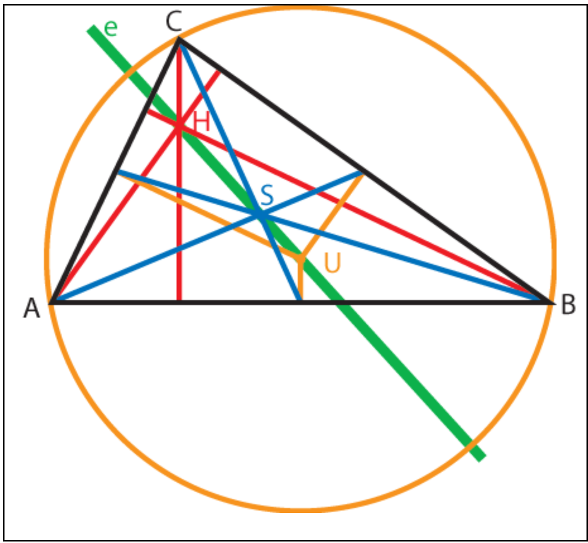


----------------------------------------------------------------------------------

په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوځتکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځتکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوځوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوځټکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډئ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځتکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی ( د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځتکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰




که درېګوډی $ABC$ وي ، $S$ دروندتکی، $U$ د چاپیریالګردی منځپکی ، او $H$ د جګیو غوځپکی وي، نو کرښه په لاندې ځاننیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې څیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

## ۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

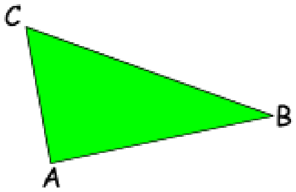
دوه دریګوډي ABC او 'A'B'C یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي یانې براربارزښته دي

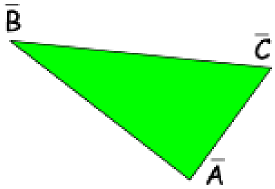
(c) ketabton.com: The Digital Library



ABC ≡ A'B'C'

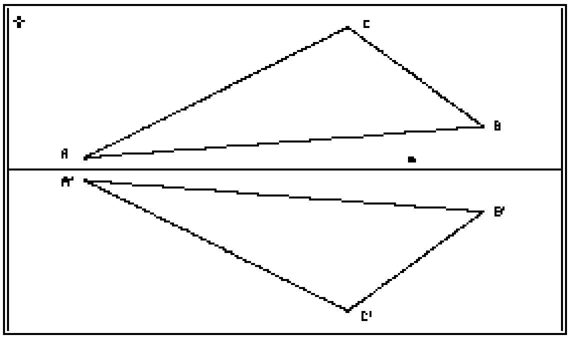
(4.4)     که  وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي( وکښول شي)  او وځرخول شي  او اینه ونه یا هنداورونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)




که دریګوډي سره کونګروانیخ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي توټو ( اړخونو او کونجونو) کی  یو بل سره مساوي وي

په ښټ  یی هم باور لري  S    اړخ او  W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګرواینځ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - دريِ اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي WSW,

د دې جملو په ښت هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګروانیځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروانیځ دي. د کونګروانیځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروانیځ جملو کارونی په ښیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی ( Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروانیځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

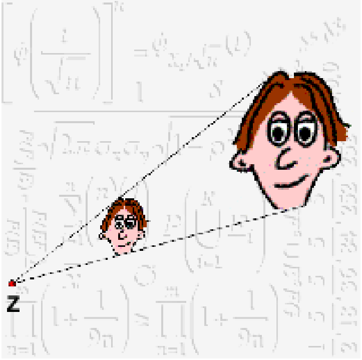
۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library



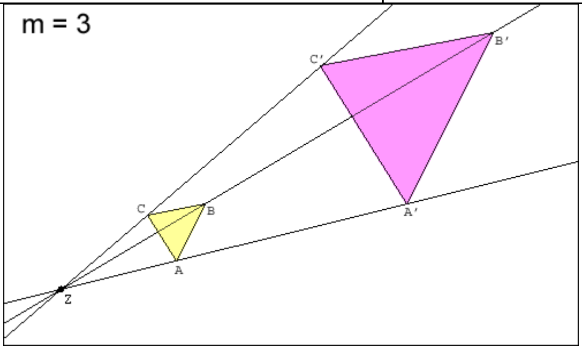
---

دا مخامخ ځيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

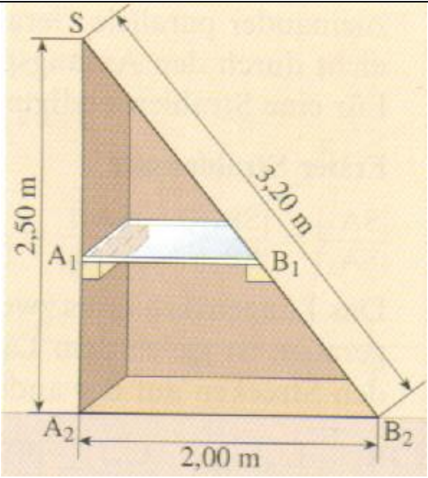



په لاندې ځیره  کې کښل شوي دریګودي ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$




د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:



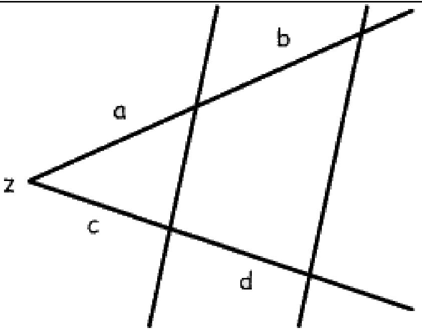

په دې پورته ځیره کې درېګودي یو بل ته ورته دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

<table>
<tr>
<td>



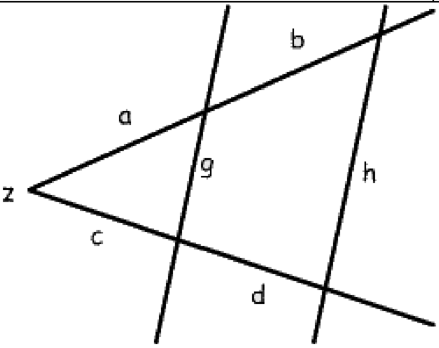

</td>
<td>

د وړانګې لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري۰

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>




</td>
<td>

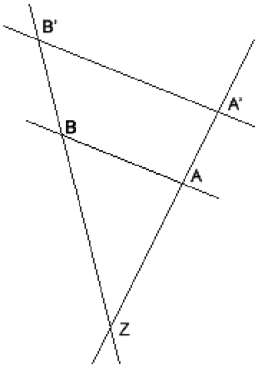
د وړانګې دویمه جمله:

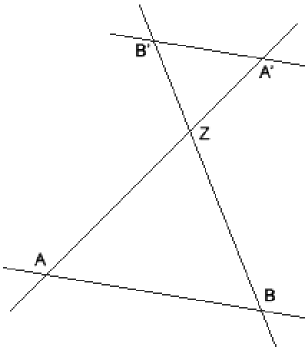
که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې ځنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$ $\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$

</td>
</tr>
</table>

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

( دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څېره دې ګران لوستونکي وکاږي )

که درې په یوه ټکي کې پرېکیدونکی کرښې g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی( کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څېرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

1 . OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچې په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

2 . A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چې: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چې په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چې: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوڼی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څېړني لاندې نیسو

1 - $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردبلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي )

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

2 - $a < c$

دلته درې امکاناته شته دی( د دې درې امکاناتو څیره وکاږی )

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د $\alpha$ ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی۰

۲ . ۲ : ګردبلینده د $\alpha$ ازاده پښه لمسوي۰

۲ . ۳ : ګردبلینده د $\alpha$ اندازه پښه نه غوڅوي .

۳ ) $a = c$

ګردبلینده په B د a په اندازه د $\alpha$ ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینڅ جمله کی ضرور ده

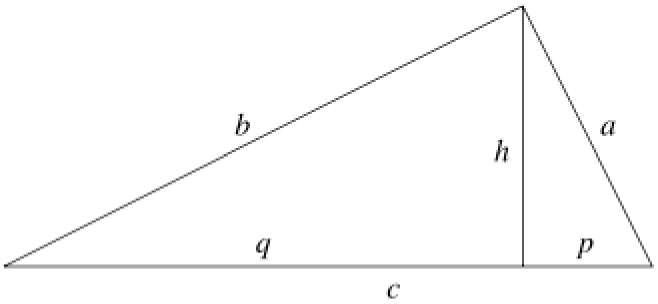
۶ . ۱ ۰ ۵ .ولاړکونجیز دریګوڼی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library



------------------------------------------------------------------------------

د مختلفو دریګوډیو ځخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترځیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې ) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت ( Katheten (بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له ځیرې ۴ . ۱۳ ځخه واخلئ




په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چې دلته یی بی له اوبی )ښوونی( راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ ( پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس ( Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دکاتیتو( د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع) ) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

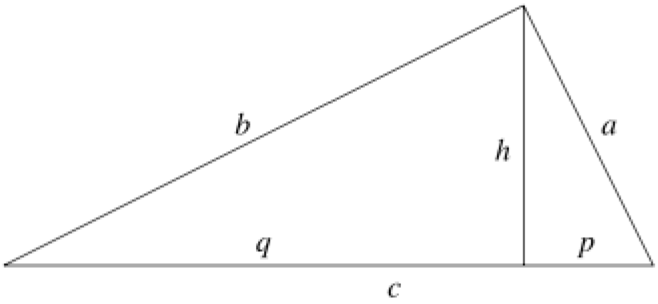
$$a^2 = p.c \, , \, b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې ( لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي




لنډ: ( ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د اويکليد د کاتيتونو( پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

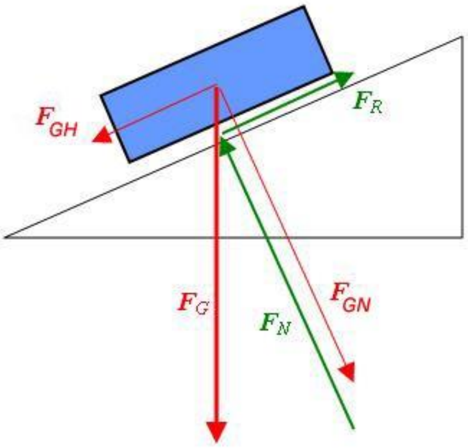
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اويکليد جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بيلګه ۴ . ۴ : (ځيره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي۰ دا يوه فزيکي دنده هم ده( ځېره وکښل شوه، نخښې هم لړ بدلې دي)) د يوه بدن د وزن G تجزيه څرګندوي ( د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي ( KSP = )چی په يوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په يوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نيغ ولاړ ، ولاړ) عمودي( زور) قوه FN )تجزيه کيږي. د ښوولو ده چی، دريګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی

|  | يادونه: په ليکنه کې زور يا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلو:شين تنيا د مستطيل شکل G دی<br>$F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$<br>ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج $\alpha$ ، په ګوډ B کونج $\beta$ |
|---|---|

(c) ketabton.com: The Digital Library

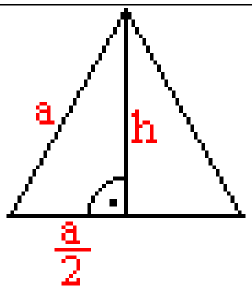


---

داچې G||AC ځغلي، نو FH او G يو کونج $\alpha$ جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج $\beta$ جوړوي، دواړه دريګوډي په دې برسيره په ولاړکونج کی يو بل ته ورته دي٠

يادونه : داسې بيلګې، چې ځيره يې نه شم ايستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ځيرې پخپله وباسي، دا دې يو تمرين وي٠ زما زړه نه شي، چې له ليکلو يې تير شم٠

بيلګه ۴ . ۵ : په يوه مساوي اړخيز دريګوډي کی دې ( لاندې ځيره ) جګی و شميرل شي .د ٦ . ۴ ( له مخی لرو( جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نيمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاږی)

| | |
|---|---|
|  | $h^2 = a^2 - (a/2)^2$<br>$h^2 = a^2 - a^2/4$<br>$h^2 = (3/4)a^2$<br>$h = (\sqrt{3}/2)a$ |

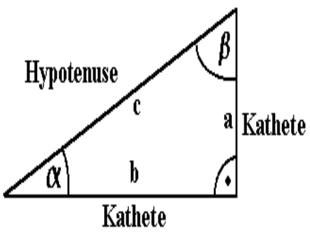
٦ . ٢ په ولاړکونجيز دريګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی يوه ولاړکونجيز دريګوډي کي جوړيږي( لاندې ځيره ). که د کونج $\alpha$ مخامخ اړخ يا ـکاتيت a gegkathete د مخامخ اړخ په ځير وښايو، د b اړخ په $\beta$ پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجيز دريګوډي کی لاندې اړخځانيوني منخ ته راځي يا جوړيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------

| | |
|---|---|
|  | $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$<br>$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$<br>$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$<br>$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$ |

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یو اځي د کونج      په واك کی دی. که په پام کی
ونیول شي چي   $\beta = 90° - \alpha$   دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګڼجدولونه  پوره دي یا
بسیا کوي   .ورپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};.....................(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.......................(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha};...........(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳.۰٦ په یوونګردیٰ کی د کونج فنکشنونه ( -بلواك )

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یوائې د لیدیدونکو )Konkrete( اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یوائې یا په ځانګړې توګه د $0<\alpha<\frac{\pi}{2}(0<\alpha<90°)$ لپاره تعریف دي. که د $\alpha$ خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی ) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لارښودوي .د لته ټولی کرښی ) د لته به له کرښو څموږ مطلب پای کرښی وي( ، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه( لري، ټولی کرښې او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه ( منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ ( د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha=\overline{QP},\cos\alpha=\overline{OP},\tan\alpha=\overline{AD},\cot\alpha=\overline{BE};..............................(6,13)$$

د کونج $\alpha$ لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی( لاندې څیره له کینې و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دیٰ او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو )، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج $\alpha$ په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دیٰ، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو ) ۱۳ . ۴ ( څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360 ) 2 ( periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180° ) لري .

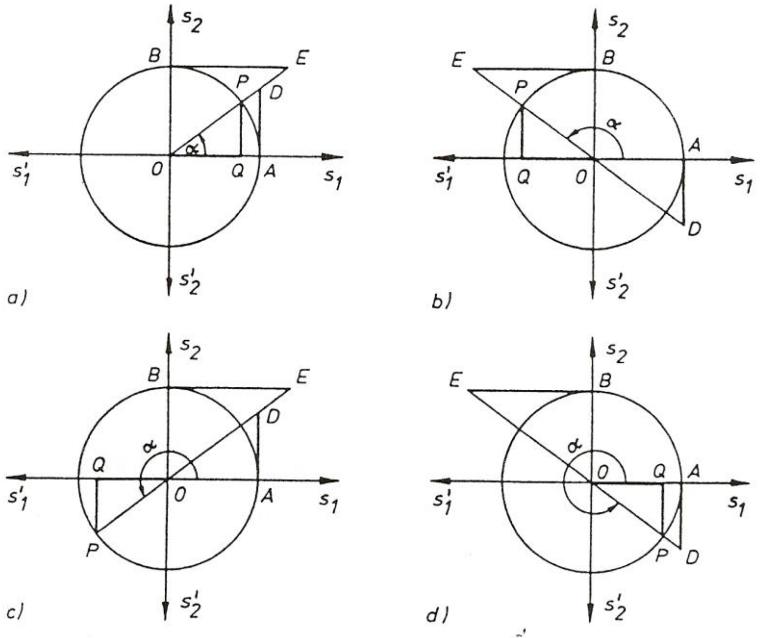



Bild 4.17 ګیره

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
پـه
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

تپولیزه )عمومي( توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ټولو ټولګټونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخبنه

| | لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$ | دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$ | دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$ | څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$ |
|---|---|---|---|---|
| sinx | + | + | - | - |
| cosx | + | - | - | + |
| Tan x | + | - | + | - |
| cotx | + | - | + | - |

برسیره پر دې لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos.\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ ,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چی $\alpha$ په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ ( بدون ) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی ) په « DEG » سموو او بیا
لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

---

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$ , 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$ , 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرين ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»$\alpha_0$ د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا
همداسی تکموترتیب لاس ته راځي ( دا په دې اړه لري چې$\alpha_0$ په درجه اندازه یا لینده
اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو )

1. [a] [F] [sin]    2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan]    4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په څټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد $\alpha_0$ هر بنستیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° \quad = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$3.\ \alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$

$4.\ \alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$1.\ \sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$

$2.\ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توګه،، فرعي یا څنګیز حل یا اوبی،،

$1.\ \beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$

$2.\ \beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

$1.\ \beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$

$2.\ \beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د $\alpha$ ټول حلونه د ( ۴ . ۱۵ ) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

**بیلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$ . ودې شمیرل شي $\cos x$ , $\tan x$ , $\cot x$ .**

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور $F_H$ او $F_N$ څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي ) او مائلې هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وي؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28° = 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

## ۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په نړولیز یا عمومي درېګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

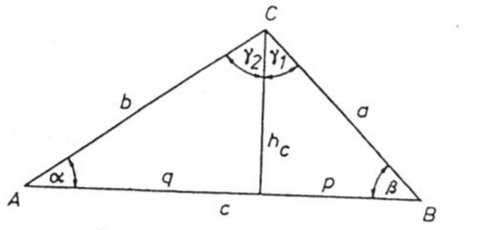



Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{4.17}$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز درېګوډی کښل کیږي( پورته او لاندې څیرې )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د څیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
h_c^2 &= b^2 - q^2 \\
h_c^2 &= a^2 - p^2 \\
\hline
a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\
a^2 &= b^2 + (c - q)^2 - q^2, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,
\end{aligned}
$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1 )او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په
ABCدریګوډي کی، $F1 = c, F2 = a$ او $ss' = 180° - ss$ معلوم دي، $\alpha$

او $R = b$ لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی ( ۱۸ . ۶ ) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos ss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180° - ss')$$

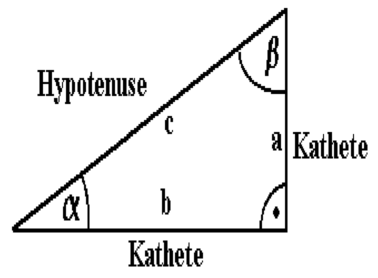
او د ساین له جملی (۱۷ .۶ ) لاس ته راځي

له کومو چی $\alpha$ تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

| | |
|---|---|
| مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library

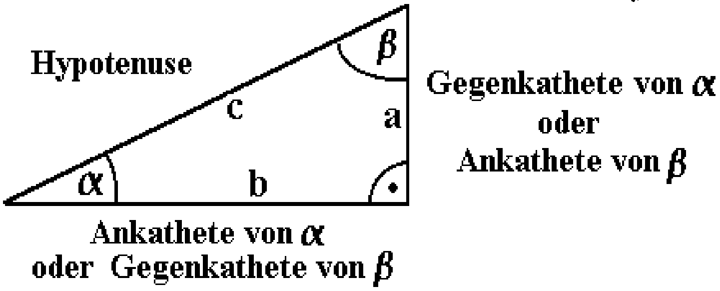


---

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه

بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰




د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي ( لکه په فرمول کې ) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

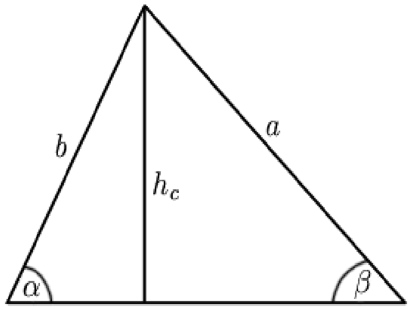
(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : ( دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)




$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په $h_c$ پسې یې اوبی کوو

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

د برابراینوني له لارې لاس ته راځي

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه ځګی $h_a$ او یا $h_b$ لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\mathrm{cm} ، b = 3,8\,\mathrm{cm} ، \alpha = 73°$$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونيوله يو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، ياني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زياتون به له ۱۸۰ درجو ښخه واوړي.

او نو ګاما د کونج زياتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ $c$ هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساين جمله

په تريګونومتري کې کوساينجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړيکې ښايي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

يادونه : دا لاندې فرمولونه دې ( ۱۸ ۰ ۹ ) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

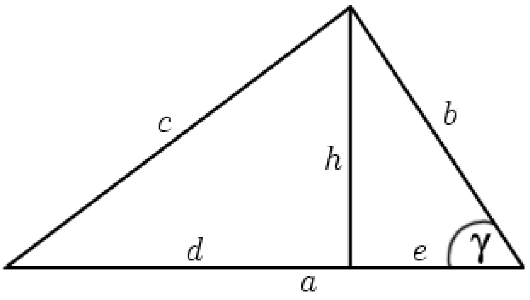
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :




د درېګوډي په کيڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د $c^2$ لپاره یوه شمیرافاده یا –وییښه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د بنې اړخ لپاره د پیتاګواراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

( د بینوم فرمول )

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} (\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د $c^2$ لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوډیABC ، چې اړخونه یې خرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

د کونج $\beta$ لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\text{cm})^2 + (3{,}5\,\text{cm})^2 - (2{,}8\,\text{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

**Common formularکډ وډ فرمولونه**

**Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمتوالی**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



**زیاتون او کمون کتمتوالی Sum and difference identities**

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

**دوه برابره کونج کې ګتمتوالي Double-angle identities**

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\cot A}{\cot^2 A-1}=\frac{2}{\cot A-\tan A}$$

**د نیم کونج ګتمتوالی Half-angle identities**

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

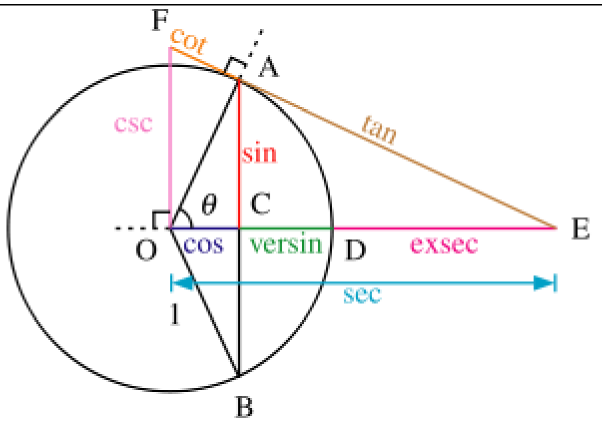
(c) ketabton.com: The Digital Library



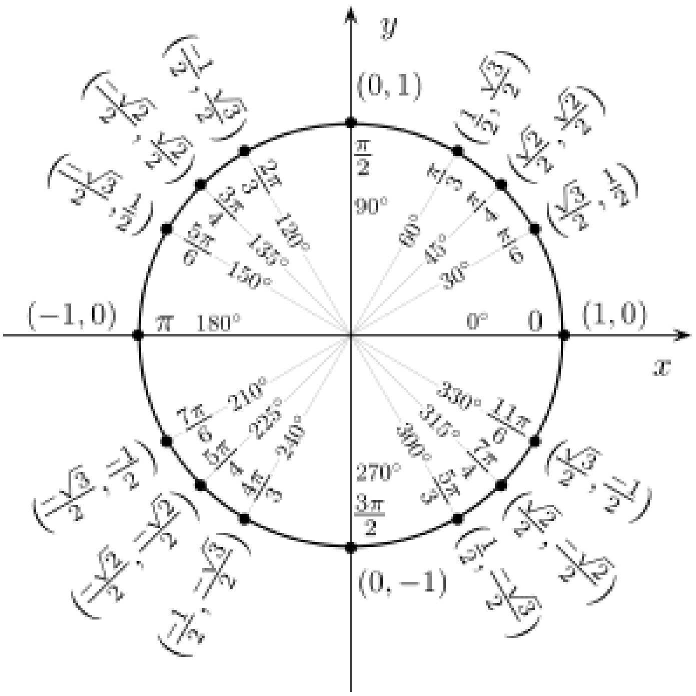
---

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تریګونومتریکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities




نوره ژوره څیرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندې څیره کې تریګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي




د یوه کونج θ ټول تریګونومتریکي فنکشنونه په $O$ باندې د یوې یونګردی ترم له لارې ورکول کیدی شي ( یونګردی لاندې ورکړ شوې او کونجونه هم په نخښنه شوي )

مخامخ:

یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی)

The unit circle

(c) ketabton.com: The Digital Library



------------------------------------------------------------------------

**Notationلیکنبڼه**

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

په یوون(یووالي-) ګردۍ یا دایره کې ساده لیدل کیږي:

**Periodicity تل بیرته راګرځیدنه**

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه $2\pi$ ده( پوره ګردۍ ) ( تکرار دۍ )

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه $\pi$ لري( نیمګردۍ یا نیمدایره ) :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

**Symmetry سيومتري**

د تريگونومتريکي فنکشنونو لپاره سيومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ يا، $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او $\pi$ بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پيتاگوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پيتاگوراس قضيه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کينږ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

**د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae**

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس يا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

**د نيمکونج فرمول Half-angle formular**

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له ( ۱ ) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که کيږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

**د ځل و زياتون ته کټمتوالی Product-to-sum identities**

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

**د زياتون- و- ځل ته کټمتوالی ( برابرون) Sum-to-product identities**

که د $x$ لپاره $(x+y)/2$ او $y$ لپاره $(x-y)/2$ کيږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او $z$ د کوم درېګوډي کونجونه وي يا په نورو کليمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

نیمګردۍ یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi = \text{half circle,}$ =که

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$ او *نو یا*

$$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$$

**تریګونومتریکي په څټوالیTrigonometric conversions**

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري. داسې اړیکی د په څټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسې چې ψ(arcψ(*x*)) = *x* . نو φ(arcψ(*x*)) کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم *x* په څیر وویلی شي یا افاده شي.

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

| cot | sec | csc | Tan | cos | sin | φ \ ψ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $x$ | sin |
| $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $x$ | $\sqrt{1-x^2}$ | Cos |
| $\frac{1}{x}$ | $\sqrt{x^2-1}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x$ | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | Tan |
| $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ | $x$ | $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\sqrt{1+x^2}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | sec |
| $x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\sqrt{x^2-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ | cot |

(c) ketabton.com: The Digital Library



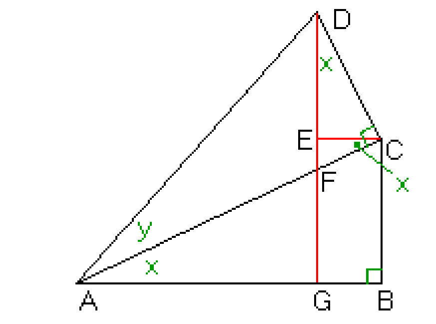
$$\begin{aligned}
\sin 0 &= \sin 0^\circ &= 0 &= \cos 90^\circ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \sin 30^\circ &= 1/2 &= \cos 60^\circ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= \sin 45^\circ &= \sqrt{2}/2 &= \cos 45^\circ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \sin 60^\circ &= \sqrt{3}/2 &= \cos 30^\circ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin 90^\circ &= 1 &= \cos 0^\circ &= \cos 0
\end{aligned}$$

د طیلایي نسبت $\varphi$ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

**جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs**




**sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)**

په مخامخ څیره کي کونج x د ولاړکونجیز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندي ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$=\frac{DG}{AD}$$

$$=\frac{EG+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}+\frac{DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).$$

**$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$**

Using the above figure:د پورته ځیرې ځخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$=\frac{AG}{AD}$$

$$=\frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

**د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه**

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کيږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

**$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$**

که په فرمول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

**$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$**

**موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو**

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

## ۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته ) د زیاتون)جمع( تیوریم(، له کومو یی چې دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چې فرمولونه په کي راټول وي( کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a; ........................(6,19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y; ........................(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; ....................(6,21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}; .....................(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; ..........................(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; .............................(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بيلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مونږ له څيرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځای کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$ .

د کوساين له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

يادونه: ځای په ځای بايد دې ته ګوته ونيسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفريق يا زياتو او کمون تړاو ته کلک يا کلک نښتی دی.

بيلګه ۴ . ۱۳ – لاندې ويينې يا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره يو- يا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



------------------------------------------------------------------------

له کوم چې $y = \sqrt{2}\,\sin\alpha$ لاس ته راځي

$$b)\; y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$$

د ( ۶ . ۲۰ ) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د ( ۶ . ۱۶ ) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لينده اندازه همداسې په درجه اندازه( د څسيما يا دسيمال يا لسميز او سمساګيسيمال ( د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړۍ شميرل) برخو) ورکړ شوي دي،

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.1.1.a) $15°$ | b) $225°$ | c) $105°$ | d) $277{,}5°$ |
| 1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$ | b) $\frac{\pi}{12}$ | c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$ | d) $\pi-\frac{\pi}{3}$ |
| 1.1.3.a) $4{,}24°$ | b) $70{,}9°$ | c) $31°\ 17'\ 20''$ | d) $228{,}1923°$ |
| 1.1.4.a) 5,19 | b) 0,22 | c) 2,31 | d) 1 |

۱ . ۲ – يو درېګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نيمونکی وکاږۍ، د منځ ولاړې ، کونجنيمونکي او جګې، همداسې يې ګرديخوندي او خونديګردي ګردی( يعنی دباندې او دننه ګردی ) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوټی جوړ کړی

a ) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b ) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښايې چې ولی دواړه درېګوټي ورته دي

۱ . ۴ – يو مساوي پښيز، ولاړکونجيز درېګوټي ABC ته يو مساوي اړخيز درېګوټی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چې $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده ( څېره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي ).

ورکړی $\overline{B'C'} = \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ د $\overline{BC} = \overline{AC}$ سره!

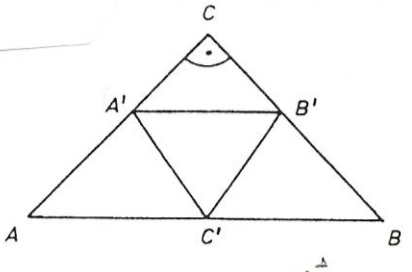



Bild 4.20 څېره

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیري ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

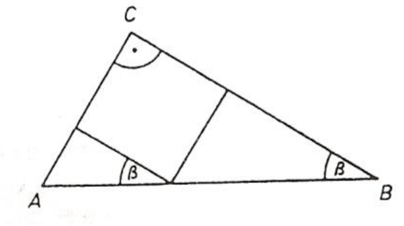


Bild 4.21

الف ) له کانتو څخه

ب ) له هیوپوتینوزپېرخو څخه

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوتاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a ) $\alpha$ = 47,15° , b ) $\alpha$ = -390° , c ) $\alpha$ = 7,784 , d ) $\alpha$ = 13,195

۲ . ۲ – کونج ß دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a ) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d ) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي ( په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!! )

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ( $\gamma$ = 90° ) دریګوډي کې معلوم دي

الف ) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب ) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ازښتونه sin $\alpha$ , cos $\alpha$ , tan $\alpha$ , cot $\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ( $\gamma$ = 90° ) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لویي موږ ته معلومي دي:

a ) a = 50cm , b ) a = 40cm , c ) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm $\alpha$ = 43°36' $\alpha$ = 18°55' ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیری ! $h_c$ , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ( ß = $\alpha$, a = b ):

a ) a = 66cm , b ) c = 22,4 cm , c ) a = 38,9 cm , d ) c = 30,3 cm

c = 130 cm $\alpha$ = 47,8°, $\gamma$ = 33,3° $\gamma$ = 48,2°

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ب ) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167,5N$ , $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

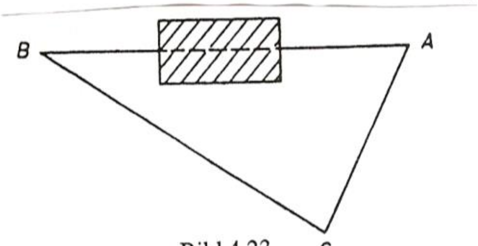


Bild 4.23 ځېره

پ ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75,25\ m$ , $\overline{AC} = 51,75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15' 45''$ وي ( ځیره ۴ . ۲۳ )

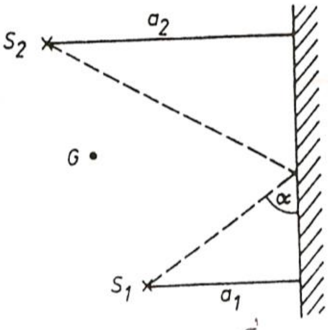


Bild 4.24 ځېره

ت ) د دوه یخ هاکي لوبغاړو $S_1$ او $S_2$ ترمنځ یو د مخالف تیم لوبغاړی G ولاړ دی. $S_1$ په داسې ډول توپ و $S_2$ ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږېږي. ( ځیره ۴ ، ۲۳ وګورئ ).

د دواړو لوبغاړو $S_1$ او $S_2$ لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2,5m$ همداسې $a_2 = 6,5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\propto = 42°$ ولږېږي.؟

۵ . د تريګونومتريکي يا درېګوډيزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشميري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشميرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot \alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3 \tan\alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3 \alpha - 3 \cot\alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{1}{4} \sin 4\alpha$

b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \dfrac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \dfrac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6{,}5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې ځنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ........(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ..................(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär( لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ..................(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, .............(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ................(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...................(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7,10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7,11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د$p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دی

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي. لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اینبول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم( د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

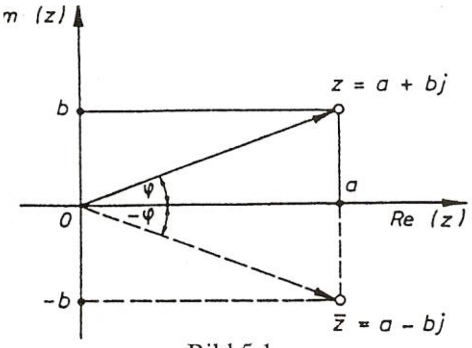


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون( محور ) د x - محور ته د هوارې یاسطځي ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يېایماجینار برخه وایي لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني ویيونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون ښنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), .......(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه ( او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د( z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ ( په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

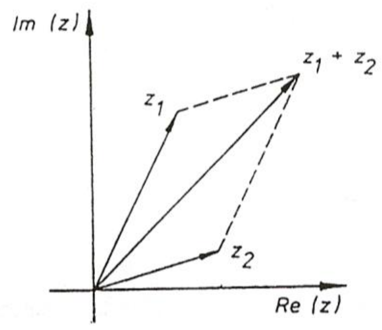



Bild 5.2 (7.2 څېره)

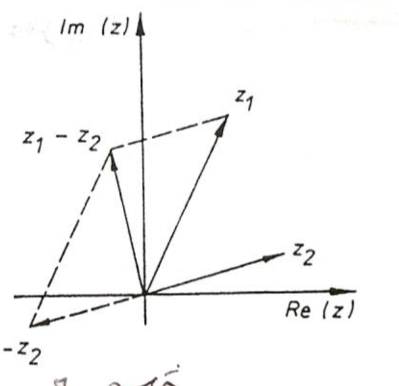


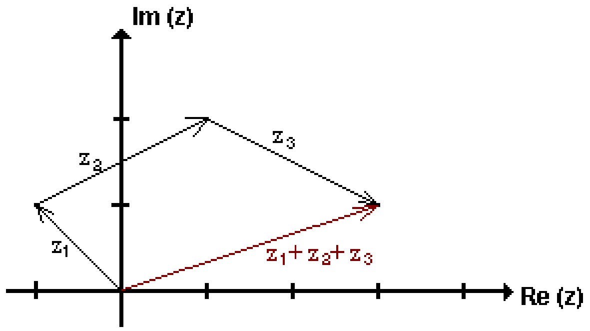

Bild 5.3 (7.3 څېره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

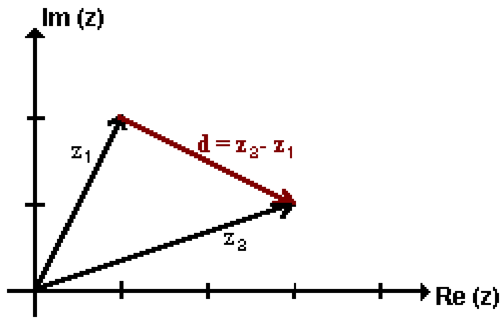


--------------------------------------------------------------------------------

یا لاندې:




په پورته او لاندې څېرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰




**دکملپکس ګڼونو ارزښت**

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس( فیثاغورث) د جملې

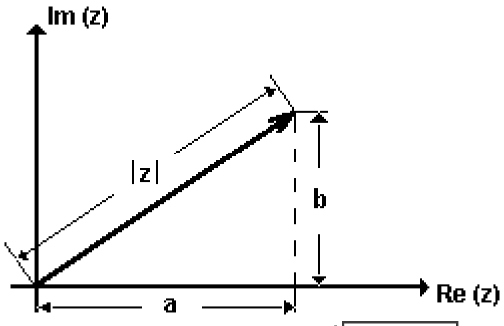
سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ څېره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library






$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانتیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, ................(7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکې وي،دا به راته ګران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1 . z} = z_1 . z_2 \quad , \quad |z_1 . z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بيلګه ٧ ٠ ٢

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (١٥ ، ٧ ) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

٧ ٠ ٣ ويش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{\overline{z_2}}}{z_1 \overline{\overline{z_2}}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ٧ . ٣ :

د ( ٧ . ٢۴ ) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ٧ ٠ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

## ٧ . ۴ . تمرینونه

١ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

١ . ١ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2 + \sqrt{3}\, i) . (3-\sqrt{2} i)$ b) $(3 + 2\sqrt{2}\, i) . (3 - 2\sqrt{2}\, i)$

c) $(1 + \sqrt{5}\, i).(1 - \sqrt{5}\, i) .(13 - 12i))$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{7} i} . \sqrt{3 - \sqrt{7} i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x + y\, i)\, (2x + yi)$ b) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}\, i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}\, i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right)$ d) $(c - \sqrt{d}\, i)(-c - 2\sqrt{d}\, i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ ( a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library



4.1. a) $z_1 + z_2$  b) $z_1 - z_2$  c) $z_1 \cdot z_2$  d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$  b) $|z_2|$  c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$  b) $|z_1 - z_2|$  c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$  d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$  b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$  c) $|z_1 \cdot z_2|$  d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم ( د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي. په جملو کې‌د دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده( مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځي. د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ . ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه ( ثبوت) کې سرې له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي.

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion ( لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)( د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې ) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي ( ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ـم جدول).

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$ : د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلګه:

د یوه ناتیک اوبیونې یا حل کارونه ( متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی( سیده ښوونه) او په ناسداِه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي( د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلوری ۰ مربع په بڼه ليکل کيدی شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کيدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دی يا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دی يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ريښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دی

اوبيونه يا حل : د غوښتني نفيي ده، چې : د ۲ ريښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دی ( د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د $q \neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره $p^2$ يو جوړه( (جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دی، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلوری جوړه کيدی شي $p=2p´$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځاي اينوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p`^2،$$

$$2q^2 = 4p`^2$$

$$q^2 = 2p´^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی۰ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی۰ که پرویشپردي ټول ګڼونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي۰

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 ( صفر باید لږ د ن د پېنی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي۰ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي۰

بیلګه ۱ :

د ټولو $0 \geq n$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري 1+3+5+… 2n+1)= n²

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کې‌لیکل شوی ) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي۰

۲ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: A=>B

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library



$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $1 < 2$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$2+2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++...+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښي خوا د یوه بینومځلوری(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم څلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې مورږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی( اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د ترنې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف ) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب ) د دوه تیرو کونجونو $\alpha$ ، $\beta$ لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف ) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب ) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل کڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

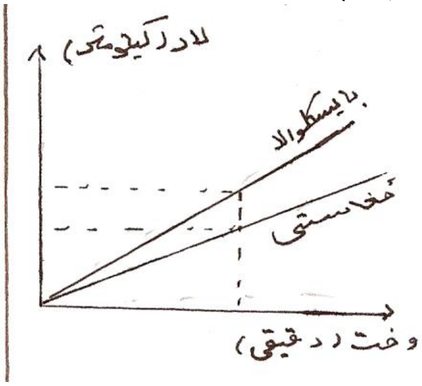
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۹ ۰ کرښيز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل څغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی( که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړی کی ۱۵ کیلومتره څغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړی کي څغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library



دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې يادیږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .
وخت ) په دقيقه ( په t ښايو لار ) کيلومتر( په s ښايو د لارانځورونی ځخه په گراف کی ځرگنديږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h
غواړود هرځه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دی. دا کليمي به بيا د فنکشن او ځيرونو په برخو کی پوره تر ځيرني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعآ زياتيز يا مثبت دی ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم ټاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کرښيز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د ( ۱ . ۶ ) برابرون اوبيونه ( حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته ( ۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون ( ۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9,2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

دا د ( ۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په ښټ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په ښتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا( ۱ . ۹ ) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹ ) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو رییلګڼونو xلپاره پوره (ډك ) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : ( په خوښه x = (belپس دا لاندې باور لري:

برابرون ( ۱. ۹ . ) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلې اوبیونه ( ۹ .۲ ) لريد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رییلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون ( مساوات ) ( یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱ ) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سرې په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون ( همداسی کمون ) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی )( د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی ) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ترېِ کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1;......................(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون ( ۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندېِ فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

( دا تيك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددي لپاره چی د ماتلاندېِ ښخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتیبيږي او راټولیګی، xله نوکانو ښخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کیدی شي په $a^2$ وویشل شي (a+b)x=2b

دا د لاینیز برابرونونو بنسټیزه بڼه ( فورم) ( ۱ . ۹) ده

که ( $a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو) x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دئ

که( a = -b ) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .

هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي( د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دئ.

پام:

په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا څله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په ریيلعددونو کې۰

دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګې به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنستیز کتاب کې زیاتې بیلګې راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :

برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c=1$ یواځې

د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دئ.

ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)

سره څل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x)=6abc$

وروسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات ( ۹ . ۱ ) بنسټیزه ده، او له دې امله صدق کوي:

د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دئ.

د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر ریيل کې x اوبیونه ده.

نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه

دلته د څیړل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي ځل لپاره څلوری برابرړن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلوری( مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لاینې مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتې کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x - a) / (x-b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ( $a = 2b$) حل نه لري.
بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b - c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې ($a+b=c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چې ټیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2,\ abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیرو چې مات لاندې یي له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي .

بیلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټیك د دې نیونو سره صدق کوي $ab \neq 0$ , $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

اصلي مات لاندې) ا م ل ( په لاندې ډول پيداکوو

$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$

$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$

$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$

$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$

---

$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي( ، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$

$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$

$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$

$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$

$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره( دا د نيونو له لارې تل پوره دی )که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چی په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېونو $a = b$ د په څېټ ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د x لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$

بيلګه ۹ . ۸ :

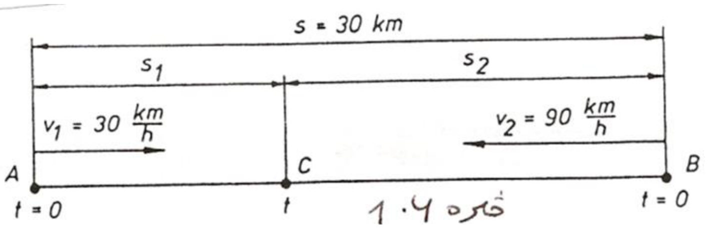
دوه ګاډې تمځايونه Aاو B يو له بل km30 لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------

خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کې حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځاننیوني لپاره څیره څېره وکاږئ




پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لرېوالي(د بار کاډي لار s1 ) یا د Bلرېوالي وC څخه( د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کې د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدونې یا مجهولې مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو ماروني یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \ \ , s_2 = 90\ t \ \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه ) پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو )!

دا درې مجهولې s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ١١ کې ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي s2 = 30 - x. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلوو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $$x / 30 = (30-x) / 90$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x$ , $4x = 30$ $x = 7{,}5$

نو لرو

$s_1 = 7{,}5$ km , $s_2 = 22{,}5$ km , $t = (7{,}5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x$ , $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

, $x = 22{,}5$

$s_2 = 22{,}5$km , $s_1 = 7{,}5$ km , $t = (22{,}4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90 x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4$ , $t = (1 /4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30 /4$ km$=7{,}5$km

$s2 = 90 t = 22{,}5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0{,}25$ h$= 15$ min حرکت وروسته په $7{,}5$ km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$ . دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.څ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$

$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$

$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$

---

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل خلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ( $A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$ ) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅېړل چې مات لاندې یې له خلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅېړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په خلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$ , $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې ( ا م ل ) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

---

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو ( چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي ) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2(2bx-1) + b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1) + b^2(2ax-3) - b^2(a^4x^2-1) \\ 2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 &= a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 + b^2 \\ 2a^2bx - 2ab^2x &= a^2 - b^2 \\ 2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b) \\ x &= \frac{a+b}{2ab} \end{aligned}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره ( دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي( یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنهونو $a = b$ د په ځنې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

د x لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي٤دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

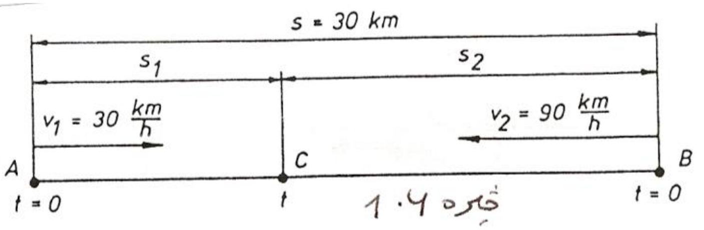
(c) ketabton.com: The Digital Library



---

**بیلګه ۶ . ۸ :** دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کې د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکې باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.




څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار $s_1$ ) یا د B لریوالي و C څخه ( د تیزګاډي D لار $s_2$ ) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولې مخ ته لرو $s_1$ , $s_2$ او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \ , \ s_1 + s_2 = 30$$

( دلته د اندازی یونونه پرینبوول کیږي. او پریکړه کوو چې لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا درې مجهولې $s_2$ , $s_1$ او $t$ دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي $s_2$ , $s_1$ او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخرې مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5 \text{ km},\quad s_2 = 22{,}5 \text{ km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$\begin{aligned} 3\,(30 - x) &= x, \\ 90 &= 4x, \\ x &= 22{,}5, \end{aligned}$$

$$s_2 = 22{,}5 \text{ km},\ s_1 = 7{,}5 \text{ km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې x=t ، نو باور لري:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 30x + 90x = 30, \\ 20\,x &= 30, \\ x &= \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15 \text{ min}. \\ s_1 &= 30\,t = \frac{30}{4} \text{ km} = 7{,}5 \text{ km}, \\ s_2 &= 90\,t = 22{,}5 \text{ km}. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5km کې يو بل سره مخامخ کيږي.

۹ . ۲ تمرينونه

۱ . ناکرښيز يا نالاينيز مساوات د يوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ a او b نتيجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري او يا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3\left(6\frac{1}{2}+x\right)-\frac{7}{3}\left(2x-\frac{19}{2}\right)-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$  b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$  d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$  b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$  d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

### ۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

### ۱ . ۷ . شي تمرینونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه گڼ خلور څله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه گڼ خلورڅله او ۴ زیاتون ددې گڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه گڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه گڼ خلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۷ . ۴ - که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ - د یوه ګڼ پنځه څله او د ۳ زیاتو دوه څله لوي دی. لکه د د ې ګڼ درې څله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ - د یوه ګڼ څلورڅله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه دديې ګڼ دوه څله او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ - د یوه ګڼ شپږ څله او د ۵ کمون یا توپیر چې دديې ګڼ په څلور څله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱. ۷ . ۸ - د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ - ۲۵ داسی په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر یې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ - د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ - دوه ګڼونه داسي تناسب کې دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یې ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ - د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په څټ ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ - یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کې بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښې په ځیر

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« څما پلار چې درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اوباکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وایي:« که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ ( اومیګا ) ، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف ) یوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۲۰.۷ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت ( ماته متآسفانه په افغانسان کی د فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو ) دی
a) $1000\,\Omega$, b) $2000\,\Omega$
یو مقاومت $4000\,\Omega$ دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) $12\,k\Omega$, b) $300\,\Omega$ وي؟

۲۱ . د درې غبرګو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف ) $12\,k\Omega$ ب ) $300\,\Omega$ وي؟

۲۲ . په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چی د لمبیدو استعداد یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی ( د فرمول څخه معلومیږي چی دا څه شی دی ) $4\,\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بتزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي.
دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کیښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لوییي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کی ، دا وروسته وهونکی د پروسږکلني وهونکی څخه یوه نیمه
دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی
چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۰ کومبيناتوريك - د بينوم جمله

کومبيناتريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو ګڼ ، پل ځاي بدلو ځومره والبشابي او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه ليکل کيږي٠ د ځای بدلون شميرنه ده
او د هغې ډولونه٠
په ۰ ۱ ۰ ۱ او ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شميرپوهنی مرستندوي مواد د بينوم جملی(۳.۱۰)
برخه( او کومبيناتوريك ( ۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمي او بينوميالکوايفيځينت (بينوم ځلوني) پيل شي .

## ۱۰ . ۱ فاکولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ويل کيږی n « فاکولتيت « ) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب پوهيږي، يعنی $n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسيره پر دې تعريفوو: $0! = 1$

د فاکولتيت له پيژند څخه ځرګنديږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یادونه:
په افغاني ادبياتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کليمه يا پښتو ، ځله ووني،، زيات کاره ولی، هيله ده چی تاسو به يی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بيلګی :

الف $n!$ : د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بينوم ځلووني يا ضريبونه

پيژند: ۱۰ . ۲

د سيمبول $\binom{n}{k}$ ( وييل کيږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ويش پوهيدل کيږي چی هر يو k ځله ووني يا ضريبونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسيره پر دې دا هم په کلکه کره کيدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------------

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ یو پیدایښتي یا طبعي ګڼ دئ او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون یا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړیو k پیدایښت یا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رییل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دئ. دوم فاکتور1 - n ، دریم n-2 تر k –م

فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر( leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سویسي ګڼپوه، فزیکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرتله یا مقایسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك دیوه

بینوم پوتنځ یا توان شمیري ) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چی د یوا-
ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځلهووني ویل کیږي.

بیلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چی 3 / 1 پیدأیښتي یا طبعي ګڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونوخویونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ - د n<k ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل ): سری د (n-k)! سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کښ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته   ا افاده يا وينه کې  د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي  ځله ووني په څير وليکل شي، لاندې بينوميال يا بينوم ځلوونی ( ضريب)  تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

## ۱۰ . ۳ د بينوم جمله

د بينوم لاندې سرې د دوه توکو ( ګنونو)  زياتون پوهيږي. يعني:  x+y
د بيونم جمله موږ ته ښايي چی ښنګه  د يو بينوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پيدايښتي ګڼ n يی  ايکسپوننت  يا جګګڼ يا لنډ جګ وي،  د زياتون په څير پر مخ بيول کيږي. که د x + y بينوم پوتنځ د   n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شميرو، نو لاندې نتيجه لاس ته راوړو  :

پاسکال دريګوډی

$$(x+y)^0=....................1$$

$$(x+y)=...................x+y$$

$$(x+y)^2=...............x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3=.............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$

$$(x+y)^4=..........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$(x+y)^5=.....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په دې د زياتونونو پرمخبيولوکی يو قانونيت ليدل کيږي. د زياتونو ګڼون(شمير، تعداد) د بينوم د اکسپوننت څخه په يو لوي دی . ټول زياتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x اوy پوتنځ زياتون په n برابريږي او په دې ډول د x پوتنځ په کميدلو) د y پوتنځ په زياتيدلو دx په اکسپوننت په ترتيب پرلپسی

n , n-1, ....1 , 0

د yاکسپوننت په ترتيب n-1,n 0,1..,دي. د بينوم پوتنځ کوايفځينتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal( ۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه( ګڼوندريګوډی جوړوي .

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 1 | | | | | | | |
| | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | |
| | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | |
| 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 |

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کيڼ-ښي پرتوګڼونوزياتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتويا په جګو n = 7,8, ... .. لپاره پرمخ بيول کيدی شي. د ډيرو لويو اکسپوننتو n لپاره بيا هم دالار له کړاو ډکه ده ليونارد اويلرLeonhard Euler د کومبيناتوريك فکرونو کی د کوايفيځينتونو يووني يا يوونوالي يا بهتره يوونواليز ستروکتورونه يا جوړښتونه وپيژندل. په n -م n ( د بينوم جګ يا اکسپوننت ( ليکه اوK- م ځای، n ,.... , k = 0 , 1 کی ولاړ ضريب دفورم څخه دی) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اويلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بينوم ضريب په

ځير رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دريګوډی د اويلر سومبول استعمال په ځيروليکل شي نو لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\cdots\cdots\binom{0}{0}$$

$$\cdots\cdots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\cdots\cdots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\cdots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځای ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلې ښکاریږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .
په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیڅینت لپاره ښوول شوو خویونو ۲ په بنسټ د پاسکال دریګوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیڅینته سره مساوي دي. داچی هر کو- ایفیڅینت ورباندې پورته کوایفیڅینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)
د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله ) مقایسه( شي ) د اویلر سیمبول په استعمال
د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختګ د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۱ ( د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه ( حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : ( n = 0 )

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : ( n = k )

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1 )

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$
$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$
$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + +\binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتې) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

## ۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیری د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راټوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی دري ډولونه توپیروو( Komplexion هم ورته وایي )، په نامه پرموتیشن، واریيشن، کمبینیشن ( Permutation, Variation, Kmobination ) کوم چي په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

## ۱۰ . ۴ . ۱۱ پرموتیشن Permutare

( لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو یو پرموتیشن ( ځاي بدلون )بې له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی چي n غړي په یوه د زړه پوري ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځایبدلونونو په مانا ده

بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1234 | 2134 | 3124 | 4123 |
| 1243 | 2143 | 3142 | 4132 |
| 1324 | 2314 | 3214 | 4213 |
| 1342 | 2341 | 3241 | 4231 |
| 1423 | 2413 | 3412 | 4312 |
| 1432 | 2431 | 3421 | 4321 |

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایې ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیداینتي ده، چې د پښتو لیکسیکایې ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کڼ کښته لور ته بیا بیرته پورته

| | | | |
|---|---|---|---|
| amsu | masu | samu | uams |
| amus | maus | saum | uasm |
| asmu | msau | smau | umas |
| asum | msua | smua | umsa |
| aums | muas | suam | usam |
| ausm | musa | suma | usma |

(c) ketabton.com: The Digital Library

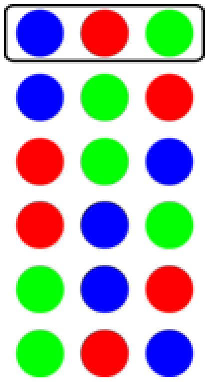


---

پ ( ا ت ج ک دي:دلته طبعآ له ښي وکیڼ لورته ترتیبیږي(

| | | | |
|---|---|---|---|
| اتجک | تاجک | جاتک | کاتج |
| اتکج | تاکج | جاکت | کاجت |
| اجتک | تجاک | جتاک | کتاج |
| اجکت | تجکا | جتکا | کتجا |
| اکتج | تکاج | جکات | کجات |
| اکجت | تکجا | جکتا | کجتا |

د ټولو پرموتیشنونود لیکلو لپاره مرستندوی مواد، د بیلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتیشنونو، لیکسیکني ترتیب، دا په دې مانا چې د لیکسکا لغاتو ترتیب ته »کتب متب« (ورته) دی، چې د غړو پیدایښتي لړی مخته پرته وي ( په تورو، په ګڼونوکټطبعی یو په بل پسې). دبیلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتیشنونه په لکسیکا ترتیب ورکړ شوي. د دې غړو) یا تورو( جوړ شوي پرموتیشنونه ) لغاتونه( maus همدا رنګه saum په دې ترتیب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ ( کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ک پرموتیشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاکج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی یي جتاک ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library



د پورته دریِ غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :720 = !6

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون ( شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = P_n$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داېندکشن پیل : $(n = 1) : \quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k) : \quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1) : \quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1 ) -ام غړی راځي. دا ( k+1 ) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر ( k+1 ) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د ( k+1 ) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی ( دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پيژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتيبونه، د كومو ځخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته كيږي،

د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتيشن د تكرار) د تكرارسره پرموتيشن( سره نوميږي
. د غړو شمير په پرموتيشن كی بيا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بيلگی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتيشن په كوم كی چی غړی a يو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته كيږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دې ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتيشن، په كوم كی چی a دوه ځله، غړی b درې ځله رامنځ ته كيږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتيشن گڼون يا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له كومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته كيږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه يا اوبيونه: كه په پرموتيشن كی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې گڼونه دn اينډكس كې ومنل شي) غړو يو له بل توپير لرودی ( مختلف وي ) ، نو n! پرموتيشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni!
پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k )

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی ( $n_1$-1 )- ځله او دویم ( $n_1$-2 )- ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم ( n2 = 3 ) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریيشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation ) لاتین( بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته( وهرې k ټوټی ته، n ≤ k ) هر له k غړو یوځانکول ( یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړۍ پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واریيشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | |
|---|---|---|
| ca | ba | ab |
| cb | bc | ac |

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| da | ca | ba | ab |
| db | cb | bc | ac |
| dc | cd | bd | ad |

د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دي

| | | | |
|---|---|---|---|
| abc | bac | cab | dab |
| abd | bad | cad | dac |
| acb | bca | cba | dba |
| acd | bcd | cbd | dbc |
| adb | bda | cda | dca |
| adc | bdc | cdb | dcb |

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریېشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 21 | 31 | 41 | 51 |
| 13 | 23 | 32 | 42 | 52 |
| 14 | 24 | 34 | 43 | 53 |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 54 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د n غړو واریشنونه و n -ام تولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام تولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_k^{(k)}$ دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1).(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبنونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې ) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په

ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :( k = 1 )

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك ( صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : ( k = k0 ) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت: ):( k0 +1 = k )

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م تولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



------------------------------------ ----------------------------------------

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې يو دk+1 ټولګي n - k0 واريشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واريشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واريښنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0)=\frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چيرې يود n - k0 غړو ورزيات په يو بل ځای کېښوولی وی، نو يودk+1 ټولګي واريښن به يی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بيلګه ۲ ( 3= n = 4, k = 2 , k ) باندې ليدوړ کولی شي)

بيلګي:

۱ - د درې غړو واريښنونو شمير و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)}=\frac{3!}{(3-2)!}=6$

۲ - د څلور غړو واريښنونو شمير و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)}=\frac{4!}{(4-2)!}=12$

د څلور غړو واريښنونو شمير ودريم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$

۳ - د پنځه غړو واريښنونو شمير ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)}=\frac{5!}{(5-2)!}=20$

پيژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واريښنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی يوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واريښنونه د تکرار سره نوميږي يا بلل کيږي.

بيلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واريښنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | | |
|---|---|---|
| ca | ba | aa |
| cb | bb | ab |
| cc | ba | ac |

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دویم ټولګی واریيشنونه د تکرار سره دي:aa

| | | | |
|---|---|---|---|
| da | ca | ba | |
| db | cb | bb | ab |
| dc | cc | bc | ac |
| dd | cd | bd | ad |

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واریيشنونه دي( دا لاندې ولاړ ترتیب له کیڼ وښې لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

| | | |
|---|---|---|
| 311 | 211 | 111 |
| 312 | 212 | 112 |
| 313 | 213 | 113 |
| 321 | 221 | 121 |
| 322 | 222 | 122 |
| 323 | 223 | 123 |
| 331 | 231 | 131 |
| 332 | 232 | 132 |
| 333 | 233 | 133 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام ټولګي د واريښنونو شمير $V_{W_n}^{(k)}$

$C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$  د تكرار  سره دى: $V_{W_n}^{(k)} = n^k$

حل)اوبى): په k د پوره اينډكشن له لارې:

د اينډكشن پيل ( k = 1 ) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحيح دى، ځكه چى له n غړو څخه n واريښنونه،چى هر يوله يوه غړي جوړ دى، جوړيږي.

د اينډكشن نيونه ( k0 = k ) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د اينډكشن غوښتنه ( k0+ 1 = k ): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د اينډكشن ښوونه : د ( k0 + 1 ) -ام درجى واريښنونه د nk واريښنونو چى k0 – امه درجه واريښنونو څخه لاس ته راځي، په كوم كى چى له دوي هر يو په ترتيب د n غړو اخر ته يو ور واچوي يا ورزيات ( علاوه ) كړي ( يادونه دې، چى په واريشنونو بى له تكرار شوې ، وكتل شي) .

له دې امله د دې شمير $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واريښنونه دى.

بيلګي :

۱ - د درې غړو و دوم ټولګي ته د واريښنونوشمير له تكرار سره دئ

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم ټولګى ته د واريښنونو شمير له تكرار سره دى

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library



-------------------------------------------------------------------------------------

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(3)} = 3^3 = 27$$

۴ - د مورس نخښه ( Morsezeichen ) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دئ

$$V_{W_2}^{(1)} + V_{W_2}^{(2)} + V_{W_2}^{(3)} + V_{W_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

## ۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن ( Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته ( n > k ) یو کمبنیشن هغه دئ چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریيشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دئ:

ac bc

٠٠٠٠٠ ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

٠٠٠٠٠ ac bd

٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ ad

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د دې څلو غړو ودريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي:

bcd abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي( لاندی هم بايد له کينې لاندې لورته په ښی لور ليکل شوي وی)

| | | |
|---|---|---|
| 345 | 234 | 123 |
| | 235 | 124 |
| | 245 | 125 |
| | | 134 |
| | | 135 |
| | | 145 |

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اورييشنونو شمير دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبينيشنونه له وارييشنونو په دې توپيريږي، چی ترتيب په نظر کی نه نيول کيږي، دا بيا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتيشنونه په يو کمبينيشن کی يوه ته يوځای کيږي

له دې امله لرو : $C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بيلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبينشنونو شميريا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبينيشنونو شمير دی‌د څلورو غړو و دريم ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودريم ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري ( ۶ له ۴۹ څخه ) د امکاناتو لپاره شمير دی

الف ( يو شپږ. $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : يو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تيپ عددونه د يوه ۴ عددونوګروپ څخه ټوځاي کيږي، چی له ايستل شوو شپږ عددونو ( ۴ تيک يا صحيح) او دوه عددونه( ۲ پاتی عددونه) دي .

پيژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبينيشن، په کوم چې يواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبينيشنونه د تکرار سره نوميږي.

بيلګي:

۱ - د درې غړوc , b , a و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينشنونه دي.

aa ...............

bb ab ......

cc bc ac

۲ - د ځلور غړو d , a , b , c و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي

aa .......................

bb ab ...............

cc bc ac ........

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دريم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي( لاندې ليکنه بايد له کينې لور پيل وی، خو دلته له ښی لور پيل شوی وکينې لور ته )

111 221 331

112 222 332

113 223 333

123

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی( چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی ) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،واريیشن،کمبینیشن ټولګه

| داا | د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو | | د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه |
|---|---|---|---|
| | له نظم تیریدنه | نظم په پام کی نیونه | |
| | کمبینیشن | واریيشن | پرموتیشن |
| د ټول غړي يوله بل توپير لري | د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$ | د n غړو واریيشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}$ | دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n=n!$ |
| له تکرار سره | د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)}=\binom{n+k-1}{k}$ | د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)}=n^k$ | د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,...n_k)}= =\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیرئ

الف ) 7! ، ب ) 3!.5! ، پ ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړئ

a ) (n+1)! / ( n-2)!  b) (2n)! / n!  c ) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشمیرئ!

a) $\binom{6}{4}$  b) $\binom{1,5}{3}$  c) $\binom{-1}{6}$  d) $\binom{4}{1}$  e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$  g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$  h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$  i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$  j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرئ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$  b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$  c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$  e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$  f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونې (استعمال) په بنسټ وګڼئ!

a ) $(x+y)^7$  b ) $(a-6)^6$  c ) $(5a+4y)^3$

d ) $(x/2-y/3)^4$  e ) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$  f ) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړئ!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$  b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c ) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو شل یی بیل ( تجزیه ) کړئ!

a ) $25a^2+10\,ab+b^2$  b) $(49a^2-42a+9$

c ) $169a^2-130\,ab+25b^2$  d ) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۸ – الف ) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکی!
ب ) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او«hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ – الف ) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب ) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ ) د غړو a,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف ) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب ) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ – څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د
الف ) بې له تکرار
ب ) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دي،
الف ) بې له تکرار
ب ) له تکرار سره؟

۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱۶ – څومره مختلفي ازمايني ممكن دي كه په يوه توليد كى له هر ۲۰ يوه وازمايل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافيك نخښى په لاندې توګه يوځاى شوى : يوه د ځاي نښونه ډله د نخښى الف بى پسى څلور ګروپ يا ډله راځي، چى له څيفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د يوې كره ټاكلى الف بى پيژندنښى يا ترافيكى نخښى ممكن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونى له لارې يو له بل توپيريدى شي ، كه څلور رنګ نښونى ولرو؟

۱۹ – د منډې يوه ميچ په اخركى شپږ پاتى منډې وهونكى برخه اخلي. د منډو څومره امكانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف ) اته مختلفى مرغلرې،

ب ) درې سرې، څلور شنى، يوه زرغونه مرغلره

ترتيبيدلى شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه كيدى شي وتړل شي كى يواځي پنځه ځايزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون تړل ممكن دي كه تلفون نمرې شپږځايزې وي او په 0 پيلكيدنه يى اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګيو ( يا –اړخيزو ) سره ( ځيره مكعب دى اومخونه له يوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته يي د پښتو نوم نه راځي او االماني يى Würfel دى ) څومره مختلفى اچونى ممكن دي، چى ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګڼون وښايي؟
څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګيو سره ممكن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۱ کرښيز-، خطي – يا لاينيز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار
وي، خو هغه لاتین متل دی، چی » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولی یا
ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د
ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی
شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر
څیړنی لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د
برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي،
چې د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده۰
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی دری ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی
په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او
د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------

موږ د برابرونونو له څيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نوموليٚ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسې منځپانګې سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايوٚ

## ۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسې يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11 . 1)$$

دلته کيدی شي چې ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګڼونه وي چې يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتونې ) دي، برابرون ( ۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چې د هغي څيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده( ۱۶ - امه برخه دی وکتل شي )

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چې د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا ( ۱ . ۱۱ ) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د ( ۱ ٠ ۱۱. ) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو ( x ,y ) ډيری ده، چې( ۱۱.۱ ) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱ ) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = - (a/b)\, x + c/b \qquad (11 . 2)$$

کيدی شي چې x په خوښه وټاکل شي اوy له ( ۲ . ۱۱ ) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ ( x, y ) \mid y = - ( a/b )\, x + c/b \} \quad (11 . 3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)ٚ

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د ( ۱۱ . ۱ ) برابرون اوبی يا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x ٚ

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون ( ۱۱ . ۱ ) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی موږ د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, .....$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو $x_1, x_2$ سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, .............(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

$\infty^i$

ځوابونه لري

$\infty^i$

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...........(11,5)$$

$x_2$ په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

$\infty$

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ................(11,6)$$

$x_1$

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0)لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ..........................(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$$

په څټوالی يا تضاد يا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته

$$\infty^i$$

دا مانا لري چې د ناپيژندونې يا مجهولی

$$x_i$$

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نيول کيدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاينيز برابرونونه د دوه ناپيژندونکو سره
د دوه برابرونونو سيستم د دوه ناپيژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$

$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2; ..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کيدی شي چې په اووښتونو يا واريابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون يا فنکشنمساوات په څير ونيول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې يو بل غوڅې کړي نو دا د مساواتو په سيستم ( ۸ . ۱۱ ) کی د کرښو يوګونی( بهتره : يوګونی، يواځنی د بل څه لپاره کارول شوی ) اوبيونه ده يا حل دی.
که دواړه کرښې يو په بل پريوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسياکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې ټيك يا فقط مساوات I يا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډير

$$\infty^1$$

ځوابونه موجود دي.
داسې هم کيدی شي چې فورمال

$$\infty^2$$

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څيړو. دا څيړو چې، که دا برابرون اوبيونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کيږي، چې کرښه I اوکرښه II غبرگي ځغلي مگر يو په بل نه وي پرتې.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپيژندونکو يا اووښتونو سره، کيدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - يو يواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت )

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سيستم مخامخوالی يا تضاد لري )

۳ - ناپای ډير ځوابونه موجود دی II ( برابرون برابر په I مساوات او يا د هغه څو برابره دی )

۴ - ناپاي ډير ځوابونه موجود دي.

( ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي )

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپيژندونکی لري، کيدی شي په اسانتيا وپيژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.

په سيستمونو کی چي دريِ يا زياتي واريابلی يا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پيژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته بايد فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پيل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پيدا کړو. دلته بايد دري بنسټيز د مساواتسيستم د ځواب کاردودونه)متودونه( تکرار شي:

۱ . د برابر يا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د يوې نامعلومی په لور اوبی کيږي(د بيلگي په توگه د x دوه په لور(، دواړه برابرې ليکي او په دې ډول يو برابرون د يوې نامعلومي سره منځ ته راځي٠

۲ - يو د بل پر ځاي کينولو متود:

برابرون يا مساوات د يوې ناپيژندونکې ( د بيلگي په توگهx دوه) په لور ځواب کيږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کيږي، په دې ډول د يوې ناپيژندونې برابرون منځ ته راځي ( د بيلگي په توگه دx يو)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سړی یو ټاکلی څو برابره ( کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو( ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو ( die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلورځلوني( ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II.....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی $x_1$ هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :
سیستم ۱

I     2x1 + 3x2 = 4

II     x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II     4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دێ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه ( عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي٠

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ ) د زیاتونکاروونه: $x_1$ له منځه ځي، که ( -2 ) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$I:................2x_1+3x_2=4$

$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$

$I-2II:....................7x_2=14$

$..................................x_2=2$



کيدی شي، ود بيلګي په توګه، له II څخه x1 وشميرل شي:

$x_1=2x_2-5=4-5=-1$

د زياتون کاروونی په کلکه يا تل استعمال څخه کيدی شي
x2
له منځه يو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزيات کړی شي.

$2.I:............4x_1+6x_2=8$

$3.II:............3x_1-6x_2=-15$

$--------------------$

$2.I+3.II:........7x_1.........=-7$

$........................x_1.............=-1$

يادونه : په پورته کې يا نورو کومو ځايونو کې ، چې ټکی چيرته اينبول کيږي، پوهيږو، چې چيرته ټکی د ځاي غزونې او چيرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بيلګه ۱۱ . ۲ :
سيسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف ( مساوي اينوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x2
په خوښه. دا په دي مانا چی
x2
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
x2( 3/2) - 2 = x1 او x2 په خوښه.



ب ) د بل په ځاي اینوولومتود: I' x1 = 2-(3/2)x2 ,
په II کی اینول کیږي

II' 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8
8-6x2+6x2 = 8
0.x2 = 0 x2
په خوښه له II' لاس ته راځي
I' : x1 = 2 - 3/2 x2 x2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
2.I 4x1 + 6x2 = 8
II 4x1 + 6x2 = 8

______________________
II - 2.I : 0x1 + 0x2 = 0
که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
x1 = 2-(3/2)x2
x2په خوښه
په همدي ډول:
x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,
دلته x1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته دري ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف ( مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

I' :   x1 = 2 -(3/2)x2

II' :   x1 = 5/2 -(3/2)x2

2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2

0.x2 = 1/ 2



--------------------------------------------------------------------------------------

دا یو په ځتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب ) د بل په ځاي ليکلو عمليه:   I' :   x1 = 2 - (3/2)x2 ,

په II کی دی په ځای شي

II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10

8 - 6x2 + 6x2 = 10

0.x2 = 2

دا مخامخوالی یا په ځتوالی یا تضاد دئ ، پس ځواب نه شته.

پ ) د زیاتون متود:

2 . I   4x + 6x = 8

II   4x + 6x = 10

---

2.I - II   0.x + 0.x = -2

په ځتوالی یا تضا د دئ ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پینتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

I   x /(a+b) +y/(a-b)

II   x /(a-b) +y/(a+b)

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دئ چی a =| b او a- =| b وي، یعنی |b| =| |a| وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$

$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$

له دې سره د y دواړه ځله ووني یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:



$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$



---

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی څموږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات ) * ( تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات )*( داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون( *)( په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته ( له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دئ
3 . $a=b=0$
دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دئ.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لويي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو



---

$u=1/(2x-3y)$ ,$v=1/(3x-2y)$
او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$

$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

---

$37u=37$

$u=1 \Rightarrow v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5 , y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8 ) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نود $x_2$د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ ( وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - _{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په ( 11 . 8 ) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چی( 11 . 12 ) په ریښتینی د ( 11, 8 ) ځواب دی. له ( 11 . 10 ) تر ( 11 . 12 ) سړی په واقعیت یا ربښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي( لارښودوي.)



---

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i,k = 1,2)$د

د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پو هیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم( منفی ) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل( یا ) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په ( 11 . 13 ) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په ( 11 . 8 ) سیستم کی . د ( 11.13 ) دیترمینانت له دې امله د ( 11 8 ) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپو هنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو ( ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په ( 11. 13 ) کی لومړی ( درز، ستن یا مته یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه( په ځای ) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د ( 11 . 8 ) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 ولیکل شي نو( په x1 اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه یا نمره دې) ۱۱،۱٤ ( وي‌په همدې ډول که د ) 11 . 13 ( دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11}a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots(11,15)$$

که له ( 11 . 10 ) تر( 11 . 12 ) پورې له ( 11 . 13 ) تر ( 11 . 15 ) پرتله یامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو یا ضریبونو دیترمینانت لپاره په ( 11. 13 ) کی



$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم ( 11 . 8 ) یوائنی ټاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د ( 11 . 14 ) او ( 11 . 15 ) له مخی شمیرل کیږي.
د ( 11 . 10 ) او ( 11 . 11 ) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په ( ۱۱ . ۱۳ ) کی د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي

(11,18) 0 = D

او د کم له کمه یوې ډیترمینانتD1 یا D2 لپاره په ( 11 ,14 ) یا ( 11 , 15 ) باوري وي

D1|=0 V D2 |=0 (11,19)

نو ( 11 . 8 ) سیستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون یی یو د بل سره مخامخ دي ( تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

D=D1=D2=0 ( 11 . 20 )

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دئ ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي( او د ۱۱ . ۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي ( ۱۱ . ۱ . ۲ برخه ) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يواځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\-5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$



---

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ : د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

D = 2 3 =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 3\\10 & 6\end{vmatrix}=24-30\neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د 0=| D2 = 4له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی D , D1 او D2 شميرو:



---

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b}\\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$.........................=\frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a-b}\\ 1 & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & 1\\ \frac{1}{a-b} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت ab |= 0 :

دلته دیترمینانت D |= 0 او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د D1 = D2 له امله )

دوم ۱ حالت a=0,b|=0 : دلته D = 0 مګر

D1 = D2 |= 0

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته D = D1 = D2 = 0

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت a = b = 0 :



---

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی ( په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو  سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو    وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره  پرتله  یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

١١ . ١ . ٤ د ګاوس الګوریتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کې څېړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره ( برابرو  لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه ) ، کره  پوهیدلی شو چی ددې په مرسته  ټولیز  د برابرونسیستم ( 8 . 11 )

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

١ . که 0 =| a22 وي، نو  لاس ته راځي:

الف)      x2=a2/a22

ب  )  برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$   وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=
(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

٢ . که 0 = a22 او 0 =| a2 وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

٣ . که 0= a22 او 0 = a2 وي، نو   ٢- م  برابرون  بی هوده دی  ( د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا.  برابرون  د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی  شي.

د ( 11 . 8 )  سیستم د  ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – څیره  واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي،  د ګاوس الګوریتم دی. یا ( 11 . 8 ) سیستم دریګوډی څیره  لري او یا ټول aik  د صفر سره برابر  نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی ( 11 . 8 ) سیستم په روڅنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

| | | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | $a11x1+a12x2= a1$ | a11 | a12 | a1 |
| II | $a21x1+a22x2= a2$ | a21 | a22 | a2 |

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - څله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

| | ............................................................... | $x_1$ | $x_2$ | Rs |
|---|---|---|---|---|
| I | $a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_1$ |
| II' | $0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$ | 0 | $a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$ | $a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$ |

که 'II لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

| | | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | $a11x1+a12x2= a1$ | a11 | a12 | a1 |
| II' | $b22x2 = b2$ | | b22 | b2 |

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که 0 =| b22 وي ، نو x2 له 'II او x1 له I لاس ته راځي.
-که 0=| b22 = 0 , b2 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

| | | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | $2x_1 + 3x_2 = 4$ | 2 | 3 | 4 |
| II | $x_1 - 2x_2 = -5$ | 1 | -2 | -5 |

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II ځخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

| | | $x_1$ | $x_2$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | $2x_1 + 3x_2 = 4$ | 2 | 3 | 4 |
| II' | $0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$ | 0 | -7/2 | -5 |

له II' لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I ځخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یو اځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیږو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم۲

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 4 | 6 | 8 |
| II'=II-2.I | 0 | 0 | 0 |

سیستم ۳

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 4 | 6 | 10 |
| II'=II-2.I | 0 | 0 | 2 |

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ ځه نوی نه لري ( 0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I ) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په ځلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| II'=II+(2/3).I | 7/3 | 0 | -7/3 |
| 1. | 2 | 1 | -1 |

اول واریانت

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| II'=II-(1/2).I | 0 | -7/2 | -7 |
| 2. | -1 | 2. | 2 |

څلورم وایانت

| | x1 | x2 | Rs |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| I=I-2.II | 0 | 7 | 114 |
| 2 | 1. | -1 | 1. |

دریم واریانت

| | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|
| I | 2 | 3 | 4 |
| II | 1 | -2 | -5 |
| I'= I+(3/2).II | 7/2 | 0 | -7/2 |
| 2. | 2 | 2. | -1 |

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا ) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب ) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت ) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2 ) = -1$$

واریانت ۲ :

ا ) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ب ) له 'II څخه دې x1 وشمیرل شي

پ ( له 'II لرو: 1- = x1

ت ) له I څخه لرو: 2 = x2

واریانت (امکان ) ۳

ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي

ب ) له 'I څخه دې x1 وشمیرل شي

پ ) له 'I لرو 1- = x1

ت ( له II لرو 2 = x2

واریانت ( امکان) ۴

ا ) له II دې x1 و شمیرل شي

ب ) له 'I څخه دې x2 وشمیرل شي

پ ( له 'I لر $x2 = 14 / 7 = 2$

ت ) له II لرو:

$x1 = -5+2.2 = -1$

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګنونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه( برتري ) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

## ۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یواځي په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$
\begin{array}{llll}
a)\ I & x1 + 2x2 = 3 & b)\ I & x1 + 2x2 = 3 \\
II & 2x1 - x2 = 1 & II & 2x1 - x2 = 1 \\
III & 3x1 + x2 = 2 & III & 3x1 + x2 = 4
\end{array}
$$

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

له ) a او )b څخه لرو $x1 + 2x2 = 1$ که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په ( a ) کې :$3.1+1.1 = 4 \neq 2$, په ( b ) کی : $3.1 + 1.1 = 4$

نو سیستم ( a ) ځواب نه لري او سیستم ( $\hat{b}$ ) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني $x1=x2=1$

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

| a) | x1 | x2 | RS | b) | x1 | x2 | RS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | I | 1 | 2 | 3 |
| II | 2 | -1 | 1 | II | 2 | -1 | 1 |
| III | 3 | 1 | 3 | III | 3 | 1 | 4 |
| II'=II-2.I | 0 | -5 | -5 | II'=II-2.I | 0 | -5 | -5 |
| III'=II-3.I | 0 | -5 | -7 | III=III-3.I | 0 | -5 | -5 |
| III''=III'-II' | 0 | 0 | -2 | III=III'-II' | 0 | 0 | 0 |

په a ) کی تضاد پیژندلکیږي ( $III':0.x1+0.x2=-2$) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b ) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .($III':0.x1+0.x2=0$ ) لهII' څخه لرو:

$x2 = 1$ او له I څخه لاس ته راځی : $x1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر څیرني لاندې نیسو:

$$a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 \quad ( 11 . 21 )$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I . \quad a11=a12=a13=0 \qquad ( 11 . 22 )$$

دلته $x1 , x2$ او $x3$ یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي ( x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

$$2. \quad a11=a12= a13= 0 ,a1\neq 0 \quad ( 11 . 23 )$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$$0x1+0.x2+0.x3 = a1 |= 0$$

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړې i , k لپار دې aik |= 0 وي. ( بي د ټوليز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دې a11|= 0 وي (. کيدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي ( ناپاي ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

$$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$$ په خوښه x1 او x3 (11,24)

## ۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسيستمونه د درې اوښتونو يا ناپيژندونکو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \qquad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \qquad (11,25)$$

موږ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, k لپاره aik= 0 ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په څير وي ( ناپاي ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ښتوالي يا تضاد کی وي ( ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. موږ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت څيړو چی يو ناپيژندونکي يا نامعلوم ( د بيلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې ( x1 او x2) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول کيدی شي ( ناپاي ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

x1 x2 x3 RS

---

1 1 1 3 I x1+x2+x3=3

II x1+2x2+3x3=6 1 2 3 6

---

II'=II-I 0.x1+x2+2x3=3 0 1 2 3

له II' لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



----------------------------------------------------------------

او له دې لاس ته راځي
$x_3$ په خوښه. $,x_1=x_3, x_2 = 3 - 2x_3$

## ۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څېړو

$$\text{I} \qquad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \qquad (11 . 26 )$$

$$\text{II} \qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \qquad ( 11,26)$$

$$\text{III} \qquad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \qquad (11,26 )$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه ) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د ( ۱۱ . ۲۶ ) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:
ریبل ګڼونو $a_{ik}$ ( $i,k = 1,2,3$ (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};..................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی ریبلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32)}) - a_{12}(a_1a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه ) 11 .28 ( فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:
پیژند ۱۱ . ۳ : په ( 11 . 27 ) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي( زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

کې دا لیکې او مټې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پېښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې )

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمی درجې دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27 ) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي څخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د ( 11 . 26 ) څخه لاس ته راوړل کیږي:

Dx1 = D1 , Dx2 = D2 , Dx3 = D3 (11 . 29 )

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چی د ځله وونودیترمینانت ( 11 . 28 ) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26 ) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots (11, 30)$$

موږ دا نتیجه بې له ښوونې ورکوو.
له ( ۱۱ . ۲۹ ) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ ( د کرامر قاعده) :
که د ( ۱۱ . ۲۶ ) د ځله وونودیترمینانتو( ۱۱ ). ۲۷ ،په همدې ډول ( ۱۱ . ۲۸ ) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



--------------------------------------------------------------------------------

$D \neq 0$ ( 11 . 31 )

با وري وي ، نو ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$x_1 = D_1/D$ ; $x_2 = D_2/D$ ; $x_3 = D_3/D$ (11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $|D_i| = 0$ کم له کمه د یوه $i$ ( $i = 1,2,3$ ) لپاره وي، نو د ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم ځواب نه لري ( په ( ۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ وي، نو په ( ۱۱ . ۲۶ ) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې ځواب شي ( وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

I $x_1 - x_3 = -2$

II $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

III $2x_1 - x_2 = 0$

کی دئ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 - 1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

نو یوائځنی ټاکلی ځواب موجود دئ.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2\ ,x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned} I \quad & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II \quad & x1 \quad -x3 = 0 \\ III \quad & 2x1 + x2 \quad =1 \end{aligned}$$

کي دئ.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښایې ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 |=0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګورتیم لومړی د ( ۱۱ . ۲۶ ) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چی ( 11 . 16 ) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{aligned} I \quad & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 34) \\ II \quad & b22x2+b23x3=b2 \\ III \quad & c33x3=c3 \end{aligned}$$

بنسټیز حالت : که $a11|=0,b11|=0,c11|=0$ وي نو یو په بل پسې سړی کړی شي چې له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په ( 11 . 34 ) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3|=0,c33=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که$c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یوائځی I او II څیړي.

- که$c33=c3=0$او برسیره پر دې $a11|=0,\ b11|=0$ وي، نو x3 په خوښه ټاکل کیدی شي او x2له II او x1 له I چی x3 ته اړ وي، شمیرلکیدی شي ( ناپای ډیر ځوابونه )

-برسیره پر دې که $b22=b23=0\ ,\ b2|=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11|=0$ کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي، او x1له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ته راځي چې x2 او x3 ته اړ (په واك كې يا تابع) وي ( ناپاي ډېر ځوابونه ځوابونه) . كه ټول ځلونه او د مساواتو ښى خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوريتموس د دري ناپيژندونکو( 11 . 26 ) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ

لومړی پل ( قدم) : نيسو چې په ( 11 . 2 6 )کی 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ هميشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چې ټول aik = 0 وي) .

دلته I وركول كيږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a31 / a11 - ځله د I كموي. ددې ښخه لاندې سيستم لاس ته راځي:

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array} \quad (11 . 35)$$

دويم پل ( قدم ) : د b22 |=0 نيوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوريتم استعماليږي : سرې 'II بي تغيره پريږدي اوله'III دا b32/b22-ځله د 'II كموي، له دې راپيداكيږي

$$\begin{array}{ll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array} \quad (11 . 37)$$

د ګاوس د شيما فورماليتي سره سم بيا دا شكل غوره كي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | a11 | a12 | a13 | a1 |
| II | a21 | a22 | a23 | a2 |
| III | a31 | a32 | a33 | a3 |
| II' = II-(a21/a11)I | | b22 | b23 | b2 |
| III' = III-(a31/a11)I | | b32 | b33 | b3 |
| III'' = III' - (b32/b22)II' | | | c33 | c3 |

x3 = c3 / c33

x2=(1/b22)(b2-b23x3)

x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2

II x1 + x2-x3 = 0

III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 0 | -1 | -2 |
| II | 1 | 1 | -1 | 0 |
| III | 2 | -1 | 0 | 0 |
| II'= II - I | 0 | 1 | 0 | 2 |
| III'= III - 2.I | 0 | -1 | 2 | 4 |
| III'' = III' + II' | | 0 | 2 | 6 |

x3=6/2=3

x2=2……………………

x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ ( دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0

II x1 -x3 = 0

III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 0 |
| II | 1 | 0 | -1 | 0 |
| III | 2 | 1 | 0 | 1 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| II'=II-I | 0 | -1 | -2 | 0 |
| III'=III-2.I | 0 | -1 | -2 | 1 |
| III''=III'-II' | 0 | 0 | 0 | 1 |

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۰: ( مقایسه یا پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷ ) دا سیستم

I $x1 + x2 + x3 = 3$

II $x1 + 2x2 + 3x3 = 6$

III $2x1 + 3x2 + 4x3 = 9$

په لاندې ډول د ګاوس په الګوریتم اوبیونه ده

| | x1 | x2 | x3 | RS |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 3 |
| II | 1 | 2 | 3 | 6 |
| III | 2 | 3 | 4 | 9 |
| II'=II-I | 0 | 1 | 2 | 3 |
| III'=III-2I | 0 | 1 | 2 | 3 |
| III'' = III'-II' | 0 | 0 | 0 | 0 |

$=x3$ په خوښه

$x2 = 3 - 2x3$

$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3$

## ۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m ( برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$

$$..................................................$$

$$..........................................................$$

$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پرېږدو چی د برابرونونو ګڼون ( تعداد) m د ناپیژندونکو n د ګڼون ( تعداد ) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ د n - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سرې لاندنې رییل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکی i - مه لیکه او k - م درځ ، متړه یا ستن ( لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی ) په کربنه لرې کړي یا کربنه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیټیږي .

په ځانګړي توږه د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\ etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------------

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو ) په ) 11 . 37 ( کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn ( 11 . 42 )

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت ) ۱۱ . ۳۸ ( کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره ( پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰ )

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix};D_2=\begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots(11,43)$$

له(11 . 42 ) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ ( د کرامر Cramer قاعده):

د ځله ووني یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په ( ۱۱ . ۳۷ ) د m = n سره) باوري دی

D |= 0 (اصلي حالت ) (44 . 11 )

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري( حل لري

x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. ( 11 . 45)

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .

که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو )

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سیستم دې حل شي

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $x_1$ | | $+x_3$ | | $= 0$ |
| II | $2x_1$ | $+x_2$ | | $+x_4$ | $=0$ |
| III | | $x_2$ | | $-x_4$ | $= 4$ |
| IV | $x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $+x_4$ | $= -2$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\end{vmatrix}$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغې له مخی څرګندولی شو چی کوم حل )ځواب( مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | x1 | x2 | x3 | x4 | Rs |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| II | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| III | 0 | 1 | 0 | -1 | 4 |
| IV | 1 | -1 | -1 | 1 | -2 |
| II'=II -2.I | 0 | 1 | -2 | 2 | 0 |
| 4III' = III | 0 | 1 | 0 | -1 | 4 |
| IV' = IV-I | 0 | 1 | -2 | 1 | -2 |
| III" = III' - II' | 0 | 0 | 2 | -3 | 4 |
| IV" = IV' +II' | 0 | 0 | -4 | 3 | -2 |
| IV'" = IV" + 2.II" | 0 | 0 | 0 | -3 | 6 |

x4 = -2

x3=1/2(4+3.(-2))= -1

x2=0+(-1)(-2)= 2......

x1 = -(-1) = 1 ...........

بيلگه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسيستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4

II x1 -x2 -x3 +x4=0

III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل يا اوبيونه ی نه لري، لکه د گاوس له شيما څخه چی ليدل کيږي:

| | x1 | x2 | x3 | x4 | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| III | 3 | -1 | -1 | 3 | 2 |
| II' = II-I | 0 | -2 | -2 | 0 | -4 |
| III' = III-3.I | 0 | -4 | -4 | 0 | -10 |
| III'' = III' - 2.II' | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 |

دلته III" په ځتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چې oe1 ( ناپای ډیر) اوبیونې لري

| | x1 | x2 | x3 | x4 | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| II | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| III | 3 | -1 | -1 | 3 | 4 |
| IV | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| V | 3 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| II' = II-I | 0 | 2 | - 2 | 0 | -4 |
| III'= III-3.I | 0 | -4 | -4 | 0 | -8 |
| IV' = IV -I | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| V' = V-3.I | 0 | -2 | -2 | 0 | -4 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II"= II'+2.IV' | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 |
| III'=III'+4.IV' | 0 | 0 | 4 | 12 | 16 |
| V" = V' +2.IV' | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 |
| III"' = III"-2.II' | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| V"'=V"-II | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

ګورو چی III"' او V"' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښنه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4 په خوښنه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4 ، په خوښنه x4 ټاکو

او x3=4-3x4 په خوښنه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پوري اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی ) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3= 0\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{II} \quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.\ 46 \\ &\text{III} \quad a31x1+a32x2+a33x3= 0\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad ( 11.\ 47 )$$

که د ځلوونو د یترمینانت ( ۱۱ . ۳۸ ) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۱ . ۸ : یو هوموګین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي

بیلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژین برابرونسیستم

$$\begin{aligned} I \quad & x1 \quad +x3=0 \\ II \quad & x1 \; -x2 \quad =0 \\ III \quad & x1 \; +x2 \; +x3=0 \end{aligned}$$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه x1=x2 =x3= 0 لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګین مساواتسیستم

$$\begin{aligned} I \quad & x1 \quad +x3 = 0 \\ II \quad & x1 +x2 \quad = 0 \\ III \quad & x1 +x2 +x3 = 0 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبیونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

---

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

---

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I ځخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

## . تمرینونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کرښیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو ځخه کار اخستلس شي، چې بیایې و ازمایو. د لته دې د زیاتون یا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي ا و د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$  b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$  d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$  b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$  d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$  b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$
$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$
$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$
$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$
$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$
$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1+4x_2 = 8$
$5x_1-2x_2 = 9$
$7x_1-8x_2 = 10$

b) $6x_1-x_2 = 1$
$9x_1+2x_2 = 5$
$3x_1-x_2 = 1$

c) $5x_1-3x_2 = -3$
$3x_1+5x_2 = 5$
$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1-3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1-1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

## ۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1+x_2 = a$
$ax_1-x_2 = b$

b) $3x_1-2x_2 = 5a$
$2x_1-3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسي حا لي جي ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګنونو څخه هر یو یې په 2 لویږي، نو ګڼونه ځانونه نیسي
لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونو څخه 3 کم شي ، نو داسې لاس
ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګنونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګنونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ،
نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګنونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګنونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا
ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون بی 2222 دی. هر یو له دې ګنونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګنونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی.
دواړه ګنونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه درېکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن
یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د
دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی
جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm
دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ
کلي X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلي دیوال،
چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی
کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځي اوږده د هوارې
دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ . ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM ) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی ( بیلر ) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60 m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیې، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کې څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپرې یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکې. د دواړو بدنونو سرعت څومره دی،که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ؟

۲

۲ . . کربنیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $x + y = 14$, $x + z = 15$, $y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 + x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$, $x_1 - x_3 = 2{,}6$, $x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$, $3x - 2z = 1$, $20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$, $3x - 4y = 3$, $5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$, $4x + 8y - 14z = 10$, $6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$, $5x - 3y = 37$, $3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$, $x_1 - x_2 + x_3 = 13$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j) $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$, $2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k) $\frac{2}{5}x - y = 0$, $\frac{2}{3}x - z = 1$, $-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$, $x_1 + x_3 = 2b$, $x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$, $x_1 + x_3 = 2(a + c)$, $x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$, $ax - by + z = b$, $-ax + by + z = a$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

d) $\begin{aligned} ax + y - cz &= 2a \\ -ax + y + cz &= 2c \\ ax - y + cz &= 2ac \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= 2b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 0 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{2}{a} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{2}{b} \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= a \\ y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= b \\ z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= c \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} &= a + b \\ \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} &= b + c \\ \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} &= c + a \end{aligned}$

۳ . په خوښه زیات مساوات د په خوښي زیاتو مجهولو سره

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$

هوموجین مساوات سیستمونه:

a) $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

## ۱۲ . ۱ نالاينيز- يا ناکربنيز- يا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره يوارزښته ( اکويوالنت ) نه وي ، نالاينيز – يا ناکرښيز مساوات بلل کيږي او عمومي فورم يی په لاندې ډول دی

$$F( x ) = 0 \qquad ( 12 . 2 )$$

دلته $F ( x)$ په $x$ کی يوه ناکرښيزه يا ناخطي ويينه يا افاده ده . د ( 12 . 2 ) حل دا مانا لري چی ټول د $x$ارزښتونه پيدا شي د کومو لپاره چی ( 12 . 2 ) باوري وي. بايد په پام کی ونيول شي چی ايا يواځي رييل ارزښتونه پيدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پيدا کړو. د بيلګی په توګه لاندې ناکرښيز يا لاينيز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رييل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره يې مساوات باوري کيږي .ددې په څنګ يا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رييل ځواب نه لري ( ۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ايماګينار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې ( ۱۵ برخه دې وکتل شي ) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړيکو ته پاملرنه وشي: اړيکو $y=F(x )$ ته فنکشنبرابرون او $x$ ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم( ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څېړ یا برعکس ( 2 . 12 ) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی یا اوښتونی دی.

د ( 2 . 12 ) برابرون یا مساوات اوبيونې یا حل ته د برابرون د F ( x ) صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ريښه هم وايي.

هغه برابرون یا مساوات چې په ( ۱۲ . ۲ ) فورم نه دئ ورکړ شوی کيدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$f(x)=g(x) \quad \text{او} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راواړل کيږي

$$F(x)=f(x)-g(x)=0 \quad \text{او} \quad F(x)=f(x)-a.g(x)=0$$

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونده (اختماميه، رابنده، راتړلی ) تيوري نه شته. په پوليزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلوميدی شي. بايد په نومريکو ( numerischen Methoden ) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقريبي ډول پيداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسڅندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی يی څيړو، چي اوبيونې يی روښانه افاده شوې ( explizit لاتين: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپليڅت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ..................(12,3)$$

دلته په ( 2 . 12 ) کی يو نالاينيز بلواک یا – فنکشن ( F ( x د يوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په ( ۱۲ . ۲ ) کی د ضريبونو( ځله وونو) لپاره يواځی رييل ګڼونه پريږدو ( په دې مانا چي ځلونه يواځي رييل وي، يواځی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا په ( ۱۲ . ۳ ) کی کیږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ..................(12,4)$$

ته ټول ریشنل ( - ریښتونی ) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال ) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ..................(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په ( ۱۲ . ۳ ) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک F ( x ) په ( ۱۲ . ۲ ) باندې په واریابلي یا اوونښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغځ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ..........................(12,7)$$

تل په ( ۱۲ . ۵ ) یا ( ۱۲ . ۳ ) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳ ) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان ( مټ، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او ( ۱۲ . ۲ ) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په ( ۱۲ . ۳ ) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ( G( x افادې یا وییني له منځه وړل کیدی شي, که چیرې څوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په ځرګندو یا معلومو بیلګوڅیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځیرنه د ( ۱۲ . ۳ ) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسڅیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسڅیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څیړني لاندې ونیول شي.

# ۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان( مټ، جګ) د ۲

## ۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا مټ ( په جګ ۲ هم ویل کیږي ) برابرونونه دي چی څلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې ټولیزه بڼه ( عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2+b_1x+b_0=0; b_2\neq 0; ............................(12,8)$$

په b2 یي ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته ( اکویوالنت äquivalent ) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2+a_1x+a_0=0; (a_1\neq b_1/b_b; a_0\neq b_0/b_2); ............................(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې یا مربعتکمیل څخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x+a_a/2]^2=x^2+a_1x+\frac{a^2{}_1}{4}; ......................(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی ( ۱۲ . ۹ ) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$[x+a1/2]^2=(a1^2/4)-a0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a1^2/4)-a0>0 \Leftrightarrow a1^2-4a0>0 \Leftrightarrow a1^2>4a0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی ( ۱۲ . ۱۱ ) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,13)$$

يا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د ( ۱۲ . ۱۳ ) او همداسی د ( ۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹ ) برابرون لاس ته راځي ( په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بينا تل نا کميز يا نامنفي ګڼ پوهيدل کيږي، چی څلوری يا مربع يی a ده ) . له ( ۱۲ . ۱۳ ) په همدې ډول له ( ۱۲ . ۱۴ ) څخه رييل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم ليکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,16)$$

په ( ۱۲ . ۹ ) کی د ( ۱۲ . ۱۵ ) په همدې توګه ( ۱۲ . ۱۶ ) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهيدل کيږي چی دواړه ارزښتونه
$x1$ او $x2$
په رينتونی څلوری برابرون يا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د ( ۱۲ . ۱۶ ) له لارې تيك يو رييل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ /2;.................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ( ۱۲ . ۱۵ ) همداسی په ( ۱۲ . ۱۶ ) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني ( ۱۲ . ۱۸ )څخه غږیږو.
که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو ( ۱۲ . ۱۱ ) همداسی ( ۱۲ . ۹ ) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)}\,i \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)}\,i$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)}\,i;...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په ( ۱۲ . ۹ ) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)}\,i=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: ( د څلوری یا مربع ) په توان یا جګ د ۲ ) برابرونونو د اوبیوني فرمول ) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) x²+a1x+a0=0

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)}\,i$$

ټیک دوه ځوابونه لري
د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره( ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۲ . ۲ ( د ویيتا( Vieta)جمله ) :

که x1 او x2 د څلورئ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹ ) همداسی د ( ۱۲ . ۸ ) اوبیونې وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,23)$$

حل : ( ۱۲ . ۲۳ ) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د ( ۱۲ . ۲۲ ) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او i ² = -1 استعمال څخه په په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د وییتا جملې په مرسته لاندې جمله باوري کيږي یا تصدیقیږي

جمله ۱۲ . ۳ :

یو ۲ درجییز پولینوم کیدی شي چې په دوه لايني فاکتورونو یا ضریبونو یا ځله وونو بیل یا ټوټه یا تجزیه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); ....................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2); ....................(12,25)$$

چیرته چي x1 او x2 د څلورۍ برابرونونو یا مربع مساواتو ( ۱۲ . ۹ ) په همدې ډول د ( ۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له ( ۱۲ . ۲۲ ) ، ( ۱۲ . ۲۳ ) څخه د ( ۱۲ . ۹ ) همداسی د (۱۲ . ۸ ) په پام کي نیولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

د جملې ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چې د ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کې د دوه برابره ریښل اوبیو څخه خبرې وکړو( وغږیږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; ....................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲ ) .( ۱۲ . ۱۷ ) او ( ۱۲ . ۱۹ ) کیدی شي چې د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

ځیرو یا شکلونو ( ګراف ) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټیزه توګه پارابول انځوروي، چې پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چې که xهرڅومره کوچنی شي )که x د کمیز ناپای په جګ یا توان شي ) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي ( که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوییږي ( ستریږي یا غټیږي) ، ځکه چې$x^2$ نسبت و x ته په توان یا قوي جګیږي له ټولو پولو( yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پیژند یا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کی د x - محور په داړو ريیلو ځایونو x1 او x2 کی غوڅیږي؛ په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کی په x1 = x2 ځای کی یي لمسوي او په ( ۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي ( پرتله ځیره . ۱۲ . ۱)

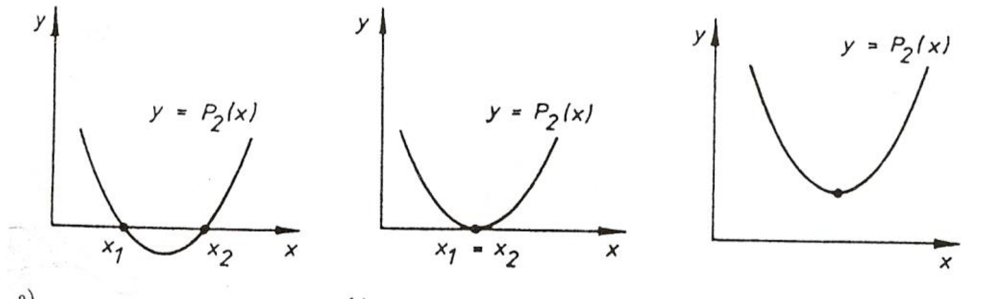



Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، ( ۱۲ . ۱۹ ) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = - 1 , a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله ( ۱۲ ، ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ ځخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب ځخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئيز رييل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱
څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کيږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$ ,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت ( ۱۲ ، ۱۹ ) مخ ته لرو.

د کونيوګيرت( کنجوګيري) کمپلکس جوړه اوبیونو يا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په
لاندې بڼه يا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



او د جملې ۱۲ . ۳ له مخې داسې دئ

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸ ) همداسې ( ۱۲. ۹) اوبې په ښکاره ډول ساده کيږي، که يو ځلې a0 اويا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

## ۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چې په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که يو مربع مساوات په نورمال فورم ( ۱۲ . ۹ ) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چې جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو بايد په دې بڼه واړول شي.

بليګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول يا ناپيژندلی يا اوړيدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو بايد په صفر ويش ناممکن يا ناشونوالی په پام کې ونيول شي.

بيلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټيك هلته مانا لري، چی وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چي ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

## ۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مي درجی مساواتو( ۱۲ . ۳ ) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چی د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12, 27)$$

دn- می درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; .......................... (12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; ................. (12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



-----------------------------------------------------------------------------------

يادونه : په پورته کې له ( ۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹ ) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو ځلورئ - يا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري x = 0 چی دا ( n-2 )- ځله رامنځ ته کيږي x3 = x4 = ... = xn=0

بيلگه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....................(12,32)$$

يو بل ځانگړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون ( ۱۲ ، ۳) درجه n جوړه گڼ يا جفت - وي

n = 2k ( 12 . 33 )

او فقط ( ټيك) ځله وونې يا کوايفيځينتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....................(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ............................................(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره ( پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};.......................(12,37)$$

د( ۱۲ ، ۳۵ ) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;..........................(12,38)$$

ټولې اوبيونې وخيرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره( بيکوادرات برابرون) ( د څلورې څلورې يا د مربع مربع ) يا د رييلو $y1$ او $y2$ لپاره د تراوسه څرګندو ميتودو سره تل کيدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټوليزه توګه ستونځی لري.

بيلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بيکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 - 6 = 0$ کيدی د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورې برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بيرته بدلون( -سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبی يا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړی کیدی شي چی په ځلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1 - x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د ( ۱۲ ، ۴۰ ) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیونې لري

$x1 = 3 , y1 = -2$ او $x2 = -2 , y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

چی يواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وريا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو( ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په ( ۱۲ . ۴۲ ) کی ايښول کيږی يا ځای په ځای کيږي

$$1\text{-}ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی ( ۱۲ . ۴۴ ) برابرون مخامخوالی لري يا په ښتوالی لري يا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴ ) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \text{........................}(12.45)$$

لپاره مو ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه بايد په پام کی ونيول شي:

د $a > 0$ لپاره له ( ۱۲ ، ۴۵ ) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له ( ۱۲ ، ۴۵ ) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د ( ۱۲ ، ۴۴ ) دوه مختلف ريل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.....................}(12.47)$$

په دې پوروې د ( ۱۲ ، ۴۶ ) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.................}(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

باید وازمایيل شي چی د ( ۱۲ ، ۴۶ ) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول ) نابرابر په صفر دي . ټل 1 /2 < x1 دی. که 0 = x2 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a} ; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم*لرو* $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په ( ۱۲ ، ۴۶ ) حالت کی د ( ۱۲ ، ۴۱ ) د ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
x2, y2 . او x1 , y1
د

1/4-1/a=0 <=> a=4 ( 12 , 49 )

لپاره( ۱۲ ، ۱۷ ) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون ( ۱۲، ۴۴ ) ډبل رییل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳ ) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د ( ۱۲ ، ۴۹ ) په حالت کی پس د ( ۱۲ . ۱۹ ) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 ( 12 , 51 )
د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 ( 12 , 52 )

لپاره ( ۱۲ ، ۱۹ ) حالت مخ ته پروت دی. د 0 < a لپاره ( ۱۲ ، ۵۲ ) د a<4 کتمت (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمت دی ( له دې امله په ښتوالی یا تضاد ) .
نو د( ۱۲ ،۵۲ ) باور لري، د

0 < a < 4 ( 12 , 53 )

(c) ketabton.com: The Digital Library



لپاره . په دې حالت کی ( ۱۲ ، ۴۴ ) کونجوګيري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \qquad (12.54)$$

د ( ۱۲ ، ۴۳ ) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \qquad (12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاي شوي یا راټوله توګه لرو: برابرونسیستم ( ۱۲ ، ۴۱ ) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$ په همدې ډول $a > 4$ لپاره دواړه ریل اوبي ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) ، د $a = 4$ لپاره رییل ډبل ګڼلي اوبۍ ( ۱۲ ، ۵۱ ) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګيري کمپلکس اوبي ( ۱۲ ، ۵۴ ) ، ( ۱۲ ، ۵۵ ) لري.

## ۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې n- ( ام ( درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره څیړو.
د دریمی درجي مساواتو نورمال فورم په د ( ۱۲ . ۳ ) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3 + a2x^2 + a1x + a0 = 0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y = P3(x) = x^3 + a2x^2 + a1x + a0 \qquad (12, 57)$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی د$x^3$ ارزښت نسبت د $x^2$ ارزښت ته په بیړه جګیږي او بیا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو x- ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي $x^3$ د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول
$x \to -o$ د $y \to -o$
لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت ) خورا کوچنی هم کیدی شي ( شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لپاره $y < 0$ وي اود یو x - ازښت ) چې خورا لوي هم کیدی شي ) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات ( ۱۲ . ۵۶ ) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad ( 12 , 58 )$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

X = 0 , 1 , -1 , 2

Y = 12 , 6 , 12 , 0

په دې توګه یو رییل صفرځاي پیدا شو

$$x 1 = 2 \qquad ( 12 , 59 )$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چې بیا د مټ( توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad ( 12 . 61 )$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د ( ۱۲ . ۶۰ )مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي )ترتیب شي وشمیرل شي (، ځکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

X = 0 , 1 ,1 / 2

Y = -9 , 16 , 0

نو

$$x1=1/2 \qquad ( 12 , 62 )$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د مساوات ( ۱۲ . ۶۰ ) په همدې ډول ( ۱۲ . ۶۱ ) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12,63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3
Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12,64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12,65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1
Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12,66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجې برابرونسیستم ( ۱۲ . ۵۶ ) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل $x_1$ شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له شوونې یی لیکو، چې دا پولینوم ( ۱۲، ۵۷ ) بي له پاتي په لاینیز فاکتور ( x - x1 ) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون ( ۱۲ . ۵۶ ) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو ( ۱۲ . ۵۶ ) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورۍ برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون درې اوبیونې یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی ( موجود دي)

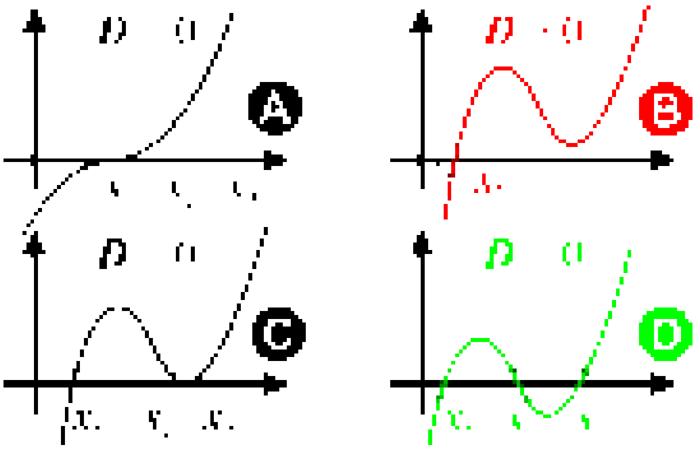
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو ډبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیونې یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو( ۱۲ . ۵۷ ) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ( ۱۲ . ۶۸ ) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون ( ۱۲ . ۵۶ ) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

( ۱۲ . ۵۸ ) برابرون د ( ۱۲ . ۵۹ ) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۴ ۲ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه-( ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو رييلو ځوابونو سره

، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$

او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x-3)(x+2)$$

بيلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۲ ) برابرونونو له مخی اوبی

$$x1 = 1/2$$

لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول يا ( □ ) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د يوه رييل حل او يو بل له دې حل مختلف ډبل رييل حل سره، يعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بيلګه ۱۲ . ۱۲ب :

( ۱۲ . ۶۳ ) برابرون د( ۱۲ . ۶۴ ) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دريم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی يعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلگه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۶ ) برابرونونو له مخی ځواب $x_1 = 1$ لري، او داسی دی

$$( x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه رییل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x_1 = 1 , x_2 = 2+3i , x_3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) =(x-1)(x^2-4x+13)$$

## ۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی څنګه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي۰ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي رییل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :
د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} =16;............................(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} =9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که ( ۱۲ . ۷۳ ) برابرون په ( ۱۲ . ۷۲ ) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا د x-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} = 7+3.3=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلگه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;..........................(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که ( ۱۲ . ۷۵ ) د پیل په برابرون ( ۱۲ . ۷۴ ) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون ( ۱۲ . ۷۴ ) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $19 + x 2>0$ دی)۰

دا ساده بیلگی موږ ته را ښایي چي باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي گوندې تیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په تولیزه توگه باور لري: که برابرون:

$$f ( x ) = g ( x ) \qquad ( 12 , 76 )$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F ( x ) = G ( x ) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه گڼ ځل ( ضرب ) شي او یا وویشل شي ( په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون ( ۱۲ ، ۷۶ ) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مگر نه په څټ ( برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون ( ۱۲ . ۷۷ ) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون ( ۱۲ ، ۷۶ ) ته . دا به په لاندې بیلگه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

$$x\text{-}x\text{-}1=2x\text{-}1 \qquad (12\ .\ 78)$$

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بنه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

$$x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1\ ,$$

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

$$x(x-1) = 0 \quad (12\ ,\ 79)$$

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

$$x1 = 0,\ x2 = 1 \qquad (12\ .\ 80)$$

دا د ( ۱۲ . ۷۹ ) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د ( ۱۲ . ۷۸ ) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په ( ۱۲ . ۷۸ ) کې دوه ریښې نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸ ) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګې ( ۱۲ . ۷۸ ) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښې برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه ( ۱۲ . ۷۸ ) بنه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} =>$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} =>$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1, x_1=3, x_2=1,................(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|=0$ دی ، او ( ۱۲ . ۸۲ ) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2-7x+3=x^2-4x+3$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

$$x3=0, x4=x1=3$$

او په ( ۱۲ . ۸۱ ) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1=3, x_2=2, x_3=0$$

پیل برابرون ډکوي.( باوري کوي، پوره کوي )

د $x=3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0}-\sqrt{9-12+3}-\sqrt{18-21+3}=0$$

له دې امله $x=3$ د پیل برابرون یا مساوات ( ۱۲ ۸۱ ) اوبی یا حل دی . د

$x2=1,$ او $x3=0$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون ( ۱۲ . ۸۱ )

اوبی حل $x=3$ ( 12 . 85 )

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدتاکلو ضربیونو سره

1.1.1. a) $x^2-4=0$ b) $3x^2+27=0$

c) $x^2-9x=0$ d) $5x^2=125x$

1.1.2. a) $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})=\frac{7}{12}$ b) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=\frac{5}{16}$

c) $(x-6)(x+5)=0$ d) $(x-\sqrt{7})(x-\sqrt{5})=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$
c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$
c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$
d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$
c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضريبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$
c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$
c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$
b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$
c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$
d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$
c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$
d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$
c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سيتم، کوم مو مربع مساوتو ته لارښنودوي يا بيايي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$  b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$  d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چې‌په مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$  d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$  b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$  d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$  b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$  d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګټونه ځان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګټونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګټونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب ) د درې يو په بل پسې ګټونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيو ګټونو د مربعو زياتوالی. دا ګټونه څه نومېږي يا کوم دي؟

پ ) د کوم مثبت ګڼ لسرخله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت ) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشي.

۶ . ۲ . الف ) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم $30\,\Omega$ لوېږي، په کوم کې چی د برقوه په همغه د 220 V ( وولټه ) شپانونګ په پنځه امپير ( 1,65A ) کوچنی‌شي . مقاومت او برقوه څومره دي؟

ب ) دوه سيخونه چی مقاومت يې $60\,\Omega$ يو له بل توپير لري، چې يوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت $22,5\,\Omega$ کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف ) يوه د بايسکلځغلوني لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په درينيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي، چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب ) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو، نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ ) دوه ډبډبي ځغاستي، يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کې، دوم څلور متره په ثانيه کې دی. دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت ) د ګاډي يو لاین د موټرڅغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر څغاستي پیل کې د يو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه جګوالي دي، که موټرڅغاستی منظم تعجیل او يو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km / h$ دی؟

ټ ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لایپخیږ څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لایپخیږ په لور راتلونکی بایسکل څغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپخیږ ته. د دیساو او لایپخیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف ) په ولاړنجیز دریګوډي کې ، کاتیتې څانونه داسې يوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب ) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون يي ۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ ) د یوه سمکونجیز ( ولاړکونجیز ) دریګوډي کاتیتې څومره لویې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت ) د یوه ولاړګوډي نیمی ( قطر ) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ت ) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرد کې دننه‌ځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډي مربع اړخ)

ج ) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، که ۵ دننه‌منځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح ) که د یوې ګردۍ نیمی ( قطر ) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچینې نیمی څومره لویه ده؟

خ ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه‌کی یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمې او څلورمې درجې مساوات

2 . 1 a ) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b ) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c ) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d ) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړی!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $|\sqrt{3x+7}|+|\sqrt{4-x}|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $(\sqrt[3]{x}-1)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ . ۲ – رېبنه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

### ۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ریښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دي ته ګوته نیول شوي وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو( فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کینښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \text{.............................} (13,1)$$

د بنسټ $b = 10$ لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره ( ln a) کیدی شي ( ۱۳ . ۱ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b......................(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل ( تیپ ) دا دی

$$l\log_b x = c..................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱ ) ، (7. ۲ ) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c..........................................(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$ :

په همدې ډول د ( ۱۳ . ۳ ) بڼې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c.........................................(13,5)$$

دلته ( f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د ( ۱۳ . ۵ ) سره الجبري برابرون کټمټ ( ورته) دی

$$f(x) = b^c..........................................(13,6)$$

ټولې د ( ۱۳ . ۶ ) اوبیونې د ( ۱۳ . ۵ ) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د ( ۱۳ . ۵ ) ډول ( تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینې لور ( ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وبینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷ ) ، (۷. ۹ ) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، ( ۱۳ ، ۵ ) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}....................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x - 1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log [(x - 1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/(b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $3>-2$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $2 \le b$ لپاره د $b +3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په ( ۱۳,۱۰ ) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ ( ۱۳,۵ ) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون ( ۱۳,۹ ) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y = \lg x$ سره په څلوری برابرون $y^2 - y - 2 = 0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x = 2$ او $\lg x = -1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2 = 100 \text{ او } x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6/(\lg x + 1)) + (8/(\lg x - 1)) = 3$

د, $x > 0$ مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې $(\lg x - 1)(\lg x + 1)$ سره حل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) = 3(\lg^2 - 1)$$
$$6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 = 3\lg^2 x - 3 ,$$
$$0 = 3\lg^2 x - 14\lg x - 5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0 , \; y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; y_1 = lox_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د ( ۱۳ . ۲ ) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

## ۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون( مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي( ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په ( ۱۳ ، ۱۴ ) ډول (رقم ( تیوپ ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که په ( ۱۳ . ۱۴ ) د الجبري وييني يا افادي( f (x اکسپوننتونه یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0\ ,a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b .............................(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د ) ۱۳ . ۱۶ ( ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې څلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیایي ( لاربښودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2\ , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي.

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3\ , x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې ځایه

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنستونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - ....... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت( f(x )سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 ;....................................(13,20)$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 ....... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^{x} = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x \; (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1}-1} = \sqrt{2e^{x^2-1}-1}.........................(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1}.......................................(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

ټيك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad ..........(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

x²-1=ln1=0,

x1 = 1 , x2 =-1

دواړه ارزښتونه پيلبراورن پوره کوي۰
برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتمولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8=3$$

که کیږدو y = lnx ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات y²-y-2=0 لاس ته راځي،د ځوابونو

y1 = -1 , y2 = 2

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

lnx=-1 , lnx=2, x1=e-1=1/e , x2=e²

## ۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څېره لري

$$\sin x=a\ ,\ \cos x=a \qquad (13\ .\ 29)$$

$$\tan x=a\ ,\ \cot x=a, \qquad (13\ .\ 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه ( ۱۳ . ۲۹ ) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی( پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د ( ۱۳ . ۲۹ ) همداسی ( ۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي
د(۱۳، ۲۹ ) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰ ) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د( ۱۳ ۳۰ ) ټيك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د( ۱۳ . ۳۰ ) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د ( ۱۳ . ۳۰ ) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 01, 2, 3, ...; ..........(13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په ( ۱۳ ، ۳۱ ) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې( تل بېرته راګځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه $x_0$ پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د ( ۱۳ ، ۲۹ ) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ....-3,-2,-1,0,1,2,3,....;...................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;...................................................(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ....-3,-2,-1,0,1,2,3,....;...................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;..............................................................(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: ( په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د ) ۱۳ . ۳۲ ( ، ) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13, 833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د ( ۱۳ ، ۳۴ ) او ( ۱۳ . ۳۵ ) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلگه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د ) ۱۳ . ۳۱ ( له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلگه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توگه د ( ۱۳ . ۳ ) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلگه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د گونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرگندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او یا ترانسخیندنته افاده وېکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y=f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y= a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\tan y= a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y3, y2, ,y1 , ...$ وي .

د ( ۱۳ ، ۳۷ ) سره سم د $f(x) = yi , \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلگه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° , k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$ , $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبښوني (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90°+3k.360°+120° = 210° +3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x, \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ....) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳ ) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په $y$ سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2y^2 \quad (\text{usw.}$$

او داسې نور

له دې سره برابرون ( ۴۲ . ۱۳ )، په $y$ ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې $y1$ , $y2$ .$y3$.... وي. نو بیاد(۱۳.۴۳) سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$\sin x = y_i, i=1,2,3...$ ( 13 . 46 )

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په ( ۱۳ . ۴۲ ) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په ( ۱۳ . ۴۲ ) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ....) = 0 \quad (13 . 47)$$

نو بیا سرې بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13 . 48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13 . 49)$$

د ( ۱۳ . ۴۲ ) ، (۱۳ . ۴۴ ) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13 . 51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون ( ۱۳ . ۵۰ ) او له دې سره سم برابرون ( ۱۳ . ۴۹ ) تل پوره دي. د دې په څنګ یا خلاف y1 فقط د ( ۱۳ .۵۰ ) حل دی ، که د
رینی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښنه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x>0$وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون ( ۱۳ . ۵۱ ) سره برابرون ( ۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په ( ۱۳ . ۴۹ ) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \ k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که ( ۵۲ . ۱۳ ) په ( ۴۹ . ۱۳ ) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځې جفت ګڼونه دي( $x\pi = 2k\pi$ ) که( ۱۳ . ۵۳ ) په ( ۱۳ . ۴۹ ) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د ( ۱۳ . ۴۹ ) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13.54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښنی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳،۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶ ) کې اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

## تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره يې ازمايل یا ازماېښت اړيندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4(x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg\sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln(x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg(2x+5) - \lg(3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg(x-1)^2 = 6\lg 2$

1.3. a) $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$

b) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg(x+4)$

d) $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\lg 4 = \frac{1}{3}\lg 125 - \lg(x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2\lg x = \lg(4+x^3)$ c) $\lg(152+x^3) - 3\lg(x+2) = 0$

d) $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg(a - \frac{1}{a}) = \lg(1 - \frac{1}{a}) + \lg(1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg(ax) - \lg a + \lg\frac{b}{a} = \lg b + \lg\frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg\frac{x}{abx-1} = \lg(a-1) + \lg(a+1)$

d) $\log_a(2x+1) = \log_a(x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2)\log_5 x = 25^{\log_5\sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5\lg(1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x)$ b) $\log_2(x-14) = 1 + \frac{1}{2}\log_2(3x-26)$

c) $4\log_3{}^3 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$ d) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$

c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

## ۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

2.6. a) $7^{2x+1}-3^{x-1}=7^{2x+3}-3^{x+1}$ b) $2^{x+1}-3^{x}=2^{x+3}-3^{x+2}$

c) $3^{2x-1}-5^{3x-2}=3^{2x+1}-5^{3x+2}$ d) $5^{2x}-3\cdot 5^{x}+2=0$

e) $5^{4\sqrt{x}}-6\cdot 5^{2\sqrt{x}}+5=0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}}-2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-2=0$

g) $3^{x+1}-2=9^{x}$

h) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$

i) $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$ j) $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}=\frac{26}{3}$

k) $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$ l) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3}+2\cdot 5^{x-2}=5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}}+0{,}5+9=28\cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x}-17\cdot 2^{-(x+2)}+1=0$

e) $2^{x^2}+2^{1-x^2}=\frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3}-\sqrt[x]{3}=27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}}-7\cdot\sqrt{3^{x-60}}=162$

i) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

2.8. a) $\frac{3^{x}+3^{-x}}{3^{x+1}-1}=\frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x}+1}{2^{x}-4^{x}}=6$

c) $4+\frac{2}{3^{x}-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x}+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x}=x$

۳ ـ گونومتریکي ـ یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x=\frac{1}{2}$ b) $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x=\frac{2}{5}$ d) $\tan x=-1$

3.2. a) $\sin(2x-\frac{\pi}{2})=0{,}309$ b) $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{10})=0{,}809$ d) $\cos(x+\frac{\pi}{3})=0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

3.3. a) $5 \sin^2 x - 10 \cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3} \sin x \cos x + \frac{2}{3} \sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2 \cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2} \sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3 \cos x = 1$

e) $\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2 \sin \frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2 \sin x \cos 2x - 1 + 2 \cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2 \cot x = 0$

k) $3 \cos 2x - 20 \sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2 \cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$

e) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2 \sin^2 2x = 2 \sin^2 x$

g) $5 \cos 2x + 16 \sin x + 14 \sin^2 x + 7 = 0$

h) $3 \cos 2x - 6 \cos x + 4 \sin^2 x = -3$

i) $2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$ j) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16 x = 1$

e) $2 \cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6 \sin x \cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1$ h) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library



i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$

j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$

l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$

b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$

d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$

b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$

d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$

h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$

j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$

l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شميرنه

## ۱۴ . ۱:نابرابرون( نامساوات)

### ۱۴ . ۱ . ۱ بنسټيزې کليمی او شميرقوانين

يو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د يوې اړيکنخښی $<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې يو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څيړنی لاندې ونيول شي، چی يوه يا دوه رييلی واريابلی يا اوښتونی ولري . يو نابرابرون د دوه واريابلو(اووښتونو) سره د وينامنطق په بنسټ يو د وينا شکل ښايي، د هغو سره چی واريابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګندي . يو اوبی يا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واريابل يا اووښتونې يی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کيدو سره نابرابرون يوه ريښتونی وينا وي . د ټولو اوبيونو يا ځوابونو ټولګه په حلډيري L کی سره راټوليګي.
په لاندې برخه کی به ډير د وينامنطق( ويناسم انديز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ ( او د ډيري عمليو سومبولونه ) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهميت يا غوره والي سره دې سړی بيا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شميرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونيول شي( مقايسه برخه ۳ )، دلته دې a , b , c او dرييل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \quad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \quad (14,2)$$
$$a:b<b:c \quad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \quad (14,3)$$
$$a:c>b:c \quad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \quad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته ( ۱۴ . ۳ ) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په ښت کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو > سره باور لري دا په دې مانا چی $a \leq b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز ( مثبت )دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \quad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0 \ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \quad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \quad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \quad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې تویریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \quad (14,7)$$
$$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0) \quad (14,8)$$

## ۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چی له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خونډې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لرې، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده٠

1. $(a,b) = \{x \,|\, a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \,|\, a \leq x \leq b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئوري اړه لري
3. $[a,b) = \{x \,|\, a \leq x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \,|\, a < x \leq b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \,|\, x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \,|\, x \geq a\}$ ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\}$ ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \,|\, x \leq b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول ریيلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي٠

1. $[-\infty,b] = \{x \,|\, x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \,|\, x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

**Alternative notationپورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنښه**

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنښۀ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[ = \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

$[a,b[ = \{ x \mid a \leq x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا مې هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندې کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : $(-oe,b]=\{x|x\leq b\}$

کیڼ بند ناپای اینتروال : $[a,oe)=\{x|x\geq a\}$

ښی واز ناپای اینتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اینتروال : {x د ګڼکرښی ټکی دی|x}=(oe ،oe- )

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیرۍ Rکې د لاندې برابرون پیژنددیرۍ غوښتنه منځ ته راچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پيژنددېرى ده:

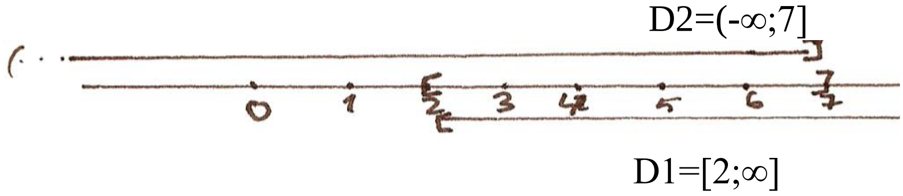
D1 = [ 2 , oe)

په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پيژنددېرى ى ده: D2 =(-oe,7 )

د برابرون دپيژنددېرى لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې ځيره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)



۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د يوې مجهولی سره

د شميرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کيږي چی يوه اوښتونې يا مجهوله ولري، او اوبيونې يی په ټوليزه توګه د اينتروالونو له لارې انځوريږي.

(۱۴ . ۱ ) قاعده د په خوښه ترمونو د زياتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بيلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزياتوو، نو لرو 10 > 4x-
دواړه خواوې په 4 - ويشو.

د ( ۱۴ . ۳ ) له مخې لاس ته راځي x > -5/2
د اوبيونې ډير يا اوبيدېرى : L=(-5/2,oe)
که په يوه غوښتونکی حٔل يا ويش کی حٔله ووني، همداسې پرويشونی يو واريابل يا اووښتونی ترم وي، نو بايد د ( ۱۴ . ۲ ) تر ( ۱۴ . ۴ ) سره سم ددې ترم د مخنخښې په واك والي کی د حالت توپيرونه(ښه يې : توپيره ونه) تر پام لاندې ونيول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ېی سملاسي ( په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرئ یا برخحلډیرئ کیدی شي چی د غوځډیرئ په ځیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرئ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیرئ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په ځیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرئ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرئ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x < 2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په ځیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په ( x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د 0 > 2 - x له امله د ( ۱۴ . ۳ ) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کې راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوبیډیریو ټولنی ځخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 2< x < 3

په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخې، دا په دې مانا چې 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره (2x+4)<2

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library



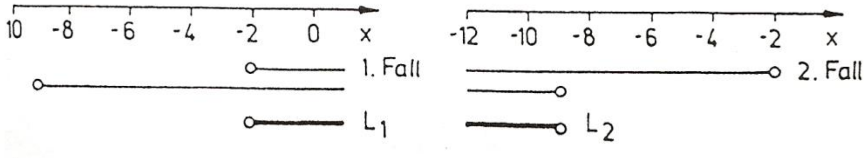
$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځيره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبېدیری روښانه شو.

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی.




a) b)

Bild 14 1

ځيره ۱۴ ا ب : دلته هم ګټونوکرښي شته، چۀ په هغې کې دا اوبېدیری روښانه کاږل شوي دي. ، که ځيره مې ونه کاږله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي.

د مخنښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر ( ۸ . ۱۴ ) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \qquad a \neq 0$$
;

$$x^2 - 5 < 0$$
;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$
;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواې د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښنج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ 1.9:1) اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبیډیرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2) اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشیرح لپاره یا شننې لپاره یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا $x > -\sqrt{5}.$ ورته نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5 \le x+10 \quad x \le 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 \ge 0 \quad x \ge \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \ge 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5 \ge 0;$ نو دئ $|2x-5| = 2x-5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \le x \le 15.$$

(ii) $2x-5 < 0.$ نو دئ $|2x-5| = -(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5 \le x+10, \quad \ge -\frac{5}{3} \quad x \Longleftrightarrow \quad -3x \le 5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5<0 \quad x<\frac{5}{2}. \quad \Longleftrightarrow \quad 2x<5 \quad \Longleftrightarrow$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \le x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیرئ له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړي تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) , $\frac{3}{x+5} < 2$

(ii) , $\sqrt{x^2 + x + 2} > x$

(iii) . $|x+5| > |x-2|$

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$ , $x|=-6$ ; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حٔل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د ( ۱۴ . ۵ ) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو ( ۱۴ . ۶ ) شوونې کوي یا ممکنه وي، چې هغه ورشو( ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال ) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دی:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د ( ۱۴ . ۲ ) او ( ۱۴ . ۳ ) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \ge 6-2x \Leftrightarrow x \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس( تاسیر لري:

$$x+6 \le 6-2x \Leftrightarrow x \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیږیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

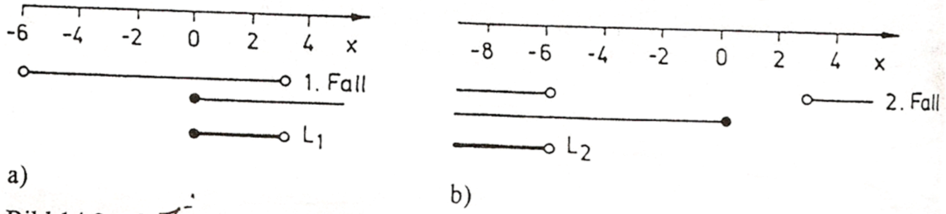



Bild 14.2

د ځلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د ځلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د ( ۱۴ . ۳ ) په پام کي نیولو سره د$x^2$ د مخ ( کيڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې سره د ( ۱۴ . ۵ ) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېری : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري۰ بالاخره پېپای کې د وېش د مخنښې راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\ne\frac{2}{3}$.

حل ( ۱۴،۸ ) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېری یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

## ۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیری L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوځډیری ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني ( دا په دې مانا چی یو یو ) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیری: L دی

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I.-2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II.\frac{4x-10}{x-1}<3$$

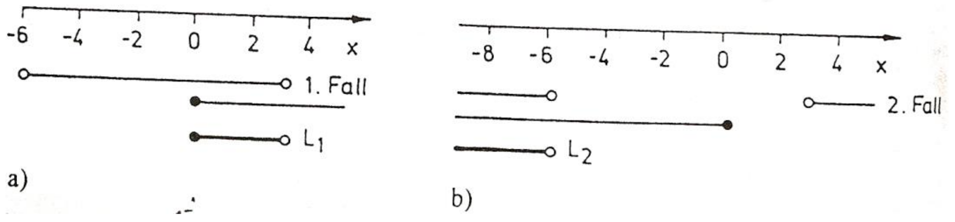
د همغه فاکتور( x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

| | ....................I | ....................II |
|---|---|---|
| $1.Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$ | $-2x+2<4x-10$ $\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x\in(2,\infty).$ $L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$ | $4x-10<3x-3$ $\Leftrightarrow x<7\Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$ $L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$ |
| $2.Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$ | $-2x+2>4x-10$ $\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$ $L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$ | $4x-10>3x-3$ $\Leftrightarrow x>7\Leftrightarrow x\in(7,\infty).$ $L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$ |
| | $L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$ | $L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}=(1,7)$ |

د LI او LII غوڅېدیری جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیډیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي )(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیډیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو( ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرۍ د یوه اوبیډیرۍ $R^2 = R\times R$ برخډیرۍ ده، چې د هوارۍ په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ ( \geq 0 \ , <0, \leq 0 \ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو $x , y$ او ثابتو ځله وونو( ضریبونو)

$$a,b,c \in R$$

سره د شرایطو $a|=0 \vee b|=0$ سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چې د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم ( ۱۴ . ۹ ) ، چې ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرۍ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو( د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پرینوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی ( پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چې د ډیرۍ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د $y$ په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چې په یوه کره نیولي $x$ په روښانه توګه د لویو $y$ - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چې د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرۍ $L$ جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴ )

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون ( ۱۴ . ۹ ) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library



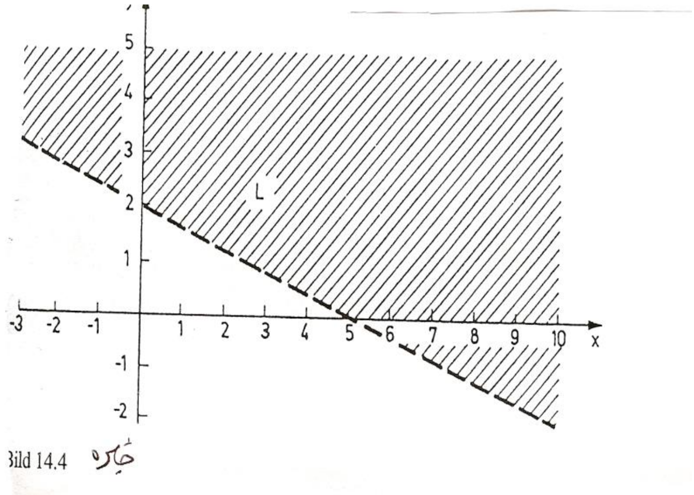
---

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت۰

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0 ) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - < 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي ( ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.

دلته یوه څیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کي د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخره بي د یوګونو اوبیډیریو غوڅډیری نیول کیږي یا جوړیږي.



بیلګه ۱۴ . ۱۰:

I . $2x+y<6$

II. $4x-y>0$

(0,0 ) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د ( 0 , 0 ) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه ( 0 , 1 ) کیښول شي، کوم چی د په څنګوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دې امله اوبيډيرئ LII کی نه دئ پروت. ( ؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف( . ش ۱۴ . ۵ ب دسيستم حلډيرئ L ښايي چې له دوه نيمکرښو بنديږي يا له دوه نيم کرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونكو اوبيډيريو L
د يوګونو نيمهوارو غوځډيرئ حتي تر غاړې پورې رنګينه يا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول يی يو کواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وکړي .ش ۱۴ . ۵

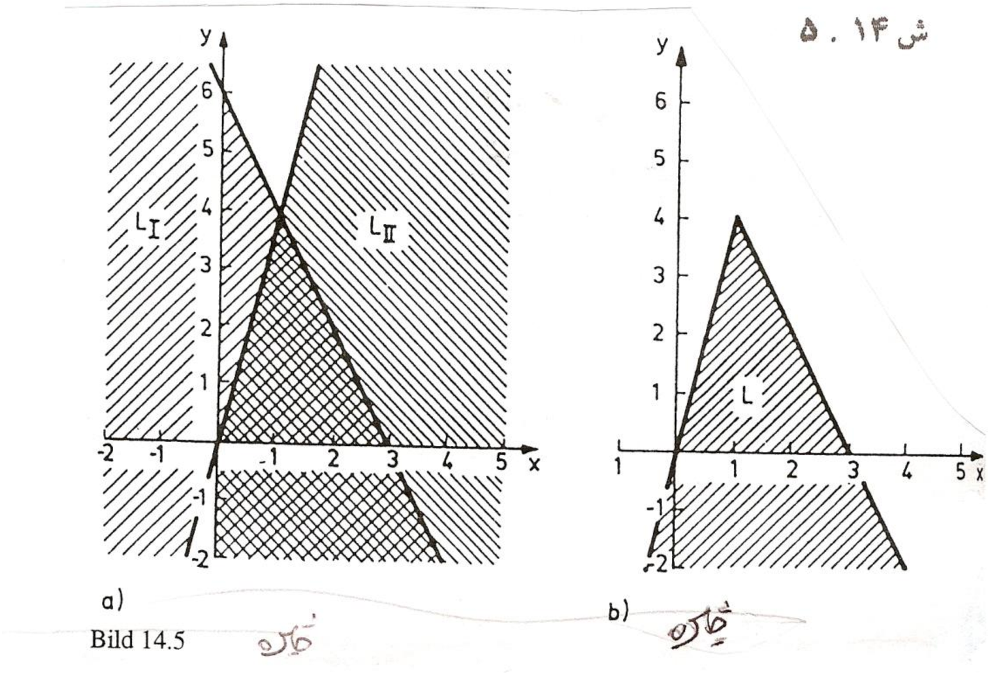



Bild 14.5

بيلګه ۱۴ . ۱۱:

II. $-x+y+1<0$ I . $x-3y-6<0$

III. $x-6<0$

دا اوبيډيرئ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسيستم له مخځ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کيږي، په يوه کواورديناټ سيستم کې او بيا د هوارې هغه برخه، چې دريواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



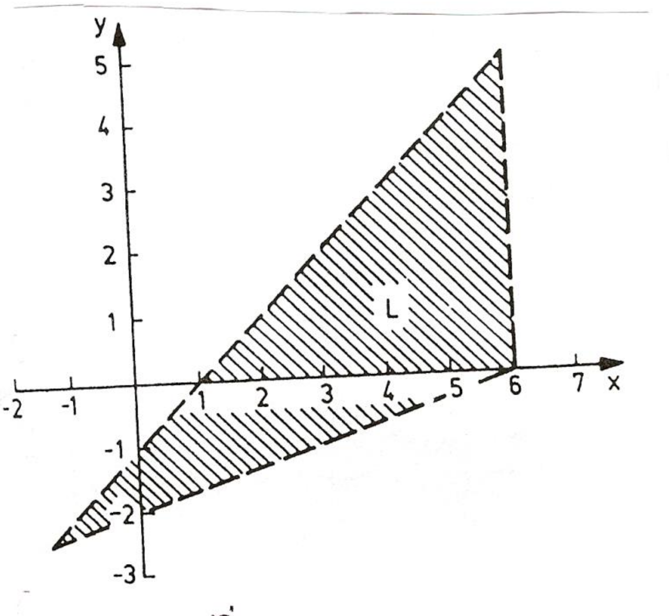



Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ . ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واريابلي يا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي۰
داسی دئ:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \qquad (14,10)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که مطلقه ارزښت د صفر لوي يا په صفر برابر وي، نو کيدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پرېښول شي، يا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي يعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان ليکل کيږي او دا نوکان بيا په ( ۱ -) ځليږي. هغه ټکي چي په ( ۱۴ ، ۱۰ ) کی ورکړ شوي شرايط پوره کوي، نو پرېښول کيږي چی ځانونه په قاعده کي په اينتروال وښايي، کوم چی ديسيونکت( پردي) برخه ډيری د اوښتونوچاپيريالونه دي، د کوم لپاره چی T(x ) ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپيريالونو ټولنډيري، بايد بيرته د ټول هغه واريابلچاپيريال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره بايد و ازمايل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ويش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رييل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کيږي٠

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $b \neq 0$ لپاره

## ۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د يوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپيرولوکی توضيح شوی ، بايد په هر حالت کی وازمايل شي چی ايا دا اوبيونې په نيول شوي يا فرض شوي اينتروال کي پراته دی او که يوائي د اوبې په څير ښکاريدونکي رامنځ ته کيږي . يوګوني اوبيوني اوبيډيري L کی رايوځاي کيږي. د مقايسي يا انډول يا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافيکي اوبيونې شونی يا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور يا اړخ د يو فنکشن تنظيم عمليي راوړل کيږي يا رانيول کيږي او په x , y - پروت ولاړ – يا کواوردينات سيستم
کی انځوريږي .
د دواړو فنکشنونو غوڅټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبيونې دي.

بيلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

باور لري:

د $x > -1$ لپاره $(x+1) \geq 0$

د $x < -1$ لپاره $(x+1) < 0$

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

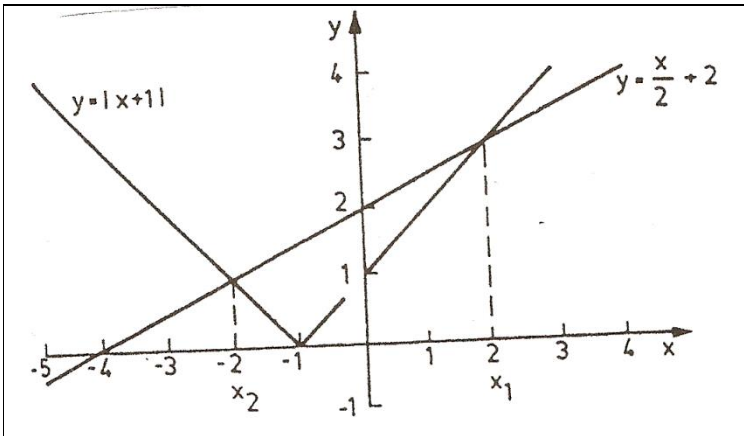
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$




په داسې حال کې چې د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$ , ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د ( ۱۴ . ۱۱ ) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چې لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چې د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسې لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او( لاندې او پورته هم لومړی له کيڼ وښی لو رته لوستل کيږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاې راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

| | x<-3/2 | -3/2<x <1 | x>1 |
|---|---|---|---|
| \|-1+x\| | 1-x | 1-x | −1+x |
| \|2x+3\| | 2x+3 | -2x-3 | \|2x+3\| |

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیرووو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په ځټ یا تضادکی دی، چی x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی( دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په ځير یا - غوندې ښکاريږي) .

اوبډيری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

شي. د کینې اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تیرشوي شمیرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

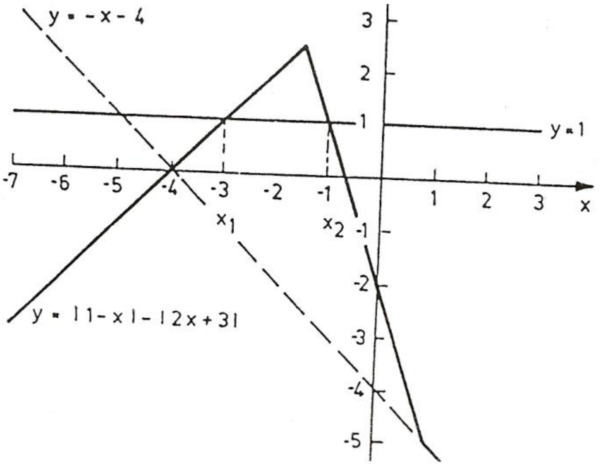
د $-2/3 < x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي خیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کږي ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2 < x < 1$ لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرټکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په خیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی خیره ( شاید داخیره هم خیره نه شي، کۀ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه خیره باید ریشی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰




که د مطلقه ازښت نخښنی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي خیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر خیړني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي )

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5{,}65 \in [5,\infty)\ ,\ x_2=3-\sqrt{7}=0{,}35 \in (-oe, 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

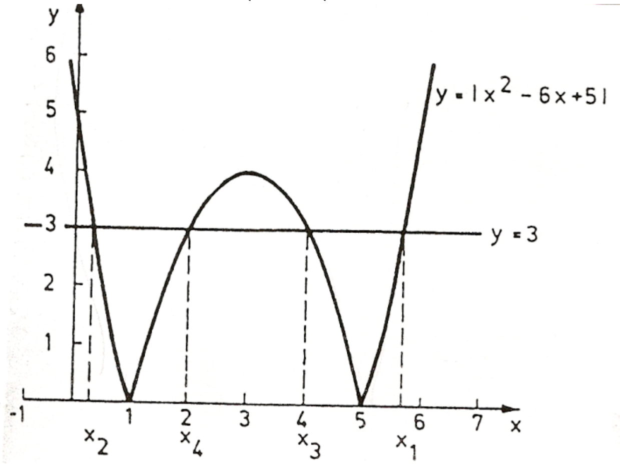
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1,5)\ ,\ x_4=2 \in (1,5)$

پام : که چیرې حل یا اوبې مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبې په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3-\sqrt{7}; 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

خیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$

د ( ۱۴ . ۱۲ ) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. څیره ۱۴ . ۹




څیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$ , $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، $2^n$ حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چی یا

$T_i(x)$ $>0$ او یا $T_i(x)$ $0>$راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته ( پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د ( ۱۴ ، ۱۰ )

قاعدې سره سم $2^n$ برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیوني $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودئ شي. یواځی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

## ۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرون ونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کيږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: $|x-5|<|x+1|$

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د $x > 5$ لپاره $|x-5| = x-5$

د $x < 5$ لپاره $|x-5| = -x+5$

او

د $x \geq 1$ لپاره $|x+1| = x+1$

د $x \leq -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

| | X > -1 | -1≤ x<5 | x≥ 5 |
|---|---|---|---|
| \|x-5\| = | -x+5 | -x+5 | x-5 |
| \|x+1\|= | -x-1 | x+1 | x+1 |

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

$$|x-5|<|x+1| \Leftrightarrow -x+5<-x-1 \Leftrightarrow 0<-6$$

د هر $x<-1$ نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: $L1 = \emptyset$

دوم حلات $x \in [-1, 5)$ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

|x-5|<|x+1|<=> -x+5<-x-1 <=> x>2<=>

$x \in [2, \infty]$

$L_2 = [-1, 5) \cap (2, 5) = (2, 5)$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6

هر x ≥ 5 نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5, \infty) = (2, \infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: |x²-4x-21|<24

د $x^2-4x-21 \geq 0$ <=> $x<-3 \vee x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0$ <=> $-3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \vee x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21|=x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow x^2-4x-21<24 \Leftrightarrow x^2-4x-45<0$

$\Leftrightarrow -5 < x < 9 \Leftrightarrow$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)] \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$

دویم حالت: $x \in (-3, 7)$

$|x^2-4x-21|<24 \Leftrightarrow -x^2+4x+21<24 \Leftrightarrow x^2-4x+3>0$

$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3 \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$

$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1)] \cup (3, \infty) = (-3, 1) \cup (3, 7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د ( ۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د ( ۱۴ . ۲ ) او ( ۱۴ . ۳ ) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د $x < -1/2$ لپاره $|1+2x| = -1-2x$

او

د $x < 1$ لپاره $(1-x) > 0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګڼوړانګه سره بیله یا توته کیږي، داسی چې په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

| | $X<-1/2$ | $-1\leq x<1$ | $x>1$ |
|---|---|---|---|
| $\|1+2x\|$ | $-1-2x>$ | $1+2x$ | $1+2x$ |
| $=1-x$ | $>0$ | $>0$ | $<0$ |

لومړی حالت: $x \in ( -oe, -1/2)$

$$-1-2x \leq 1-x \iff x \geq -2 \iff$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [ -2 , oe ) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [ - 1/2,1)$ :

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [ -1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات ( ۱۴ . ۱۰ ) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

( ۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹ ) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي ( ۱۴ . ۹ ) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د ( ۱۴ . ۱۳ ) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبيډيرئ دوه نابرابرونونو غوڅډيرئ ده او کيدی شي، لکه څنګه يو نابرابرون د يوه ګراف سره انځور شي ( ځيره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف ) اوبيډيرئ بيرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبيډيريو تولنډيرئ ده۰ ( ځيره ۱۴ . ۱۰ ب ) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په يوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې يا – وييني د ( ۱۴ . ۱۳ ) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نيولو سره ځلور حالتونه يو له بل توپير کيدی شي.

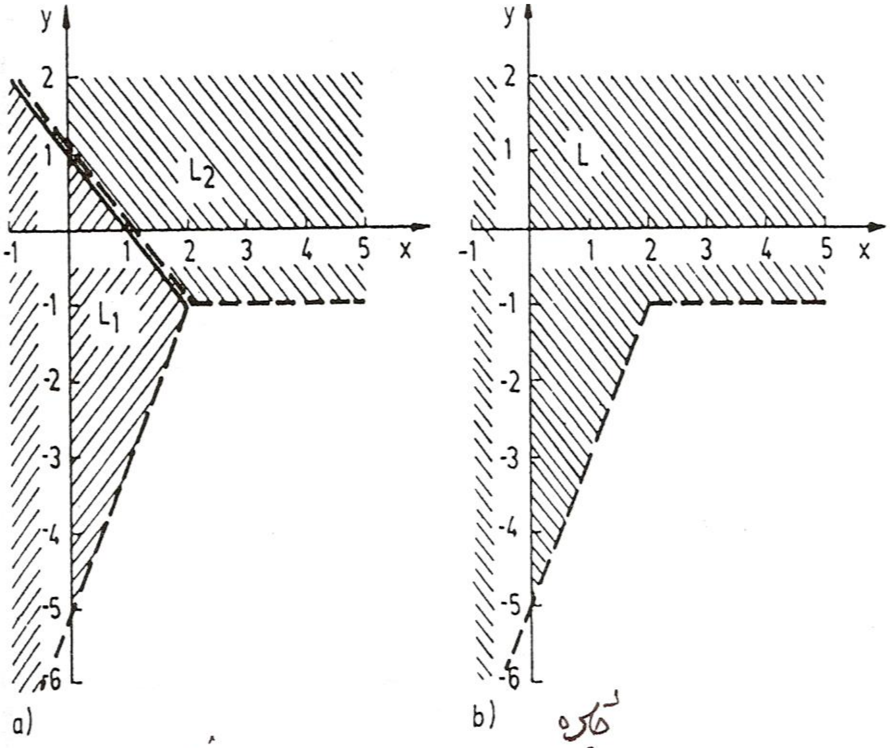



Bild 14.10 ځاره

تمرينونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لاندې نامساواتو حلډېرۍ پیدا کړئ

1. a) $8x - 3 < 2x + 9$ b) $5 - 7x \le 3x - 10$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$ d) $3(3x - 2) \ge 4(3 - 2x)$

e) $\frac{8x-5}{5} \le \frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9} + 6x \ge 2(\frac{5}{6} + 3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$

2. a) $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$

b) $(8x - 9)(3x + 2) \ge (2 + 7x)(2 + 3x)$

c) $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$

d) $(5 + 2x)(7 - 5x) \le (10 + 4x)(2 - 3x)$

e) $x^2 - x - 6 \le 2x + 4$ f) $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$

g) $x^2 + 3x \ge -2x - 6$ h) $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$

3. a) $\frac{3}{2x-4} \le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x} \ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$ d) $\frac{5x+3}{x} < -2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2} > 5$ f) $\frac{9-3x}{x-3} > -3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3} < 3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1} \ge 12 - \frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4} \le \frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x} > \frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1} \le \frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{3x+1}{x-2} > 4$ f) $\frac{x-3}{1-6x} - \frac{2x+1}{4x+3} \ge -\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{3x-3} \ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x} - \frac{2-6x}{1-3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x - 3)(3x - 2) < 0$ b) $(x + 3)(7 - x) \le 0$

c) $x^2 + 4x + 3 \ge 0$ d) $x^2 - 8x + 7 \le 0$

e) $x^2 + 4x + 5 < 0$ f) $x^2 - 6x + 10 > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \le 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \ge 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \le 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x-2) \ge \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرى وټاکئ

9. a) $2 + x \ge 2x - 7$
$5(x-3) \ge 2(x-3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \ge 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \le 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \le 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x+2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x+2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x-1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x-1) < 2(x+1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \le 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$
c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x + 3 < \frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاڼپرۍ په کارتیزي کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکي انځور کړۍ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$
c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$
e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$
g) $2(y-3) \leq 6(x-1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاڼپرۍ د شمیرلو او همداسې ګرافیکي لارې پیداکړۍ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$
c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$
e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$
g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلېږى پیدا کړی

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلېږی په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړئ او ا نځور یې وکاږئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ۱۵  فنکشنونه( بلواك يا تابع)

## ۱۵ . ۱ د فنکشن  کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن  کلیمه کله د یواځنی ځیرونی،  چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا  استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن  په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو،  ځما په  اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د ځیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی  رییل ارزښته فنکشن(  لنډ: فنکشن ) د رییلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری  $D \subseteq R$ یوه   یواځنی ځیرونه ده.  D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیری چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیری یا  تعریف ډیري په دننه  کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د ي  وې قانونمندی f له  مخی هر x ∈ Mیواځني یوه y ∈ W باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله  بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مگر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلگه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلگه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپو هی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي ( شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي ( پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بیلگی ۱۵ . ۱ ته: y=(x/2)+1, D=R , W=R

بیلگی ۱۵ . ۲ ته : د x<0 لپاره y=|x|
دلته D=R,W = [0,∞) د x>0 لپاره y=x²
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښې لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي( شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت( واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x) که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیڅیت ( ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit ) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به 2y-x-1=0 D=R,W=R,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه ( ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه :
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړي بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر ( له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t)\ ,\ y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X .......-2 | -1 | 0 | 1 | 2 .... | |
| Y . .....2 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 ..... | |

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X....-3 | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 ... | |
| Y....3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 ... | |

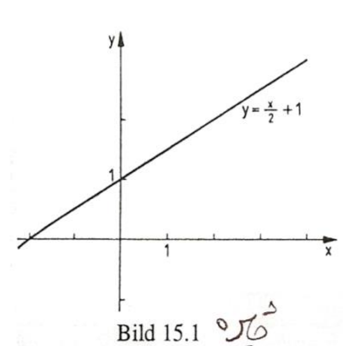


Bild 15.1 ځاره

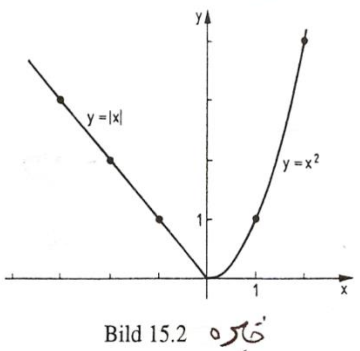


Bild 15.2 ځاره

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټي) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ ) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال ]a,b[ کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جګیدونکی
( مونوتون لویدونکی ) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$$f(x1)\leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$
که د برابرونخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږېږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال ) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال ] a,a-[ کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت ) یا سیومتریك symetrisch,( ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$
د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي ) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ ( ، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي ) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴ )

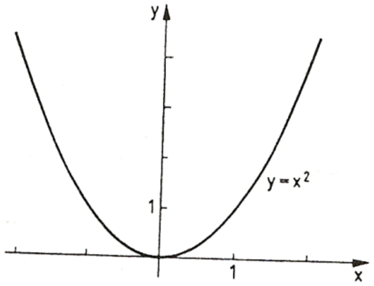
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دئ :
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:
$$(-x)^2 = x^2$$

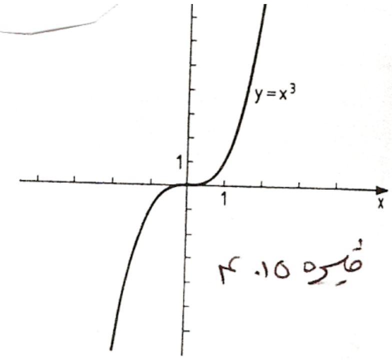
(c) ketabton.com: The Digital Library



---




څیره ۱۵.۳



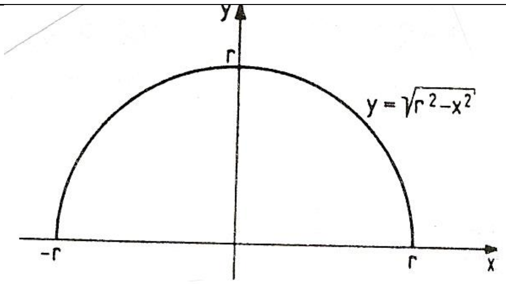

څیره ۱۵.۴

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D ( پیژندډیری ده) بند یا رابند( محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

| | |
|---|---|
| <br> | فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , $D = [-r, r]$<br>بند یا راګیر( محدود)( زه به دا له<br>دې وروسته<br>بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم<br>یوونکردی څیره ده<br>ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$ |

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي( دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل
کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي
فنکشنونه دي ( پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f ( x ) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2 x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دیٓ
(ثیره ۱۵ . ۱ )

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:
$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$
فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري. ) بیا هم ثیر ۱۵ . ۶ )

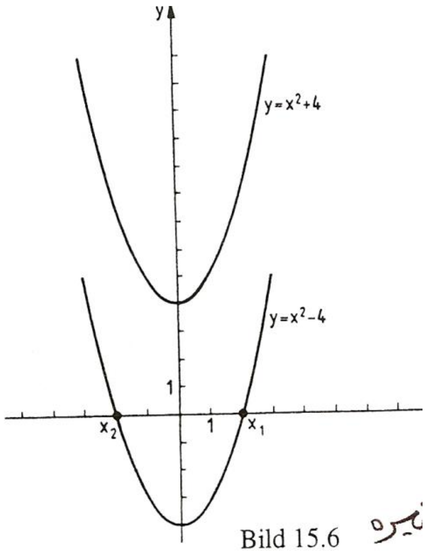



Bild 15.6 ثیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$ , $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ( y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن ( x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی( نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته ) identic دی۰ د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x)( هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

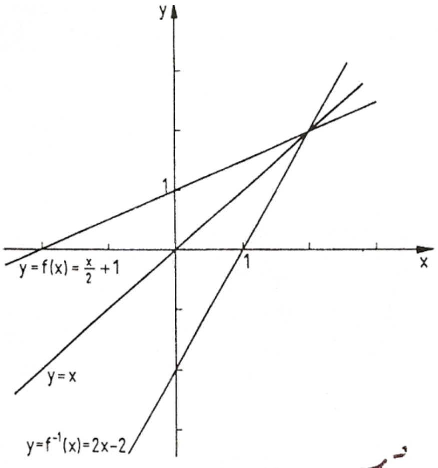



Bild 15.7a ځیره

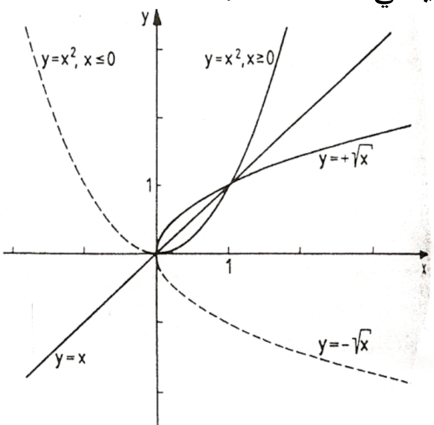



Bild 15.7b ځیره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$ ,
ځیرره ش ۱۵ . ۳ ) په څتکیدونکی دي یا په څتکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی ( او په دې ډول یواځنی او یواځنی ).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$
ته چپه- یا په څټ فنکشن $y=+ x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په څټ فنکشن $y =$
$x$ -دی. ( ځیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f( x )$کلك مونوتون جګیدونکی ) لویدونکی ( وي ،نو په څټ فنکشن
$y = f^{-1}( x)$ موجود دئ او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی ) دئ.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وځیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیړل شي. د فنکشنونو ځیړل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي ( برخه ۲۰ . ۴ )

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه( یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ( n = 1 ) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په ( ۱۵ . ۱ ) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ځیره(ګراف ) یوه کرښه ده چې په y = n کی دy - محور غوځوي ( x = 0 ) او جګوالی $m = \tan\alpha$

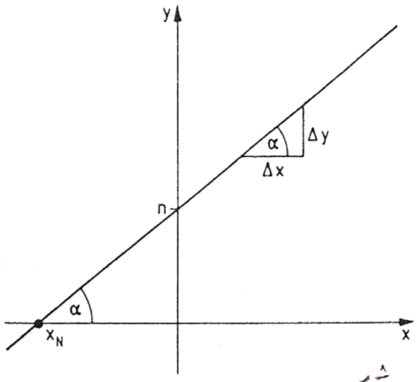



Bild 15.8 ځیره

لري (ځیره پورته . ۱۵ . ۸ ) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره

متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځای ( y = 0 ) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرنټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

یا نوره بنه غږڅټکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n$ , $y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو
$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم( کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په ( ۱۵ . ۱ ) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$y=ax^2+bx+c$ , $a \neq 0$ ( 15 .3)

د مربع فنکشنونو څیره ) ګراف ( پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله وونی یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بنه)فورم( ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیرني لاندې نیسو.

1. $y=x^2 (a=1 ,b=0,c=0 )$ ( 15 . 4 )

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0$ , $y_s = 0$
(ځ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q ) ( 15 . 5 )

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:
$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)
یو و (نسبت) ( ۱۵ . ۴ ) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په
$q - p^2 /4$ راکښل ( راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په ( ۱۵ . ۵ ) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:
$x_s = -p/2$ , $y_s =q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10$, $xs=-6/2=-3$, $ys=10-6^2/2=1$
(ځ،۱۵ . ۹ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



3. $y = ax^2$ ( a|=0,b=0, c = 0 )

د ککرۍ ( سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$ , $y_s = 0$

پارابول د 1 < |a|لپاره خور، د 1>|a| لپاره پرسیدلی،د a > 0 لپاره پورته لور ته او د a < 0لپاره کښته لورته واز دی ( خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

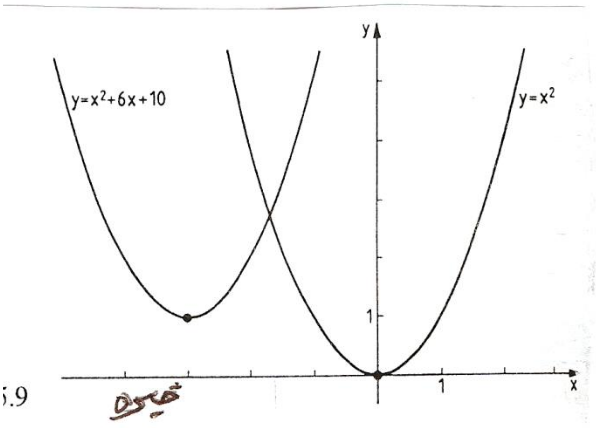
$y = 2x^2$ , $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی ( لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$




.9
ځیره

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$ ,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي a = -1/2 دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی ( ش ۱۵ . ۱۱ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

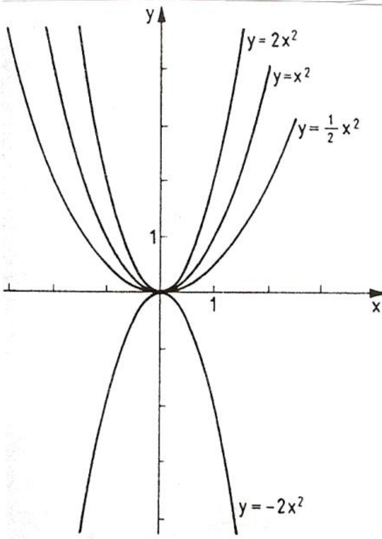



Bild 15.10 ځېره

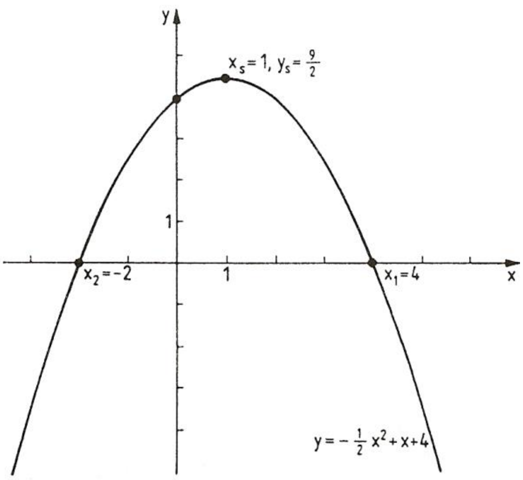



Bild 15.11 ځېره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبيلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځايونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (څیره ۱۵ . ۹ ) ته :
د $x^2+6x+10=0$ ياني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه( ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو
بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne
rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د( ۱۵ . ۶ ) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ورکړ شوي خپلواك $x_1$ پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ځلونه یا ضریبونه | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | |
| منځنۍ ځلونه | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$ | $(a_3x_1+a_2)x_1$ | $a_3x_1$ | |
| منځنۍ زیاتون | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$ | $(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$ | $a_3x_1+a_2$ | $a_3$ |

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنی د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبیونه ) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -2 | -14 | -5 |
| $x_1 = -2$ | | -2 | 8 | 12 |
| | 1 | -4 | -6 | 7 = f(-2) |
| $x_2 = 5$ | | 5 | 15 | 5 |
| | 1 | 3 | 1 | 0=f(5) |

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

که چېرې ددریمې درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو( پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴ )

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د($x^2$) سره ، 3 د ( x ) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کې ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړۍ کې د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او0 = f ( x1 ) چې د $(x-x_1)$ سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتې صفر ځایونه د ځلورۍ – یا مربع برابرنې د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;\ x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمې درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي ( پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملې۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدې شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2,,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -6 | -20 | -8 | 80 |
| $x_1 = 2$ | | 4 | 8 | 4 | -32 | -80 |
| | 2 | 4 | 5 | -1 | -40 | 0 = f(0 |
| $x_2 = 2$ | | 4 | 16 | 36 | 40 | .... |
| | 2 | 8 | 18 | 20 | 0=f(2) | |
| $x_3 = -2$ | | -4 | -8 | -20 | | |
| | 2 | 4 | 10 | 0=f(-2) | | |

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ددې لپاره چې د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه څيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکتريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرني له لارې لاسته راوستی شو( برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټيك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري چې $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ( f(x)تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

( ۱۵ . ۱ ) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د<- x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او $a_n$ زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او $a_n$کميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او $a_n$ کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او $a_n$کميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0};.........(15,7)$$
$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که $n \geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه ( ټوټه ) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:
$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د $2x^2+x-6$پاتی ( باقي) سره. پس لرو:
$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

فنکشن ( $y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ ) د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لایني فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی ( صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې ( تشځای )
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی ( قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای ( ټیك ناپای ځای بللکیږي) xpکی کږه داسیمپټوټي کرښي $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ( $n<m$ ) د x په جګ پوتنځ یعنی $x^m$ د ماتباندې او ماتلاندې د ویش څخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

الف: ( y = x /(x²+1 د 0 = x0 په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول
یا قطب نه لري رییل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oeلپاره دx- محور ( y = 0)
د اسیمپتوتی په څیر لري ( څیره. ۱۵ . ۱۲ )

ب: ( y=(x²+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2 صفرځایونه( x²+2x-3 =0 ) په x1 =-3
او x1=1 کی لري . تشځای نه لري او په 2- = x3 کی قطب لري دا په دې مانا چی x =
2-اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن y = x اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي )

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} ................................(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی( د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱ )

( 15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګڼ
nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګڼ n لپاره ټولی کرې د تعریف ډیری( -) = D
oe,oe، د ارزښت ډیری( W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1 )، ( 0,0 ),(1,1 ) لري. (څیره
۱٤ الف ۱۵ ) د ناجوړه ګڼ د n لپاره( D = (-oe,oe
او( W = ( -oe,oe دي او ( (-1,-1) , (0,0 ). ( 1,1) ګډ ټکي دي ( څیره ۱۵ . ۱۴
ب)۰

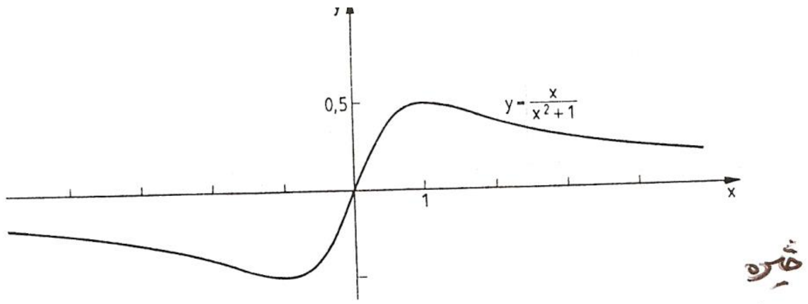



Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library



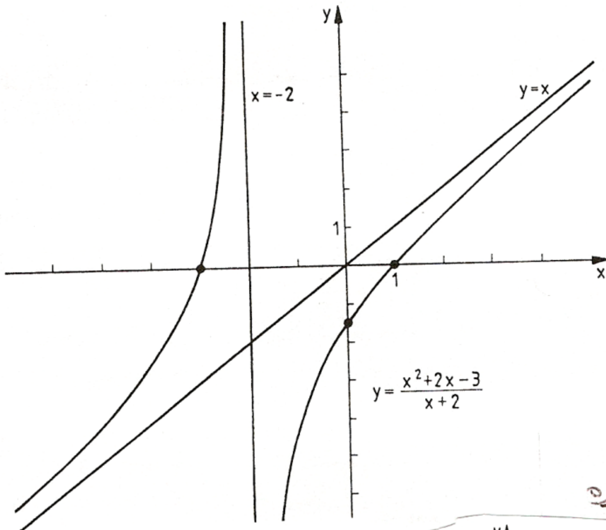



Bild 15.13

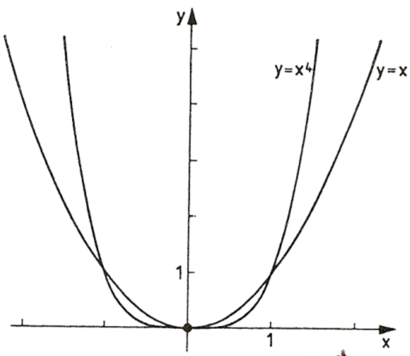



Bild 15.14a

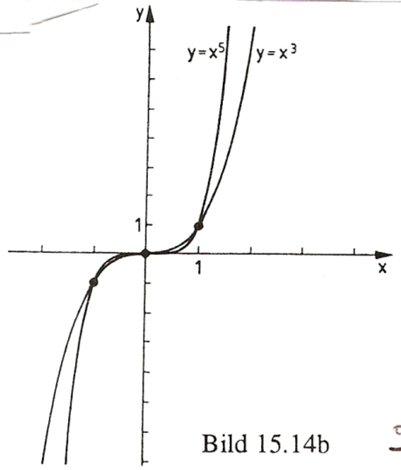



Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپتوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد ( کمیز n لپاره ټولی کرږې د پیژند ډیري

D = ( -oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري( W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)

؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون ( کمیز n)لپاره{ 0}\(D = (-oe,oe او( W=(-oe,oe ) او(1-،-1) ( 1,1 ) ګډ ټکی دی ( څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

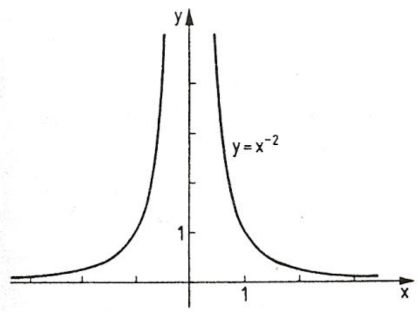


Bild 15.15a

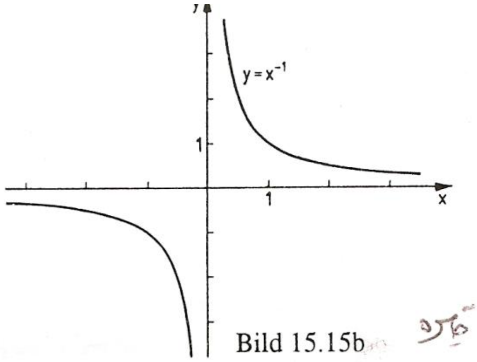


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.( پرتله بیلګه( بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \backslash \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_b)$$

او رینه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و

ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي ) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15\ .\ 8c)$$

نو د رینښي فنکشن ( ۱۵ . ۸ ب ) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن ( ۱۵ . ۸ ث) پرښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی( د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad ,\quad \alpha \in R\ ,\ x > 0 \qquad (15.\ 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}\ , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښځ فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\ , x \geq 0$

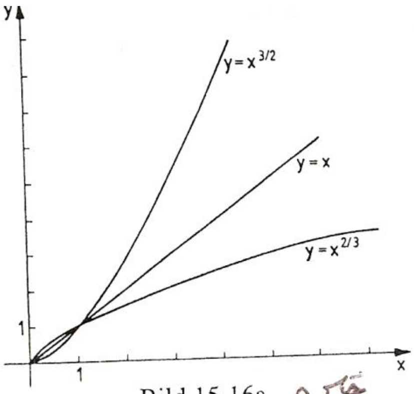



Bild 15.16a ښځیره ب)

(ښځیره ۱۵ . ۱۶ الف )

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$
ښځیره ۱۵ . ۱۶ ب)
$y = x^{-2} = 1/x^2 , x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یواځی د ناکمیز رادیکاندو رېښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښځ فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښځ کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری( $D = [0,oe$ کی پر ښځ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښځ فنکشن د] $D= (-oe,0)$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی( ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن
$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ( لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
( د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

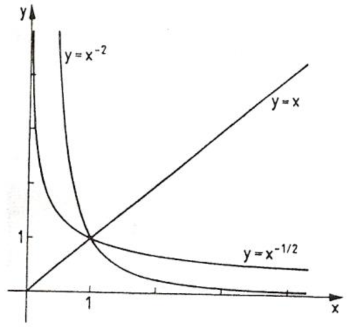



Bild 15.16b

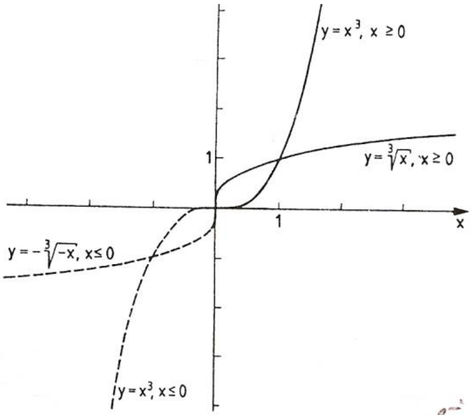



Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن ( ۱۵ . ۹ ) لاندې پېژندډیری( D=(-oe,oe او ارزښتډیری( W=(o,oe
لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی( ()  0,1) د ټولو کږو ګډ ټکی دی

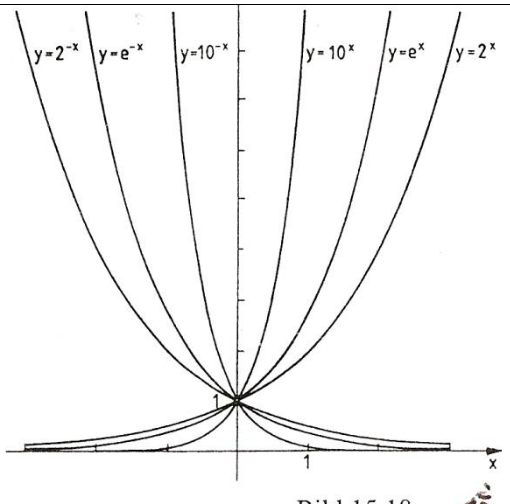



Bild 15.18

د a>0 لپاره ( ۱۵ . ۹ )
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی
دئ اود x->oe سره د x - محور ته
اسیمپوتیك ورنزدې کیږي .د 0<a<1
لپاره ) ۱۵ . ۹ ( په کلکه مونوتون لویږي
او ځان د oe -> x سره د x -محور ته
اسیمپتوتیك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10 )
په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پېژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$y = \log_a x \, , a > 0 \, , a \,|= 1$ (15.10 )

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن ( ۱۵ . ۱۰ ) پیژنددیری $D = (0.oe)$ او د ارزښتدیری( $W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرښې د ګراو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی(1,0 ) د ټولوګراو ګډ ټکی دی ( څیره شته دی)

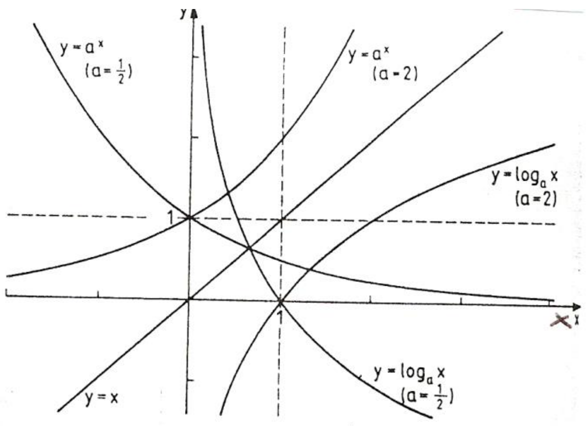



Bild 15.19 څېره

د a>1لپاره( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتونجګیدونکی اود x->0لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د 0<a<1لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتون لویدونکی دی او د x> 0لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د a= 2 او a=1/2 لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x \, , y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې( پرتله برخه ۶ . ۳ ) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

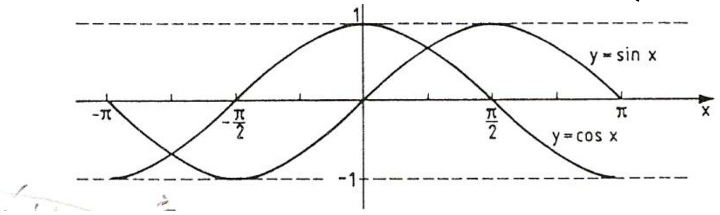
y=sinx ;D=R,W=[1,1]....................................................$(15,11_a)$

$y = \cos x; D = R, W = [-1,1]$..............................................$(15,11_b)$

$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, W = R, k \in Z$....$(15,11_c)$

$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = R \setminus \{k\pi\}, W = R, k \in Z$..........$(15,11_d)$

د دې کړوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.




تریگونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي( مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosxپریودې $2\pi$ لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin(x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k \in Z$

لاندې فنکشنونه پریود $\pi$ لري

y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$\tan(x + k\pi) = \tan x, \cot(x + k\pi) = \cot x , k \in Z$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx, $k \in Z$ , $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cos x , y = cot x

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه ) لري یعني y = tan x

په $k \in Z$ , $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ او y = cot x په $k \in Z$ , $x_k = k\pi$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

(c) ketabton.com: The Digital Library



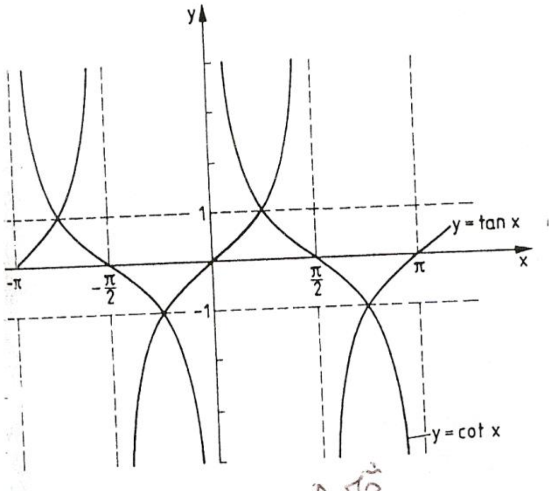



Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ كي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن ( ۱۵ . ۱۱ت) د پیژند ( ۱۵ . ۱۵ ) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترڅیرني لاندې نیسو چې د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل tاو زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك )Argoment( د کرښخیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که ( |a| > 1 )او یا پړسول دي که

$|a| < 1$)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت

y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د 0 > a لپاره په t - محور یوه

اینه څیرونه هم منځ ته راولي ( څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2

په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی( نومیږي او د

شوینګنګ Schwingungرپیدنی پراخوالی یا بنه : سور باندې تاثیر اچوي.

څیره شته

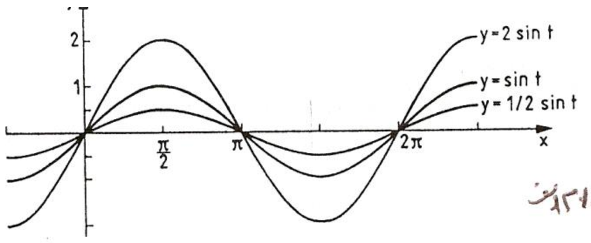



Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور $\omega$ په فنکشن y = sin t باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پړسول که$|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، دy = sin t خپلواك $\omega$ -ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي ( څیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب ).

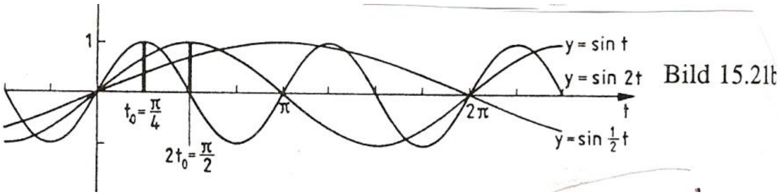
ګردی فرکونځ ( Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي او y = $\omega$ t

پریودې $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---



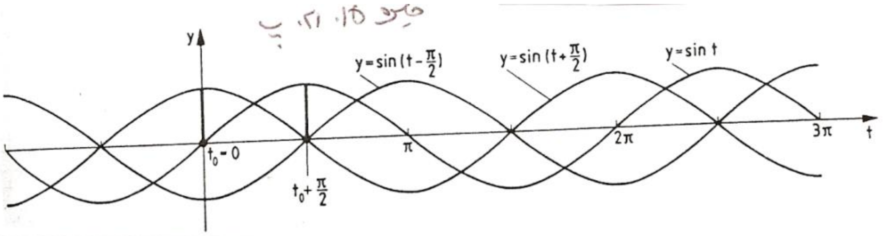

۳ – زیاتیدونکی $\varphi$ پـه فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې ديوې راکښنې تاثير په $|\varphi|$ له کينې لور $\varphi>0$ او يا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره يو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰
د $\varphi$ په کچه راکښل شوی ( يعنی د يوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی ) وي، يعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځيره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

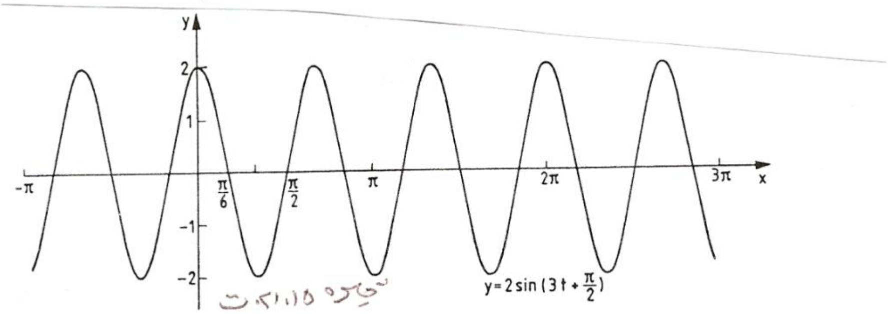
$$(\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t+\varphi)= a . \sin\omega ( t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی $\varphi$ چی فازې نوميږي يو د راکښلو تاثير په کړه $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin ( 3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود a = 2 لري، پریودې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

څېړه ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو( یواځني) په معکوسوالي یا په ښتوالي کی موږ په ځانګړو یوغېزیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :

( پام: څیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

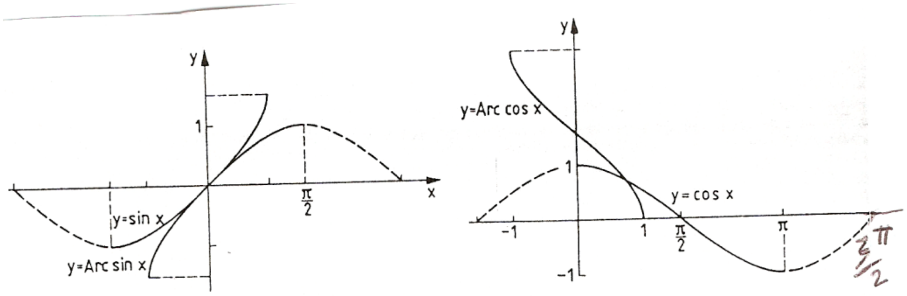



Bild 15.22 Bild 15.23

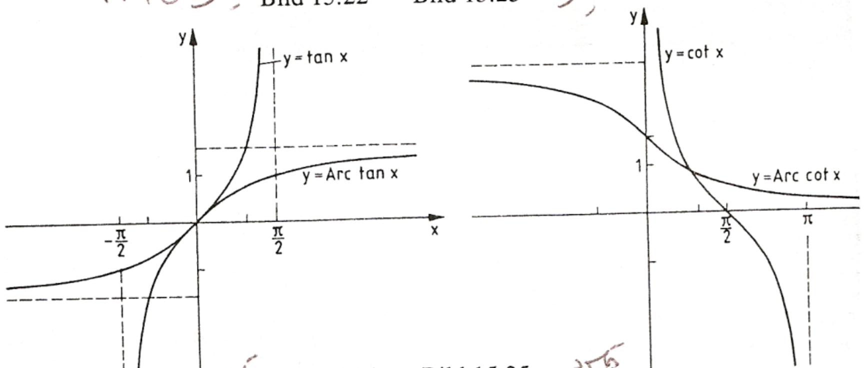



Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

1. $y = \sin x$, $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $W = [-1, 1]$ (15.12a)
2. $y = \cos x$, $D = [0, \pi]$, $W = [-1, 1]$ (15.12b)
3. $y = \tan x$, $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12c)
4. $y = \cot x$, $D = (0, \pi)$, $W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرڅښ یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه ( ارکوس فنکشنونه ) دي:

1. $y = \text{Arc}\sin x$, $D = [-1, 1]$, $W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)
2. $y = \text{Arc}\cos x$, $D = [-1, 1]$, $W = [0, \pi]$ (15.13b)
3. $y = \text{Arc}\tan x$, $D = \mathbf{R}$, $W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)
4. $y = \text{Arc}\cot x$, $D = \mathbf{R}$, $W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو ) ۱۵ .۱۲ الف( تر) ۱۵ . ۱۲ ت ( او د هغوي چپه ) ۱۵ . ۱۳ الف ( تر ) ۱۵ . ۱۳ ت ( په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري ( تړلي ) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :
د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو
$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$
د x تړلی ( ځنځیري) فنکشن بلل کیږي۰

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$
د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$لپاره
او$y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دئ

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :
الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y = z^2$ دباندنی فنکشن دئ

پ : د
$, y = \cos w \;\; w = \sqrt{z} \;\; , \;\; z = 2x + 4,$
سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن $y = \text{Arctan} 1/(x-1)$ کی $z = x-1$ دننني، $w = 1/z$ منځنی او $y = \text{Arctan}\, w$ دباندنی فنکشن دئ .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :

ب) د $x = 0.5$ لپاره دئ

$$z = x^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0{,}25 = 0{,}24740$$

او

$$z = \sin x = \sin 0{,}5 = 0{,}47942; y = \sin^2 x = z^2 = 0{,}47942^2 = 0{,}22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دئ $z = x-1 = 2-1 = 1 \; ; \; w = 1/z = 1/1 = 1$

$$y = \text{Arctan} w = \text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y = f(x)$ تحلیلي( شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي( ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

مثبت وي او( Arc sin f(x همداډول( Arc cosf(x ټيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفدېري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3$ ( $x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب )( $y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زياتونی کی بايد $Numerus > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 <=> x > -2$ ،
پس( $D1=(-2,oe$
په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي ( $=| 0$ ) وي . د مات لاندې صفرځايونه
له $3-2 x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.
نو $D2=R\(2;-1)$ دی

د فنکشن تعريفدېری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفدېري وي يعنی د D1 او D2
غوڅدېری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc \sin (x-1)/5$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفدېري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $( y = 1 / \sqrt{( x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

## ۱۵ . ۵ تمرينونه

۱ – د ايمپليثيت توابعو ايکسپليثيت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x = 2t$ $y = -t^2 +3t$ b) $x = \sqrt{t}$ $y = 2t+1$

c) $x = 1/t$ $y = 2(t-3)$ d) $x ( /2)t -1$ $y = t^2$

پارامتر له منځه يوسئ او په دې سره ورکړئ $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅيړئ، او که ممکن وي نو مونوتونو اينتروالونه په تعريفيږيو بيل (تجزيه ) کړئ، يا لوی نه کړئ.

a) $y = 2x -3$ b) $y = -2x +3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پريکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او يا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځايونه پيدا کړئ

a ) $y = -2x + 3$ b ) $y = (x-1)(x+2)$ c ) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e ) $y = x^2 + 1$ f ) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پيدا کړی

a ) $y = -2x + 3$ b ) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [o, \infty)$

c ) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 / 2$, $D = [o, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لايني فنکشنونه ورکړ شوي دي

a ) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d ) $y = 2$ e ) $3x - 3y - 7 = 0$ f ) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج $\propto$ دې پيدا شي. او صفرځايونه $x_N$ و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تيريږي

a ) (2,3) (5,5) b ) (1,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك يا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c ) $y = x^2 - 6x + 10$

d ) $y = (x-5x)(x-1)$ e ) $2x^2 - 10x + 12$ f ) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i ) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردينات دې پيداشي. صفرځايونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولريشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشيما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دی د خلفورم باندی انځور شي

a ) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b ) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c ) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x$ ; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d ) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2\ 32x + 40$ ; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e ) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6$ ; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وټاکل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y=2^{x-1}$, D = R, W=(0,œ) b) $y=2^x-1$, D = R, W =(-1,œ)

c) $y=\log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y=\ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوټوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څټ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$ b) $y=x^2-1$ c) $y=(x+1)^2+1$

d) $y=x^2-4x+5$ e) $y=4x^2$ f) $y=(1/4)x^2+x/2+1$

۱۴ – تړلي فنکشنونه $y=f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y=f(w)$, $w=h(z)$, $z=g(x)$

بیل ( تجزیه ) کړی( د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو )

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=(e^{x+1})^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\mathrm{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\mathrm{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\mathrm{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بيل کړی (د تعريف – او ارزښتڼيري باندې تيرونه کيدی شي )

a) $y = \left[\text{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\text{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې ښتنيزويا سيرنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفڼيري پيدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \text{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې څنو ځايونو غزېدلې او څنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرېي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه ) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې( ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر( صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

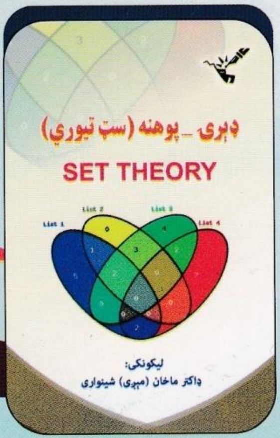
ماخان میرېي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

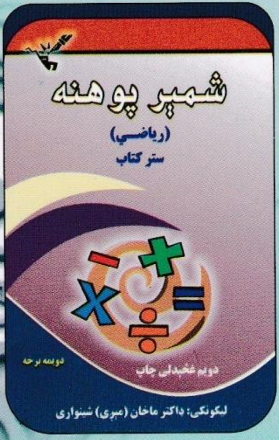
دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېږی) شینواری






د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**